JAMES

STEWART



Cálculo de una variable

7E

Trascendentes tempranas

CENGAGE Learning

CÁLCULO

DE UNA VARIABLE

TRASCENDENTES TEMPRANAS

SÉPTIMA EDICIÓN

CÁLCULO

DE UNA VARIABLE

TRASCENDENTES TEMPRANAS

SÉPTIMA EDICIÓN

JAMES STEWART

McMASTER UNIVERSITY

Y

UNIVERSITY OF TORONTO

Traducción
María del Carmen Rodríguez Pedroza

Revisión técnica
Dr. Ernesto Filio López
Unidad Profesional en Ingeniería y Tecnologías Aplicadas
Instituto Politécnico Nacional

M. en C. Manuel Robles Bernal
Escuela Superior de Física y Matemáticas
Instituto Politécnico Nacional

Dr. Abel Flores Amado
Coordinador de la materia de Cálculo
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey
Campus Puebla

Mtro. Gustavo Zamorano Montiel
Universidad Popular Autónoma del Estado de Puebla

CENGAGE Learning

Australia • Brasil • Corea • España • Estados Unidos • Japón • México • Reino Unido • Singapur

CENGAGE Learning®

Cálculo de una variable
Trascendentes tempranas
Séptima edición
James Stewart

Presidente de Cengage Learning Latinoamérica
Fernando Valenzuela Migoya

Director Editorial, de Producción y de Plataformas Digitales para Latinoamérica
Ricardo H. Rodríguez

Gerente de Procesos para Latinoamérica
Claudia Islas Licona

Gerente de Manufactura para Latinoamérica
Raúl D. Zendejas Espejel

Gerente Editorial de Contenidos en Español
Pilar Hernández Santamarina

Coordinador de Manufactura
Rafael Pérez González

Editores
Sergio Cervantes González
Gloria Luz Olguín Sarmiento

Diseño de portada
Irene Morris

Imagen de portada
Irene Morris

Composición tipográfica
6Ns

© D.R. 2012 por Cengage Learning Editores, S.A. de C.V., una Compañía de Cengage Learning, Inc.
Corporativo Santa Fe
Av. Santa Fe núm. 505, piso 12
Col. Cruz Manca, Santa Fe
C.P. 05349, México, D.F.
Cengage Learning® es una marca registrada usada bajo permiso.

DERECHOS RESERVADOS. Ninguna parte de este trabajo amparado por la Ley Federal del Derecho de Autor podrá ser reproducida, transmitida, almacenada o utilizada en cualquier forma o por cualquier medio, ya sea gráfico, electrónico o mecánico, incluyendo, pero sin limitarse, a lo siguiente: fotocopiado, reproducción, escaneo, digitalización, grabación en audio, distribución en Internet, distribución en redes de información o almacenamiento y recopilación en sistemas de información, a excepción de lo permitido en el Capítulo III, Artículo 27 de la Ley Federal del Derecho de Autor, sin el consentimiento por escrito de la Editorial.

Traducido del libro *Calculus. Single variable. Early trascendentals.* Seventh Edition.
James Stewart
Publicado en inglés por Brooks/Cole, una compañía de Cengage Learning ©2012
ISBN: 978-0-538-49867-8

Datos para catalogación bibliográfica
Stewart James
Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas.
Séptima edición
ISBN: 978-607-481-881-9

Visite nuestro sitio en:
http://latinoamerica.cengage.com

Impreso en México
1 2 3 4 5 6 7 15 14 13 12

A Bill Ralph y Bruce Thompson

Contenido

Prefacio xiii
Al estudiante xxv
Exámenes de diagnóstico xxvii

UN PREVIO DE CÁLCULO 1

1 Funciones y modelos 9



1.1 Cuatro maneras de representar una función 10
1.2 Modelos matemáticos: un catálogo de funciones esenciales 23
1.3 Nuevas funciones a partir de funciones viejas 36
1.4 Calculadoras graficadoras y computadoras 44
1.5 Funciones exponenciales 51
1.6 Funciones inversas y logaritmos 58
Repaso 72

Principios para la resolución de problemas 75

2 Límites y derivadas 81



2.1 Problemas de la tangente y la velocidad 82
2.2 Límite de una función 87
2.3 Cálculo de límites usando las leyes de los límites 99
2.4 La definición precisa de límite 108
2.5 Continuidad 118
2.6 Límites al infinito, asíntotas horizontales 130
2.7 Derivadas y razones de cambio 143
Redacción de proyecto ▪ Primeros métodos para encontrar tangentes 153
2.8 La derivada como una función 154
Repaso 165

Problemas adicionales 170

3 Reglas de derivación 173



3.1 Derivadas de funciones polinomiales y exponenciales 174

Proyecto de aplicación ▪ Construcción de una montaña rusa 184

3.2 Reglas del producto y el cociente 184

3.3 Derivadas de funciones trigonométricas 191

3.4 Regla de la cadena 198

Proyecto de aplicación ▪ ¿Dónde debería un piloto iniciar el aterrizaje? 208

3.5 Derivación implícita 209

Proyecto de laboratorio ▪ Familias de curvas implícitas 217

3.6 Derivadas de funciones logarítmicas 218

3.7 Razones de cambio en las ciencias naturales y sociales 224

3.8 Crecimiento y decaimiento exponenciales 237

3.9 Razones relacionadas 244

3.10 Aproximaciones lineales y diferenciales 250

Proyecto de laboratorio ▪ Polinomios de Taylor 256

3.11 Funciones hiperbólicas 257

Repaso 264

Problemas adicionales 268

4 Aplicaciones de la derivada 273



4.1 Valores máximos y mínimos 274

Proyecto de aplicación ▪ Cálculo de arcoíris 282

4.2 Teorema del valor medio 284

4.3 Cómo afecta la derivada la forma de una gráfica 290

4.4 Formas indeterminadas y regla de l'Hospital 301

Redacción de proyecto ▪ Los orígenes de la regla de l'Hospital 310

4.5 Resumen de trazado de curvas 310

4.6 Graficación con cálculo y calculadoras 318

4.7 Problemas de optimización 325

Proyecto de aplicación ▪ La forma de una lata 337

4.8 El método de Newton 338

4.9 Antiderivadas 344

Repaso 351

Problemas adicionales 355

5 Integrales 359



5.1 Áreas y distancias 360

5.2 La integral definida 371

Proyecto para un descubrimiento ▪ Funciones área 385

5.3 Teorema fundamental del cálculo 386

5.4 Integrales indefinidas y el teorema del cambio neto 397

Redacción de proyecto ▪ Newton, Leibniz y la invención del cálculo 406

5.5 Regla de sustitución 407

Repaso 415

Problemas adicionales 419

6 Aplicaciones de la integración 421



6.1 Áreas entre curvas 422

Proyecto de aplicación ▪ El índice Gini 429

6.2 Volúmenes 430

6.3 Volúmenes mediante cascarones cilíndricos 441

6.4 Trabajo 446

6.5 Valor promedio de una función 451

Proyecto de aplicación ▪ El cálculo y el beisbol 455

Proyecto de aplicación ▪ Dónde sentarse en el cine 456

Repaso 457

Problemas adicinales 459

7 Técnicas de integración 463



7.1 Integración por partes 464

7.2 Integrales trigonométricas 471

7.3 Sustitución trigonométrica 478

7.4 Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales 484

7.5 Estrategias para la integración 494

7.6 Integración utilizando tablas y sistemas algebraicos computarizados 500

Proyecto para un descubrimiento ▪ Patrones en integrales 505

7.7 Integración aproximada 506
7.8 Integrales impropias 519
Repaso 529

Problemas adicionales 533

8 Aplicaciones adicionales de la integración 537



8.1 Longitud de arco 538
Proyecto para un descubrimiento ▪ Concurso de la longitud de arco 545
8.2 Área de una superficie de revolución 545
Proyecto para un descubrimiento ▪ Rotación sobre una pendiente 551
8.3 Aplicaciones a la física y a la ingeniería 552
Proyecto para un descubrimiento ▪ Tazas de café complementarias 562
8.4 Aplicaciones a la economía y a la biología 563
8.5 Probabilidad 568
Repaso 575

Problemas adicionales 577

9 Ecuaciones diferenciales 579



9.1 Modelado con ecuaciones diferenciales 580
9.2 Campos direccionales y método de Euler 585
9.3 Ecuaciones separables 594
Proyecto de aplicación ▪ ¿Qué tan rápido drena un tanque? 603
Proyecto de aplicación ▪ ¿Qué es más rápido, subir o bajar? 604
9.4 Modelos de crecimiento poblacional 605
9.5 Ecuaciones lineales 616
9.6 Sistemas depredador-presa 622
Repaso 629

Problemas adicionales 633

10 Ecuaciones paramétricas y coordenadas polares 635



10.1 Curvas definidas por medio de ecuaciones paramétricas 636

Proyecto de laboratorio ▪ Circunferencias que corren alrededor de circunferencias 644

10.2 Cálculo con curvas paramétricas 645

Proyecto de laboratorio ▪ Curvas de Bézier 653

10.3 Coordenadas polares 654

Proyecto de laboratorio ▪ Familias de curvas polares 664

10.4 Áreas y longitudes en coordenadas polares 665

10.5 Secciones cónicas 670

10.6 Secciones cónicas en coordenadas polares 678

Repaso 685

Problemas adicionales 688

11 Sucesiones y series infinitas 689



11.1 Sucesiones 690

Proyecto de laboratorio ▪ Sucesiones logísticas 703

11.2 Series 703

11.3 La prueba de la integral y estimación de sumas 714

11.4 Pruebas por comparación 722

11.5 Series alternantes 727

11.6 Convergencia absoluta y las pruebas de la razón y la raíz 732

11.7 Estrategia para probar series 739

11.8 Series de potencias 741

11.9 Representación de las funciones como series de potencias 746

11.10 Series de Taylor y de Maclaurin 753

Proyecto de laboratorio ▪ Un límite escurridizo 767

Redacción de proyecto ▪ Cómo descubrió Newton la serie binomial 767

11.11 Aplicaciones de los polinomios de Taylor 768

Proyecto de aplicación ▪ Radiación proveniente de las estrellas 777

Repaso 778

Problemas adicionales 781

Apéndices A1

A Números, desigualdades y valores absolutos A2

B Geometría de coordenadas y rectas A10

C Gráficas de ecuaciones de segundo grado A16

D Trigonometría A24

E Notación sigma A34

F Demostración de teoremas A39

G El logaritmo definido como una integral A48

H Números complejos A55

I Respuestas a ejercicios de número impar A63

Índice A115

Prefacio

> Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero siempre hay una pizca de descubrimiento en la solución de cualquier problema. El problema puede ser modesto, pero si desafía su curiosidad y pone en juego sus facultades inventivas para resolverlo por sus propios medios, usted puede experimentar la emoción y disfrutar el triunfo del descubrimiento.
>
> GEORGE POLYA

El arte de la enseñanza, dijo Mark Van Doren, es el arte de ayudar a descubrir. He intentado escribir un libro que ayude a los estudiantes a descubrir el Cálculo, tanto por su utilidad práctica como por su sorprendente belleza. En esta edición, como en las seis primeras ediciones, mi objetivo es mostrar a los estudiantes un sentido de la utilidad del cálculo y desarrollar en ellos una competencia técnica, pero también intento ilustrar la belleza intrínseca de la materia. Sin duda, Newton experimentó una sensación de triunfo cuando hizo sus grandes descubrimientos; es mi deseo que los estudiantes compartan un poco de esa sensación.

El énfasis está en la comprensión de los conceptos. Creo que casi todo el mundo está de acuerdo en que esta comprensión debe ser el objetivo principal de la enseñanza del Cálculo. De hecho, el impulso para la actual reforma en la enseñanza del Cálculo vino desde la Conferencia de Tulane en 1986, donde se formuló su primera recomendación:

Concentrarse en la comprensión de los conceptos

He intentado implementar este objetivo mediante la *regla de los tres*: "Los temas deben presentarse con enfoques geométricos, numéricos y algebraicos". La visualización, la experimentación numérica y gráfica y otros enfoques han modificado la manera en que se enseña el razonamiento conceptual. La regla de los tres se ha ampliado para convertirse en la *regla de los cuatro* al hacer hincapié en la verbalización y lo descriptivo.

En la redacción de la séptima edición me he propuesto lograr una comprensión conceptual y conservar aún lo mejor del Cálculo tradicional. El libro contiene elementos de la reforma, pero dentro del contexto de un currículo tradicional.

Versiones alternativas

He escrito otros libros de cálculo que podrían ser preferidos por algunos maestros. La mayoría de ellos también vienen en versiones de una variable y de varias variables.

- *Cálculo: Transcendentes tempranas*, séptima edición, versión híbrida, es similar al presente libro en contenido y cobertura salvo que todos los ejercicios de la sección están disponibles sólo en Enhanced WebAssign. El texto impreso incluye un repaso de todo el material al final de capítulo.

- *Cálculo*, séptima edición, es similar al presente libro de texto excepto que las funciones trigonométricas inversas, logarítmicas y exponenciales se tratan en un segundo semestre.

- *Cálculo*, séptima edición, versión híbrida, es similar a *Cálculo*, séptima edición, en contenido y cobertura, salvo que todos los ejercicios al final de la sección están disponibles sólo en Enhanced WebAssign. El texto impreso incluye un repaso de todo el material al final del capítulo.

- *Cálculo esencial* es un libro mucho más breve (800 páginas), aunque contiene casi todos los temas de *Cálculo*, séptima edición. La relativa brevedad se logra a través de una exposición más concreta de algunos temas y poniendo algunas características en el sitio web.

- *Cálculo esencial: transcendentes tempranas* se asemeja *a Cálculo esencial*, sólo que las funciones trigonométricas inversas, exponenciales y logarítmicas se tratan en el capítulo 3.

- *Cálculo: conceptos y contextos*, cuarta edición, destaca la comprensión conceptual aún más fuertemente que este libro. La cobertura de temas no es enciclopédica y el material sobre funciones trascendentes y ecuaciones paramétricas es tejido a lo largo del libro en lugar de ser tratadas en capítulos separados.

- *Cálculo: primeros vectores* introduce los vectores y las funciones vectoriales en un primer semestre y las integra en todo el libro. Es adecuado para los estudiantes que toman cursos de ingeniería y física simultáneamente con el de Cálculo.

- *Cálculo aplicado abreviado* está destinado a estudiantes de negocios, ciencias sociales y ciencias de la vida.

¿Qué hay de nuevo en la séptima edición?

Los cambios han sido resultado de los comentarios de mis colegas y estudiantes de la Universidad de Toronto y de la lectura de diarios, así como de las sugerencias de los usuarios y los revisores. Éstas son algunas de las muchas mejoras que he incorporado en esta edición.

- Parte del material ha sido reescrito para mayor claridad o mejor motivación. Véase, por ejemplo, la introducción al tema de valores máximos y mínimos en la página 274 y la introducción a las series en la página 703.

- Se han agregado nuevos ejemplos, y las soluciones a algunos de los ejemplos existentes han sido ampliadas. Un caso puntual: he añadido detalles para la solución del ejemplo 2.3.11 porque cuando enseño la sección 2.3 de la sexta edición me he dado cuenta de que los estudiantes necesitan más orientación cuando se configuran las desigualdades para el teorema de la compresión.

- El programa de arte ha sido renovado: se han incorporado nuevas figuras y un porcentaje importante de las actuales figuras han sido redibujadas.

- Se han actualizado los datos de ejemplos y ejercicios para ser más pertinentes.

- Se han agregado tres nuevos proyectos: *El índice Gini* (página 429) explora cómo medir la distribución del ingreso entre los habitantes de un país y es una atractiva aplicación del tema de área entre curvas. (Agradezco a Klaus Volpert por sugerir este proyecto.) En *Familias de curvas implícitas* (página 217) se investigan variadas formas cambiantes de curvas definidas implícitamente como parámetros en una familia. Las *familias de curvas polares* (página 664) exhiben las fascinantes formas de curvas polares y cómo evolucionan en el contexto de una familia.

- Más de 25% de los ejercicios de cada capítulo son nuevos. Éstos son algunos de mis favoritos: 1.6.58, 2.6.51, 2.8.13-14, 3.3.56, 3.4.67, 3.5.69-72, 3.7.22, 4.3.86, 5.2.51-53, 6.4.30, 11.2.49-50 y 11.10.71-72.

Mejoras tecnológicas

- Los medios de comunicación y tecnología para apoyar el texto se han mejorado para dar a los profesores mayor control sobre su curso, proporcionar ayuda adicional para hacer frente a los diversos niveles de preparación de los estudiantes del curso de Cálculo y fortalecer el apoyo para la comprensión conceptual. Las características del nuevo Enhanced WebAssign incluyen un Cengage YouBook personalizado, un repaso *Just in Time,* un *Show your Work*, un Evaluador de respuestas, un Plan de estudio personalizado, Master Its, solución en videos, videoclips de conferencias (con preguntas asociadas) y un *Visualizing Calculus* (animaciones TEC con preguntas asociadas) que se han desarrollado para facilitar el mejor aprendizaje de los estudiantes y hacer flexible el trabajo docente en el aula.
- El TEC (*Herramientas para Enriquecer el Cálculo*) ha sido completamente rediseñado y está disponible en Enhanced WebAssign, CourseMate y PowerLecture. Selected Visuals y Modules están disponibles en www.stewartcalculus.com.

Características

EJERCICIOS CONCEPTUALES La manera más importante de fomentar la comprensión conceptual es a través de los problemas que proponemos. Para ello he ideado varios tipos de problemas. Algunos conjuntos de ejercicios comienzan solicitando la explicación del significado de los conceptos básicos de la sección. (Véase, por ejemplo, los primeros ejercicios en 2.2, 2.5 y 11.2.) Del mismo modo, todas las secciones de repaso comienzan con una verificación de conceptos y un Examen rápido Verdadero-Falso. Los ejercicios de verificación de comprensión conceptual a través de gráficos o tablas se ven en los ejercicios 2.7.17, 2.8.35-40, 2.8.43-46, 9.1.11-13, 10.1.24-27 y 11.10.2.

Otro tipo de ejercicio donde se utiliza la descripción verbal para verificar la comprensión conceptual está en los ejercicios 2.5.10, 2.8.58, 4.3.63-64 y 7.8.67. Considero de valor especial los problemas que combinan y comparan los enfoques numéricos, gráficos y algebraicos (ver ejercicios 2.6.39-40, 3.7.27 y 9.4.2).

CONJUNTOS DE EJERCICIOS CALIFICADOS Cada conjunto de ejercicios es cuidadosamente calificado, progresando desde ejercicios conceptuales básicos y problemas para el desarrollo de habilidades hasta problemas más desafiantes de aplicaciones y demostraciones.

DATOS DEL MUNDO REAL Mis ayudantes y yo hemos pasado mucho tiempo buscando en bibliotecas, poniéndonos en contacto con empresas y organismos gubernamentales, y buscando información en internet con el fin de presentar, motivar e ilustrar los conceptos del Cálculo a partir de datos del mundo real. Como resultado, muchos de los ejemplos y ejercicios se tratan con funciones definidas por estos datos numéricos o gráficos. Véase, por ejemplo, la figura 1 en la sección 1.1 (sismogramas del terremoto de Northridge), ejercicio 2.8.36 (porcentaje de la población menor de 18 años), ejercicio 5.1.16 (velocidad del transbordador espacial Endeavour) y la figura 4 en la sección 5.4 (consumo de energía de San Francisco).

PROYECTOS Una manera de interesar y activar a los estudiantes es hacerlos trabajar (quizás en grupos) en proyectos extendidos que den la sensación de triunfo al obtener un logro sustancial una vez finalizados. He incluido cuatro tipos de proyectos: *proyectos de aplicación* que involucran aplicaciones diseñadas para apelar a la imaginación de los estudiantes. El proyecto posterior a la sección 9.3 pregunta si una pelota lanzada verticalmente hacia arriba tarda más tiempo en llegar a su altura máxima o en volver a su altura original. (La respuesta

podría sorprenderle.) En la siguiente sección, 10.2, se muestra cómo utilizar las curvas de Bézier en el diseño de formas que representan letras para una impresora láser. La *redacción de proyectos* pide a los estudiantes comparar métodos actuales con los de los fundadores del Cálculo, por ejemplo, el método de Fermat para encontrar rectas tangentes; para esto se sugieren referencias. Los *proyectos para un descubrimiento* anticipan resultados que se analizan más adelante o fomentan el descubrimiento a través del reconocimiento de patrones (véase la posterior a la sección 7.6). Otros proyectos se encuentran en la *Guía del instructor* (véase, por ejemplo, el grupo ejercicio 5.1: Posición a partir de muestras).

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Los estudiantes suelen tener dificultades con problemas para los que no existe algún procedimiento bien definido para obtener la respuesta. Creo que nadie ha mejorado mucho la estrategia de George Polya con sus cuatro etapas para resolver un problema, por lo que, en consecuencia, he incluido una versión de sus principios para resolver problemas después del capítulo 1. Estos principios, tanto explícita como implícitamente, se aplican en todo el libro. Después de los otros capítulos he colocado secciones llamadas *Problemas adicionales*, que incluyen ejemplos de cómo afrontar problemas difíciles de Cálculo. En la selección de los variados problemas para estas secciones tomé en cuenta el consejo de David Hilbert: "un problema matemático debe ser difícil para convencernos, pero no inaccesible como para frustrar nuestros esfuerzos". Cuando propongo estos desafiantes problemas en tareas y exámenes, los califico de manera diferente. Aquí premio significativamente a un estudiante por sus ideas y aportaciones orientadas hacia una solución y por reconocer cuáles principios de solución de problemas son relevantes.

TECNOLOGÍA

La disponibilidad de la tecnología no hace menos, sino más importante comprender claramente los conceptos que subyacen en las imágenes en la pantalla. Cuando se utilizan correctamente, las calculadoras y dispositivos de graficación son poderosas herramientas para analizar y comprender los conceptos. Este libro de texto puede utilizarse con o sin tecnología y empleo dos símbolos especiales para indicar claramente cuándo se requiere un tipo especial de máquina. El icono indica un ejercicio que definitivamente necesita de esta tecnología, pero no indica que no sea posible usarla en otros ejemplos. El símbolo SAC se utiliza para problemas que requieren todos los recursos de un sistema algebraico computarizado (Derive, Maple, Mathematica o la TI-89/92). A pesar de todo, la tecnología no deja obsoletos al lápiz y el papel. Con frecuencia son preferibles los cálculos y trazos hechos manualmente para ilustrar y reforzar algunos conceptos. Tanto profesores como estudiantes necesitan desarrollar la capacidad de decidir cuándo es apropiado trabajar a mano o con máquina.

HERRAMIENTAS PARA ENRIQUECER EL CÁLCULO

TEC es un acompañante de este libro de texto y está pensado para enriquecer y complementar su contenido (disponible desde internet en **www.stewartcalculus.com** y en Enhanced WebAssign y CourseMate). Desarrollado por Harvey Keynes, Dan Clegg, Hubert Hohn y por mí, TEC utiliza un enfoque exploratorio y de descubrimiento. En las secciones del libro donde la tecnología es particularmente apropiada, los iconos al margen dirigen a estudiantes hacia módulos TEC que proporcionan un entorno de laboratorio en el que puede explorar el tema de diferentes maneras y en distintos niveles. **Visual son animaciones de figuras en el texto; Module son actividades más elaboradas e incluyen ejercicios**. Los profesores pueden optar por participar en varios niveles diferentes, que van desde simplemente alentar a los estudiantes a usar Visual y Module para la exploración independiente, hasta asignar ejercicios específicos de los incluidos en Module, o a la creación de ejercicios adicionales, laboratorios y proyectos que hacen uso de Visual y Module.

TAREAS SUGERIDAS

Aquí se presentan tareas sugeridas en forma de preguntas y tratan de emular un asistente efectivo de enseñanza al funcionar como un discreto tutor. En cada sección del texto se incluyen sugerencias para los ejercicios representativos (normalmente impares), indicando en rojo el número del ejercicio. Los ejercicios están construidos de manera que no revelan más de la solución real de lo que es mínimo necesario para avanzar más y están disponibles a los estudiantes en stewartcalculus.com, CourseMate y Enhanced WebAssign.

ENHANCED WEBASSIGN

La tecnología está teniendo impacto en la forma en que se asignan tereas a estudiantes, particularmente en grupos numerosos. El uso de tareas en línea es creciente y su interés depende de la facilidad de uso, calidad de calificación y confiabilidad. Con la séptima edición hemos estado trabajando con la comunidad de Cálculo y WebAssign para desarrollar un sistema más sólido de tareas en línea. Hasta 70% de los ejercicios de cada sección son asignables como tareas en línea, incluyendo respuestas libres, opción múltiple y otros varios formatos.

El sistema también incluye ejemplos activos, en los que los estudiantes son guiados paso a paso en tutoriales a través de ejemplos textuales, con enlaces al libro de texto y a las soluciones en video. Las nuevas mejoras al sistema incluyen un eBook personalizable, una muestra de las características de su trabajo (*Show Your Work*), un repaso de prerrequisitos de precálculo (*Just in Time*), un editor de tareas mejorado (*Assignment Editor*) y un evaluador de respuestas (*Answer Evaluator*) que acepta respuestas matemáticamente equivalentes y permite la calificación de las tareas del mismo modo en que lo hace el profesor.

www.stewartcalculus.com

Este sitio incluye lo siguiente:

- Tareas sugeridas
- Repaso de álgebra
- Mi calculadora miente y la computadora me dijo
- Historia de las matemáticas, con vínculos a los mejores sitios históricos
- Tópicos adicionales (complementados con conjuntos de ejercicios): series de Fourier, fórmulas para el término del residuo en la serie de Taylor, rotación de ejes
- Problemas archivados (ejercicios de práctica que aparecieron en las ediciones anteriores, junto con sus soluciones)
- Problemas de desafío (algunos de los problemas especiales que aparecieron en secciones de ediciones anteriores)
- Vínculos para tópicos particulares a recursos externos de la web
- Tools for Enriching Calculus (TEC), Module y Visual

Contenido

Exámenes de diagnóstico

El libro comienza con cuatro exámenes de diagnóstico relacionados con álgebra básica, geometría analítica, funciones y trigonometría.

Un previo de Cálculo

Se presenta una visión general del tema e incluye una lista de preguntas para motivar el estudio del cálculo.

1 Funciones y modelos

Desde el principio, se hace hincapié en varias representaciones de las funciones: verbal, numérica, visual y algebraica. Una discusión de los modelos matemáticos conduce a una revisión de las funciones estándar, incluyendo las funciones exponenciales y logarítmicas, desde estos cuatro puntos de vista.

2 Límites y derivadas

El material sobre límites está motivado por un debate previo sobre los problemas de la recta tangente y la velocidad. Los límites son tratados desde puntos de vista descriptivos, gráficos, numéricos y algebraicos. La sección 2.4, sobre la definición precisa ε-δ de un límite, es una sección opcional. Las secciones 2.7 y 2.8 tratan de derivadas (especialmente con funciones definidas gráfica y numéricamente) antes de estudiar las reglas de derivación en el capítulo 3. Aquí los ejemplos y ejercicios exploran los significados de derivadas en diversos contextos. Las derivadas de orden superior se presentan en sección 2.8.

3 Reglas de derivación

Aquí se derivan todas las funciones básicas, incluyendo las exponenciales, logarítmicas y trigonométricas inversas. Cuando las derivadas se calculan en situaciones aplicadas, se pide a los estudiantes explicar su significado. En este capítulo se estudian el crecimiento y decaimiento exponencial.

4 Aplicaciones de la derivada Los hechos básicos relativos a los valores extremos y a las formas de las curvas se deducen del teorema del valor medio. Las gráficas con tecnología hacen hincapié en la interacción entre el Cálculo y las calculadoras y el análisis de las familias de curvas. Se proporcionan algunos problemas importantes, incluyendo una explicación del porqué necesita levantar su cabeza 42° para ver la parte superior de un arcoíris.

5 Integrales Los problemas del área y la distancia sirven para motivar el estudio de la integral definida, recurriendo a la notación sigma cada vez que sea necesario. (En el apéndice E se proporciona un tratamiento completo de la notación sigma.) Se enfatiza la explicación del significado de la integral en diversos contextos y en la estimación de sus valores en gráficas y tablas.

6 Aplicaciones de la integración Aquí presento las aplicaciones de la integración —área, volumen, trabajo, valor promedio— que razonablemente pueden hacerse sin técnicas especializadas de integración. Se hace hincapié en métodos generales. El objetivo es que los estudiantes puedan dividir una cantidad en trozos pequeños, estimarla con sumas de Riemann, y reconocer su límite como una integral.

7 Técnicas de integración Aquí se cubren los métodos estándar pero, por supuesto, el verdadero desafío es reconocer qué técnica se utiliza mejor en una situación dada. En consecuencia, en la sección 7.5 presento una estrategia para la integración. El uso de sistemas algebraicos computarizados se explica en la sección 7.6.

8 Aplicaciones adicionales de la integración Aquí aparecen las aplicaciones de integración: área de una superficie y longitud de un arco, para las que es útil tener disponibles todas las técnicas de integración, así como aplicaciones a la biología, la economía y la física (fuerza hidrostática y centros de masa). También he incluido una sección de probabilidad. Aquí hay más aplicaciones de las que en realidad se pueden cubrir en un curso determinado, así que los profesores deben seleccionar las aplicaciones adecuadas para interesar a los estudiantes y a ellos mismos.

9 Ecuaciones diferenciales El modelado es el tema que unifica este tratamiento preliminar de las ecuaciones diferenciales. Los campos direccionales y el método de Euler se estudian antes de resolver las ecuaciones lineales y separables de forma explícita, por lo que los enfoques cualitativos, numéricos y analíticos reciben igual consideración. Estos métodos se aplican a los modelos exponenciales, logísticos y otros para el estudio del crecimiento de la población. Las primeras cuatro o cinco secciones de este capítulo son una buena introducción a las ecuaciones diferenciales de primer orden. Una sección final opcional utiliza el modelo depredador-presa para ilustrar los sistemas de ecuaciones diferenciales.

10 Ecuaciones paramétricas y coordenadas polares Este capítulo introduce las curvas paramétricas y polares y las aplicaciones del Cálculo en ellas. Las curvas paramétricas están bien adaptadas a los proyectos de laboratorio; los tres presentados involucran a familias de curvas y curvas de Bézier. Un breve tratamiento de las cónicas en coordenadas polares prepara el camino para las leyes de Kepler en el capítulo 13.

11 Sucesiones y series infinitas Las pruebas de convergencia tienen justificaciones intuitivas (véase la página 714) así como demostraciones formales. Las estimaciones numéricas de sumas de series están basadas en cuál prueba se usó para demostrar una convergencia. El énfasis está en la serie y polinomios de Taylor y sus aplicaciones a la física. Las estimaciones de error incluyen los de dispositivos de graficación.

Material auxiliar

Cálculo. Trascendentes tempranas, séptima edición, se apoya en un conjunto completo de materiales auxiliares desarrollados bajo mi dirección. Cada parte se ha diseñado para mejorar la comprensión del estudiante y facilitar la enseñanza creativa. Con esta edición,

se han desarrollado nuevos medios y tecnologías que ayudan al estudiante a visualizar el cálculo y a los instructores a personalizar el contenido para mejorar la forma en que enseñan su curso. Las tablas en las páginas xxiii–xxiv describen cada uno de estos auxiliares.

Agradecimientos

Para la preparación de ésta y las anteriores ediciones he invertido mucho tiempo leyendo las opiniones (aunque a veces contradictorias) de un gran número de astutos revisores. Agradezco enormemente a todos ellos por el tiempo dedicado a la cuidadosa lectura y a la comprensión del enfoque adoptado. He aprendido algo de cada uno de ellos.

REVISORES DE LA SÉPTIMA EDICIÓN

Amy Austin, *Texas A&M University*
Anthony J. Bevelacqua, *University of North Dakota*
Zhen-Qing Chen, *University of Washington—Seattle*
Jenna Carpenter, *Louisiana Tech University*
Le Baron O. Ferguson, *University of California—Riverside*
Shari Harris, *John Wood Community College*
Amer Iqbal, *University of Washington—Seattle*
Akhtar Khan, *Rochester Institute of Technology*
Marianne Korten, *Kansas State University*
Joyce Longman, *Villanova University*
Richard Millspaugh, *University of North Dakota*
Lon H. Mitchell, *Virginia Commonwealth University*
Ho Kuen Ng, *San Jose State University*
Norma Ortiz-Robinson, *Virginia Commonwealth University*
Qin Sheng, *Baylor University*
Magdalena Toda, *Texas Tech University*
Ruth Trygstad, *Salt Lake Community College*
Klaus Volpert, *Villanova University*
Peiyong Wang, *Wayne State University*

REVISORES DE LA TECNOLOGÍA

Maria Andersen, *Muskegon Community College*
Eric Aurand, *Eastfield College*
Joy Becker, *University of Wisconsin–Stout*
Przemyslaw Bogacki, *Old Dominion University*
Amy Elizabeth Bowman, *University of Alabama in Huntsville*
Monica Brown, *University of Missouri–St. Louis*
Roxanne Byrne, *University of Colorado at Denver and Health Sciences Center*
Teri Christiansen, *University of Missouri–Columbia*
Bobby Dale Daniel, *Lamar University*
Jennifer Daniel, *Lamar University*
Andras Domokos, *California State University, Sacramento*
Timothy Flaherty, *Carnegie Mellon University*
Lee Gibson, *University of Louisville*
Jane Golden, *Hillsborough Community College*
Semion Gutman, *University of Oklahoma*
Diane Hoffoss, *University of San Diego*
Lorraine Hughes, *Mississippi State University*
Jay Jahangiri, *Kent State University*
John Jernigan, *Community College of Philadelphia*
Brian Karasek, *South Mountain Community College*
Jason Kozinski, *University of Florida*
Carole Krueger, *The University of Texas at Arlington*
Ken Kubota, *University of Kentucky*
John Mitchell, *Clark College*
Donald Paul, *Tulsa Community College*
Chad Pierson, *University of Minnesota, Duluth*
Lanita Presson, *University of Alabama in Huntsville*
Karin Reinhold, *State University of New York at Albany*
Thomas Riedel, *University of Louisville*
Christopher Schroeder, *Morehead State University*
Angela Sharp, *University of Minnesota, Duluth*
Patricia Shaw, *Mississippi State University*
Carl Spitznagel, *John Carroll University*
Mohammad Tabanjeh, *Virginia State University*
Capt. Koichi Takagi, *United States Naval Academy*
Lorna TenEyck, *Chemeketa Community College*
Roger Werbylo, *Pima Community College*
David Williams, *Clayton State University*
Zhuan Ye, *Northern Illinois University*

REVISORES DE EDICIONES ANTERIORES

B. D. Aggarwala, *University of Calgary*
John Alberghini, *Manchester Community College*
Michael Albert, *Carnegie-Mellon University*
Daniel Anderson, *University of Iowa*
Donna J. Bailey, *Northeast Missouri State University*
Wayne Barber, *Chemeketa Community College*
Marilyn Belkin, *Villanova University*
Neil Berger, *University of Illinois, Chicago*
David Berman, *University of New Orleans*
Richard Biggs, *University of Western Ontario*
Robert Blumenthal, *Oglethorpe University*
Martina Bode, *Northwestern University*
Barbara Bohannon, *Hofstra University*
Philip L. Bowers, *Florida State University*
Amy Elizabeth Bowman, *University of Alabama in Huntsville*
Jay Bourland, *Colorado State University*
Stephen W. Brady, *Wichita State University*
Michael Breen, *Tennessee Technological University*
Robert N. Bryan, *University of Western Ontario*
David Buchthal, *University of Akron*
Jorge Cassio, *Miami-Dade Community College*
Jack Ceder, *University of California, Santa Barbara*
Scott Chapman, *Trinity University*
James Choike, *Oklahoma State University*
Barbara Cortzen, *DePaul University*
Carl Cowen, *Purdue University*
Philip S. Crooke, *Vanderbilt University*
Charles N. Curtis, *Missouri Southern State College*
Daniel Cyphert, *Armstrong State College*
Robert Dahlin
M. Hilary Davies, *University of Alaska Anchorage*
Gregory J. Davis, *University of Wisconsin–Green Bay*
Elias Deeba, *University of Houston–Downtown*
Daniel DiMaria, *Suffolk Community College*
Seymour Ditor, *University of Western Ontario*
Greg Dresden, *Washington and Lee University*
Daniel Drucker, *Wayne State University*
Kenn Dunn, *Dalhousie University*
Dennis Dunninger, *Michigan State University*
Bruce Edwards, *University of Florida*
David Ellis, *San Francisco State University*
John Ellison, *Grove City College*
Martin Erickson, *Truman State University*
Garret Etgen, *University of Houston*
Theodore G. Faticoni, *Fordham University*
Laurene V. Fausett, *Georgia Southern University*
Norman Feldman, *Sonoma State University*
Newman Fisher, *San Francisco State University*
José D. Flores, *The University of South Dakota*
William Francis, *Michigan Technological University*
James T. Franklin, *Valencia Community College, East*
Stanley Friedlander, *Bronx Community College*
Patrick Gallagher, *Columbia University–New York*
Paul Garrett, *University of Minnesota–Minneapolis*
Frederick Gass, *Miami University of Ohio*
Bruce Gilligan, *University of Regina*
Matthias K. Gobbert, *University of Maryland, Baltimore County*
Gerald Goff, *Oklahoma State University*
Stuart Goldenberg, *California Polytechnic State University*
John A. Graham, *Buckingham Browne & Nichols School*
Richard Grassl, *University of New Mexico*
Michael Gregory, *University of North Dakota*
Charles Groetsch, *University of Cincinnati*
Paul Triantafilos Hadavas, *Armstrong Atlantic State University*
Salim M. Haïdar, *Grand Valley State University*
D. W. Hall, *Michigan State University*
Robert L. Hall, *University of Wisconsin–Milwaukee*
Howard B. Hamilton, *California State University, Sacramento*
Darel Hardy, *Colorado State University*
Gary W. Harrison, *College of Charleston*
Melvin Hausner, *New York University/Courant Institute*
Curtis Herink, *Mercer University*
Russell Herman, *University of North Carolina at Wilmington*
Allen Hesse, *Rochester Community College*
Randall R. Holmes, *Auburn University*
James F. Hurley, *University of Connecticut*
Matthew A. Isom, *Arizona State University*
Gerald Janusz, *University of Illinois at Urbana-Champaign*
John H. Jenkins, *Embry-Riddle Aeronautical University, Prescott Campus*
Clement Jeske, *University of Wisconsin, Platteville*
Carl Jockusch, *University of Illinois at Urbana-Champaign*
Jan E. H. Johansson, *University of Vermont*
Jerry Johnson, *Oklahoma State University*
Zsuzsanna M. Kadas, *St. Michael's College*
Nets Katz, *Indiana University Bloomington*
Matt Kaufman
Matthias Kawski, *Arizona State University*
Frederick W. Keene, *Pasadena City College*
Robert L. Kelley, *University of Miami*
Virgil Kowalik, *Texas A&I University*
Kevin Kreider, *University of Akron*
Leonard Krop, *DePaul University*
Mark Krusemeyer, *Carleton College*
John C. Lawlor, *University of Vermont*
Christopher C. Leary, *State University of New York at Geneseo*
David Leeming, *University of Victoria*
Sam Lesseig, *Northeast Missouri State University*
Phil Locke, *University of Maine*
Joan McCarter, *Arizona State University*
Phil McCartney, *Northern Kentucky University*
James McKinney, *California State Polytechnic University, Pomona*
Igor Malyshev, *San Jose State University*
Larry Mansfield, *Queens College*
Mary Martin, *Colgate University*
Nathaniel F. G. Martin, *University of Virginia*
Gerald Y. Matsumoto, *American River College*
Tom Metzger, *University of Pittsburgh*
Michael Montaño, *Riverside Community College*
Teri Jo Murphy, *University of Oklahoma*

Martin Nakashima, *California State Polytechnic University, Pomona*
Richard Nowakowski, *Dalhousie University*
Hussain S. Nur, *California State University, Fresno*
Wayne N. Palmer, *Utica College*
Vincent Panico, *University of the Pacific*
F. J. Papp, *University of Michigan–Dearborn*
Mike Penna, *Indiana University–Purdue University Indianapolis*
Mark Pinsky, *Northwestern University*
Lothar Redlin, *The Pennsylvania State University*
Joel W. Robbin, *University of Wisconsin–Madison*
Lila Roberts, *Georgia College and State University*
E. Arthur Robinson, Jr., *The George Washington University*
Richard Rockwell, *Pacific Union College*
Rob Root, *Lafayette College*
Richard Ruedemann, *Arizona State University*
David Ryeburn, *Simon Fraser University*
Richard St. Andre, *Central Michigan University*
Ricardo Salinas, *San Antonio College*
Robert Schmidt, *South Dakota State University*
Eric Schreiner, *Western Michigan University*
Mihr J. Shah, *Kent State University–Trumbull*
Theodore Shifrin, *University of Georgia*
Wayne Skrapek, *University of Saskatchewan*
Larry Small, *Los Angeles Pierce College*
Teresa Morgan Smith, *Blinn College*
William Smith, *University of North Carolina*
Donald W. Solomon, *University of Wisconsin–Milwaukee*
Edward Spitznagel, *Washington University*
Joseph Stampfli, *Indiana University*
Kristin Stoley, *Blinn College*
M. B. Tavakoli, *Chaffey College*
Paul Xavier Uhlig, *St. Mary's University, San Antonio*
Stan Ver Nooy, *University of Oregon*
Andrei Verona, *California State University–Los Angeles*
Russell C. Walker, *Carnegie Mellon University*
William L. Walton, *McCallie School*
Jack Weiner, *University of Guelph*
Alan Weinstein, *University of California, Berkeley*
Theodore W. Wilcox, *Rochester Institute of Technology*
Steven Willard, *University of Alberta*
Robert Wilson, *University of Wisconsin–Madison*
Jerome Wolbert, *University of Michigan–Ann Arbor*
Dennis H. Wortman, *University of Massachusetts, Boston*
Mary Wright, *Southern Illinois University–Carbondale*
Paul M. Wright, *Austin Community College*
Xian Wu, *University of South Carolina*

Además, me gustaría dar las gracias a Jordan Bell, George Bergman, Leon Gerber, Mary Pugh y Simon Smith por sus sugerencias; Al Shenk y Dennis Zill por su permiso para utilizar ejercicios de sus textos de cálculo; COMAP por su permiso para utilizar el material de los proyectos; George Bergman, David Bleecker. Dan Clegg, Victor Kaftal, Anthony Lam, Jamie Lawson, Ira Rosenholtz, Paul Sally, Lowell Smylie y Larry Wallen por sus ideas para los ejercicios; Dan Drucker por el proyecto del derby de rodillos; Thomas Banchoff, Tom Farmer, Fred Gass, John Ramsay, Larry Riddle, Philip Straffin y Klaus Volpert por sus ideas para los proyectos; Dan Anderson, Dan Clegg, Jeff Cole, Dan Drucker y Barbara Frank por resolver los nuevos ejercicios y sugerir formas para mejorarlos; Marv Riedesel y Mary Johnson por su precisión en la corrección; y Jeff Cole y Dan Clegg por su cuidadosa preparación y corrección del manuscrito de respuesta.

Asimismo, doy las gracias a quienes han contribuido a pasadas ediciones: Ed Barbeau, Fred Brauer, Andy Bulman-Fleming, Bob Burton, David Cusick, Tom DiCiccio, Garret Etgen, Chris Fisher, Stuart Goldenberg, Arnold Good, Gene Hecht, Harvey Keynes, E.L. Koh, Zdislav Kovarik, Kevin Kreider, Emile LeBlanc, David Leep, Gerald Leibowitz, Larry Peterson, Lothar Redlin, Carl Riehm, John Ringland, Peter Rosenthal, Doug Shaw, Dan Silver, Norton Starr, Saleem Watson, Alan Weinstein y Gail Wolkowicz.

También agradezco a Kathi Townes, Stephanie Kuhns y Rebekah Million of TECHarts por sus servicios de producción y al siguiente personal de Brooks/Cole: Cheryll Linthicum, gerente de proyecto de contenido; Liza Neustaetter, editor asistente; Maureen Ross, editor de medios; Sam Subity, gerente de medios de edición; Jennifer Jones, director de marketing; y Vernon Boes, director de arte. Todos han hecho un trabajo excepcional.

He sido muy afortunado de haber trabajado con algunos de los mejores en el negocio de la edición en Matemáticas durante las últimas tres décadas: Ron Munro, Harry Campbell, Craig Barth, Jeremy Hayhurst, Gary Ostedt, Bob Pirtle, Richard Stratton y ahora Liz Covello. Todos ellos han contribuido en gran medida al éxito de este libro.

JAMES STEWART

Asimismo, deseamos agradecer la valiosa colaboración de los profesores Dr. Ernesto Filio López de UPITA (IPN), M. en C. Manuel Robles Bernal, L.F.M. Luis Ángel Filio Rivera, de ESIME Zacatenco (IPN), M. en C. Lilia Quintos Vázquez, de ESIME Ticomán (IPN), Dr. Abel Flores Amado, del ITESM Campus Puebla y al Mtro. Gustavo Zamorano Montiel, de la UPAEP (Puebla), en la revisión de esta séptima edición en español.

Además agradecemos al Dr. Hugo Gustavo González Hernández, Director del Departamento de Ciencias y al Dr. Abel Flores Amado, Coordinador de la materia de Cálculo así como a los siguientes profesores del ITESM Campus Puebla por la confianza depositada en la obra *Cálculo Trascendentes tempranas* de Stewart y adoptarlo para sus cursos.

Dr. Juan José Gómez Diaz
Master Aida Ignacia Salazar C.
Master Álvaro Andrade Andrade
Master Jorge Luis Figueroa Ramírez
Dr. Juan Manuel Merlo
Dr. Julio César Ramírez San Juan
Master Luis Daniel Bravo

Atentamente,

Los Editores.

Auxiliares para instructores

Power Lecture

ISBN 0-8400-5421-1

Este DVD contiene todo el arte del texto en formatos de PowerPoint y jpeg, ecuaciones clave y tablas del texto completo predefinidas de conferencias en PowerPoint, una versión electrónica de la guía del instructor, un generador de soluciones, un software de pruebas ExamView, herramientas para enriquecer el cálculo (TEC), un video de instrucciones y un comando JoinIn sobre el contenido de TurningPoint.

Instructor's Guide

Por Douglas Show

ISBN 0-8400-5418-1

Cada sección del texto se analiza desde varios puntos de vista. La guía del instructor (Instructor's Guide) contiene tiempo sugerido de asignación, puntos a destacar, temas de debate del texto, materiales básicos para la clase, sugerencias para trabajo en taller y ejercicios de trabajo de grupo en una forma adecuada para su entrega y sugiere las asignaciones de tareas. Una versión electrónica de la guía del instructor está disponible en el DVD de PowerLecture.

Complete Solutions Manual

Single Variable Early Transcendentals

Por Daniel Anderson, Jeffery A. Cole y Daniel Drucker

ISBN 0-8400-4936-6

Contiene las soluciones detalladas de todos los ejercicios del texto.

Solution Builder

www.cengage.com/solutionbuilder

Esta base de datos en línea para el instructor ofrece soluciones muy elaboradas para todos los ejercicios en el texto. El generador de soluciones (Solution Builder) permite crear impresiones personalizadas de soluciones seguras (en formato PDF) que coinciden exactamente con los problemas asignados en clase.

Printed Test Bank

Por William Steven Harmon

ISBN 0-8400-5419-X

Contiene textos específicos de opción múltiple y exámenes de respuesta libre.

ExamView Testing

Crear, entregar y personalizar los exámenes en formatos impresos en línea con ExamView, permite una evaluación de fácil uso a través de un software tutorial. ExamView contiene cientos de elementos para exámenes de respuesta múltiple y libre. ExamView está disponible en el DVD de PowerLecture.

Auxiliares para instructores y estudiantes

Stewart Website

www.stewartcalculus.com

Contenido: *Tareas sugeridas* ■ *Repaso de álgebra* ■ *Temas adicionales* ■ *Ejercicios de simulación* ■ *Problemas de desafío* ■ *Enlaces web* ■ *Historia de las matemáticas* ■ *Herramientas para enriquecer el cálculo (TEC)*

TEC Tools for Enriching™ Calculus

Por James Stewart, Harvey Keynes, Dan Clegg y el desarrollador Hu Hohn

Herramientas para enriquecer el cálculo (TEC) funciona como una poderosa herramienta para instructores, así como un entorno tutorial en el que los estudiantes pueden explorar y revisar temas seleccionados. Los módulos de simulación en Flash en TEC incluyen instrucciones escritas y en audio de los conceptos y ejercicios. TEC está accesible en CourseMate, WebAssign y PowerLecture. Los elementos seleccionados en Visual y Module están disponibles en www.stewartcalculus.com.

ENHANCED WebAssign Enhanced WebAssign

www.webassign.net

El sistema de distribución de tareas de WebAssign permite a los instructores entregar, recoger, calificar y elaborar listas a través de la web. Enhanced WebAssign para el Cálculo *de Stewart involucra ahora a los estudiantes en la revisión del contenido al comienzo del curso y al principio de cada sección así como en los conocimientos previos. Además, para los problemas seleccionados, los estudiantes pueden obtener ayuda adicional en forma de "mayor retroalimentación" (las respuestas) y soluciones en video.* ***Otras características clave incluyen:*** *miles de problemas del* Cálculo *de Stewart. Un personalizable Cengage YouBook, un plan de estudio personal, una muestra de su trabajo, un repaso en el momento, un evaluador de respuestas, módulos de animaciones y visualización del Cálculo, concursos, videos de conferencias (con preguntas asociadas) y mucho más.*

Cengage Customizable YouBook

YouBook es un eBook en Flash interactivo y personalizable, que tiene todo el contenido del Cálculo *de Stewart. Las características de YouBook son una herramienta de edición de texto que permite a los profesores modificar la narrativa del libro de texto según sea necesario. Con YouBook, los profesores pueden reordenar rápidamente capítulos y secciones enteras u ocultar cualquier contenido que no enseñan, para crear un libro electrónico que coincida perfectamente con su plan de estudios. Los profesores pueden personalizar aún más el texto añadiendo sus ideas o enlaces de video en YouTube. Los activos de medios adicionales incluyen: figuras animadas, videoclips, destacando notas y más. YouBook está disponible en Enhanced WebAssign.*

■ Electrónicos ■ Impresos

CourseMate

www.cengagebrain.com

CourseMate es una perfecta herramienta de autoaprendizaje para estudiantes y no requiere ningún apoyo de los profesores. CourseMate trae conceptos con aprendizaje interactivo, estudio y herramientas interactivas para la preparación de exámenes que apoyan al libro de texto impreso. CourseMate para el Cálculo *de Stewart incluye: un libro electrónico interactivo, herramientas para enriquecer el cálculo, videos, cuestionarios, tarjetas en flash y más. Para los profesores, CourseMate incluye Engagement Tracker, una herramienta de primera en su tipo que supervisa el trabajo estudiantil.*

Maple CD-ROM

Maple proporciona un dispositivo avanzado de cálculo matemático de alto rendimiento plenamente integrado con símbolos numéricos, todos accesibles desde un entorno técnico desde WYSIWYG.

CengageBrain.com

Para accesos de materiales adicionales del curso y recursos de apoyo, por favor visite www.cengagebrain.com. En esta página busque por ISBN o por título (desde la cubierta posterior de su libro) usando el comando de búsqueda en la parte superior de la página. Esto le llevará a la página del producto donde se pueden encontrar gratuitamente recursos de apoyo.

Auxiliares para estudiantes

Student Solutions Manual

Single Variable Early Transcendentals

Por Daniel Anderson, Jeffery A. Cole y Daniel Drucker

ISBN 0-8400-4934-X

Proporciona soluciones completamente detalladas para todos los ejercicios impares en el texto, dando a los estudiantes una oportunidad de verificar sus respuestas y asegurar que hicieron los pasos correctos para llegar a una respuesta.

Study Guide

Single Variable Early Transcendentals

Por Richard St. Andre

ISBN 0-8400-5420-3

Para cada sección del texto, la guía de estudio proporciona a los estudiantes una breve introducción, una breve lista de conceptos al profesor así como resumen y preguntas de enfoque con respuestas explicadas. La guía de estudio también contiene preguntas "Tecnología Plus" y preguntas tipo examen de opción múltiple y de estilo "su propia respuesta".

CalcLabs with Maple

Single Variable

Por Philip B. Yasskin y Robert Lopez

ISBN 0-8400-5811-X

CalcLabs with Mathematica

Single Variable

Por Selwyn Hollis

ISBN 0-8400-5814-4

Cada uno de estos comprensibles manuales de laboratorio ayudará a los estudiantes a aprender a usar las herramientas de tecnología a su disposición. CalcLabs contienen ejercicios claramente explicados y una variedad de proyectos para acompañar el texto y laboratorios.

A Companion to Calculus

Por Dennis Ebersole, Doris Schattschneider, Alicia Sevilla y Kay Somers

ISBN 0-495-01124-X

Escrito para mejorar el álgebra y las habilidades para resolver problemas de los estudiantes que están tomando un curso de Cálculo. Cada capítulo de este acompañante tiene una clave referente a un tema de Cálculo, que proporciona antecedentes conceptuales y técnicas de álgebra específicos necesarios para comprender y resolver problemas de Cálculo relacionados con ese tema. Está diseñado para cursos de Cálculo que incluyen la revisión de los conceptos de precálculo o para uso individual.

Linear Algebra for Calculus

Por Konrad J. Heuvers, William P. Francis, John H. Kuisti, Deborah F. Lockhart, Daniel S. Moak y Gene M. Ortner

ISBN 0-534-25248-6

Este comprensible libro está diseñado para complementar el curso de Cálculo. Proporciona una introducción y un repaso de las ideas básicas del Álgebra lineal.

■ Electrónicos ■ Impresos

Al estudiante

Leer un libro de texto de Cálculo es diferente a la lectura de un periódico, una novela o incluso un libro de física. No se desaliente si tiene que leer un párrafo más de una vez para entenderlo. Debe tener lápiz, papel y calculadora disponibles para esbozar un diagrama o hacer un cálculo.

Algunos estudiantes comienzan por abordar sus problemas de tarea y leen el texto sólo si se bloquean en un ejercicio. Sugiero que un plan mucho mejor es leer y comprender una sección del texto antes de enfrentar los ejercicios. En particular, debe leer con cuidado las definiciones para ver el significado exacto de cada término. Antes de leer cada ejemplo, le sugiero que llegue a la solución tratando de resolver el problema usted mismo. Obtendrá mucho más que mirando la solución si es que lo hace.

Parte del objetivo de este curso es inducir el pensamiento lógico. Es muy importante aprender a escribir las soluciones de los ejercicios de una manera articulada, paso a paso, con comentarios explicativos, no sólo una cadena de ecuaciones o fórmulas desconectadas.

Las respuestas a los ejercicios de número impar aparecen al final del libro, en el apéndice I. Algunos ejercicios piden una explicación verbal, interpretación o descripción. En tales casos no hay una única forma correcta de expresar la respuesta, por lo que no se preocupe si no ha encontrado la respuesta definitiva. Además, a menudo hay varias formas diferentes para expresar una respuesta numérica o algebraica, así que si su respuesta aparenta ser diferente a la mía, no asuma inmediatamente que se equivocó. Por ejemplo, si la respuesta dada al final del libro es $\sqrt{2} - 1$ y usted obtuvo $1/(1 + \sqrt{2})$, entonces está usted en lo correcto y racionalizar el denominador demostrará que las respuestas son equivalentes.

El icono  indica un ejercicio que sin duda requiere el uso de una calculadora graficadora o una computadora con software de gráficos (en la sección 1.4 se analiza el uso de estos dispositivos de graficación y algunas de las dificultades que puedan surgir). Sin embargo, esto no significa que los dispositivos de gráficos no puedan utilizarse para comprobar el trabajo de otros ejercicios. El símbolo SAC se reserva para problemas en los que se requieren todos los recursos

de un sistema algebraico computarizado (Derive, Maple, Mathematica o la TI-89/92). También se usará el símbolo ⊘ para cuidar que no se cometa un error. He puesto este símbolo en los márgenes en situaciones donde he advertido que gran parte de mis estudiantes tienden a cometer el mismo error.

Las *Herramientas para enriquecer el cálculo*, acompañantes de este texto, están indicadas por medio del símbolo **TEC** y están disponible en Enhanced WebAssign y en CourseMate (los recursos Visual y Module están disponibles en www.stewartcalculus.com). Aquí se dirige al estudiante a los módulos en los que puede explorar los aspectos del Cálculo para los que la computadora es particularmente útil.

En TEC también se encuentra *Tareas sugeridas* para ejercicios representativos que están indicados con número en rojo: **5.** Estas sugerencias pueden encontrarse en stewartcalculus.com así como en Enhanced WebAssign y CourseMate. Estas sugerencias de tareas hacen preguntas al estudiante que le permiten avanzar hacia una solución sin dar realmente la respuesta. Es necesario que el estudiante siga activamente cada pista con lápiz y papel a la mano para destacar los detalles. Si una sugerencia particular no permite resolver el problema, puede hacer clic para ver la siguiente sugerencia.

Le recomiendo que conserve este libro para fines de consulta después de terminar el curso. Es probable que olvide algunos de los detalles específicos del Cálculo, por lo que el libro servirá como una referencia útil cuando sea necesario utilizar el Cálculo en cursos posteriores. Puesto que este libro contiene más material del que es posible cubrir en todo un curso, también puede servir como un valioso recurso para un trabajo científico o de ingeniería.

El Cálculo es un tema apasionante, justamente considerado uno de los mayores logros del intelecto humano. Espero que el estudiante descubra que no sólo es útil, sino también intrínsecamente hermoso.

JAMES STEWART

Exámenes de diagnóstico

El éxito en Cálculo depende en gran medida del conocimiento de las matemáticas que le preceden: álgebra, geometría analítica, funciones y trigonometría. Los siguientes exámenes están destinados a diagnosticar las debilidades que el estudiante pueda tener en estas áreas. Después de cada examen puede verificar sus respuestas comparándolas con las respuestas determinadas y, si es necesario, actualizar sus habilidades haciendo referencia a los materiales de repaso que se proporcionan.

A Examen de diagnóstico: álgebra

1. Evalúe las siguientes expresiones sin utilizar calculadora:

a) $(-3)^4$ b) -3^4 c) 3^{-4}

d) $\dfrac{5^{23}}{5^{21}}$ e) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}$ f) $16^{-3/4}$

2. Simplifique las siguientes expresiones. Escriba su respuesta sin exponentes negativos:

a) $\sqrt{200} - \sqrt{32}$

b) $(3a^3b^3)(4ab^2)^2$

c) $\left(\dfrac{3x^{3/2}y^3}{x^2y^{-1/2}}\right)^{-2}$

3. Desarrolle y simplifique las siguientes expresiones:

a) $3(x + 6) + 4(2x - 5)$ b) $(x + 3)(4x - 5)$

c) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ d) $(2x + 3)^2$

e) $(x + 2)^3$

4. Factorice las siguientes expresiones:

a) $4x^2 - 25$ b) $2x^2 + 5x - 12$

c) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$ d) $x^4 + 27x$

e) $3x^{3/2} - 9x^{1/2} + 6x^{-1/2}$ f) $x^3y - 4xy$

5. Simplifique las siguientes expresiones racionales:

a) $\dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - x - 2}$ b) $\dfrac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 9} \cdot \dfrac{x + 3}{2x + 1}$

c) $\dfrac{x^2}{x^2 - 4} - \dfrac{x + 1}{x + 2}$ d) $\dfrac{\dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}}{\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x}}$

6. Racionalice y simplifique las siguientes expresiones.

a) $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}-2}$ b) $\dfrac{\sqrt{4+h}-2}{h}$

7. Reescriba las siguientes expresiones completando un trinomio cuadrado perfecto.

a) x^2+x+1 b) $2x^2-12x+11$

8. Resuelva las siguientes ecuaciones (encuentre sólo las soluciones reales).

a) $x+5=14-\frac{1}{2}x$ b) $\dfrac{2x}{x+1}=\dfrac{2x-1}{x}$

c) $x^2-x-12=0$ d) $2x^2+4x+1=0$

e) $x^4-3x^2+2=0$ f) $3|x-4|=10$

g) $2x(4-x)^{-1/2}-3\sqrt{4-x}=0$

9. Resuelva las siguientes desigualdades y exprese la solución en intervalos:

a) $-4<5-3x\leqslant 17$ b) $x^2<2x+8$

c) $x(x-1)(x+2)>0$ d) $|x-4|<3$

e) $\dfrac{2x-3}{x+1}\leqslant 1$

10. Indique si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa:

a) $(p+q)^2=p^2+q^2$ b) $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\,\sqrt{b}$

c) $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$ d) $\dfrac{1+TC}{C}=1+T$

e) $\dfrac{1}{x-y}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}$ f) $\dfrac{1/x}{a/x-b/x}=\dfrac{1}{a-b}$

Respuestas al examen de diagnóstico A: álgebra

1. a) 81 b) -81 c) $\frac{1}{81}$
d) 25 e) $\frac{9}{4}$ f) $\frac{1}{8}$

2. a) $6\sqrt{2}$ b) $48a^5b^7$ c) $\dfrac{x}{9y^7}$

3. a) $11x-2$ b) $4x^2+7x-15$
c) $a-b$ d) $4x^2+12x+9$
e) $x^3+6x^2+12x+8$

4. a) $(2x-5)(2x+5)$ b) $(2x-3)(x+4)$
c) $(x-3)(x-2)(x+2)$ d) $x(x+3)(x^2-3x+9)$
e) $3x^{-1/2}(x-1)(x-2)$ f) $xy(x-2)(x+2)$

5. a) $\dfrac{x+2}{x-2}$ b) $\dfrac{x-1}{x-3}$
c) $\dfrac{1}{x-2}$ d) $-(x+y)$

6. a) $5\sqrt{2}+2\sqrt{10}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt{4+h}+2}$

7. a) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$ b) $2(x-3)^2-7$

8. a) 6 b) 1 c) $-3, 4$
d) $-1\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$ e) $\pm 1, \pm\sqrt{2}$ f) $\frac{2}{3}, \frac{22}{3}$
g) $\frac{12}{5}$

9. a) $[-4, 3)$ b) $(-2, 4)$
c) $(-2, 0)\cup(1, \infty)$ d) $(1, 7)$
e) $(-1, 4]$

10. a) Falsa b) Verdadera c) Falsa
d) Falsa e) Falsa f) Verdadera

Si tiene usted dificultades con este examen, puede consultar Review of Algebra (repaso de álgebra) en el sitio web www.stewartcalculus.com

B Examen de diagnóstico: geometría analítica

1. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por $(2, -5)$ y
   a) tiene pendiente -3
   b) es paralela al eje x
   c) es paralela al eje y
   d) es paralela a la recta $2x - 4y = 3$

2. Encuentre la ecuación de la circunferencia con centro en $(-1, 4)$ y que pasa por el punto $(3, -2)$.

3. Encuentre el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 9 = 0$.

4. Sean $A(-7, 4)$ y $B(5, -12)$ puntos en el plano.
   a) Encuentre la pendiente de la recta determinada por A y B.
   b) Encuentre la ecuación de la recta que pasa por A y B. ¿Cuáles son los puntos de intersección con los ejes?
   c) Encuentre el punto medio del segmento AB.
   d) Encuentre la longitud del segmento AB.
   e) Encuentre la ecuación de la perpendicular que biseca a AB.
   f) Encuentre la ecuación de la circunferencia para la que AB es diámetro.

5. Trace la región en el plano xy definida por la ecuación o desigualdades.
   a) $-1 \leqslant y \leqslant 3$
   b) $|x| < 4$ y $|y| < 2$
   c) $y < 1 - \frac{1}{2}x$
   d) $y \geqslant x^2 - 1$
   e) $x^2 + y^2 < 4$
   f) $9x^2 + 16y^2 = 144$

Respuestas al examen de diagnóstico B: geometría analítica

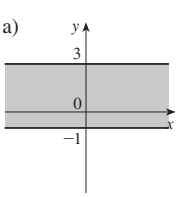
1. a) $y = -3x + 1$
   b) $y = -5$
   c) $x = 2$
   d) $y = \frac{1}{2}x - 6$

2. $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 52$

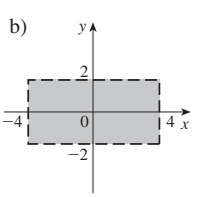
3. Centro $(3, -5)$, radio 5

4. a) $-\frac{4}{3}$
   b) $4x + 3y + 16 = 0$; intersección en $x = -4$, intersección en $y = -\frac{16}{3}$
   c) $(-1, -4)$
   d) 20
   e) $3x - 4y = 13$
   f) $(x + 1)^2 + (y + 4)^2 = 100$

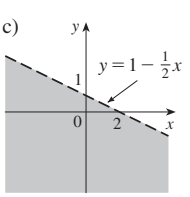
5. a)



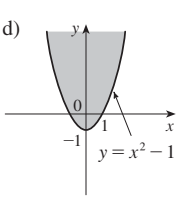
b)



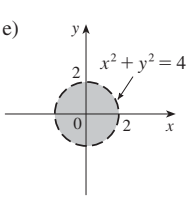
c)



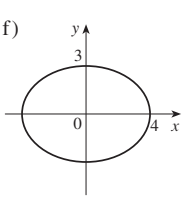
d)



e)



f)



Si tiene usted dificultades con este examen, puede consultar el repaso de geometría analítica en los apéndices B y C.

C Examen de diagnóstico: funciones

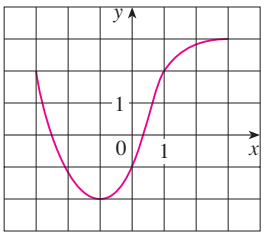


FIGURA PARA EL PROBLEMA 1

1. La gráfica de una función f está dada a la izquierda.
a) Determine el valor de $f(-1)$.
b) Estime el valor de $f(2)$.
c) ¿Para qué valores de x es $f(x) = 2$?
d) Estime los valores de x tales que $f(x) = 0$.
e) Establezca el dominio y el rango de f.

2. Si $f(x) = x^3$, evalúe el cociente de diferencias $\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h}$ y simplifique su respuesta.

3. Encuentre el dominio de la función

a) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2 + x - 2}$ b) $g(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^2 + 1}$ c) $h(x) = \sqrt{4 - x} + \sqrt{x^2 - 1}$

4. ¿Qué aspecto tiene cada una de las gráficas siguientes a partir de la gráfica de f?

a) $y = -f(x)$ b) $y = 2f(x) - 1$ c) $y = f(x - 3) + 2$

5. Sin usar calculadora, haga un bosquejo de cada una de las gráficas siguientes:

a) $y = x^3$ b) $y = (x+1)^3$ c) $y = (x-2)^3 + 3$
d) $y = 4 - x^2$ e) $y = \sqrt{x}$ f) $y = 2\sqrt{x}$
g) $y = -2^x$ h) $y = 1 + x^{-1}$

6. Sea $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) Evalúe $f(-2)$ y $f(1)$. b) Trace la gráfica de f

7. Si $f(x) = x^2 + 2x - 1$ y $g(x) = 2x - 3$, encuentre cada una de las siguientes funciones:

a) $f \circ g$ b) $g \circ f$ c) $g \circ g \circ g$

Respuestas al examen de diagnóstico C: funciones

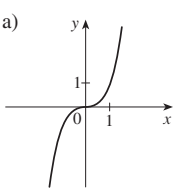
1. a) -2 b) 2.8
c) $-3, 1$ d) $-2.5, 0.3$
e) $[-3, 3], [-2, 3]$

2. $12 + 6h + h^2$

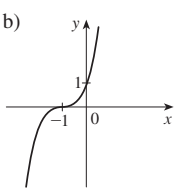
3. a) $(-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, \infty)$
b) $(-\infty, \infty)$
c) $(-\infty, -1] \cup [1, 4]$

4. a) Reflexión respecto al eje x
b) Alargamiento vertical en un factor de 2 y después un desplazamiento de 1 unidad hacia abajo
c) Desplazamiento de 3 unidades a la derecha y 2 unidades hacia arriba

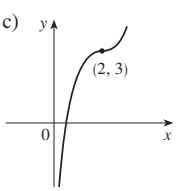
5. a)



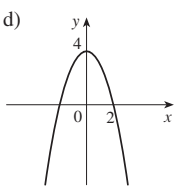
b)



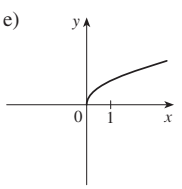
c)



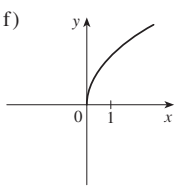
d)



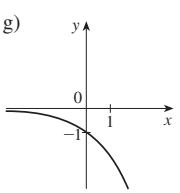
e)



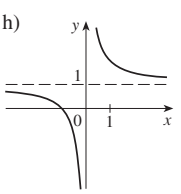
f)



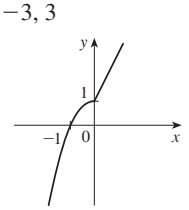
g)



h)



6. a) $-3, 3$
b)



7. a) $(f \circ g)(x) = 4x^2 - 8x + 2$
b) $(g \circ f)(x) = 2x^2 + 4x - 5$
c) $(g \circ g \circ g)(x) = 8x - 21$

Si tiene usted dificultades con este examen, vea las secciones 1.1-1.3 de este libro

D Examen de diagnóstico: trigonometría

1. Convierta de grados a radianes.
a) $300°$ b) $-18°$

2. Convierta de radianes a grados.
a) $5\pi/6$ b) 2

3. Encuentre la longitud del arco de circunferencia de radio 12 cm si el arco subtiende un ángulo central de $30°$.

4. Encuentre los valores exactos de:
a) $\tan(\pi/3)\tan(\pi/3)$ b) $\operatorname{sen}(7\pi/6)$ c) $\sec(5\pi/3)$

5. Exprese las longitudes de a y b de la figura en términos de θ.

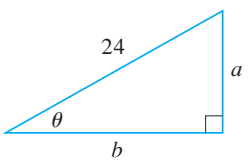


FIGURA PARA EL PROBLEMA 5

6. Si $\operatorname{sen} x = \frac{1}{3}$ y $\sec y = \frac{5}{4}$, donde x y y están entre 0 y $\pi/2$, evalúe $\operatorname{sen}(x + y)$.

7. Demuestre las identidades:
a) $\tan\theta \operatorname{sen}\theta + \cos\theta = \sec\theta$

b) $\dfrac{2\tan x}{1 + \tan^2 x} = \operatorname{sen} 2x$

8. Encuentre todos los valores de x tales que $\operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen} x$ y $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

9. Trace la gráfica de la función $y = 1 + \operatorname{sen} 2x$ sin usar calculadora.

Respuestas al examen de diagnóstico D: trigonometría

1. a) $5\pi/3$ b) $-\pi/10$

2. a) $150°$ b) $360°/\pi \approx 114.6°$

3. 2π cm

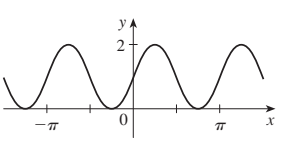
4. a) $\sqrt{3}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) 2

5. a) $24\operatorname{sen}\theta$ b) $24\cos\theta$

6. $\frac{1}{15}(4 + 6\sqrt{2})$

8. $0, \pi/3, \pi, 5\pi/3, 2\pi$

9.



Si tiene usted dificultades con este examen de diagnóstico, vea el apéndice D de este libro.

Un previo de Cálculo



© Ziga Camernik / Shutterstock



© Pichugin Dmitry / Shutterstock

Cuando termine este curso, podrá usted estimar el número de trabajadores necesarios para construir una pirámide, explicar la formación y ubicación del arcoíris, diseñar una montaña rusa para un viaje suave y calcular la fuerza sobre una presa.

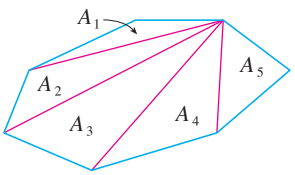


© Brett Mulcahy / Shutterstock



© iofoto / Shutterstock

El Cálculo es fundamentalmente diferente de las matemáticas que ha estudiado anteriormente: el Cálculo es menos estático y más dinámico. Se ocupa de los cambios y el movimiento; estudia cantidades que se aproximan a otras cantidades. Por eso puede ser útil tener una visión general del tema antes de comenzar su estudio intensivo. Aquí damos un vistazo de algunas de las ideas principales del Cálculo, mostrando cómo surge el concepto de límite cuando intentamos resolver diversos problemas.



$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$

FIGURA 1

El problema del área

Los orígenes del cálculo se remontan a unos 2 500 años a los antiguos griegos, quienes calcularon áreas usando el "método de agotamiento". Los griegos sabían cómo encontrar el área de cualquier polígono al dividirlo en triángulos como se ve en la figura 1 y sumar las áreas de estos triángulos.

Un problema mucho más difícil es encontrar el área encerrada por una figura curvada. El método griego de agotamiento consistía en inscribir y circunscribir polígonos en la figura y a continuación aumentar el número de lados de los polígonos. La figura 2 ilustra este proceso para el caso especial de un círculo con polígonos regulares inscritos.

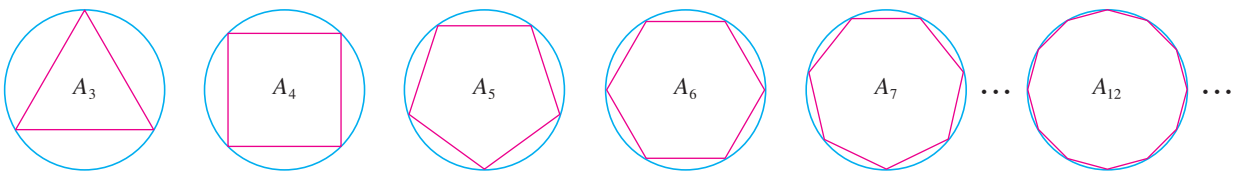


FIGURA 2

Sea A_n el área del polígono inscrito con n lados. A medida que aumenta n, el área A_n se parece cada vez más y más al área del círculo. Así, decimos que el área del círculo es el *límite* de las áreas de los polígonos inscritos, y escribimos

$$A = \lim_{n \to \infty} A_n$$

TEC En Preview Visual, puede ver cómo las áreas de los polígonos inscritos y circunscritos se aproximan al área del círculo.

Los griegos no utilizaron explícitamente el concepto de límite. Sin embargo, por razonamiento indirecto, Eudoxo (siglo V a.C.) utilizó la técnica de agotamiento para obtener la conocida fórmula para el área de un círculo: $A = \pi r^2$.

En el capítulo 5 utilizaremos una idea similar para encontrar las áreas de regiones del tipo que se muestra en la figura 3. Nos aproximaremos al área deseada por medio de áreas de rectángulos (como en la figura 4), disminuyendo el ancho de los rectángulos y luego calculando el área A como el límite de estas sumas de áreas de rectángulos.

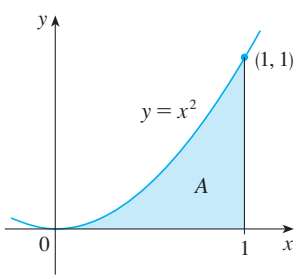


FIGURA 3

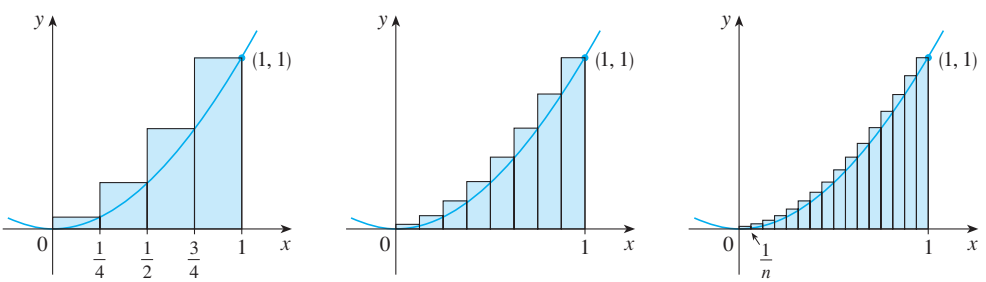


FIGURA 4

El problema del área es el problema central en la rama del Cálculo llamado *cálculo integral*. Las técnicas que vamos a desarrollar en el capítulo 5 para encontrar áreas también nos permitirán calcular el volumen de un sólido, la longitud de una curva, la fuerza de las aguas contra una presa, la masa y el centro de gravedad de una varilla y el trabajo realizado al bombear agua hacia afuera de un tanque.

El problema de la tangente

Considere el problema de encontrar la ecuación de la recta tangente t a una curva con ecuación $y = f(x)$ en un punto dado P. (En el capítulo 2 daremos una definición precisa

de una recta tangente. Por ahora podemos considerarla como una recta que toca la curva en P como en la figura 5.) Como sabemos que el punto P se encuentra en la recta tangente, podemos encontrar la ecuación de t si sabemos su pendiente m. El problema es que necesitamos dos puntos para calcular la pendiente y tenemos sólo un punto P de t. Para sortear el problema encontramos en primer lugar una aproximación a m tomando un punto cercano Q de la curva y calculamos la pendiente m_{PQ} de la recta secante PQ. De la figura 6 vemos que

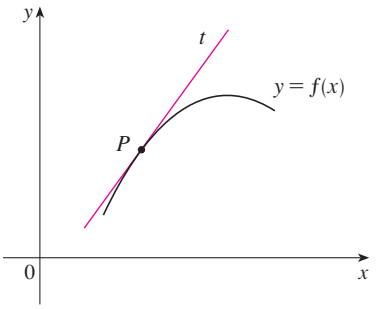


FIGURA 5
La recta tangente en P

$$\boxed{1} \qquad m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Ahora imaginemos que Q se mueve a lo largo de la curva hacia P como en la figura 7. Puede ver que la recta secante gira y se acerca a la recta tangente como su posición límite. Esto significa que la pendiente m_{PQ} de la recta secante se acerca más y más a la pendiente m de la recta tangente. Escribimos

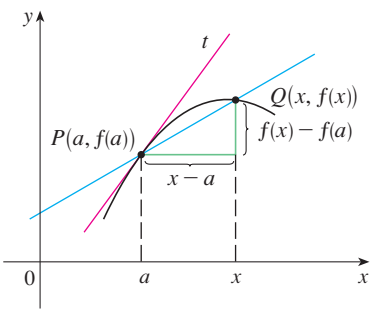


FIGURA 6
La recta secante PQ

$$m = \lim_{Q \to P} m_{PQ}$$

y decimos que m es el límite de m_{PQ} cuando Q se aproxima a P a lo largo de la curva. Puesto que x se aproxima a a cuando Q se aproxima a P, también podríamos utilizar la ecuación 1 para escribir

$$\boxed{2} \qquad m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

En el capítulo 2 veremos ejemplos específicos de este procedimiento.

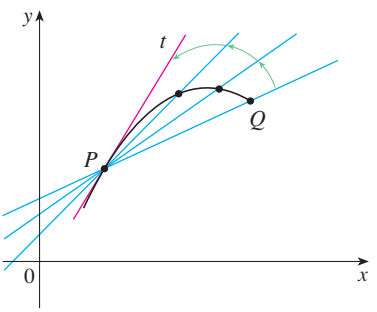


FIGURA 7
Recta secante aproximándose a la recta tangente

El problema de la tangente ha dado lugar a la rama del cálculo llamada *cálculo diferencial*, inventada más de 2 000 años después que el cálculo integral. Las principales ideas detrás del cálculo diferencial se deben al matemático francés Pierre de Fermat (1601–1665) y fueron desarrolladas por los matemáticos ingleses John Wallis (1616–1703), Isaac Barrow (1630–1677) e Isaac Newton (1642–1727) y el matemático alemán Gottfried Leibniz (1646–1716).

Las dos ramas de cálculo y sus principales problemas, el problema del área y el problema de la tangente, parecen ser muy diferentes, pero resulta que hay una conexión muy estrecha entre ellos. El problema de la tangente y el área son problemas inversos en un sentido que se describe en el capítulo 5.

Velocidad

Cuando miramos el velocímetro de un automóvil y leemos que se está desplazando a 48 mi/h, ¿qué información estamos obteniendo? Si la velocidad se mantiene constante, después de una hora nos habremos desplazado 48 mi. Pero, si varía la velocidad del coche, ¿qué significa decir que la velocidad en un instante dado es 48 mi/h?

A fin de analizar esta situación, examinemos el caso de un automóvil que viaja a lo largo de una carretera recta en el que suponemos que es posible medir la distancia recorrida por el vehículo (en pies) a intervalos de un segundo como se registra en la siguiente tabla:

t = Tiempo transcurrido (s)	0	1	2	3	4	5
d = Distancia (pies)	0	2	9	24	42	71

Un primer paso para hallar la velocidad una vez que han transcurrido 2 segundos, es encontrar la velocidad promedio durante el intervalo $2 \leqslant t \leqslant 4$:

$$\text{velocidad promedio} = \frac{\text{cambio en la posición}}{\text{tiempo transcurrido}}$$

$$= \frac{42 - 9}{4 - 2}$$

$$= 16.5 \text{ pies/s}$$

Del mismo modo, la velocidad promedio en el intervalo $2 \leqslant t \leqslant 3$ es

$$\text{velocidad promedio} = \frac{24 - 9}{3 - 2} = 15 \text{ pies/s}$$

Tenemos la sensación de que la velocidad en el instante $t = 2$ no puede ser muy diferente de la velocidad promedio durante un corto intervalo de tiempo desde $t = 2$. Así que imaginemos que se ha medido la distancia recorrida en intervalos de tiempo de 0.1 segundo como se ve en la siguiente tabla:

t	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5
d	9.00	10.02	11.16	12.45	13.96	15.80

Entonces podemos calcular, por ejemplo, la velocidad promedio en el intervalo de tiempo $[2, 2.5]$:

$$\text{velocidad promedio} = \frac{15.80 - 9.00}{2.5 - 2} = 13.6 \text{ pies/s}$$

Los resultados de estos cálculos se muestran en la siguiente tabla:

Intervalo de tiempo	$[2, 3]$	$[2, 2.5]$	$[2, 2.4]$	$[2, 2.3]$	$[2, 2.2]$	$[2, 2.1]$
Velocidad promedio (pies/s)	15.0	13.6	12.4	11.5	10.8	10.2

Las velocidades promedio durante intervalos sucesivamente más pequeños parecen estar aproximándose cada vez más a un número cercano a 10 y, por tanto, esperaríamos que la velocidad en exactamente $t = 2$ sea de 10 pies/s. En el capítulo 2 definiremos la velocidad instantánea de un objeto en movimiento, como el valor límite de las velocidades promedio durante intervalos de tiempo cada vez más pequeños.

En la figura 8 se muestra una representación gráfica del movimiento del automóvil al ubicar los puntos correspondientes a la distancia recorrida como función del tiempo. Si escribimos $d = f(t)$, entonces $f(t)$ es el número de pies recorridos después de t segundos. La velocidad promedio en el intervalo de tiempo $[2, t]$ es

$$\text{velocidad promedio} = \frac{\text{cambio en la posición}}{\text{tiempo transcurrido}} = \frac{f(t) - f(2)}{t - 2}$$

que es lo mismo que la pendiente de la recta secante PQ en la figura 8. La velocidad v cuando $t = 2$ es el valor límite de esta velocidad promedio cuando t se aproxima a 2; es decir,

$$v = \lim_{t \to 2} \frac{f(t) - f(2)}{t - 2}$$

y de la ecuación 2 reconocemos que esto es lo mismo que la pendiente de la recta tangente a la curva en P.

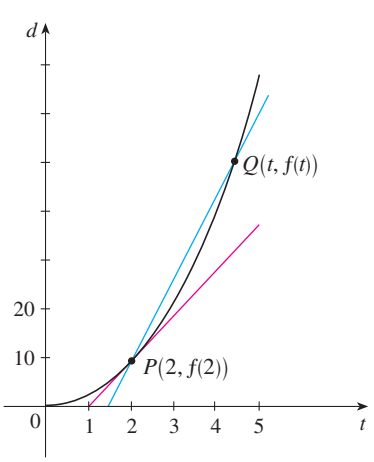


FIGURA 8

Así, cuando resolvemos el problema de la tangente en el cálculo diferencial, también estamos resolviendo problemas relativos a velocidades. Las mismas técnicas permiten resolver problemas relacionados con tasas de cambio en las ciencias naturales y sociales.

El límite de una sucesión

En el siglo V a.C. el filósofo griego Zenón de Elea planteó cuatro problemas, ahora conocidos como *Paradojas de Zenón*, que estaban diseñados para cuestionar algunas de las ideas sobre el espacio y el tiempo que se sostenían en esos días. La segunda paradoja de Zenón se refiere a una carrera entre el héroe griego Aquiles y una tortuga a la que se ha dado cierta ventaja al inicio. Zenón argumentaba, como se hace ver enseguida, que Aquiles nunca podría rebasar a la tortuga. Supongamos que Aquiles empieza en la posición a_1 y la tortuga comienza en posición t_1 (véase la figura 9). Cuando Aquiles alcanza el punto $a_2 = t_1$, la tortuga está más adelante en la posición t_2. Cuando Aquiles llega a $a_3 = t_2$, la tortuga está en t_3. Este proceso continúa indefinidamente y así parece que ¡la tortuga siempre estará por delante! Pero esto desafía el sentido común.

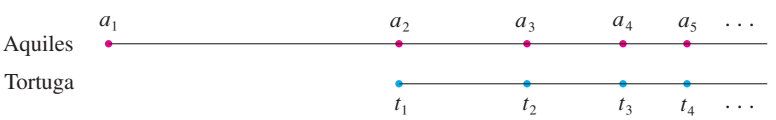


FIGURA 9

Una manera de explicar esta paradoja es con el concepto de sucesión. Las posiciones sucesivas de Aquiles $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ o las posiciones sucesivas de la tortuga $(t_1, t_2, t_3, \ldots)$ forman lo que se conoce como una sucesión.

En general, una sucesión $\{a_n\}$ es un conjunto de números escritos en un orden definido. Por ejemplo, la sucesión

$$\left\{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5}, \ldots\right\}$$

puede describirse dando la siguiente fórmula para el n-ésimo término:

$$a_n = \frac{1}{n}$$

Podemos visualizar esta sucesión ubicando sus términos en una recta numérica como en la figura 10a) o dibujando su gráfica como en la figura 10b). En cualquiera de las dos representaciones observamos que los términos de la sucesión $a_n = 1/n$ se aproximan cada vez más y más a 0 al aumentar n. De hecho, podemos encontrar términos tan pequeños como queramos haciendo n suficientemente grande. En estas condiciones, decimos que el límite de la sucesión es 0, y lo indicamos escribiendo

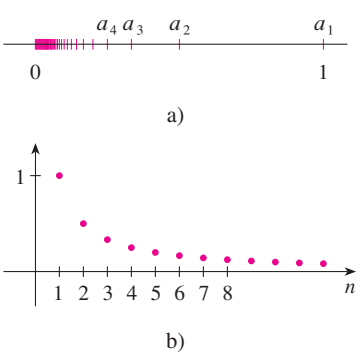


FIGURA 10

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

En general, la notación

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L$$

se utiliza si los términos de a_n se aproximan al número L cuando n es suficientemente grande. Esto significa que los números a_n pueden acercarse al número L tanto como se quiera si se toma una n suficientemente grande.

El concepto de límite de una sucesión ocurre cada vez que utilizamos la representación decimal de un número real. Por ejemplo, si

$$a_1 = 3.1$$
$$a_2 = 3.14$$
$$a_3 = 3.141$$
$$a_4 = 3.1415$$
$$a_5 = 3.14159$$
$$a_6 = 3.141592$$
$$a_7 = 3.1415926$$
$$\vdots$$

entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = \pi$

Los términos de esta sucesión son aproximaciones racionales de π.

Regresemos a la paradoja de Zenón. Las posiciones sucesivas de Aquiles y la tortuga forman sucesiones $\{a_n\}$ y $\{t_n\}$, donde $a_n < t_n$ para toda n. Puede demostrarse que ambas sucesiones tienen el mismo límite

$$\lim_{n\to\infty} a_n = p = \lim_{n\to\infty} t_n$$

Es precisamente en este punto p que Aquiles alcanza a la tortuga.

La suma de una serie

Otra de las paradojas de Zenón, según Aristóteles, es la siguiente: "un hombre parado en una sala no puede caminar hasta la pared. Para ello, primero tendría que recorrer la mitad de la distancia, después recorrer la mitad de la distancia restante y, a continuación, recorrer la mitad de lo que falta. Este proceso puede mantenerse siempre y nunca puede ser terminado". (Véase la figura 11.)

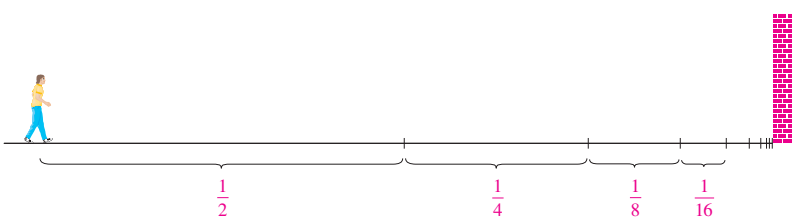


FIGURA 11

Por supuesto, sabemos que el hombre realmente puede llegar a la pared, lo que sugiere que tal vez la distancia total puede expresarse como la suma de una infinidad de distancias cada vez más pequeñas como sigue:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots \quad \boxed{3}$$

Zenón argumentaba que no tiene sentido sumar una infinidad de números. Pero hay otras situaciones en que utilizamos implícitamente sumas infinitas. Por ejemplo, en notación decimal, el símbolo $0.\overline{3} = 0.3333\ldots$ significa

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10\,000} + \cdots$$

y así, en cierto sentido, debe ser cierto que

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10\,000} + \cdots = \frac{1}{3}$$

Más generalmente, si d_n denota el n-ésimo dígito en la representación decimal de un número, entonces

$$0.d_1d_2d_3d_4\ldots = \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \cdots + \frac{d_n}{10^n} + \cdots$$

Por tanto, algunas sumas infinitas o series infinitas, como se les llama, tienen un significado. Pero debemos definir cuidadosamente lo que es la suma de una serie infinita.

Regresando a la serie en la ecuación 3, denotamos por s_n la suma de los n primeros términos de la serie. Por tanto,

$$\begin{aligned}
s_1 &= \tfrac{1}{2} = 0.5\\
s_2 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = 0.75\\
s_3 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} = 0.875\\
s_4 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} = 0.9375\\
s_5 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} = 0.96875\\
s_6 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{64} = 0.984375\\
s_7 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{64} + \tfrac{1}{128} = 0.9921875\\
&\vdots\\
s_{10} &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \cdots + \tfrac{1}{1024} \approx 0.99902344\\
&\vdots\\
s_{16} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{16}} \approx 0.99998474
\end{aligned}$$

Observe que como le añadimos cada vez más términos, las sumas parciales parecen ser más cercanas a 1. De hecho, se puede demostrar que si n es suficientemente grande (es decir, si se suman suficientes términos de la serie), podemos aproximar la suma parcial s_n tanto como queramos al número 1. Por tanto, parece razonable decir que la suma de la serie infinita es 1 y escribir

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1$$

En otras palabras, la razón de que la suma de la serie sea 1 es que

$$\lim_{n \to \infty} s_n = 1$$

En el capítulo 11 analizaremos con más detalle estas ideas y utilizaremos la propuesta de Newton de combinar las series infinitas con el cálculo diferencial e integral.

Resumen

Hemos visto que el concepto de límite surge al intentar encontrar el área de una región, la pendiente de la recta tangente a una curva, la velocidad de un móvil o la suma de una serie infinita. En cada caso el problema común es el cálculo de una cantidad como el límite de otras cantidades fáciles de calcular. Esta idea básica de límite separa al Cálculo de otras áreas de las matemáticas. De hecho, podríamos definir al Cálculo como la parte de las matemáticas que estudia límites.

Después de que Sir Isaac Newton inventó su versión del Cálculo, la usó para explicar el movimiento de los planetas alrededor del Sol. Hoy el Cálculo se utiliza para determinar las órbitas de los satélites y naves espaciales, en la predicción de tamaños de población, en la estimación de la rapidez con la que los precios del petróleo suben o bajan, en la predicción meteorológica, en medir el ritmo cardiaco del corazón, en el cálculo de las primas de seguros de vida y en una gran variedad de otras áreas. En este libro exploraremos algunos de estos usos del Cálculo.

Con el fin de dar una idea del poder del Cálculo, terminamos este panorama preliminar con una lista de algunas de las preguntas que usted podrá responder mediante el Cálculo:

1. ¿Cómo podemos explicar el hecho, ilustrado en la figura 12, de que el ángulo de elevación desde un observador hasta el punto más alto en un arcoíris es 42°? (Consulte la página 282.)
2. ¿Cómo podemos explicar las formas de las latas en supermercados? (Consulte la página 337.)
3. ¿Dónde está el mejor lugar para sentarse en una sala de cine? (Consulte la página 456.)
4. ¿Cómo podemos diseñar una montaña rusa para un viaje suave? (Consulte la página 184.)
5. ¿A qué distancia de la pista de un aeropuerto debe un piloto iniciar el descenso? (Consulte la página 208.)
6. ¿Cómo podemos utilizar las curvas y el diseño de las formas para representar letras en una impresora láser? (Consulte la página 653.)
7. ¿Cómo podemos estimar el número de trabajadores que fueron necesarios para construir la gran pirámide de Keops en Egipto? (Consulte la página 451.)
8. ¿Dónde debe colocarse un parador en corto para atrapar una pelota de beisbol lanzada por un jardinero y lanzarla al plato (*home*)? (Consulte la página 456.)
9. Una bola lanzada verticalmente hacia arriba, ¿tarda más tiempo en llegar a su altura máxima o en volver a su posición original de lanzamiento? (Consulte la página 604.)

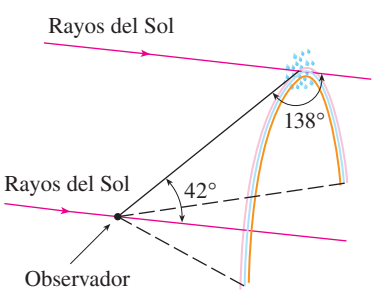


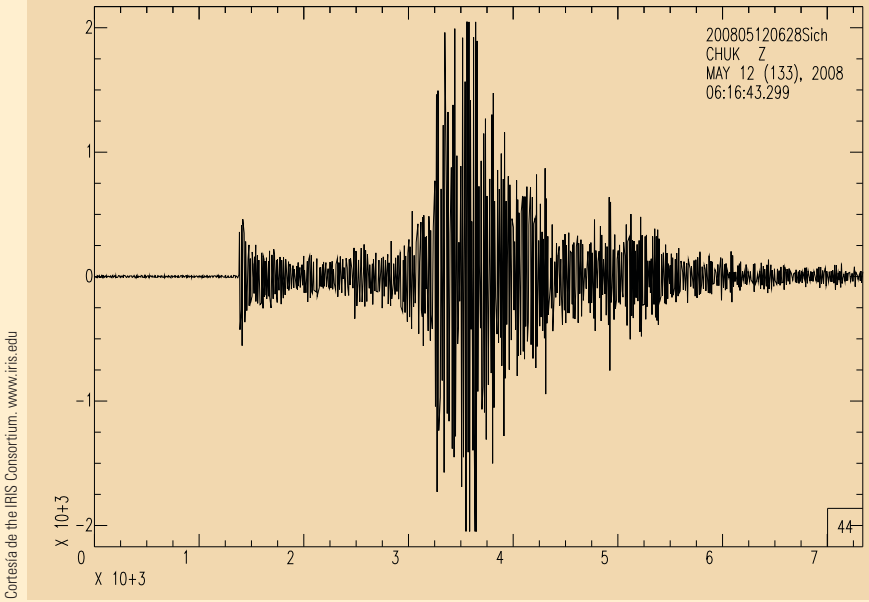
FIGURA 12

1 Funciones y modelos



A menudo una gráfica es la mejor manera de representar una función porque transmite mucha información en un vistazo. En la fotografía se muestra la gráfica de la aceleración del suelo, creada por el terremoto de 2008 en la provincia de Sichuan, en China. La ciudad más golpeada fue Beichuan, como muestra la imagen.

© Mark Ralston / AFP / Getty Images



Cortesía de the IRIS Consortium. www.iris.edu

Los objetos fundamentales con los que trata el Cálculo son las funciones. Este capítulo prepara el camino para el Cálculo discutiendo las ideas básicas sobre las gráficas de funciones y la manera de transformarlas y combinarlas. Destacamos que una función puede representarse de diferentes maneras: mediante una ecuación, una tabla, una gráfica o en palabras. Veremos los principales tipos de funciones que aparecen en el Cálculo y describiremos cómo se utilizan estas funciones para modelar matemáticamente fenómenos del mundo real. También analizaremos el uso de calculadoras graficadoras y programas de graficación por computadora.

1.1 Cuatro maneras de representar una función

Las funciones surgen siempre que una cantidad depende de otra. Considere las cuatro situaciones siguientes:

A. El área A de un círculo depende de su radio r. La regla que relaciona A con r está dada por la ecuación $A = \pi r^2$. Con cada número positivo r hay asociado un valor de A, por lo que decimos que A es una *función* de r.

B. La población humana del mundo P depende del tiempo t. La tabla muestra las estimaciones de la población mundial $P(t)$ en el tiempo t, para algunos años. Por ejemplo,

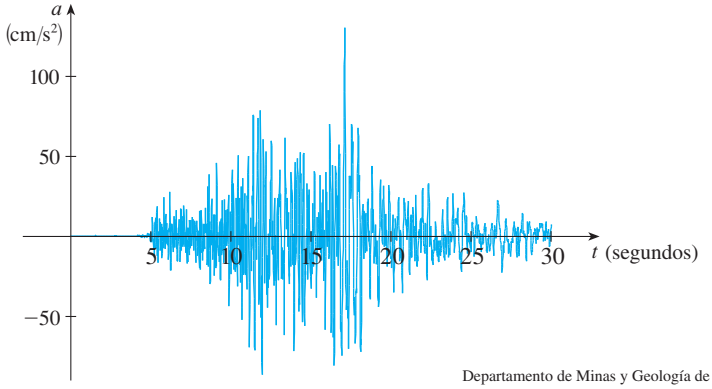
$$P(1950) \approx 2\,560\,000\,000$$

Pero para cada valor del tiempo t hay un valor correspondiente de P, por lo que decimos que P es una función de t.

Año	Población (millones)
1900	1 650
1910	1 750
1920	1 860
1930	2 070
1940	2 300
1950	2 560
1960	3 040
1970	3 710
1980	4 450
1990	5 280
2000	6 080
2010	6 870

C. El costo C de envío de un paquete por correo depende de su peso w. Aunque no hay alguna fórmula simple que relacione a w con C, la oficina de correos tiene una regla para determinar C cuando se conoce w.

D. La aceleración vertical a de suelo, medida por un sismógrafo durante un terremoto, es una función del tiempo transcurrido t. La figura 1 muestra una gráfica generada por la actividad sísmica durante el terremoto de Northridge que sacudió Los Ángeles en 1994. Para un determinado valor de t, la gráfica proporciona un valor correspondiente de a.



Departamento de Minas y Geología de California

FIGURA 1
Aceleración vertical de suelo durante el terremoto de Northridge

Cada uno de estos ejemplos describe una regla según la cual, a un número dado (r, t, w o t), se le asigna otro número (A, P, C, o a). En cada caso decimos que el segundo número es una función del primero.

Una **función** f es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto D exactamente un elemento, llamado $f(x)$, de un conjunto E.

Usualmente consideramos funciones para los cuales los conjuntos D y E son conjuntos de números reales. Al conjunto D se le denomina **dominio** de la función. El número $f(x)$ es el **valor de f en x** y se lee "f *de* x". El **rango** de f es el conjunto de todos los valores posibles de $f(x)$ conforme x varía a través de todo el dominio. Un símbolo que representa un número arbitrario en el *dominio* de una función f se llama **variable independiente**. Un símbolo que representa un número en el *rango* de f se conoce como **variable dependiente**. En el ejemplo **A**, r es la variable independiente, y A es la variable dependiente.

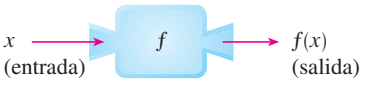


FIGURA 2
Diagrama de una función f como una máquina

Es útil pensar en una función como una **máquina** (véase la figura 2). Si x está en el dominio de la función f, cuando x entra en la máquina, que se acepta como una entrada, la máquina produce una salida $f(x)$ de acuerdo con la regla de la función. Así, podemos pensar el dominio como el conjunto de todas las posibles entradas, y en el rango como el conjunto de todas las posibles salidas.

Las funciones preprogramadas en una calculadora son buenos ejemplos de una función como una máquina. Por ejemplo, el comando raíz cuadrada en su calculadora computa esa función. Oprima la tecla etiquetada $\sqrt{\ }$ (o $\sqrt{x}$) e introduzca la entrada x; si $x < 0$, entonces x no está en el dominio de esta función; es decir, x no es una entrada aceptable, y la calculadora indicará un error. Si $x \geqslant 0$, entonces aparecerá una aproximación a $\sqrt{x}$ en la pantalla. Así, el comando $\sqrt{x}$ en la calculadora no es exactamente el mismo que la función matemática f definida por $f(x) = \sqrt{x}$.

Otra forma de imaginar una función es con un **diagrama de flechas** como en la figura 3. Cada flecha conecta un elemento de D con un elemento de E. La flecha indica que $f(x)$ está asociada con x, $f(a)$ está asociada con a, y así sucesivamente.

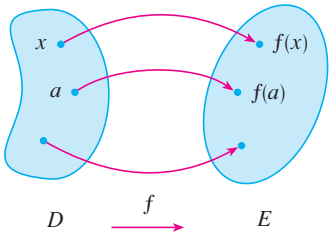


FIGURA 3
Diagrama de flechas para f

El método más común para la visualización de una función es con su gráfica. Si f es una función con dominio D, entonces su **gráfica** es el conjunto de pares ordenados

$$\{(x, f(x)) \mid x \in D\}$$

(Observe que estos son pares de entrada-salida). En otras palabras, la gráfica de f consta de todos los puntos (x, y) en el plano coordenado tales que $y = f(x)$ y x está en el dominio de f.

La gráfica de una función f nos da una imagen visual útil del comportamiento o "historia de vida" de una función. Dado que la coordenada y de cualquier punto (x, y) en el gráfico es $y = f(x)$, podemos leer el valor de $f(x)$ de la gráfica como la altura de la gráfica por encima del punto x (véase la figura 4). La gráfica de f permite también tener una imagen visual del dominio de f en el eje x y su rango en el eje y como en la figura 5.

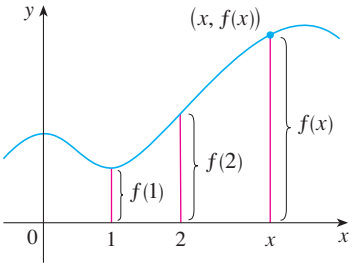


FIGURA 4

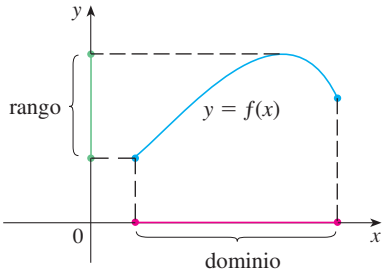


FIGURA 5

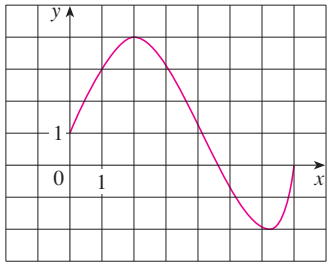


FIGURA 6

EJEMPLO 1 La gráfica de una función f se muestra en la figura 6.

a) Encuentre los valores de $f(1)$ y $f(5)$.

b) ¿Cuál es el dominio y el rango de f ?

SOLUCIÓN

a) De la figura 6 vemos que el punto (1, 3) está en la gráfica de f, por lo que el valor de f en 1 es $f(1) = 3$. (En otras palabras, el punto en la gráfica que se encuentra por encima de $x = 1$ está 3 unidades por encima del eje x.)

Cuando $x = 5$, la gráfica se encuentra aproximadamente a 0.7 unidades por debajo del eje x, así que estimamos que $f(5) \approx -0.7$.

b) Vemos que $f(x)$ está definida cuando $0 \leqslant x \leqslant 7$, por lo que el dominio de f es el intervalo cerrado $[0, 7]$. Observe que f toma todos los valores de -2 a 4, así que el rango de f es

$$\{y \mid -2 \leqslant y \leqslant 4\} = [-2, 4]$$

La notación por intervalos está dada en el apéndice A.

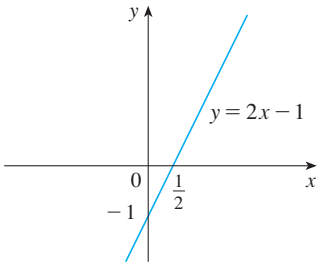


FIGURA 7

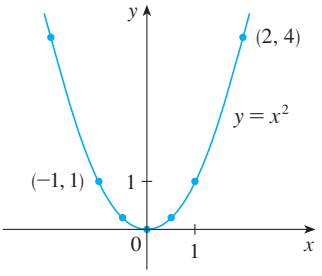


FIGURA 8

EJEMPLO 2 Trace la gráfica y encuentre el dominio y rango de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2x - 1$ b) $g(x) = x^2$

SOLUCIÓN

a) La ecuación de la gráfica es $y = 2x - 1$ y representa la ecuación de una recta con pendiente 2 e intersección con el eje y en $y = -1$ (recuerde que la forma pendiente-intersección de la ecuación de la recta es $y = mx + b$. Véase el apéndice B). Esto nos permite dibujar la porción de la gráfica de f en la figura 7. La expresión $2x - 1$ está definida para todos los números reales, así que el dominio de f es el conjunto $\mathbb{R}$ de todos los números reales. La gráfica muestra que el rango también es $\mathbb{R}$.

b) Dado que $g(2) = 2^2 = 4$ y $g(-1) = (-1)^2 = 1$, podemos ubicar los puntos $(2, 4)$ y $(-1, 1)$ junto con algunos otros puntos de la gráfica, y después unirlos para obtener la gráfica (figura 8). La ecuación de la gráfica es $y = x^2$ y representa una parábola (véase apéndice C). El dominio de g es $\mathbb{R}$, y el rango consiste en todos los valores de $g(x)$, esto es, todos los números de la forma x^2. Pero $x^2 \geqslant 0$ para todos los números x, y todo número y en estas condiciones es positivo, así que el rango de g es $\{y \mid y \geqslant 0\} = [0, \infty)$. Esto puede verse en la figura 8.

EJEMPLO 3 Si $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ y $h \neq 0$, evalúe $\dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$.

SOLUCIÓN Primero evaluamos $f(a + h)$ reemplazando x por $a + h$ en la expresión para $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(a + h) &= 2(a + h)^2 - 5(a + h) + 1 \\ &= 2(a^2 + 2ah + h^2) - 5(a + h) + 1 \\ &= 2a^2 + 4ah + 2h^2 - 5a - 5h + 1 \end{aligned}$$

Después sustituimos en la expresión dada y simplificamos:

$$\begin{aligned} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} &= \frac{(2a^2 + 4ah + 2h^2 - 5a - 5h + 1) - (2a^2 - 5a + 1)}{h} \\ &= \frac{2a^2 + 4ah + 2h^2 - 5a - 5h + 1 - 2a^2 + 5a - 1}{h} \\ &= \frac{4ah + 2h^2 - 5h}{h} = 4a + 2h - 5 \end{aligned}$$

La expresión

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

en el ejemplo 3 se llama **cociente de diferencias** y se presenta frecuentemente en cálculo. Como veremos en el capítulo 2, representa la razón de cambio de $f(x)$ entre $x = a$ y $x = a + h$.

Representaciones de funciones

Hay cuatro posibles maneras de representar una función:

- Verbalmente (por una descripción en palabras)
- Numéricamente (por una tabla de valores)
- Visualmente (por una gráfica)
- Algebraicamente (por una fórmula explícita)

Si una función puede representarse de las cuatro maneras, con frecuencia es muy útil pasar de una representación a otra a fin de disponer de información adicional de la función. (En el ejemplo 2, empezamos con formas algebraicas y de ellas obtuvimos gráficas.) Pero ciertas funciones se describen de manera más naturalmente por una forma que por otra. Con esto en mente, reexaminaremos las cuatro situaciones que consideramos al inicio de esta sección.

A. La representación probablemente más útil del área de un círculo como una función de su radio es la fórmula algebraica $A(r) = \pi r^2$, aunque es posible compilar una tabla de valores para esbozar una gráfica (la mitad de una parábola). Debido a que un círculo tiene un radio positivo, el dominio es $\{r \mid r > 0\} = (0, \infty)$, y el rango $(0, \infty)$.

t	Población (millones)
0	1 650
10	1 750
20	1 860
30	2 070
40	2 300
50	2 560
60	3 040
70	3 710
80	4 450
90	5 280
100	6 080
110	6 870

B. Se nos da una descripción de la función en palabras: $P(t)$ es la población humana del mundo en el tiempo t. Vamos a medir t, así que $t = 0$ se corresponde con el año 1900. La tabla de valores de la población mundial proporciona una representación adecuada de esta función. Si se grafican estos valores, obtenemos la gráfica (llamada gráfica de *dispersión*) en la figura 9. También es una representación útil porque la gráfica nos permite disponer de todos los datos a la vez. ¿Qué pasa con una fórmula? Por supuesto, es imposible concebir una fórmula explícita que proporcione la población humana exacta $P(t)$ en cualquier tiempo t. Pero es posible encontrar una expresión para una función que se *aproxime* a $P(t)$. De hecho, utilizando los métodos que se explican en la sección 1.2, conseguimos la aproximación

$$P(t) \approx f(t) = (1.43653 \times 10^9) \cdot (1.01395)^t$$

La figura 10 muestra que es un "ajuste" razonablemente bueno. La función f se llama *modelo matemático* para el crecimiento de la población. En otras palabras, es una función con una fórmula explícita que aproxima el comportamiento de nuestra función dada. Sin embargo, veremos que las ideas del Cálculo también pueden aplicarse a una tabla de valores; una fórmula explícita no es necesaria.

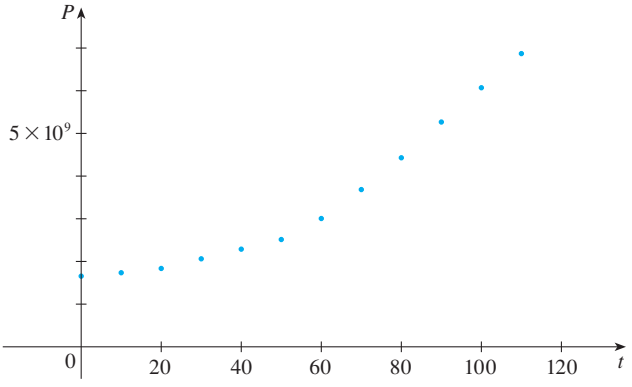


FIGURA 9

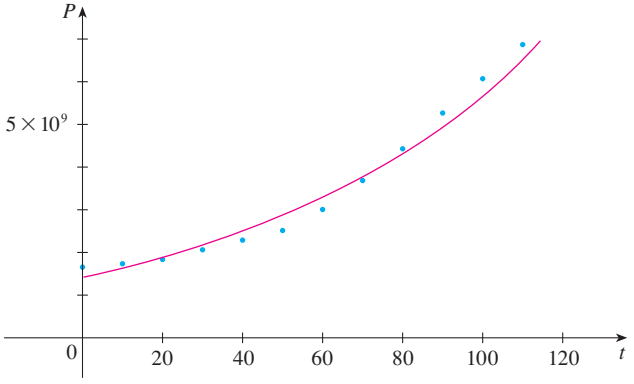


FIGURA 10

Una función definida por una tabla de valores se llama *función tabular*.

La función P es típica de aquellas que surgen cuando se intenta aplicar el Cálculo en el mundo real. Comenzamos con una descripción verbal de una función. A continuación, debemos ser capaces de elaborar una tabla de valores de la función; tal vez de lecturas del instrumento en un experimento científico. A pesar de que no tenemos un conocimiento completo de los valores de la función, veremos a lo largo del libro que todavía es posible realizar las operaciones del Cálculo con dicha función.

w (onzas)	$C(w)$ (dólares)
$0 < w \leq 1$	0.88
$1 < w \leq 2$	1.05
$2 < w \leq 3$	1.22
$3 < w \leq 4$	1.39
$4 < w \leq 5$	1.56
⋮	⋮

C. Nuevamente la función se describe con palabras: sea $C(w)$ el costo de envío por correo de un paquete con peso w. La regla que el Servicio Postal de EU utiliza desde 2010 es la siguiente: el costo es de 88 centavos de dólar para paquetes hasta de 1 onza, más 17 centavos por cada onza adicional (o menos) hasta 13 onzas. La tabla de valores que se muestran en el margen es la representación más conveniente para esta función, aunque es posible esbozar una gráfica (véase el ejemplo 10).

D. La gráfica que se muestra en la figura 1 es la representación más natural de la función aceleración vertical $a(t)$. Es cierto que podría elaborarse una tabla de valores, y que incluso es posible idear una fórmula aproximada. Pero todo lo que necesita saber un geólogo —las amplitudes y patrones— puede verse fácilmente en la gráfica. (Lo mismo es cierto para los patrones que se observan en los electrocardiogramas de pacientes que sufren del corazón y en polígrafos para la detección de mentiras).

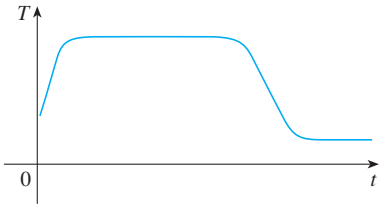


FIGURA 11

En el ejemplo siguiente, esboce la gráfica de una función definida verbalmente.

EJEMPLO 4 Al abrir un grifo de agua caliente, la temperatura T del agua depende de cuánto tiempo ha estado saliendo el agua. Dibuje un esbozo de gráfica de T como una función del tiempo t que ha transcurrido desde que fue abierto el grifo.

SOLUCIÓN La temperatura inicial del agua corriente es cercana a la temperatura ambiente porque el agua ha permanecido en las tuberías. Cuando empieza a salir el agua desde el tanque de agua caliente, T aumenta rápidamente. En la siguiente fase, T es constante a la temperatura del agua caliente en el tanque. Cuando el tanque se drena, T disminuye hasta la temperatura de la fuente de agua. Esto nos permite hacer el esbozo de T en función de t en la figura 11.

El siguiente ejemplo inicia con una descripción verbal de una función en una situación física, y hay que obtener una fórmula algebraica explícita. La capacidad para hacer esto es una habilidad útil para resolver problemas de Cálculo en los que se piden los valores máximo o mínimo de cantidades.

V EJEMPLO 5 Un contenedor rectangular sin tapa tiene un volumen de $10\,\text{m}^3$. La longitud de su base es dos veces su ancho. El material para la base cuesta \$10 por metro cuadrado, y el material para los lados cuesta \$6 por metro cuadrado. Exprese el costo de los materiales como una función del ancho de la base.

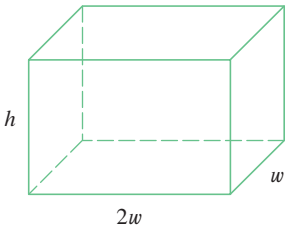


FIGURA 12

SOLUCIÓN Dibujamos un diagrama como el de la figura 12 e introducimos la notación w y $2w$ para el ancho y la longitud de la base, respectivamente, y h para la altura.

El área de la base es $w(2w) = 2w^2$, por lo que el costo en dólares de los materiales para la base es $10(2w^2)$. Dos de los lados tienen área wh, y los otros dos tienen área $2wh$, por lo que el costo de los materiales para los lados es $6[2(wh) + 2(2wh)]$. El costo total es, por tanto,

$$C = 10(2w^2) + 6[2(wh) + 2(2wh)] = 20w^2 + 36wh$$

Para expresar C sólo como una función de w, necesitamos eliminar h y para hacerlo utilizamos el hecho de que el volumen es de $10\,\text{m}^3$. Por tanto,

$$w(2w)h = 10$$

esto da

$$h = \frac{10}{2w^2} = \frac{5}{w^2}$$

Sustituyendo en la expresión para C, tenemos

$$C = 20w^2 + 36w\left(\frac{5}{w^2}\right) = 20w^2 + \frac{180}{w}$$

Por tanto, la ecuación

$$C(w) = 20w^2 + \frac{180}{w} \qquad w > 0$$

expresa C como una función de w.

RP Para establecer funciones aplicadas como en el ejemplo 5, puede ser útil revisar los principios de la resolución de problemas como se explica en la página 75, particularmente el paso 1: *comprender el problema.*

EJEMPLO 6 Encuentre el dominio de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{x + 2}$ *b)* $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$

SOLUCIÓN

a) Debido a que la raíz cuadrada de un número negativo no está definida (como un número real), el dominio de f consta de todos los valores de x tales que $x + 2 \geqslant 0$. Esto es equivalente a $x \geqslant -2$, por lo que el dominio es el intervalo $[-2, \infty)$.

Convención para el dominio
Si una función viene dada por una fórmula y el dominio no se expresa explícitamente, la convención es que el dominio es el conjunto de todos los números para los que la fórmula tiene sentido y define un número real.

b) Como

$$g(x) = \frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{x(x - 1)}$$

y no se permite la división entre 0, vemos que $g(x)$ no está definida cuando $x = 0$ o $x = 1$. Por tanto, el dominio de g es

$$\{x \mid x \neq 0, x \neq 1\}$$

que también puede escribirse en notación de intervalos como

$$(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$$

La gráfica de una función es una curva en el plano xy. Pero surge la pregunta: ¿qué curvas en el plano xy son gráficas de funciones? Esta pregunta se contesta con la siguiente prueba.

La prueba de la vertical Una curva en el plano xy es la gráfica de una función de x si y sólo si no hay recta vertical que intercepte la curva más de una vez.

La razón de la validez de la prueba de la vertical puede verse en la figura 13. Si cada recta vertical $x = a$ intercepta una curva sólo una vez, en (a, b), entonces se define exactamente un valor funcional para $f(a) = b$. Pero si una recta $x = a$ intercepta la curva dos veces, en (a, b) y (a, c), entonces la curva no puede representar una función debido a que una función no puede asignar dos valores diferentes de a.

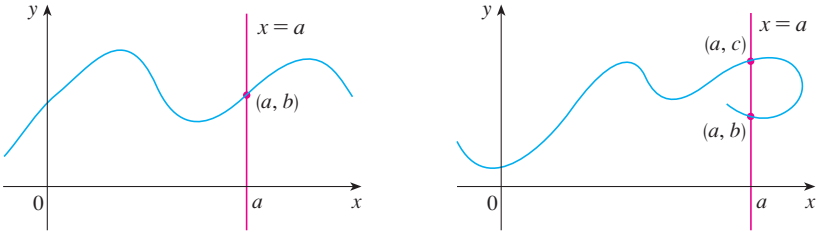


FIGURA 13

Por ejemplo, la parábola $x = y^2 - 2$ que se muestra en la figura 14 a) no es la gráfica de una función de x porque, como puede ver, hay rectas verticales que intersectan a la parábola dos veces. La parábola, sin embargo, contiene las gráficas de *dos* funciones de x. Note que la ecuación $x = y^2 - 2$ implica que $y^2 = x + 2$, así que $y = \pm\sqrt{x + 2}$. Por tanto, las mitades superior e inferior de la parábola son las gráficas de las funciones $f(x) = \sqrt{x + 2}$ [del ejemplo 6 a)] y $g(x) = -\sqrt{x + 2}$. [Véanse las figuras 14 b) y c).] Observamos que si invertimos los roles de x y y, entonces la ecuación $x = h(y) = y^2 - 2$ define a x como una función de y (con y como la variable independiente y x como la variable dependiente), y la parábola aparece ahora como la gráfica de la función h.

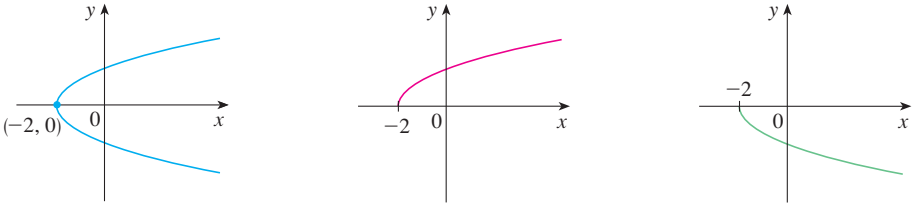


FIGURA 14

a) $x = y^2 - 2$ b) $y = \sqrt{x + 2}$ c) $y = -\sqrt{x + 2}$

Funciones definidas por secciones

Las funciones en los siguientes cuatro ejemplos se definen mediante diferentes fórmulas en distintos tramos de sus dominios. Estas funciones se denominan **funciones definidas por secciones**.

V EJEMPLO 7 Una función f está definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \leqslant -1 \\ x^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

Evalúe $f(-2)$, $f(-1)$ y $f(0)$ y grafique la función.

SOLUCIÓN Recuerde que una función es una regla. Para esta función en particular la regla es la siguiente: primero ver el valor de la entrada x. Si sucede que $x \leqslant -1$, entonces el valor de $f(x)$ se encuentra con $1 - x$. Por otro lado, si $x > -1$, entonces el valor de $f(x)$ se obtiene con x^2.

Puesto que $-2 \leqslant -1$, tenemos $f(-2) = 1 - (-2) = 3$

Puesto que $-1 \leqslant -1$, tenemos $f(-1) = 1 - (-1) = 2$

Puesto que $0 > -1$, tenemos $f(0) = 0^2 = 0$.

¿Cómo obtenemos la gráfica de f? Observamos que si $x \leqslant -1$, entonces $f(x) = 1 - x$, por lo que la parte de la gráfica de f que se encuentra a la izquierda de la recta vertical $x = -1$ debe coincidir con la recta $y = 1 - x$, que tiene pendiente -1 e intersección en $(0, 1)$. Si $x > -1$, entonces $f(x) = x^2$, por lo que la parte de la gráfica de f que se encuentra a la derecha de la recta $x = -1$ debe coincidir con la gráfica de $y = x^2$, que es una parábola. Esto nos permite esbozar la gráfica en la figura 15. El punto relleno indica que $(-1, 2)$ está incluido en la gráfica; el punto hueco indica que $(-1, 1)$ está excluido de la gráfica.

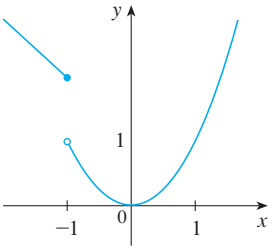


FIGURA 15

El siguiente ejemplo de una función definida por secciones es la función valor absoluto. Recuerde que el **valor absoluto** de un número a, denotado por $|a|$, es la distancia desde a hasta 0 en la recta de números reales. Las distancias son siempre positivas o cero, así tenemos que

$$|a| \geqslant 0 \qquad \text{para todo número } a$$

Para un repaso más amplio de valores absolutos, véase el apéndice A.

Por ejemplo,

$$|3| = 3 \qquad |-3| = 3 \qquad |0| = 0 \qquad |\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1 \qquad |3 - \pi| = \pi - 3$$

En general, tenemos

$$\begin{aligned} |a| &= a \quad \text{si } a \geqslant 0 \\ |a| &= -a \quad \text{si } a < 0 \end{aligned}$$

(Recuerde que si a es negativa, entonces $-a$ es positiva.)

EJEMPLO 8 Grafique la función valor absoluto $f(x) = |x|$.

SOLUCIÓN De la discusión precedente sabemos que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Utilizando el mismo método que en el ejemplo 7, vemos que la gráfica de f coincide con la recta $y = x$ a la derecha del eje y, y coincide con la recta $y = -x$ a la izquierda del eje y (véase la figura 16).

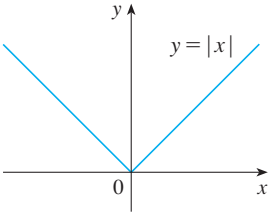


FIGURA 16

EJEMPLO 9 Encuentre una fórmula para la función f graficada en la figura 17.

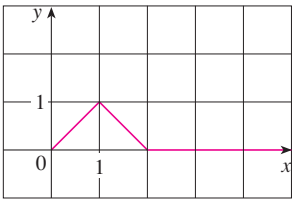


FIGURA 17

SOLUCIÓN La recta que pasa por (0, 0) y (1, 1) tiene pendiente $m = 1$ e intersección con el eje y en $b = 0$, por lo que su ecuación es $y = x$. Así, por la parte de la gráfica de f que une a (0, 0) con (1, 1), tenemos

$$f(x) = x \qquad \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1$$

Forma punto-pendiente de la ecuación de la recta:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Véase el apéndice B.

La recta que une a (1, 1) y (2, 0) tiene pendiente $m = -1$, por lo que su forma punto-pendiente es

$$y - 0 = (-1)(x - 2) \text{ o bien } y = 2 - x$$

Así tenemos $\qquad f(x) = 2 - x \qquad \text{si } 1 < x \leqslant 2$

También vemos que la gráfica de f coincide con el eje x para $x > 2$. Reuniendo esta información, tenemos la siguiente fórmula en tres secciones para f:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

EJEMPLO 10 En el ejemplo C al principio de esta sección hemos considerado el costo $C(w)$ de enviar por correo paquetes con peso w. En efecto, esto define una función por secciones porque, por la tabla de valores en la página 13, tenemos

$$C(w) = \begin{cases} 0.88 & \text{si } 0 < w \leqslant 1 \\ 1.05 & \text{si } 1 < w \leqslant 2 \\ 1.22 & \text{si } 2 < w \leqslant 3 \\ 1.39 & \text{si } 3 < w \leqslant 4 \\ \vdots & \end{cases}$$

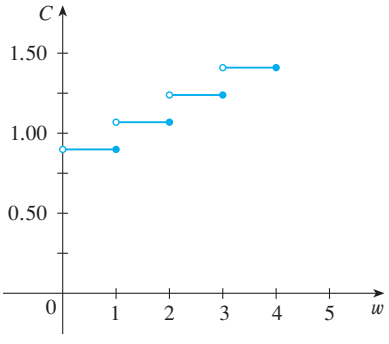


FIGURA 18

La gráfica se muestra en la figura 18. Puede verse por qué funciones similares a ésta se denominan **funciones escalón**: saltan de un valor al siguiente. Estas funciones se estudiarán en el capítulo 2.

Simetría

Si una función f satisface $f(-x) = f(x)$ para todo x en su dominio, entonces f es una **función par**. Por ejemplo, la función $f(x) = x^2$ es par porque

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

El significado geométrico de una función par es que su gráfica es simétrica respecto al eje

y (véase la figura 19). Esto significa que si hemos dibujado la gráfica para $x \geqslant 0$, obtenemos toda la gráfica simplemente reflejándola respecto al eje y.

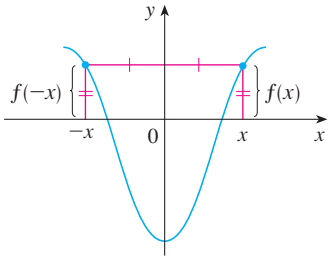


FIGURA 19 Una función par

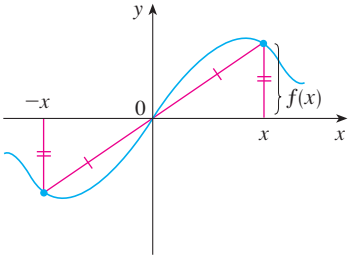


FIGURA 20 Una función impar

Si f satisface $f(-x) = -f(x)$ para cada x en su dominio, entonces f es una **función impar**. Por ejemplo, la función $f(x) = x^3$ es impar porque

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

La gráfica de una función impar es simétrica en relación con el origen (véase la figura 20). Si ya tenemos la gráfica de f para $x \geqslant 0$, podemos obtener toda la gráfica rotando 180° esta porción en relación con el origen.

V EJEMPLO 11 Determine si cada una de las siguientes funciones es par, impar o ninguna de las dos.

a) $f(x) = x^5 + x$ b) $g(x) = 1 - x^4$ c) $h(x) = 2x - x^2$

SOLUCIÓN

a)
$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^5 + (-x) = (-1)^5 x^5 + (-x) \\ &= -x^5 - x = -(x^5 + x) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

Por tanto, f es una función impar.

b)
$$g(-x) = 1 - (-x)^4 = 1 - x^4 = g(x)$$

Así que g es par.

c)
$$h(-x) = 2(-x) - (-x)^2 = -2x - x^2$$

Como $h(-x) \neq h(x)$ y $h(-x) \neq -h(x)$, concluimos que h no es par ni impar.

Las gráficas de las funciones del ejemplo 11 se muestran en la figura 21. Observe que la gráfica de h no es simétrica respecto al eje y ni en relación con el origen.

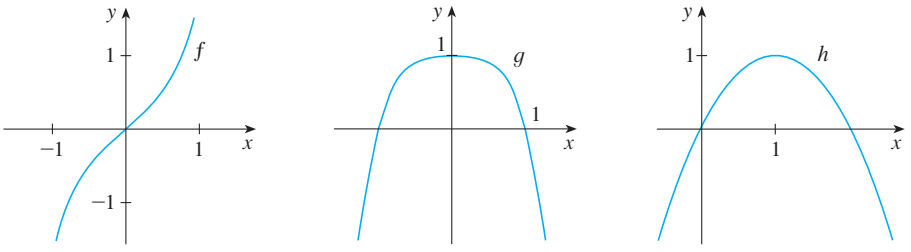


FIGURA 21 a) b) c)

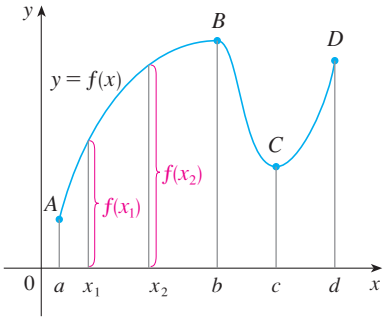


FIGURA 22

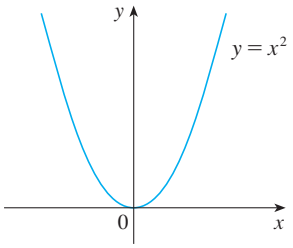


FIGURA 23

Funciones crecientes y decrecientes

La gráfica que se muestra en la figura 22 sube desde A hasta B, desciende de B a C y sube otra vez de C a D. Se dice que la función f es creciente sobre el intervalo $[a, b]$, decreciente sobre $[b, c]$ y creciente nuevamente sobre $[c, d]$. Observe que si x_1 y x_2 son dos números entre a y b con $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$. Utilizamos esta propiedad para definir una función creciente.

Una función f se llama *creciente* sobre un intervalo I si

$$f(x_1) < f(x_2) \qquad \text{siempre que } x_1 < x_2 \text{ en } I$$

Se llama **decreciente** sobre I si

$$f(x_1) > f(x_2) \qquad \text{siempre que } x_1 < x_2 \text{ en } I$$

En la definición de una función creciente, es importante darse cuenta de que la desigualdad $f(x_1) < f(x_2)$ debe cumplirse para *todo* par de números x_1 y x_2 en I con $x_1 < x_2$.

Puede observarse en la figura 23 que la función $f(x) = x^2$ es decreciente sobre el intervalo $(-\infty, 0]$ y creciente sobre el intervalo $[0, \infty)$.

1.1 Ejercicios

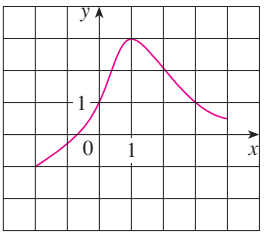
1. Si $f(x) = x + \sqrt{2 - x}$ y $g(u) = u + \sqrt{2 - u}$, ¿es verdad que $f = g$?

2. Si

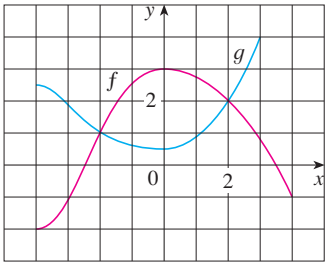
$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x - 1} \qquad \text{y} \qquad g(x) = x$$

¿es verdad que $f = g$?

3. La gráfica de una función f está dada.
a) Establezca el valor de $f(1)$.
b) Estime el valor de $f(-1)$.
c) ¿Para qué valores de x es $f(x) = 1$?
d) Estime el valor de x tal que $f(x) = 0$.
e) Establezca el dominio y el rango de f.
f) ¿Sobre qué intervalo es creciente f?



4. Las gráficas de f y g están dadas.
a) Establezca los valores de $f(-4)$ y $g(3)$.
b) ¿Para qué valores de x es $f(x) = g(x)$?
c) Estime la solución de la ecuación $f(x) = -1$.
d) ¿Sobre qué intervalo es decreciente f?
e) Establezca el dominio y el rango de f
f) Establezca el dominio y el rango de g.



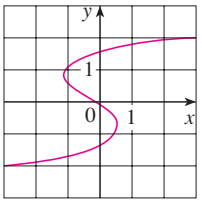
5. La gráfica de la figura 1 fue registrada por un instrumento operado por el Departamento de Minas y Geología de California en el Hospital Universitario de la Universidad de California del Sur (USC, por sus siglas en inglés) en Los Ángeles. Utilice esta gráfica para estimar el rango de la función aceleración vertical de suelo, en la USC durante el terremoto de Northridge.

6. En esta sección discutimos ejemplos de funciones cotidianas: la población es una función del tiempo, el costo de envío postal es una función del peso, la temperatura del agua es una función del tiempo. Dar otros tres ejemplos de funciones de la vida cotidiana que se describen verbalmente. ¿Qué puede decir sobre el dominio y el rango de cada una de sus funciones? Si es posible, esboce una gráfica de cada función.

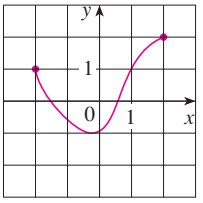
1. Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

7-10 Determine si la curva es la gráfica de una función de x. Si lo es, establezca el dominio y el rango de la función.

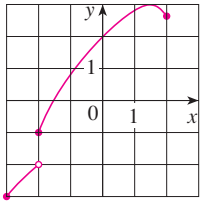
7.



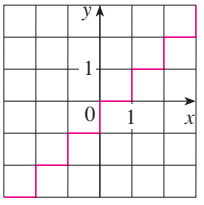
8.



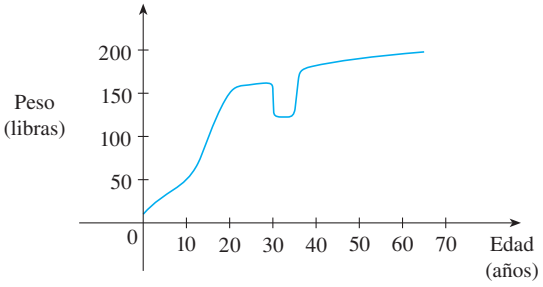
9.



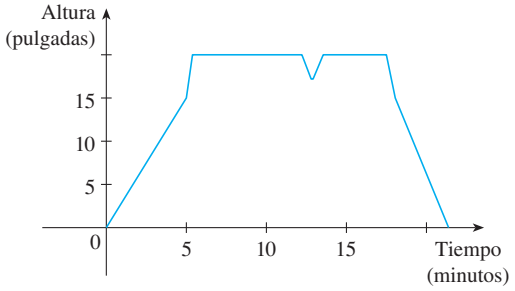
10.



11. La gráfica que se muestra da el peso de una determinada persona en función de la edad. Describa con palabras cómo el peso de esta persona varía con el tiempo. ¿Qué cree que ocurrió cuando esta persona tenía 30 años?

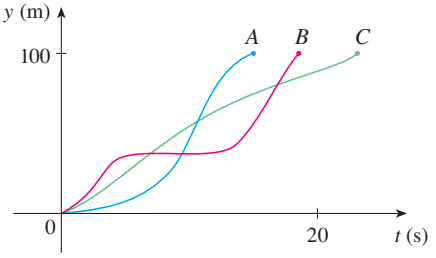


12. La gráfica muestra la altura del agua en una bañera en función del tiempo. Proporcione una descripción verbal de lo que cree que sucedió.



13. Se ponen unos cubitos de hielo en un vaso, se llena el vaso con agua fría y luego se coloca sobre una mesa. Describa cómo cambia la temperatura del agua conforme transcurre el tiempo. Luego esboce una gráfica de la temperatura del agua como una función del tiempo transcurrido.

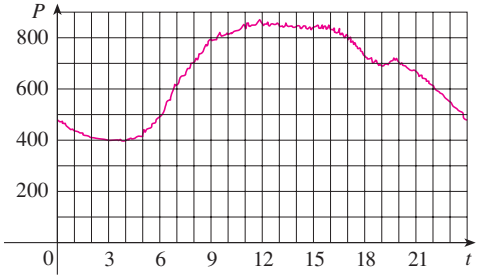
14. Tres corredores compiten en una carrera de 100 metros. La gráfica muestra la distancia recorrida como una función del tiempo de cada corredor. Describa en palabras lo que la gráfica indica acerca de esta carrera. ¿Quién ganó la carrera? ¿Cada corredor terminó la carrera?



15. La gráfica muestra el consumo de potencia para un día en septiembre en San Francisco. (P se mide en megavatios; t se registra en horas a partir de la medianoche).

a) ¿Cuál fue el consumo de potencia a las 6:00? ¿A las 18:00?

b) ¿Cuándo fue el consumo de potencia más bajo? ¿Cuándo fue el más alto? ¿Estos tiempos parecen razonables?



Pacific Gas & Electric

16. Esboce una gráfica aproximada del número de horas de luz en función de la época del año.

17. Esboce una gráfica de la temperatura exterior en función del tiempo, durante un día típico de primavera.

18. Esboce una gráfica aproximada del valor de mercado de un nuevo automóvil en función del tiempo, durante un periodo de 20 años. Suponga que el automóvil se mantiene en buen estado.

19. Esboce la gráfica de la cantidad de una determinada marca de café vendido por una tienda, en función del precio del café.

20. Coloque una tarta congelada en un horno y caliéntela durante una hora. Luego sáquela y déjela enfriar antes de comerla. Describa cómo cambia la temperatura de la tarta conforme pasa el tiempo. Luego esboce una gráfica de la temperatura de la tarta en función del tiempo.

21. El propietario de una casa poda el césped cada miércoles por la tarde. Esboce una gráfica de la altura del césped como una función del tiempo, en el transcurso de un periodo de cuatro semanas.

22. Un avión despega desde un aeropuerto y aterriza una hora más tarde en otro aeropuerto a 400 millas de distancia. Si t representa el tiempo en minutos desde que el avión ha dejado la

terminal, $x(t)$ es la distancia horizontal recorrida y $y(t)$ la altitud del avión, esboce
a) una posible gráfica de $x(t)$.
b) una posible gráfica de $y(t)$.
c) una posible gráfica de la rapidez respecto al suelo.
d) una posible gráfica de la velocidad vertical.

23. En la tabla se muestra el número N (en millones) de usuarios de telefonía celular en EU. (Se dan estimaciones semestrales.)

t	1996	1998	2000	2002	2004	2006
N	44	69	109	141	182	233

a) Utilice los datos para esbozar una gráfica de N en función de t.
b) Utilice su gráfica para estimar el número de usuarios de teléfono celular a mediados de año en 2001 y en 2005.

24. Las siguientes lecturas de temperatura T (en °F) se registraron cada dos horas desde la medianoche a las 14:00 en Phoenix, el 10 de septiembre de 2008. El tiempo t se midió en horas a partir de la medianoche.

t	0	2	4	6	8	10	12	14
T	82	75	74	75	84	90	93	94

a) Utilice las lecturas para esbozar una gráfica de T como una función de t.
b) Utilice la gráfica para estimar la temperatura a las 9:00.

25. Si $f(x) = 3x^2 - x + 2$, encuentre $f(2)$, $f(-2)$, $f(a)$, $f(-a)$, $f(a+1)$, $2f(a)$, $f(2a)$, $f(a^2)$, $[f(a)]^2$ y $f(a+h)$.

26. Un globo esférico con radio de r pulgadas tiene volumen $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Encuentre una función que represente la cantidad de aire necesaria para inflar el globo de un radio de r pulgadas a un radio $r + 1$ pulgadas.

27-30 Evalúe el cociente de diferencias de cada una de las siguientes funciones. Simplifique su respuesta.

27. $f(x) = 4 + 3x - x^2$, $\dfrac{f(3+h) - f(3)}{h}$

28. $f(x) = x^3$, $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

29. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

30. $f(x) = \dfrac{x+3}{x+1}$, $\dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

31-37 Encuentre el dominio de cada una de las siguientes funciones.

31. $f(x) = \dfrac{x+4}{x^2 - 9}$

32. $f(x) = \dfrac{2x^3 - 5}{x^2 + x - 6}$

33. $f(t) = \sqrt[3]{2t - 1}$

34. $g(t) = \sqrt{3 - t} - \sqrt{2 + t}$

35. $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^2 - 5x}}$

36. $f(u) = \dfrac{u+1}{1 + \dfrac{1}{u+1}}$

37. $F(p) = \sqrt{2 - \sqrt{p}}$

38. Encuentre el dominio y el rango, y dibuje la gráfica de la función $h(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

39-50 Encuentre el dominio y grafique cada una de las siguientes funciones:

39. $f(x) = 2 - 0.4x$

40. $F(x) = x^2 - 2x + 1$

41. $f(t) = 2t + t^2$

42. $H(t) = \dfrac{4 - t^2}{2 - t}$

43. $g(x) = \sqrt{x - 5}$

44. $F(x) = |2x + 1|$

45. $G(x) = \dfrac{3x + |x|}{x}$

46. $g(x) = |x| - x$

47. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < 0 \\ 1 - x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

48. $f(x) = \begin{cases} 3 - \frac{1}{2}x & \text{si } x \leqslant 2 \\ 2x - 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

49. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \leqslant -1 \\ x^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

50. $f(x) = \begin{cases} x + 9 & \text{si } x < -3 \\ -2x & \text{si } |x| \leqslant 3 \\ -6 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

51-56 Encuentre una expresión para la función cuya gráfica es la curva dada.

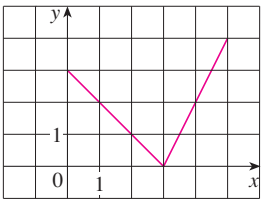
51. El segmento de recta que une los puntos $(1, -3)$ y $(5, 7)$.

52. El segmento de recta que une los puntos $(-5, 10)$ y $(7, -10)$.

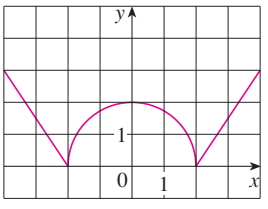
53. La mitad inferior de la parábola $x + (y - 1)^2 = 0$.

54. La mitad superior de la circunferencia $x^2 + (y - 2)^2 = 4$.

55.



56.



57-61 Encuentre una fórmula y su dominio para cada una de las siguientes funciones descritas.

57. Un rectángulo tiene 20 m de perímetro. Exprese el área del rectángulo en función de la longitud de uno de sus lados.

58. Un rectángulo tiene 16 m^2 de área. Exprese el perímetro del rectángulo en función de la longitud de uno de sus lados.

59. Exprese el área de un triángulo equilátero, como función de la longitud de un lado.

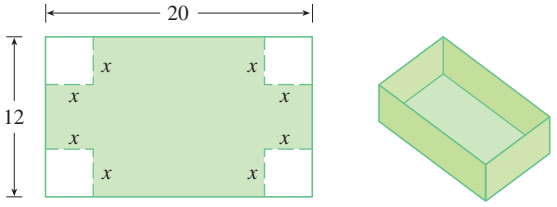
60. Exprese el área superficial de un cubo en función de su volumen.

61. Una caja rectangular abierta con 2 m^3 de volumen tiene una base cuadrada. Exprese el área superficial de la caja en función de la longitud de uno de los lados de la base.

62. Una ventana normanda tiene la forma de un rectángulo coronado por un semicírculo. Si el perímetro de la ventana es de 30 pies, exprese el área A de la ventana en función del ancho x de la ventana.



63. Debe construirse una caja sin tapa, a partir de una hoja rectangular de cartón que tiene dimensiones de 12 por 20 pulgadas, recortando cuadrados iguales de lado x en cada una de las esquinas y plegando los lados como se ilustra en la figura. Exprese el volumen V de la caja en función de x.



64. Un plan de telefonía celular tiene una carga básica de 35 dólares al mes. El plan incluye 400 minutos gratis y cargos de 10 centavos de dólar por cada minuto adicional de uso. Escriba el costo mensual C, como una función del número x de minutos utilizados, y grafique C como una función para $0 \leqslant x \leqslant 600$.

65. En cierto estado del país, la velocidad máxima permitida en autopistas es 65 mi/h y la velocidad mínima es de 40 mi/h. La multa para los conductores que violan estos límites es $15 por cada milla por hora por encima de la velocidad máxima o por debajo de la velocidad mínima. Exprese el monto de la multa F como una función de la velocidad de conducción x y grafique $F(x)$ para $0 \leqslant x \leqslant 100$.

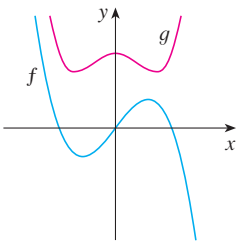
66. Una compañía de electricidad cobra a sus clientes una tasa base de 10 dólares al mes, más 6 centavos de dólar por kilovatio-hora (kWh) por los primeros 1200 kWh y 7 centavos de dólar por kWh para todo uso sobre 1200 kWh. Exprese el costo mensual E en función de la cantidad x de electricidad utilizada. Después, grafique la función E para $0 \leqslant x \leqslant 2000$.

67. En un determinado país, el impuesto sobre la renta se calcula como sigue. No hay impuesto sobre la renta para ingresos de hasta $10 000. Los ingresos de más de $10 000 se gravan con una tasa del 10%, hasta un ingreso de $20 000. Los ingresos superiores a $20 000 se gravan en 15%.
a) Esboce la gráfica de la tasa impositiva R en función de los ingresos.
b) ¿Qué impuesto corresponde a un ingreso de $14 000? ¿Y de $26 000?
c) Esboce la gráfica del impuesto total T en función del ingreso I.

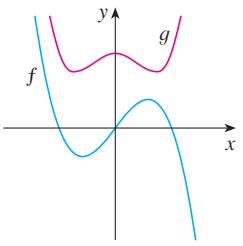
68. Las funciones del ejemplo 10 y el ejercicio 67 se denominan *funciones escalón* porque sus gráficas parecen escaleras. Sugiera dos ejemplos de funciones escalón que surgen en la vida cotidiana.

69-70 Se muestran las gráficas de f y g. Determine si cada función es par, impar o ninguna de las dos. Explique su razonamiento.

69.

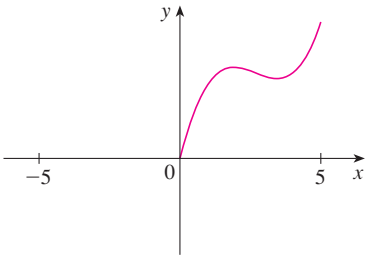


70.



71. a) Si el punto (5, 3) está en la gráfica de una función par, ¿cuál otro punto también debe estar en la gráfica?
b) Si el punto (5, 3) está en la gráfica de una función impar, ¿cuál otro punto también debe estar en la gráfica?

72. Una función f tiene dominio $[-5, 5]$ y se muestra una porción de su gráfica.
a) Complete la gráfica de f si se sabe que f es par.
b) Complete la gráfica de f si se conoce que f es impar.



73-78 Determine si f es par, impar o ninguna de las dos. Si tiene una calculadora graficadora, utilícela para verificar visualmente su respuesta.

73. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

74. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^4 + 1}$

75. $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$

76. $f(x) = x\,|x|$

77. $f(x) = 1 + 3x^2 - x^4$

78. $f(x) = 1 + 3x^3 - x^5$

79. Si f y g son funciones pares, ¿es $f + g$ par? Si f y g son funciones impares, ¿es $f + g$ impar? ¿Qué sucede si f es par y g es impar? Justifique sus respuestas.

80. Si f y g son dos funciones pares, ¿es el producto fg par? Si f y g son dos funciones impares, ¿es fg impar? ¿Qué sucede si f es par y g es impar? Justifique sus respuestas.

1.2 Modelos matemáticos: un catálogo de funciones esenciales

Un **modelo matemático** es una descripción matemática (a menudo por medio de una función o una ecuación) de un fenómeno real, como el tamaño de una población, la demanda de un producto, la velocidad de un objeto que cae, la concentración de un producto en una reacción química, la esperanza de vida de una persona al nacer, o el costo de la reducción de las emisiones. El propósito del modelo es comprender el fenómeno y tal vez hacer predicciones sobre su comportamiento futuro.

La figura 1 ilustra el proceso de modelado matemático. Dado un problema del mundo real, nuestra primera tarea es formular un modelo matemático mediante la identificación y etiquetado de las variables dependientes e independientes, y haciendo supuestos que simplifiquen lo suficiente el fenómeno para que sea matemáticamente manejable. Utilizamos nuestro conocimiento de la situación física y nuestras habilidades matemáticas para obtener ecuaciones que relacionen las variables. En situaciones donde no hay ninguna ley física para que nos guíe, podemos necesitar recopilar datos (ya sea en una biblioteca, en internet o mediante la realización de nuestros propios experimentos) y examinar los datos en forma de una tabla para poder identificar patrones. A partir de la representación numérica de una función, podemos obtener una representación gráfica. En algunos casos, la gráfica podría hasta sugerir una forma algebraica adecuada.

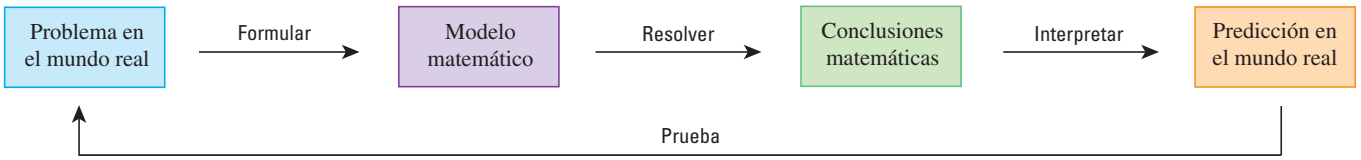


FIGURA 1 El proceso de modelado

La segunda etapa consiste en aplicar las matemáticas que conocemos (p. ej., el Cálculo que se desarrollará a lo largo de este libro) al modelo matemático que hemos formulado a fin de obtener conclusiones matemáticas. A continuación, en la tercera etapa, tomamos esas conclusiones matemáticas y las interpretamos como información sobre el fenómeno original del mundo real con el propósito de dar explicaciones o hacer predicciones. El último paso es poner a prueba nuestras predicciones comparando contra nuevos datos reales. Si las predicciones no coinciden con una buena aproximación con la realidad, necesitamos afinar nuestro modelo o formular uno nuevo y empezar otra vez el ciclo.

Un modelo matemático nunca es una representación completamente precisa de una situación física: es una idealización. Un buen modelo simplifica la realidad lo suficiente para permitir hacer cálculos matemáticos, pero es razonablemente preciso para proporcionar valiosas conclusiones. Es importante percatarse de las limitaciones del modelo porque, finalmente, la Madre Naturaleza tiene la última palabra.

Hay muchos tipos diferentes de funciones que pueden utilizarse para modelar relaciones observadas en el mundo real. En lo que sigue, analizaremos el comportamiento y gráfica de estas funciones y daremos ejemplos de situaciones adecuadamente modeladas por ellas.

Modelos lineales

En el apéndice B se repasa la geometría analítica de las rectas.

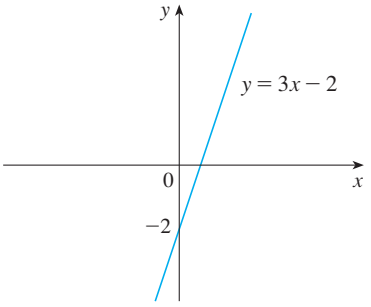
Cuando decimos que y es una **función lineal** de x, queremos decir que la gráfica de la función es una recta, de manera que podemos utilizar la forma pendiente-intersección de

la ecuación de la recta para escribir una fórmula para la función como

$$y = f(x) = mx + b$$

donde m es la pendiente de la recta y b es la intersección de la recta con el eje y.

Un rasgo característico de las funciones lineales es que crecen a una razón constante. Por ejemplo, la figura 2 muestra una gráfica de la función lineal $f(x) = 3x - 2$ y una tabla con algunos de sus valores. Observe que cuando x aumenta por 0.1, el valor de $f(x)$ aumenta por 0.3. Así que $f(x)$ aumenta tres veces más rápido que x. De este modo, la pendiente de la gráfica $y = 3x - 2$, es decir 3, lo que puede interpretarse como la razón de cambio de y respecto a x.



x	$f(x) = 3x - 2$
1.0	1.0
1.1	1.3
1.2	1.6
1.3	1.9
1.4	2.2
1.5	2.5

FIGURA 2

V EJEMPLO 1

a) Cuando el aire seco se mueve hacia arriba, se expande y se enfría. Si la temperatura del suelo es 20 °C, y la temperatura a 1 km de altura es de 10 °C, exprese la temperatura T (en °C) en función de la altura h (en kilómetros), suponiendo que un modelo lineal es adecuado.

b) Dibuje la gráfica de la función del inciso a). ¿Qué representa la pendiente?

c) ¿Cuál es la temperatura a 2.5 km de altura?

SOLUCIÓN

a) Ya que suponemos que T es una función lineal de h, podemos escribir

$$T = mh + b$$

Estamos teniendo en cuenta que $T = 20$ cuando $h = 0$, por lo que

$$20 = m \cdot 0 + b = b$$

En otras palabras, la intersección con el eje y es $b = 20$.

Dado que $T = 10$ cuando $h = 1$, tenemos que

$$10 = m \cdot 1 + 20$$

La pendiente de la recta es, por tanto, $m = 10 - 20 = -10$, y la función lineal requerida es

$$T = -10h + 20$$

b) La gráfica se muestra en la figura 3. La pendiente es $m = -10$ °C/km y representa la razón de cambio de temperatura respecto a la altura.

c) A una altura de $h = 2.5$ km, la temperatura es

$$T = -10(2.5) + 20 = -5°\text{C}$$

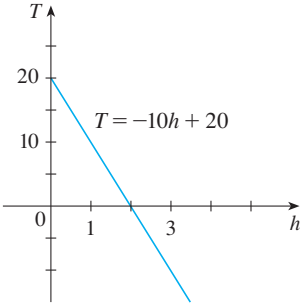


FIGURA 3

Si no hay ley física o principio que nos ayude a formular un modelo, construimos un modelo empírico que se base completamente en los datos recopilados. Buscamos una curva que "encaje" en los datos, en el sentido que sugiera la tendencia básica de los puntos que representan los datos.

V EJEMPLO 2 La tabla 1 muestra el nivel promedio de dióxido de carbono en la atmósfera, medido en partes por millón en el Observatorio Mauna Loa, desde 1980 a 2008. Utilice los datos de la tabla 1 para encontrar un modelo para el nivel de dióxido de carbono.

SOLUCIÓN Utilizamos los datos de la tabla 1 para hacer la gráfica de dispersión en la figura 4, donde t representa el tiempo (en años) y C, el nivel de CO_2 (en partes por millón, ppm).

TABLA 1

Año	Nivel de CO_2 (en ppm)	Año	Nivel de CO_2 (en ppm)
1980	338.7	1996	362.4
1982	341.2	1998	366.5
1984	344.4	2000	369.4
1986	347.2	2002	373.2
1988	351.5	2004	377.5
1990	354.2	2006	381.9
1992	356.3	2008	385.6
1994	358.6		

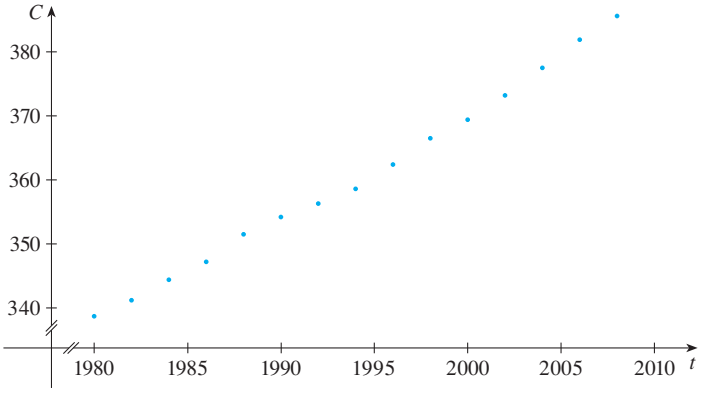


FIGURA 4 La gráfica de dispersión para el nivel promedio de CO_2

Observe que los puntos de datos parecen estar cercanos a una recta, por lo que es natural que se elija un modelo lineal en este caso. Pero hay muchas rectas posibles que se aproximan a estos puntos de datos, así que, ¿cuál debemos usar? Una posibilidad es la recta que pasa por el primero y el último puntos de datos. La pendiente de esta recta es

$$\frac{385.6 - 338.7}{2008 - 1980} = \frac{46.9}{28} = 1.675$$

y su ecuación es

$$C - 338.7 = 1.675(t - 1980)$$

o bien

$$C = 1.675t - 2977.8 \qquad \boxed{1}$$

La ecuación 1 da un posible modelo lineal para el nivel de dióxido de carbono y se representa gráficamente en la figura 5.

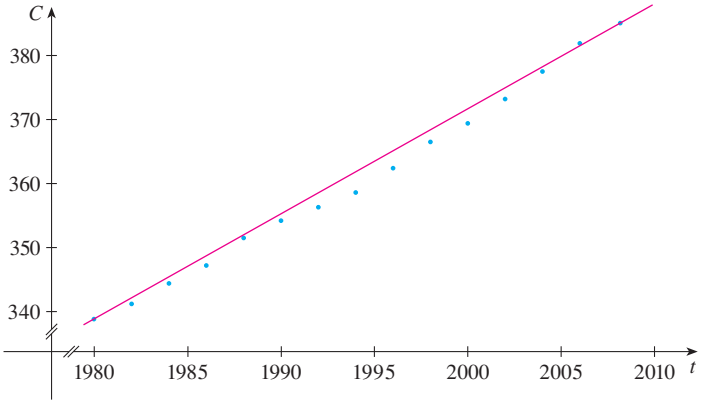


FIGURA 5
Modelo lineal a través del primero y el último puntos de información

Una computadora o una calculadora graficadora encuentran la recta de regresión por el método de **mínimos cuadrados**, que consiste en minimizar la suma de los cuadrados de las distancias verticales entre los puntos de datos y la recta. Los detalles se explican en la sección 14.7.

Observe que nuestro modelo da valores por encima de la mayoría de los niveles reales de CO_2. Un mejor modelo lineal se obtiene por un procedimiento estadístico llamado *regresión lineal*. Si utilizamos una calculadora graficadora, introducimos los datos de la tabla 1 en el editor de datos y elegimos el comando de regresión lineal (con Maple utilizamos el comando fit[leastsquare] en el paquete de estadística; con Mathematica utilizamos el comando Fit). La máquina da la pendiente y la ordenada al origen de la recta de regresión

$$m = 1.65429 \qquad b = -2938.07$$

Por lo que nuestro modelo de mínimos cuadrados para el nivel de CO_2 es

$$C = 1.65429t - 2938.07 \tag{2}$$

En la figura 6 graficamos la recta de regresión, así como los puntos de datos. Comparando con la figura 5, vemos que da un mejor ajuste que nuestro anterior modelo lineal.

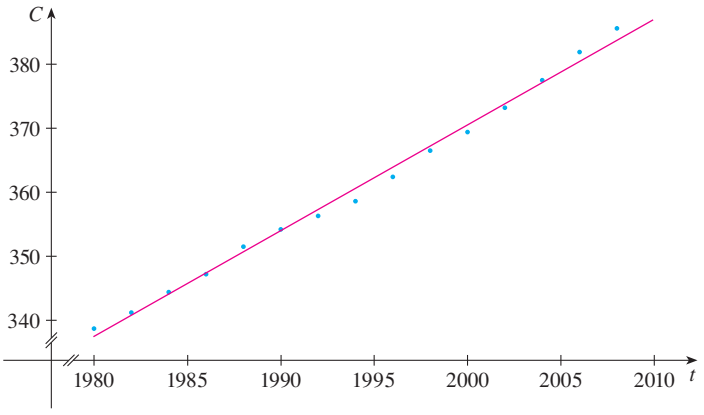


FIGURA 6
Recta de regresión

V EJEMPLO 3 Utilice el modelo lineal dado por la ecuación 2 para estimar el nivel promedio de CO_2 para 1987 y predecir el nivel para el año 2015. De acuerdo con este modelo, ¿cuándo el nivel de CO_2 superará 420 partes por millón?

SOLUCIÓN Mediante la ecuación 2 con $t = 1987$, estimamos que el nivel promedio de CO_2 en 1987 fue

$$C(1987) = (1.65429)(1987) - 2938.07 \approx 349.00$$

Éste es un ejemplo de *interpolación* porque hemos estimado un valor entre los valores observados. (De hecho, el Observatorio Mauna Loa informó que el nivel promedio de CO_2 en 1987 fue de 348.93 ppm, por lo que nuestra estimación es bastante precisa.)

Con $t = 2015$, obtenemos

$$C(2015) = (1.65429)(2015) - 2938.07 \approx 395.32$$

Por lo que auguramos que el nivel promedio de CO_2 en el año 2015 será 395.3 ppm. Este es un ejemplo de *extrapolación* porque hemos predicho un valor fuera de la región de observaciones. En consecuencia, estamos mucho menos seguros acerca de la precisión de nuestra predicción. Utilizando la ecuación 2, vemos que el nivel de CO_2 supera las 420 ppm cuando

$$1.65429t - 2938.07 > 420$$

Resolviendo esta desigualdad, obtenemos

$$t > \frac{3358.07}{1.65429} \approx 2029.92$$

Por tanto, predecimos que el nivel de CO_2 superará 420 ppm para el año 2030. Esta predicción es riesgosa porque se trata de un tiempo bastante alejado de nuestras observaciones. De hecho, podemos ver en la figura 6 que la tendencia ha sido de un rápido aumento para los niveles de CO_2 en los últimos años, por lo que el nivel podría superar los 420 ppm antes de 2030.

Polinomiales

Una función P se llama **polinomial** si

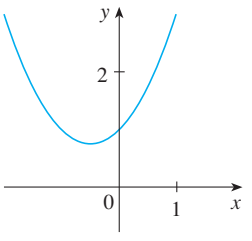
$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

donde n es un número entero no negativo y $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ son constantes llamadas los **coeficientes** de la polinomial. El dominio de cualquier polinomial es $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Si el coeficiente principal $a_n \neq 0$, entonces el **grado** de la polinomial es n. Por ejemplo, la función

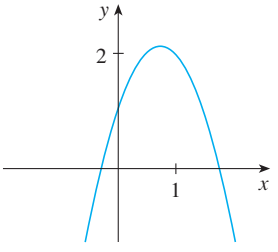
$$P(x) = 2x^6 - x^4 + \tfrac{2}{5}x^3 + \sqrt{2}$$

es una polinomial de grado 6.

Una polinomial de grado 1 es de la forma $P(x) = mx + b$, por lo que es una función lineal. Una polinomial de grado 2 es de la forma $P(x) = ax^2 + bx + c$ y se llama **función cuadrática**. Su gráfica es siempre una parábola obtenida por desplazamientos de la parábola $y = ax^2$, como se verá en la siguiente sección. La parábola abre hacia arriba si $a > 0$ y hacia abajo si $a < 0$. (Véase la figura 7.)



a) $y = x^2 + x + 1$



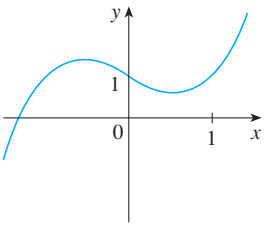
b) $y = -2x^2 + 3x + 1$

FIGURA 7
Las gráficas de una función cuadrática son parábolas

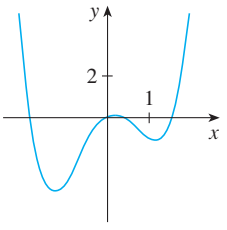
Una polinomial de grado 3 es de la forma

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad a \neq 0$$

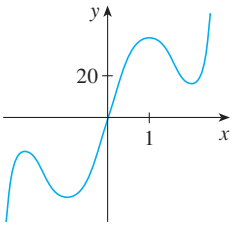
y se llama **función cúbica**. La figura 8 muestra la gráfica de una función cúbica en el inciso a) y las gráficas de polinomiales de grados 4 y 5 en los incisos b) y c). Veremos más adelante por qué las gráficas tienen esas formas.



a) $y = x^3 - x + 1$



b) $y = x^4 - 3x^2 + x$



c) $y = 3x^5 - 25x^3 + 60x$

FIGURA 8

Las polinomiales se utilizan comúnmente para modelar diversas cantidades que se presentan en las ciencias naturales y sociales. Por ejemplo, en la sección 3.7 explicaremos por qué los economistas usan a menudo una polinomial $P(x)$ para representar el costo de producir x unidades de una mercancía. En el siguiente ejemplo, utilizamos una función cuadrática para modelar la caída de una pelota.

TABLA 2

Tiempo (segundos)	Altura (metros)
0	450
1	445
2	431
3	408
4	375
5	332
6	279
7	216
8	143
9	61

EJEMPLO 4 Se deja caer una pelota desde la plataforma de observación de la Torre CN, a 450 m por encima del suelo. Las sucesivas alturas h de la pelota por encima del suelo están registradas a intervalos de 1 segundo, en la tabla 2. Encuentre un modelo para ajustar los datos y utilice ese modelo para predecir el momento en que la pelota golpeará el suelo.

SOLUCIÓN En la figura 9 se traza una gráfica de dispersión con la información disponible y se observa que un modelo ideal no es adecuado. Pero parece ser que los puntos de datos podrían acomodarse a una parábola, por lo que intentamos un modelo cuadrático. Utilizando una calculadora graficadora o computadora (que utiliza el método de los mínimos cuadrados), obtenemos el siguiente modelo cuadrático:

$$h = 449.36 + 0.96t - 4.90t^2 \quad \boxed{3}$$

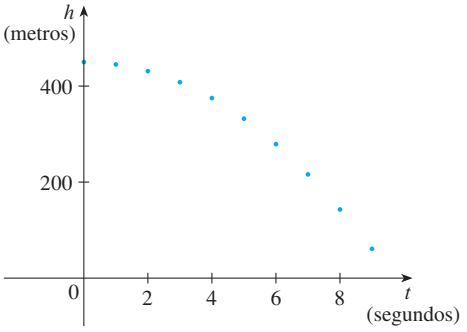


FIGURA 9
Gráfica de dispersión para la caída de una pelota

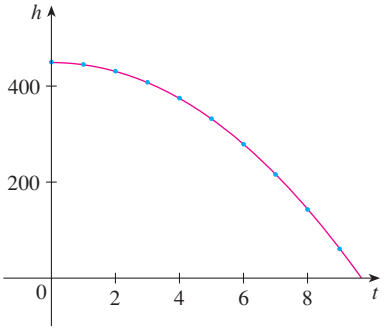


FIGURA 10
Modelo cuadrático para la caída de una pelota

En la figura 10 dibujamos la gráfica de la ecuación 3 junto con los puntos de datos y vemos que el modelo cuadrático es muy buen ajuste.

La pelota golpea el suelo cuando $h = 0$, por lo que resolvemos la ecuación cuadrática

$$-4.90t^2 + 0.96t + 449.36 = 0$$

La ecuación cuadrática da

$$t = \frac{-0.96 \pm \sqrt{(0.96)^2 - 4(-4.90)(449.36)}}{2(-4.90)}$$

La raíz positiva es $t \approx 9.67$, por lo que pronosticamos que la pelota golpeará el suelo después de aproximadamente 9.7 segundos.

Funciones potencia

Una función de la forma $f(x) = x^a$, donde a es una constante, se llama **función potencia**. Consideramos varios casos.

i) $a = n$, donde n es un número entero positivo

Las gráficas de $f(x) = x^n$ para $x = 1, 2, 3, 4$ y 5 se muestran en la figura 11. (Estas son polinomiales con un sólo término.) Ya sabemos la forma de la gráfica de $y = x$ (una recta que pasa por el origen con pendiente 1) y $y = x^2$ [una parábola, véase el ejemplo 2b) en la sección 1.1].

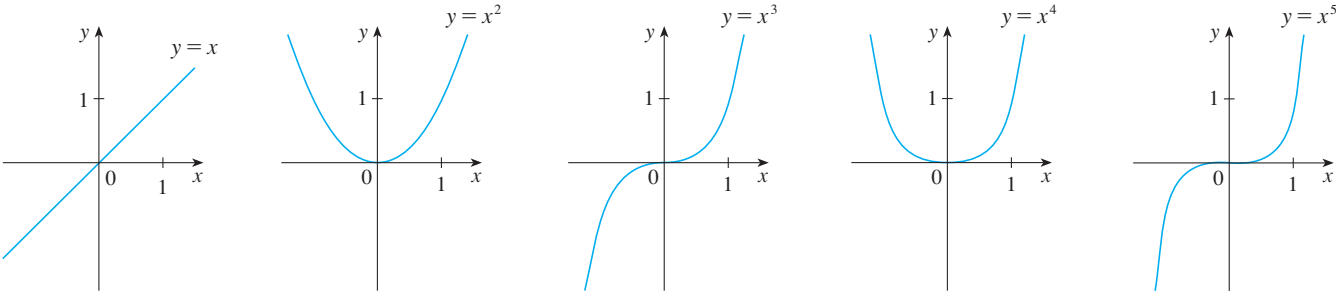


FIGURA 11 Gráficas de $f(x) = x^n$ para $n = 1, 2, 3, 4, 5$

La forma general de la gráfica de $f(x) = x^n$ depende de si n es par o impar. Si n es par, entonces $f(x) = x^n$ es una función par, y su gráfica es similar a la parábola $y = x^2$. Si n es impar, entonces $f(x) = x^n$ es una función impar, y su gráfica es similar a la de $y = x^3$. Observe en la figura 12, sin embargo, que cuando n aumenta, la gráfica de $y = x^n$ se aplana más cerca de 0 y es más pronunciada cuando $|x| \geqslant 1$. (Si x es pequeña, entonces x^2 es más pequeña, x^3 es aún más pequeña, x^4 es todavía más pequeña aún, y así sucesivamente.)

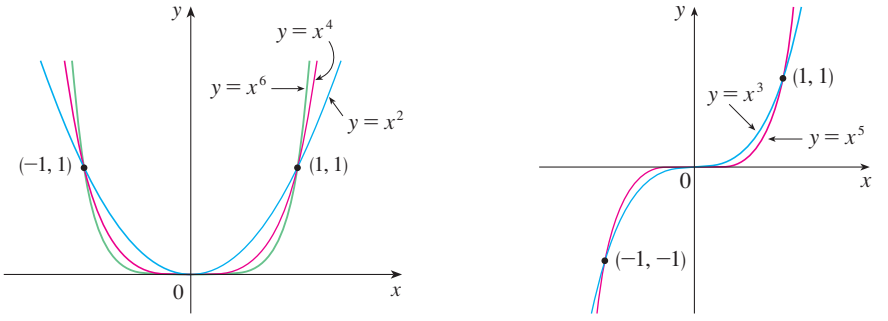


FIGURA 12
Familia de funciones potencia

ii) $a = 1/n$, donde n es un número entero positivo

La función $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ es una **función raíz**. Para $n = 2$ es la función raíz cuadrada $f(x) = \sqrt{x}$, con dominio en $[0, \infty)$ y cuya gráfica es la mitad superior de la parábola $x = y^2$. [Véase la figura 13a)]. Para otros valores pares de n, la gráfica de $y = \sqrt[n]{x}$ es similar a la de $y = \sqrt{x}$. Para $n = 3$ tenemos la función raíz cúbica $f(x) = \sqrt[3]{x}$ con dominio en $\mathbb{R}$ (recuerde que todo número real tiene raíz cúbica) y cuya gráfica se muestra en la figura 13b). La gráfica de $y = \sqrt[n]{x}$ para n impar ($n > 3$) es similar a la de $y = \sqrt[3]{x}$.

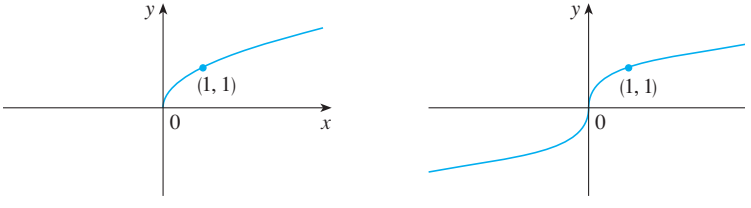


FIGURA 13
Gráficas de funciones raíz

a) $f(x) = \sqrt{x}$ b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

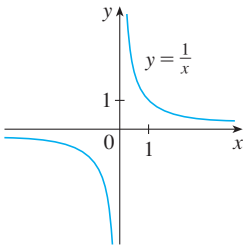


FIGURA 14
La función recíproca

iii) $a = -1$

La gráfica de la **función recíproca** $f(x) = x^{-1} = 1/x$ se muestra en la figura 14. Su gráfica tiene la ecuación $y = 1/x$ o $xy = 1$, y es una hipérbola con los ejes de coordenadas como sus asíntotas. Esta función surge en física y química en relación con la ley de Boyle, que dice que, cuando la temperatura es constante, el volumen V de un gas es inversamente proporcional a la presión P:

$$V = \frac{C}{P}$$

donde C es una constante. Así, la gráfica de V en función de P (véase la figura 15) tiene la misma forma general que la mitad derecha de la figura 14.

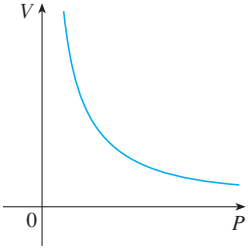


FIGURA 15
El volumen como una función de la presión a temperatura constante

Las funciones potencia también se utilizan para modelar relaciones especie-área (ejercicios 26-27), la iluminación como una función de la distancia a una fuente de luz (ejercicio 25) y el periodo de revolución de un planeta en función de su distancia al Sol (ejercicio 28).

Funciones racionales

Una **función racional** f es un cociente de dos funciones polinomiales:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P y Q son polinomiales. El dominio consiste en todos los valores de x tales que $Q(x) \neq 0$. Un ejemplo simple de una función racional es $f(x) = 1/x$, cuyo dominio es $\{x \mid x \neq 0\}$; esta es la función recíproca graficada en la figura 14. La función

$$f(x) = \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$$

es una función racional con dominio $\{x \mid x \neq \pm 2\}$. La gráfica se muestra en la figura 16.

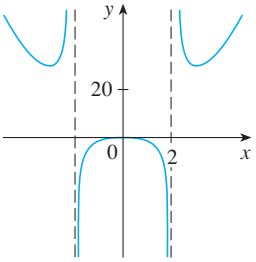


FIGURA 16
$f(x) = \dfrac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$

Funciones algebraicas

Una función f se llama *función algebraica* si puede construirse utilizando operaciones algebraicas (como suma, resta, multiplicación, división y tomando raíces) comenzando con las polinomiales. Cualquier función racional es automáticamente una función algebraica. Aquí hay dos ejemplos más:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \qquad g(x) = \frac{x^4 - 16x^2}{x + \sqrt{x}} + (x - 2)\sqrt[3]{x + 1}$$

Cuando esbocemos funciones algebraicas en el capítulo 4, veremos que sus gráficas pueden tener una variedad de formas. La figura 17 ilustra algunas de las posibilidades.

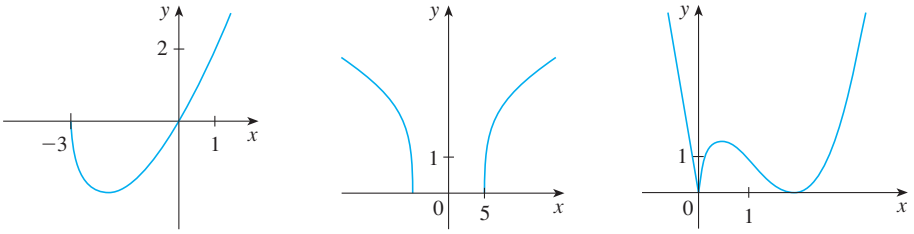


FIGURA 17 a) $f(x) = x\sqrt{x+3}$ b) $g(x) = \sqrt[4]{x^2 - 25}$ c) $h(x) = x^{2/3}(x-2)^2$

Un ejemplo de una función algebraica se produce en la teoría de la relatividad. La masa de una partícula con velocidad v

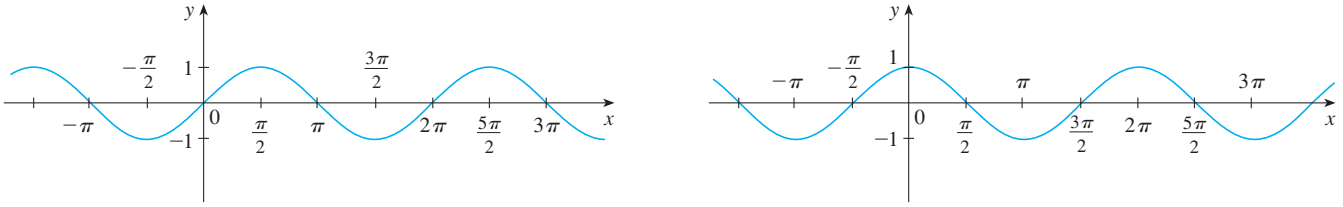
$$m = f(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

donde m_0 es la masa en reposo de la partícula y $c = 3.0 \times 10^5 \text{km/s}$ es la velocidad de la luz en el vacío.

Funciones trigonométricas

Las páginas de referencia se encuentran en la parte final del libro.

La trigonometría y las funciones trigonométricas se repasan en la página de referencia 2 y también en el apéndice D. En Cálculo, por convención, siempre se utilizan medidas en radianes (excepto cuando se indique lo contrario). Por ejemplo, cuando utilizamos la función $f(x) = \text{sen } x$, se sobreentiende que sen x significa el seno de un ángulo cuya medida en radianes es x. Así, las gráficas de las funciones seno y coseno son como se muestra en la figura 18.



a) $f(x) = \text{sen } x$ b) $g(x) = \cos x$

FIGURA 18

Observe que para las funciones seno y coseno el dominio es $(-\infty, \infty)$, y el rango es el intervalo cerrado $[-1, 1]$. Por tanto, para todos los valores de x, tenemos

$$-1 \leqslant \text{sen } x \leqslant 1 \qquad -1 \leqslant \cos x \leqslant 1$$

o bien, en términos de valor absoluto,

$$|\text{sen } x| \leqslant 1 \qquad |\cos x| \leqslant 1$$

También, los ceros de la función seno se producen en los múltiplos enteros de π; es decir,

$$\text{sen } x = 0 \quad \text{cuando} \quad x = n\pi \quad \text{donde} \quad n \text{ es un entero}$$

Una propiedad importante de las funciones seno y coseno es que son funciones periódicas con periodo 2π. Esto significa que, para todos los valores de x,

$$\text{sen } (x + 2\pi) = \text{sen } x \qquad \cos (x + 2\pi) = \cos x$$

El carácter periódico de estas funciones las hace adecuadas para modelar fenómenos repetitivos, como las olas del mar, resortes en vibración y las ondas de sonido. Por ejemplo, en el ejemplo 4 en la sección 1.3 veremos que un modelo razonable para el número de horas de luz solar en Filadelfia t días de después del 1 de enero viene dado por la función

$$L(t) = 12 + 2.8 \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right]$$

La función tangente está relacionada con las funciones seno y coseno por la ecuación

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

y su gráfica se muestra en la figura 19. Está indefinida siempre que $\cos x = 0$, es decir, cuando $x = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \ldots$ Su rango es $(-\infty, \infty)$. Observe que la función tangente tiene periodo π:

$$\tan(x + \pi) = \tan x \qquad \text{para toda } x$$

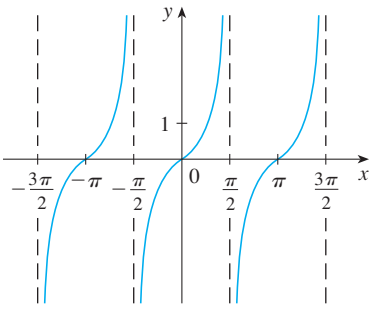


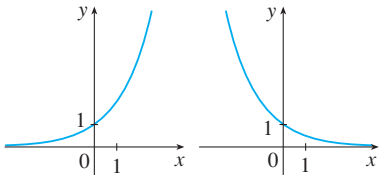
FIGURA 19
$y = \tan x$

Las tres funciones trigonométricas restantes (cosecante, secante y cotangente) son los recíprocos de las funciones seno, coseno y tangente. Sus gráficas aparecen en el apéndice D.

Funciones exponenciales

Las **funciones exponenciales** son funciones de la forma $f(x) = a^x$, donde la base a es una constante positiva. Las gráficas de $y = 2^x$ y $y = (0, 5)^x$ se muestran en la figura 20. En ambos casos el dominio es $(-\infty, \infty)$, y el rango es $(0, \infty)$.

Las funciones exponenciales serán estudiadas en detalle en la sección 1.5, y veremos que son útiles para modelar muchos fenómenos naturales, como el crecimiento de una población (si $a > 1$) y la desintegración radiactiva (si $a < 1$).



a) $y = 2^x$ b) $y = (0.5)^x$

FIGURA 20

Funciones logarítmicas

Las **funciones logarítmicas** $f(x) = \log_a x$, donde la base a es una constante positiva, son las funciones inversas de las funciones exponenciales, que estudiaremos en la sección 1.6. La figura 21 muestra las gráficas de cuatro funciones logarítmicas con diferentes bases. En cada caso el dominio es $(0, \infty)$, el rango es $(-\infty, \infty)$, y la función crece lentamente cuando $x > 1$.

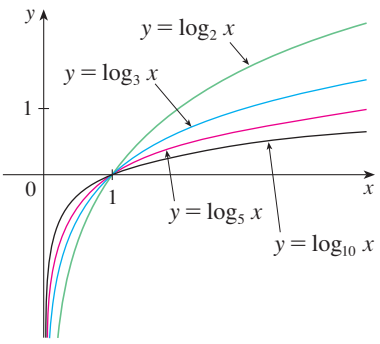


FIGURA 21

EJEMPLO 5 Clasifique las siguientes funciones como uno de los tipos de funciones que hemos discutido.

a) $f(x) = 5^x$

b) $g(x) = x^5$

c) $h(x) = \dfrac{1 + x}{1 - \sqrt{x}}$

d) $u(t) = 1 - t + 5t^4$

SOLUCIÓN

a) $f(x) = 5^x$ es una función exponencial. (La x es el exponente.)

b) $g(x) = x^5$ es una función potencia. (La x es la base.) Podría considerarse como una función polinomial de grado 5.

c) $h(x) = \dfrac{1 + x}{1 - \sqrt{x}}$ es una función algebraica.

d) $u(t) = 1 - t + 5t^4$ es una función polinomial de grado 4.

1.2 Ejercicios

1-2 Clasifique cada función como una función potencia, función raíz, polinomial (establezca su grado), función racional, función algebraica, función trigonométrica, función exponencial o función logarítmica.

1. a) $f(x) = \log_2 x$ b) $g(x) = \sqrt[4]{x}$

c) $h(x) = \dfrac{2x^3}{1 - x^2}$ d) $u(t) = 1 - 1.1t + 2.54t^2$

e) $v(t) = 5^t$ f) $w(\theta) = \operatorname{sen}\theta \cos^2\theta$

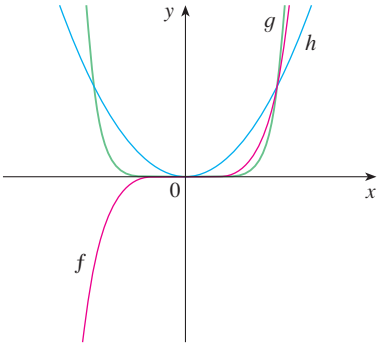
2. a) $y = \pi^x$ b) $y = x^\pi$

c) $y = x^2(2 - x^3)$ d) $y = \tan t - \cos t$

e) $y = \dfrac{s}{1 + s}$ f) $y = \dfrac{\sqrt{x^3 - 1}}{1 + \sqrt[3]{x}}$

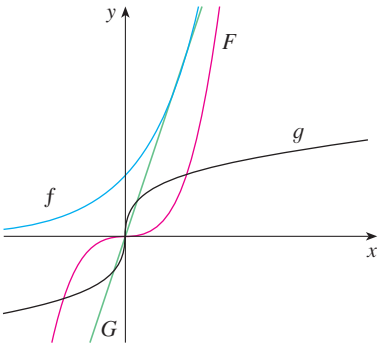
3-4 Relacione cada una de las siguientes ecuaciones con su gráfica. Explique el porqué de su elección. (No utilice computadora o calculadora graficadora.)

3. a) $y = x^2$ b) $y = x^5$ c) $y = x^8$



4. a) $y = 3x$ b) $y = 3^x$

c) $y = x^3$ d) $y = \sqrt[3]{x}$

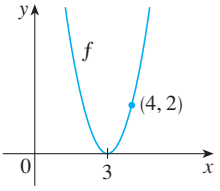


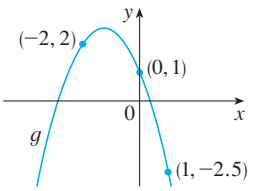
5. a) Encuentre una ecuación para la familia de funciones lineales con pendiente 2 y esboce varios miembros de la familia.
b) Encuentre una ecuación para la familia de funciones lineales tal que $f(2) = 1$ y esboce varios miembros de la familia.
c) ¿Qué función pertenece a ambas familias?

6. ¿Qué tienen en común todos los miembros de la familia de funciones lineales $f(x) = 1 + m(x + 3)$? Esboce varios miembros de la familia.

7. ¿Qué tienen en común todos los miembros de la familia de funciones lineales $f(x) = c - x$? Esboce varios miembros de la familia.

8. Encuentre expresiones para las funciones cuadráticas cuyas gráficas se muestran.





9. Encuentre una expresión para una función cúbica f si $f(1) = 6$ y $f(-1) = f(0) = f(2) = 0$.

10. Estudios recientes indican que la temperatura promedio de la superficie de la Tierra ha estado aumentando. Algunos científicos han modelado la temperatura con la función lineal $T = 0.02t + 8.50$, donde T es la temperatura en °C y t representa años desde 1900.
a) ¿Qué representan la pendiente y la intersección con el eje T?
b) Utilice la ecuación para predecir la temperatura promedio de la superficie global en 2100.

11. Si D (en mg) es la dosis de un medicamento recomendada para adultos, entonces, para determinar la dosis apropiada c para un niño de edad a, el farmacéutico utiliza la ecuación $c = 0.0417D(a + 1)$. Supongamos que la dosis para un adulto es de 200 mg.
a) Encuentre la pendiente de la gráfica de c. ¿Qué representa?
b) ¿Cuál es la dosis para un recién nacido?

12. El administrador de un bazar de fin de semana sabe por experiencia que si cobra x dólares por el alquiler de un espacio en el bazar, entonces el número y de espacios que puede alquilar viene dado por la ecuación $y = 200 - 4x$.
a) Trace la gráfica de esta función lineal. (Recuerde que la renta por el espacio y el número de espacios alquilados no pueden ser cantidades negativas.)
b) ¿Qué representan la pendiente, la intersección con el eje y la intersección con el eje x de la gráfica?

13. La relación entre las escalas de temperatura Fahrenheit (F) y Celsius (C) está dada por la función lineal $F = \frac{9}{5}C + 32$.
a) Trace la gráfica de esta función.
b) ¿Cuál es la pendiente de la gráfica y qué representa? ¿Cuál es la intersección con el eje F y qué representa?

14. Jason sale de Detroit a las 14:00 y conduce a rapidez constante hacia el oeste a lo largo de la carretera I-96. Pasa por Ann Arbor, a 40 mi de Detroit, a las 14:50.
a) Exprese la distancia recorrida en términos del tiempo transcurrido.

b) Dibuje la gráfica de la ecuación del inciso a).
c) ¿Cuál es la pendiente de esta recta? ¿Qué representa?

15. Los biólogos han observado que la tasa de chirridos que emiten los grillos de una determinada especie está relacionada con la temperatura, y la relación parece ser casi lineal. Un grillo produce 113 chirridos por minuto a 70°F y 173 chirridos por minuto a 80°F.
a) Encuentre una ecuación lineal que modele la temperatura T, en función del número N de chirridos por minuto.
b) ¿Cuál es la pendiente de la gráfica? ¿Qué representa?
c) Si los grillos están chirreando a 150 chirridos por minuto, estime la temperatura.

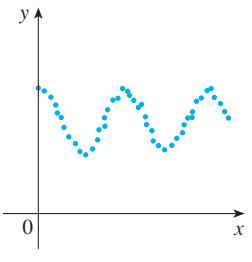
16. El gerente de una fábrica de muebles encontró que cuesta $2 200 fabricar 100 sillas en un día y $4 800 producir 300 sillas en un solo día.
a) Exprese el costo en función del número de sillas producidas, suponiendo que es lineal. A continuación trace la gráfica.
b) ¿Cuál es la pendiente de la gráfica y qué representa?
c) ¿Cuál es la intersección en y de la gráfica y qué representa?

17. En la superficie del océano, la presión del agua es la misma que la presión del aire por encima del agua, 15 lb/pulg^2. Debajo de la superficie, la presión del agua aumenta 4.34 lb/pulg^2 por cada 10 pies de descenso.
a) Exprese la presión del agua en función de la profundidad bajo la superficie del océano.
b) ¿A qué profundidad la presión es de 100 lb/pulg^2?

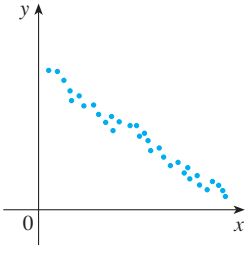
18. El costo mensual de conducir un coche depende del número de millas recorridas. Lynn encontró que en mayo le costó $380 conducir 480 millas y en junio le costó $460 conducir 800 millas.
a) Exprese el costo mensual C como una función de la distancia recorrida d, suponiendo que una relación lineal da un modelo adecuado.
b) Utilice el inciso a) para predecir el costo de conducir 1 500 millas por mes.
c) Dibuje la gráfica de la función lineal. ¿Qué representa la pendiente?
d) ¿Qué representa la intersección en C?
e) ¿Por qué una función lineal es un modelo adecuado en esta situación?

19-20 Para cada una de las siguientes gráficas de dispersión, ¿qué tipo de función elegiría como un modelo para los datos? Explique sus elecciones.

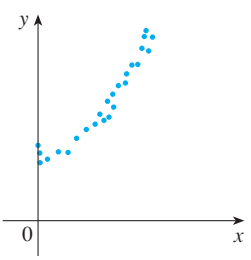
19. a)



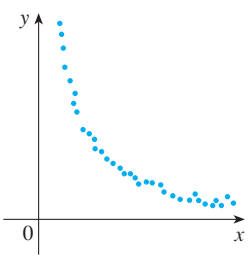
b)



20. a)



b)



21. La tabla muestra la tasa de úlcera péptica (de por vida) (por cada 100 habitantes) en relación con el ingreso de varias familiares según lo informado por la Encuesta Nacional de Entrevista de Salud.

Ingreso	Tasa de úlcera (por cada 100 habitantes)
$4 000	14.1
$6 000	13.0
$8 000	13.4
$12 000	12.5
$16 000	12.0
$20 000	12.4
$30 000	10.5
$45 000	9.4
$60 000	8.2

a) Elabore una gráfica de dispersión con estos datos y decida si es apropiado un modelo lineal.
b) Encuentre y grafique un modelo lineal utilizando el primero y el último puntos de datos.
c) Encuentre y grafique la recta de regresión por mínimos cuadrados.
d) Utilice el modelo lineal del inciso c) para estimar la tasa de úlcera para un ingreso de $25 000.
e) Según el modelo, ¿qué tan probable es que alguien que percibe un ingreso de $80 000 sufra de úlcera péptica?
f) ¿Cree que sería razonable aplicar el modelo a alguien con un ingreso de $200 000?

22. Los biólogos han observado que la tasa de chirridos de grillos de una determinada especie, parece estar relacionada con la temperatura. La tabla muestra la cantidad de chirridos para distintas temperaturas.

Temperatura (°F)	Tasa de chirridos (chirridos/min)	Temperatura (°F)	Tasa de chirridos (chirridos/min)
50	20	75	140
55	46	80	173
60	79	85	198
65	91	90	211
70	113		

a) Elabore una gráfica de dispersión de los datos.
b) Encuentre y grafique la recta de regresión.
c) Utilice el modelo lineal del inciso b) para estimar la tasa chirridos a 100°F.

23. La tabla da las alturas ganadoras en las competencias olímpicas de salto con pértiga masculinas hasta el año 2004.

Año	Altura (m)	Año	Altura (m)
1896	3.30	1960	4.70
1900	3.30	1964	5.10
1904	3.50	1968	5.40
1908	3.71	1972	5.64
1912	3.95	1976	5.64
1920	4.09	1980	5.78
1924	3.95	1984	5.75
1928	4.20	1988	5.90
1932	4.31	1992	5.87
1936	4.35	1996	5.92
1948	4.30	2000	5.90
1952	4.55	2004	5.95
1956	4.56		

a) Elabore una gráfica de dispersión y decida si es apropiado un modelo lineal.
b) Encuentre y grafique la recta de regresión.
c) Utilice el modelo lineal para predecir la altura del salto ganador con pértiga en los Juegos Olímpicos de 2008 y compárelo con el salto ganador real de 5.96 metros.
d) ¿Es razonable utilizar el modelo para predecir la altura ganadora en los Juegos Olímpicos de 2100?

24. La tabla muestra el porcentaje de la población de Argentina que ha vivido en las zonas rurales de 1955 al 2000. Encuentre un modelo para los datos y utilícelo para estimar el porcentaje rural en 1988 y 2002.

Año	Porcentaje rural	Año	Porcentaje rural
1955	30.4	1980	17.1
1960	26.4	1985	15.0
1965	23.6	1990	13.0
1970	21.1	1995	11.7
1975	19.0	2000	10.5

25. Muchas de las cantidades físicas están relacionadas mediante *leyes de los cuadrados inversos*, es decir, por las funciones potencia de la forma $f(x) = kx^{-2}$. En particular, la iluminación de un objeto por una fuente de luz es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a la fuente. Suponga que al anochecer está en una habitación con una lámpara y que está intentando leer un libro. La luz es demasiado tenue, por lo que mueve la lámpara a la mitad de la distancia. ¿Cuánto más ilumina la luz al libro?

26. Tiene sentido afirmar que cuanto mayor sea el área de una región, es mayor el número de especies que habitan la región. Muchos ecólogos han modelado la relación de especies de la zona con una función potencia y, en particular, el número de especies S de murciélagos que habitan en cuevas en México ha estado relacionado con el área superficial A de las cuevas por la ecuación $S = 0.7A^{0.3}$.

a) La cueva llamada *Misión imposible*, situada cerca de Puebla, México, tiene una superficie de $A = 60\,\text{m}^2$. ¿Cuántas especies de murciélagos esperaría encontrar en esa cueva?
b) Si descubre que cuatro especies de murciélagos viven en una cueva, estime el área de la cueva.

27. La tabla muestra el número N de especies de reptiles y anfibios que habitan en las islas del Caribe y el área A de la isla en millas cuadradas.

Isla	A	N
Saba	4	5
Monserrat	40	9
Puerto Rico	3 459	40
Jamaica	4 411	39
Española	29 418	84
Cuba	44 218	76

a) Utilice una función potencia para modelar N como una función de A.
b) La isla caribeña de Dominica tiene un área $291\,\text{m}^2$. ¿Cuántas especies de reptiles y anfibios esperaría encontrar en Dominica?

28. La tabla muestra las distancias d (promedio) del Sol (tomando la unidad de medida como la distancia entre la Tierra y el Sol) y sus periodos T (tiempo de revolución en años).

Planeta	d	T
Mercurio	0.387	0.241
Venus	0.723	0.615
Tierra	1.000	1.000
Marte	1.523	1.881
Júpiter	5.203	11.861
Saturno	9.541	29.457
Urano	19.190	84.008
Neptuno	30.086	164.784

a) Ajuste un modelo potencia para los datos.
b) La tercera ley de movimiento planetario de Kepler afirma que "el cuadrado del periodo de revolución de un planeta es proporcional al cubo de su distancia media al Sol". ¿Su modelo corrobora la tercera ley de Kepler?

1.3 Nuevas funciones a partir de funciones viejas

En esta sección empezamos con las funciones básicas que discutimos en la sección 1.2 para obtener nuevas funciones por medio del desplazamiento, estiramiento y reflexión de sus gráficas. También mostramos cómo combinar pares de funciones utilizando operaciones aritméticas estándar y composición.

Transformaciones de funciones

Mediante la aplicación de ciertas transformaciones de la gráfica de una función dada, podemos obtener las gráficas de algunas funciones relacionadas. Esto nos dará la posibilidad de esbozar rápidamente a mano las gráficas de muchas funciones. También nos permitirá expresar ecuaciones para las gráficas dadas. Consideremos primero las **traslaciones**. Si c es un número positivo, entonces la gráfica de $y = f(x) + c$ es la gráfica de $y = f(x)$ desplazada verticalmente hacia arriba una distancia de c unidades (ya que cada coordenada y se incrementa por el mismo número c). Por otro lado, si $g(x) = f(x - c)$, donde $c > 0$, entonces el valor de g en x es el mismo que el valor de f en $x - c$ (c unidades a la izquierda de x). Así, la gráfica de $y = f(x - c)$ es la gráfica de $y = f(x)$, desplazada c unidades a la derecha (véase la figura 1).

Desplazamientos vertical y horizontal Suponga que $c > 0$. Para obtener la gráfica de

$y = f(x) + c$, desplace verticalmente c unidades hacia arriba la gráfica de $y = f(x)$

$y = f(x) - c$, desplace verticalmente c unidades hacia abajo la gráfica de $y = f(x)$

$y = f(x - c)$, desplace horizontalmente c unidades a la derecha la gráfica de $y = f(x)$

$y = f(x + c)$, desplace horizontalmente c unidades a la izquierda la gráfica de $y = f(x)$

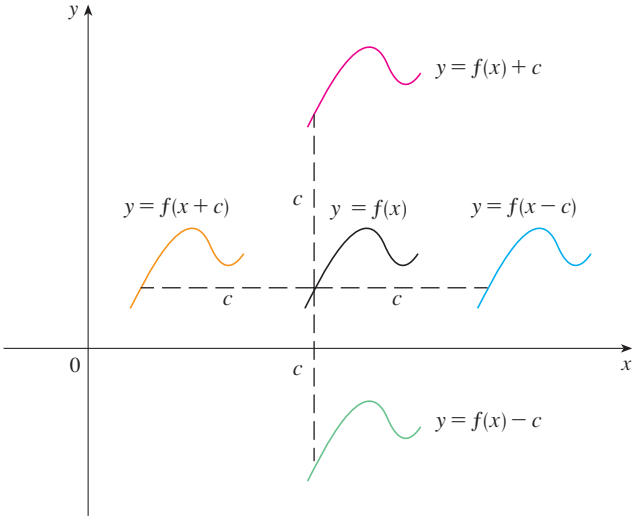


FIGURA 1
Traslación de la gráfica de f

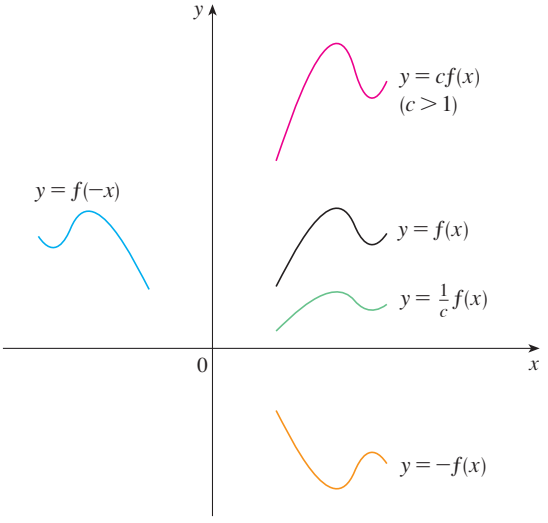


FIGURA 2
Estiramiento y reflexión de la gráfica de f

Ahora consideremos las transformaciones por **estiramiento** y **reflexión**. Si $c > 1$, entonces la gráfica de $y = cf(x)$ es la gráfica de $y = f(x)$ alargada verticalmente por un factor de c (porque cada coordenada y, se multiplica por el número c). La gráfica de $y = -f(x)$ es la gráfica de $y = f(x)$ reflejada en relación con el eje x porque el punto (x, y)

se reemplaza por el punto $(x, -y)$. (Véase la figura 2 y el siguiente cuadro, donde también se dan los resultados de otras transformaciones de alargamiento, compresión y reflexión.)

Alargamientos y reflexiones vertical y horizontal Supongamos que $c > 1$. Para obtener la gráfica de

$y = cf(x)$, alargar verticalmente la gráfica de $y = f(x)$ por un factor de c.
$y = (1/c)\,f(x)$, comprimir verticalmente la gráfica de $y = f(x)$ por un factor de c.
$y = f(cx)$, comprimir horizontalmente la gráfica de $y = f(x)$ por un factor de c.
$y = f(x/c)$, alargar horizontalmente la gráfica de $y = f(x)$ por un factor de c.
$y = -f(x)$, reflejar la gráfica de $y = f(x)$ sobre el eje x
$y = f(-x)$, reflejar la gráfica de $y = f(x)$ sobre el eje y

La figura 3 ilustra estas transformaciones de alargamiento cuando se aplican a la función coseno con $c = 2$. Por ejemplo, para obtener la gráfica de $y = 2\cos x$ multiplicamos la coordenada y de cada punto en la gráfica de $y = \cos x$ por 2. Esto significa que la gráfica de $y = \cos x$ se alarga verticalmente por un factor de 2.

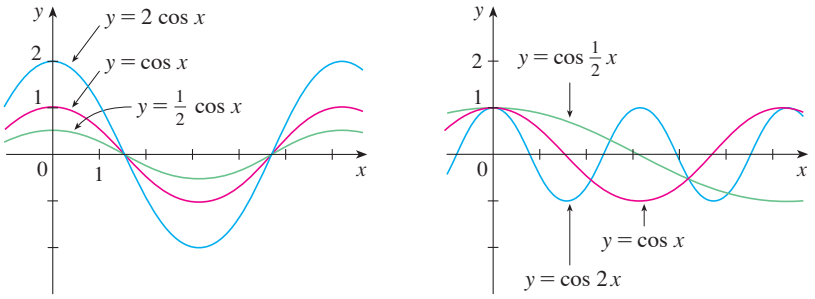
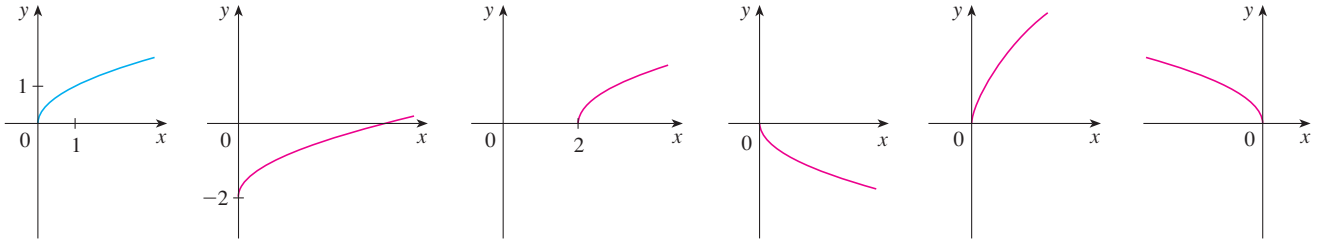


FIGURA 3

V EJEMPLO 1 Dada la gráfica de $y = \sqrt{x}$, use transformaciones para graficar $y = \sqrt{x} - 2$, $y = \sqrt{x-2}$, $y = -\sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$ y $y = \sqrt{-x}$.

SOLUCIÓN La gráfica de la función raíz cuadrada $y = \sqrt{x}$, obtenida de la figura 13a) en la sección 1.2, se muestra en la figura 4a). En otras partes de la figura se ha trazado $y = \sqrt{x} - 2$ desplazándola 2 unidades hacia abajo, $y = \sqrt{x-2}$ por desplazamiento de 2 unidades a la derecha, $y = -\sqrt{x}$ reflejando sobre el eje x, $y = 2\sqrt{x}$ estirando verticalmente por un factor de 2 y $y = \sqrt{-x}$ reflejando sobre el eje y.



a) $y = \sqrt{x}$ b) $y = \sqrt{x} - 2$ c) $y = \sqrt{x-2}$ d) $y = -\sqrt{x}$ e) $y = 2\sqrt{x}$ f) $y = \sqrt{-x}$

FIGURA 4

EJEMPLO 2 Trace la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 6x + 10$.

SOLUCIÓN Completando el cuadrado, escribimos la ecuación de la gráfica como

$$y = x^2 + 6x + 10 = (x + 3)^2 + 1$$

Esto significa que obtenemos la gráfica deseada iniciando con la parábola $y = x^2$ y desplazándola 3 unidades a la izquierda y, a continuación, 1 unidad hacia arriba (véase la figura 5).

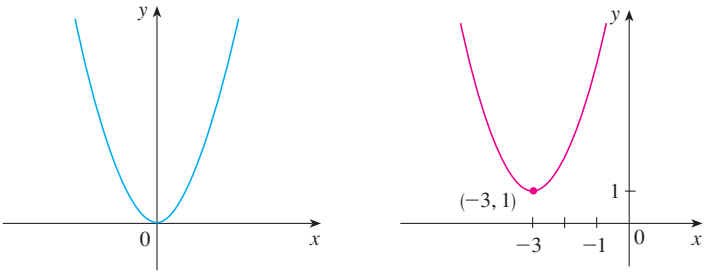


FIGURA 5

a) $y = x^2$ b) $y = (x + 3)^2 + 1$

EJEMPLO 3 Trace las gráficas de las siguientes funciones.

a) $y = \operatorname{sen} 2x$ b) $y = 1 - \operatorname{sen} x$

SOLUCIÓN

a) Obtenemos la gráfica de $y = \operatorname{sen} 2x$ comprimiendo horizontalmente a $y = \operatorname{sen} x$ por un factor de 2. (Véanse las figuras 6 y 7). Por tanto, considerando que el periodo de $y = \operatorname{sen} x$ es 2π, el periodo de $y = \operatorname{sen} 2x$ es $2\pi/2 = \pi$.

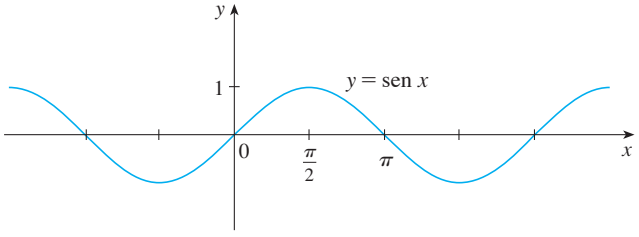


FIGURA 6

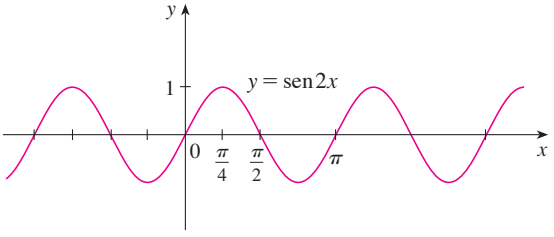


FIGURA 7

b) Para obtener la gráfica de $y = 1 - \operatorname{sen} x$, empezamos de nuevo con $y = \operatorname{sen} x$. Reflejamos sobre el eje x para obtener la gráfica de $y = -\operatorname{sen} x$ y, a continuación, desplazamos 1 unidad hacia arriba para obtener $y = 1 - \operatorname{sen} x$ (véase la figura 8).

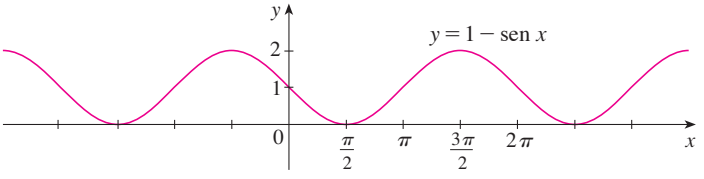


FIGURA 8

EJEMPLO 4 La figura 9 muestra gráficas del número de horas de luz natural como funciones de la época del año en varias latitudes. Dado que Filadelfia está situada a unos 40°N de latitud, encuentre una función que modele la duración de la luz de día en Filadelfia.

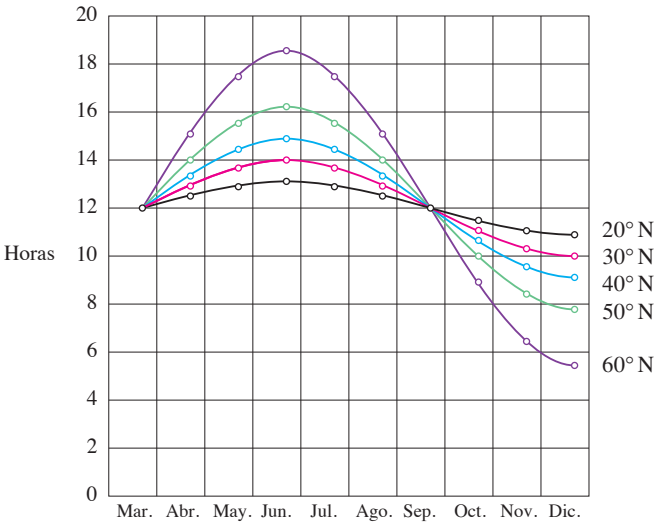


FIGURA 9
Gráfica de la duración de luz de día del 21 de marzo al 21 de diciembre en diversas latitudes
Lucia C. Harrison, *Daylight, Twilight, Darkness and Time* (Nueva York, 1935), pág. 40.

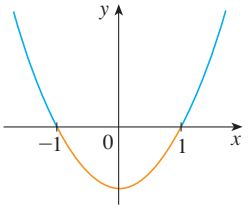
SOLUCIÓN Observe que cada curva se parece a una función seno desplazada y alargada. Mirando la curva azul vemos que, en la latitud de Filadelfia, la luz diurna dura unas 14.8 horas el 21 de junio y 9.2 horas el 21 de diciembre, por lo que la amplitud de la curva (el factor por el cual tenemos que alargar verticalmente la curva seno) es $\frac{1}{2}(14.8 - 9.2) = 2.8$.

¿Por qué factor necesitamos alargar horizontalmente la curva seno si medimos el tiempo t en días? Como hay aproximadamente 365 días en un año, el periodo de nuestro modelo debe ser 365. Pero el periodo de $y = \operatorname{sen} t$ es 2π, por lo que el factor de alargamiento horizontal es $c = 2\pi/365$.

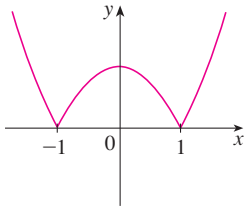
También notamos que la curva comienza su ciclo el 21 de marzo, el día 80 del año, así que tenemos que desplazar la curva 80 unidades a la derecha. Además, debemos desplazarla 12 unidades hacia arriba. Por tanto, modelamos la duración del día en Filadelfia el t-ésimo día del año por la función

$$L(t) = 12 + 2.8 \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right]$$

Otra transformación de cierto interés se obtiene tomando el *valor absoluto* de una función. Si $y = |f(x)|$ entonces, de acuerdo con la definición de valor absoluto, $y = f(x)$ cuando $f(x) \geqslant 0$ y $y = -f(x)$ cuando $f(x) < 0$. Esto nos dice cómo obtener la gráfica de $y = |f(x)|$ a partir de la gráfica de $y = f(x)$: la parte de la gráfica que se encuentra por encima del eje x sigue siendo la misma; la parte que se encuentra debajo del eje x se refleja sobre este eje.



a) $y = x^2 - 1$



b) $y = |x^2 - 1|$

FIGURA 10

V EJEMPLO 5 Trace la gráfica de la función $y = |x^2 - 1|$.

SOLUCIÓN En primer lugar, graficamos la parábola $y = x^2 - 1$ en la figura 10a), desplazando verticalmente 1 unidad hacia abajo la parábola $y = x^2$. Vemos que la gráfica se encuentra por debajo del eje x cuando: $-1 < x < 1$, por lo que reflejamos esa parte de la gráfica sobre el eje x para obtener la gráfica de $y = |x^2 - 1|$ en la figura 10b).

Combinación de funciones

Dos funciones f y g pueden combinarse para formar nuevas funciones $f + g, f - g, fg$ y f/g en forma similar a la suma, resta, multiplicación y división de números reales. La suma y diferencia de funciones se definen mediante:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \qquad (f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

Si el dominio de f es A y el dominio de g es B, el dominio de $f + g$ es la intersección $A \cap B$ porque $f(x)$ y $g(x)$ tienen que estar definidas. Por ejemplo, el dominio de $f(x) = \sqrt{x}$ es $A = [0, \infty)$, y el dominio de $g(x) = \sqrt{2 - x}$ es $B = (-\infty, 2]$, por lo que el dominio de $(f + g)(x) = \sqrt{x} + \sqrt{2 - x}$ es $A \cap B = [0, 2]$.

Del mismo modo, se definen el producto y cociente de funciones por

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \qquad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

El dominio de fg es $A \cap B$, pero no podemos dividir por 0, así que el dominio de f/g es $\{x \in A \cap B \mid g(x) \neq 0\}$. Por ejemplo, si $f(x) = x^2$ y $g(x) = x - 1$, entonces el dominio de la función racional $(f/g)(x) = x^2/(x - 1)$ es $\{x \mid x \neq 1\}$, o bien $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

Hay otra forma de combinar dos funciones para obtener una nueva función. Por ejemplo, supongamos que $y = f(u) = \sqrt{u}$ y $u = g(x) = x^2 + 1$. Como y es una función de u y u es, a su vez, una función de x, se concluye que, finalmente, y es una función de x. Podemos calcular esto por sustitución:

$$y = f(u) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1}$$

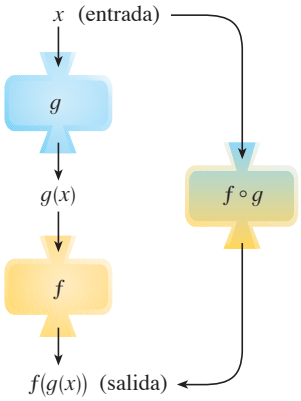


FIGURA 11
La máquina $f \circ g$ se compone de la máquina g (primero) y la máquina f (después)

Este procedimiento se denomina *composición* porque la nueva función se *compone* de las dos funciones dadas f y g.

En general, dadas dos funciones cualesquiera f y g, empezamos con un número x en el dominio de g y encontramos su imagen $g(x)$. Si este número $g(x)$ está en el dominio de f, entonces podemos calcular el valor de $f(g(x))$. Observe que la salida de una función se usa como entrada para la próxima función. El resultado es una nueva función $h(x) = f(g(x))$ obtenida mediante la sustitución de g en f y se llama la *composición* (o *compuesta*) de f y g, y se denota por $f \circ g$ ("f círculo g").

Definición Dadas dos funciones f y g, la función compuesta $f \circ g$ (también llamada la **composición** de f y g) se define como

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

El dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todas las x en el dominio de g tales que $g(x)$ está en el dominio de f. En otras palabras, $(f \circ g)(x)$ está definida siempre que $g(x)$ y $f(g(x))$ estén definidas. La figura 11 muestra $f \circ g$ en términos de máquinas.

EJEMPLO 6 Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = x - 3$, encuentre la composición de las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$.

SOLUCIÓN Tenemos

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x - 3) = (x - 3)^2$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 - 3$$

NOTA En el ejemplo 6 puede verse que, en general, $f \circ g \neq g \circ f$. Recuerde, la notación $f \circ g$ significa que la función g se aplica primero y, a continuación, se aplica f. En el ejemplo 6, $f \circ g$ es la función que *primero* resta 3 y, *después*, eleva al cuadrado; $g \circ f$ es la función que *primero* eleva al cuadrado y, *después*, resta 3.

V EJEMPLO 7 Si $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt{2 - x}$, encuentre cada una de las siguientes funciones y su dominio.

a) $f \circ g$ b) $g \circ f$ c) $f \circ f$ d) $g \circ g$

SOLUCIÓN

a) $$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{2 - x}\right) = \sqrt{\sqrt{2 - x}} = \sqrt[4]{2 - x}$$

El dominio de $f \circ g$ es $\{x \mid 2 - x \geqslant 0\} = \{x \mid x \leqslant 2\} = (-\infty, 2]$.

b) $$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt{x}\right) = \sqrt{2 - \sqrt{x}}$$

Para que $\sqrt{x}$ esté definida debe cumplirse con que $x \geqslant 0$. Para que $\sqrt{2 - \sqrt{x}}$ esté definida debe cumplirse con que $2 - \sqrt{x} \geqslant 0$, esto es, $\sqrt{x} \leqslant 2$ o $x \leqslant 4$. Así que $0 \leqslant x \leqslant 4$, por lo que el dominio de $g \circ f$ es el intervalo cerrado $[0, 4]$.

Si $0 \leqslant a \leqslant b$, entonces $a^2 \leqslant b^2$.

c) $$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\sqrt{x}\right) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$$

El dominio de $f \circ f$ es $[0, \infty)$.

d) $$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g\left(\sqrt{2 - x}\right) = \sqrt{2 - \sqrt{2 - x}}$$

Esta expresión está definida cuando $2 - x \geqslant 0$ y $2 - \sqrt{2 - x} \geqslant 0$. La primera desigualdad significa $x \leqslant 2$, y la segunda es equivalente a $\sqrt{2 - x} \leqslant 2$, o $2 - x \leqslant 4$ o $x \geqslant -2$. Así, $-2 \leqslant x \leqslant 2$, por lo que el dominio de $g \circ g$ es el intervalo cerrado $[-2, 2]$.

Es posible tomar la composición de tres o más funciones. Por ejemplo, la composición $f \circ g \circ h$ se encuentra aplicado primero h, después g y, por último, f como sigue:

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$$

EJEMPLO 8 Encuentre $f \circ g \circ h$ si $f(x) = x/(x + 1)$, $g(x) = x^{10}$ y $h(x) = x + 3$.

SOLUCIÓN
$$\begin{aligned}(f \circ g \circ h)(x) &= f(g(h(x))) = f(g(x + 3)) \\ &= f((x + 3)^{10}) = \frac{(x + 3)^{10}}{(x + 3)^{10} + 1}\end{aligned}$$

Hasta ahora ha utilizado la composición para construir funciones complicadas a partir de otras más sencillas. Pero en Cálculo es útil a menudo ser capaz de *descomponer* una función compleja en otras más simples, como en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 9 Dada $F(x) = \cos^2(x + 9)$, encuentre las funciones f, g y h tales que $F = f \circ g \circ h$.

SOLUCIÓN Como $F(x) = [\cos(x + 9)]^2$, la fórmula para F dice: primero sume 9, después tome el coseno del resultado y, finalmente, eleve al cuadrado. Así, tenemos

$$h(x) = x + 9 \qquad g(x) = \cos x \qquad f(x) = x^2$$

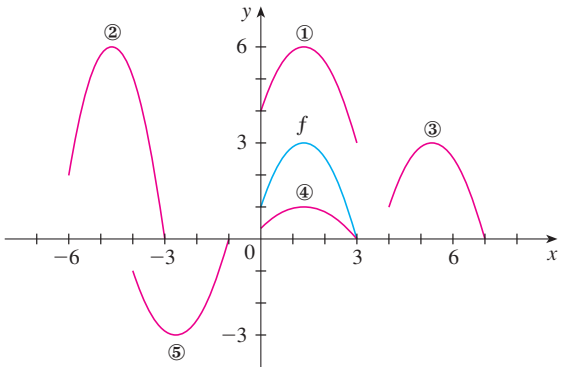
Entonces
$$\begin{aligned}(f \circ g \circ h)(x) &= f(g(h(x))) = f(g(x + 9)) = f(\cos(x + 9)) \\ &= [\cos(x + 9)]^2 = F(x)\end{aligned}$$

1.3 Ejercicios

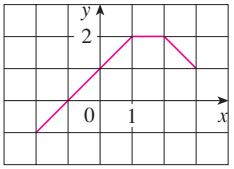
1. Suponga que la gráfica de f está dada. Escriba las ecuaciones para las gráficas que se obtienen a partir de la gráfica f como sigue:
a) Desplazada 3 unidades hacia arriba.
b) Desplazada 3 unidades hacia abajo.
c) Desplazada 3 unidades hacia la derecha.
d) Desplazada 3 unidades hacia la izquierda.
e) Reflejada respecto al eje x.
f) Reflejada respecto a y.
g) Alargada verticalmente por un factor de 3.
h) Contraída verticalmente por un factor de 3.

2. Explique cómo se obtiene cada gráfica a partir de la gráfica de $y = f(x)$.
a) $y = f(x) + 8$ b) $y = f(x + 8)$
c) $y = 8f(x)$ d) $y = f(8x)$
e) $y = -f(x) - 1$ f) $y = 8f\left(\frac{1}{8}x\right)$

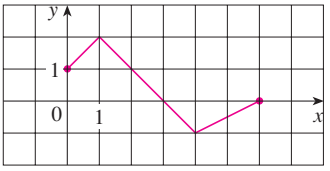
3. La gráfica de $y = f(x)$ está dada. Relacione cada ecuación con su gráfica y argumente sus elecciones.
a) $y = f(x - 4)$ b) $y = f(x) + 3$
c) $y = \frac{1}{3}f(x)$ d) $y = -f(x + 4)$
e) $y = 2f(x + 6)$



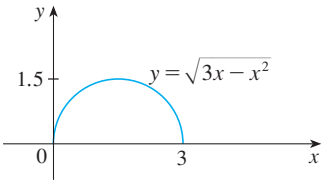
4. La gráfica de f está dada. Dibuje las gráficas de las siguientes funciones.
a) $y = f(x) - 2$ b) $y = f(x - 2)$
c) $y = -2f(x)$ d) $y = f\left(\frac{1}{3}x\right) + 1$



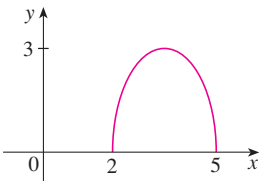
5. La gráfica de f está dada. Utilícela para graficar las siguientes funciones.
a) $y = f(2x)$ b) $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$
c) $y = f(-x)$ d) $y = -f(-x)$



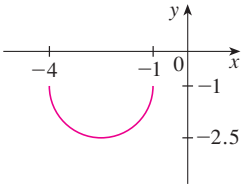
6-7 La gráfica de $y = \sqrt{3x - x^2}$ está dada. Utilice transformaciones para crear una función cuya gráfica es como se muestra.



6.



7.



8. a) ¿Cómo es la gráfica de $y = 2 \operatorname{sen} x$ en relación con la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$? Utilice su respuesta y la figura 6 para graficar $y = 2 \operatorname{sen} x$.
b) ¿Cómo es la gráfica de $y = 1 + \sqrt{x}$ en relación con la gráfica de $y = \sqrt{x}$? Utilice su respuesta y la figura 4a) para graficar $y = 1 + \sqrt{x}$.

9-24 Grafique la función a mano, sin trazar puntos, sino empezando con la gráfica de una de las funciones esenciales de la sección 1.2 y después aplicando las transformaciones apropiadas.

9. $y = \dfrac{1}{x + 2}$

10. $y = (x - 1)^3$

11. $y = -\sqrt[3]{x}$

12. $y = x^2 + 6x + 4$

13. $y = \sqrt{x - 2} - 1$

14. $y = 4 \operatorname{sen} 3x$

15. $y = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$

16. $y = \dfrac{2}{x} - 2$

17. $y = \frac{1}{2}(1 - \cos x)$

18. $y = 1 - 2\sqrt{x + 3}$

19. $y = 1 - 2x - x^2$

20. $y = |x| - 2$

21. $y = |x - 2|$

22. $y = \dfrac{1}{4}\tan\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

23. $y = \left|\sqrt{x} - 1\right|$

24. $y = |\cos \pi x|$

25. La ciudad de Nueva Orleáns se encuentra en la latitud 30°N. Utilice la figura 9 para encontrar una función que modele el número de horas de luz diurna en Nueva Orleáns como una función de la época del año. Para comprobar la exactitud de su modelo, utilice el hecho de que el 31 de marzo el Sol sale a las 5:51 y se pone a las 18:18 en esta ciudad.

1. Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

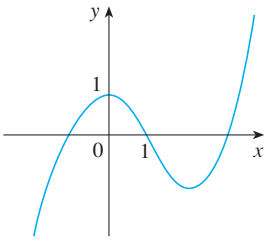
26. Una estrella variable es aquella cuyo brillo aumenta y disminuye alternativamente. Para la estrella variable más visible, Delta Cephei, el tiempo transcurrido entre periodos de brillo máximo es de 5.4 días, el brillo promedio (o magnitud) de la estrella es 4.0, y su brillo varía en una magnitud de ± 0.35. Encuentre una función que modele el brillo de Delta Cephei, en términos del tiempo.

27. a) ¿Cómo es la gráfica de $y = f(|x|)$ en relación con la gráfica de f?

b) Trace la gráfica de $y = \operatorname{sen}|x|$.

c) Trace la gráfica de $y = \sqrt{|x|}$.

28. Utilice la gráfica de f para trazar la de $y = 1/f(x)$. ¿Qué características de f son las más importantes en el trazado de $y = 1/f(x)$? Explique cómo se utilizan.



29-30 Encuentre a) $f + g$, b) $f - g$, c) fg y *d)* f/g y establezca sus dominios.

29. $f(x) = x^3 + 2x^2, \quad g(x) = 3x^2 - 1$

30. $f(x) = \sqrt{3 - x}, \quad g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

31-36 Encuentre las funciones a) $f \circ g$, b) $g \circ f$, c) $f \circ f$, y *d)* $g \circ g$ y sus dominios.

31. $f(x) = x^2 - 1, \quad g(x) = 2x + 1$

32. $f(x) = x - 2, \quad g(x) = x^2 + 3x + 4$

33. $f(x) = 1 - 3x, \quad g(x) = \cos x$

34. $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = \sqrt[3]{1 - x}$

35. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}, \quad g(x) = \dfrac{x + 1}{x + 2}$

36. $f(x) = \dfrac{x}{1 + x}, \quad g(x) = \operatorname{sen} 2x$

37-40 Encuentre $f \circ g \circ h$.

37. $f(x) = 3x - 2, \quad g(x) = \operatorname{sen} x, \quad h(x) = x^2$

38. $f(x) = |x - 4|, \quad g(x) = 2^x, \quad h(x) = \sqrt{x}$

39. $f(x) = \sqrt{x - 3}, \quad g(x) = x^2, \quad h(x) = x^3 + 2$

40. $f(x) = \tan x, \quad g(x) = \dfrac{x}{x - 1}, \quad h(x) = \sqrt[3]{x}$

41-46 Exprese la función en la forma $f \circ g$

41. $F(x) = (2x + x^2)^4$

42. $F(x) = \cos^2 x$

43. $F(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}}$

44. $G(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x}{1 + x}}$

45. $v(t) = \sec(t^2)\tan(t^2)$

46. $u(t) = \dfrac{\tan t}{1 + \tan t}$

47-49 Exprese la función en la forma $f \circ g \circ h$.

47. $R(x) = \sqrt{\sqrt{x} - 1}$

48. $H(x) = \sqrt[8]{2 + |x|}$

49. $H(x) = \sec^4(\sqrt{x})$

50. Utilice la tabla para evaluar cada una de las siguientes expresiones:

a) $f(g(1))$ b) $g(f(1))$ c) $f(f(1))$

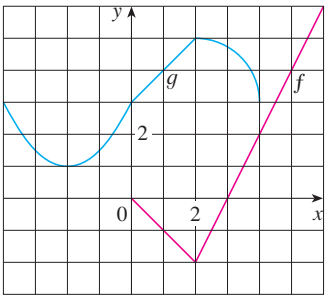
d) $g(g(1))$ e) $(g \circ f)(3)$ f) $(f \circ g)(6)$

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	3	1	4	2	2	5
$g(x)$	6	3	2	1	2	3

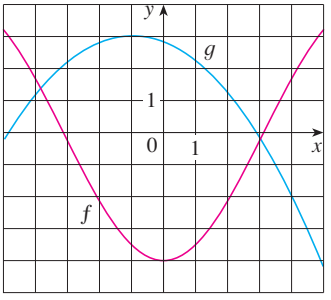
51. Utilice las gráficas dadas de f y g para evaluar cada una de las siguientes expresiones, o explique por qué no están definidas:

a) $f(g(2))$ b) $g(f(0))$ c) $(f \circ g)(0)$

d) $(g \circ f)(6)$ e) $(g \circ g)(-2)$ f) $(f \circ f)(4)$



52. Utilice las gráficas dadas de f y g para estimar el valor de $f(g(x))$ para $x = -5, -4, -3, \ldots, 5$. Utilice estas estimaciones para hacer un esbozo de $f \circ g$.



53. Una piedra se deja caer en un lago, creando una onda circular que viaja hacia fuera a una velocidad de 60 cm/s.
a) Exprese el radio r del círculo en función del tiempo t (en segundos).
b) Si A es el área de este círculo como una función del radio, encuentre $A \circ r$ e interprétela.

54. Un globo esférico está siendo inflado de manera que su radio aumenta a razón de 2 cm/s.
a) Exprese el radio r del balón en función del tiempo t (en segundos).
b) Si V es el volumen del globo en función del radio, encuentre $V \circ r$ e interprétela.

55. Un barco se está moviendo con una velocidad de 30 km/h paralelamente a una costa recta. El barco está a 6 km de la costa y pasa por un faro al mediodía.
a) Exprese la distancia s entre el faro y el barco en función de la distancia d, que el barco ha recorrido desde el mediodía; es decir, encuentre f de modo que $s = f(d)$.
b) Exprese d como una función de t, el tiempo transcurrido desde el mediodía; es decir, encuentre g de modo que $d = g(t)$.
c) Encuentre $f \circ g$. ¿Qué representa esta función?

56. Un avión está volando con una velocidad de 350 km/h, a una altitud de una milla y pasa directamente sobre una estación de radar en el tiempo $t = 0$.
a) Exprese la distancia horizontal d (en millas) que el avión ha volado, en función de t.
b) Exprese la distancia s entre el avión y la estación de radar en función de d.
c) Utilice la composición para expresar s como una función de t.

57. La **función de Heaviside** H está definida por

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

y se utiliza en el estudio de circuitos eléctricos para representar aumentos repentinos de la corriente eléctrica, o de voltaje, cuando el interruptor se activa de manera instantánea.
a) Trace la gráfica de la función de Heaviside.
b) Dibuje la gráfica del voltaje $V(t)$ en un circuito cuando el interruptor se enciende en el tiempo $t = 0$ y se aplican instantáneamente 120 voltios al circuito. Escriba una fórmula para $V(t)$ en términos de $H(t)$.
c) Trace la gráfica del voltaje $V(t)$ en un circuito cuando el interruptor se enciende en el tiempo $t = 5$ segundos y se aplican instantáneamente 240 voltios al circuito. Escriba una fórmula para $V(t)$ en términos de $H(t)$. (Tenga en cuenta que a partir de $t = 5$ corresponde a una traslación.)

58. La función de Heaviside que se define en el ejercicio 57 también puede utilizarse para definir la **función rampa** $y = ctH(t)$, que representa un aumento gradual del voltaje o de corriente en un circuito.
a) Trace la gráfica de la función rampa $y = tH(t)$.
b) Dibuje la gráfica del voltaje $V(t)$ en un circuito cuando el interruptor se enciende en el tiempo $t = 0$, y el voltaje se aumenta gradualmente a 120 voltios durante un intervalo de tiempo de 60 segundos. Escriba una fórmula para $V(t)$ en términos de $H(t)$ para $t \leqslant 60$.
c) Trace la gráfica del voltaje $V(t)$ en un circuito cuando el interruptor se enciende en el tiempo $t = 7$ segundos y el voltaje se incrementa gradualmente a 100 voltios durante un periodo de 25 segundos. Escriba una fórmula para $V(t)$ en términos de $H(t)$ para $t \leqslant 32$.

59. Sean f y g funciones lineales con ecuaciones $f(x) = m_1x + b_1$ y $g(x) = m_2x + b_2$. ¿Es $f \circ g$ también una función lineal? Si es así, ¿cuál es la pendiente de su gráfica?

60. Si usted invierte en dólares a 4% de interés compuesto anualmente, entonces la cantidad $A(x)$ de la inversión después de un año es $A(x) = 1.04x$. Encuentre $A \circ A$, $A \circ A \circ A$, y $A \circ A \circ A \circ A$. ¿Qué representan estas composiciones? Encuentre una fórmula para la composición de n copias de A.

61. a) Si $g(x) = 2x + 1$ y $h(x) = 4x^2 + 4x + 7$, encuentre una función f tal que $f \circ g = h$. (Piense qué operaciones tendrá que realizar en la fórmula para g a fin de determinar la fórmula para h.)
b) Si $f(x) = 3x + 5$ y $h(x) = 3x^2 + 3x + 2$, encuentre una función g tal que $f \circ g = h$.

62. Si $f(x) = x + 4$ y $h(x) = 4x - 1$, encuentre una función g tal que $g \circ f = h$.

63. Supongamos que g es una función par y sea $h = f \circ g$. ¿Es h siempre una función par?

64. Supongamos que g es una función impar y sea $h = f \circ g$. ¿Es h siempre una función impar? ¿Qué pasa si f es impar? ¿Qué pasa si f es par?

1.4 Calculadoras graficadoras y computadoras

En esta sección se supone que tiene acceso a una calculadora graficadora o una computadora con software de gráficos. Veremos que el uso de un dispositivo de cómputo nos permite graficar funciones más complicadas y resolver problemas más complejos de lo que sería posible de otra manera. También señalamos algunos de los problemas que pueden presentarse con estas máquinas.

Las calculadoras graficadoras y las computadoras pueden dar gráficas muy precisas de las funciones. Pero veremos en el capítulo 4 que sólo a través del uso del Cálculo podemos estar seguros de que hemos descubierto todos los aspectos interesantes de una gráfica.

Una calculadora graficadora o una computadora muestran una parte de la gráfica de una función en una **ventana rectangular de visualización** o **pantalla de visualización**, a la que nos referimos como un **rectángulo de vista**. La pantalla predeterminada ofrece a

menudo una imagen incompleta o engañosa, por lo que es importante elegir el rectángulo de vista con cuidado. Si optamos por los valores de x que van desde un valor mínimo de $Xmín = a$ hasta un valor máximo de $Xmáx = b$ y que los valores de y varíen desde un mínimo de $Ymín = c$ hasta un máximo de $Ymáx = d$, entonces la parte visible de la gráfica se encuentra en el rectángulo

$$[a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

que se muestra en la figura 1. Nos referimos a este rectángulo como el *rectángulo de vista* de $[a, b]$ *por* $[c, d]$.

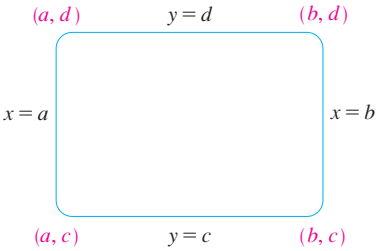


FIGURA 1
Rectángulo de vista $[a, b]$ por $[c, d]$

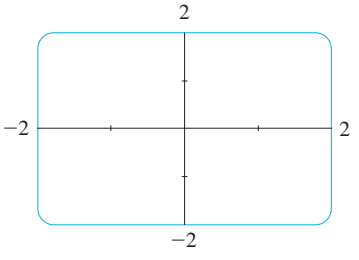
La máquina dibuja la gráfica de una función f como usted lo haría. Traza puntos de la forma $(x, f(x))$ para un cierto número de valores igualmente espaciados de x entre a y b. Si un valor de x no está en el dominio de f, o si $f(x)$ se encuentra fuera del rectángulo de vista, se mueve al siguiente valor de x. La máquina conecta cada punto con el anterior punto dibujado, para formar una representación de la gráfica de f.

EJEMPLO 1 Dibuje la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 3$ en cada uno de los siguientes rectángulos de vista

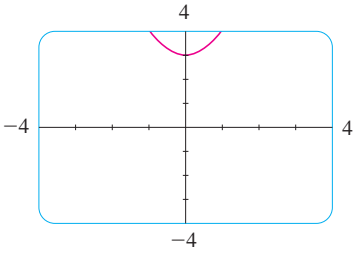
a) $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$
b) $[-4, 4]$ por $[-4, 4]$
c) $[-10, 10]$ por $[-5, 30]$
d) $[-50, 50]$ por $[-100, 1\,000]$

SOLUCIÓN Para el inciso a) seleccionamos el rango ajustando $Xmín = -2$, $Xmáx = 2$, $Ymín = -2$, y $Ymáx = 2$. El gráfico resultante se muestra en la figura 2a). ¡La pantalla está en blanco! Un momento de reflexión da una explicación: observe que $x^2 \geq 0$ para toda x, de modo que $x^2 + 3 \geq 3$ para todo x. Así, el rango de la función $f(x) = x^2 + 3$ es $[3, \infty)$. Esto significa que la gráfica de f se encuentra totalmente fuera del rectángulo de vista $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$.

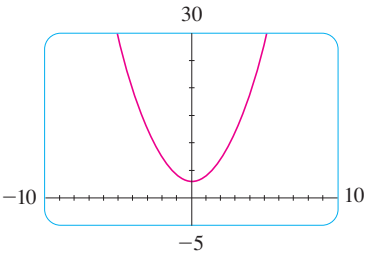
Las gráficas para los rectángulos de vista en los incisos b), c) y d) también se muestran en la figura 2. Observe que obtenemos una imagen más completa de los incisos c) y d), pero en el inciso d) no está claro que la intersección en y es de 3.



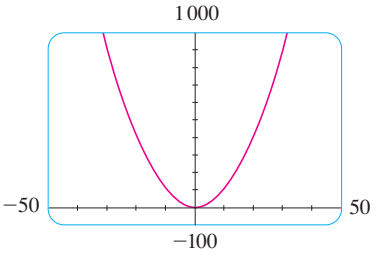
a) $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$



b) $[-4, 4]$ por $[-4, 4]$



c) $[-10, 10]$ por $[-5, 30]$



d) $[-50, 50]$ por $[-100, 1\,000]$

FIGURA 2 Gráficas de $f(x) = x^2 + 3$

En el ejemplo 1 vemos que la elección de un rectángulo de vista puede hacer una gran diferencia en la apariencia de una gráfica. A menudo es necesario cambiar a un rectángulo de vista más amplio para obtener una imagen más completa, una visión más global, de la gráfica. En el siguiente ejemplo podemos ver que el conocimiento del dominio y el rango de una función a veces nos da suficiente información para seleccionar un buen rectángulo de vista.

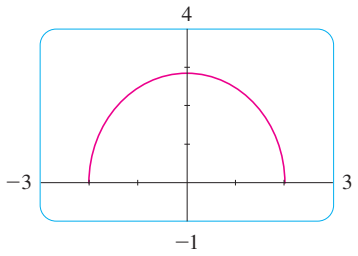


FIGURA 3
$f(x) = \sqrt{8 - 2x^2}$

EJEMPLO 2 Determine un rectángulo de vista apropiado para la función $f(x) = \sqrt{8 - 2x^2}$ y utilícelo para graficar f.

SOLUCIÓN La expresión para $f(x)$ está definida cuando

$$8 - 2x^2 \geqslant 0 \iff 2x^2 \leqslant 8 \iff x^2 \leqslant 4$$
$$\iff |x| \leqslant 2 \iff -2 \leqslant x \leqslant 2$$

Por tanto, el dominio de f es el intervalo $[-2, 2]$. También,

$$0 \leqslant \sqrt{8 - 2x^2} \leqslant \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2.83$$

por lo que el rango de f es el intervalo $\left[0, 2\sqrt{2}\,\right]$.

Elegimos el rectángulo de vista de manera que el intervalo para x sea algo mayor que el dominio, y el intervalo para y sea algo mayor que el rango. Tomando el rectángulo de vista como $[-3, 3]$ por $[-1, 4]$, obtenemos la gráfica que se muestra en la figura 3.

EJEMPLO 3 Grafique la función $y = x^3 - 150x$.

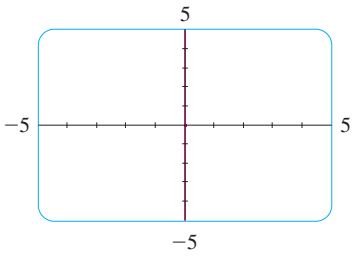


FIGURA 4

SOLUCIÓN Aquí, el dominio es $\mathbb{R}$, el conjunto de todos los números reales. Eso no nos ayuda a elegir un rectángulo de vista. Vamos a experimentar: si partimos de la pantalla $[-5, 5]$ por $[-5, 5]$, obtenemos la gráfica de la figura 4, que aparece en blanco, aunque en realidad la gráfica es tan vertical que se funde con el eje y.

Si cambiamos el rectángulo de vista a $[-20, 20]$ por $[-20, 20]$, se obtiene la imagen que se muestra en la figura 5a). La gráfica parece consistir en líneas verticales, pero sabemos que no puede ser correcta. Si miramos con atención, mientras que el gráfico se está dibujando, vemos que la gráfica deja la pantalla y vuelve a aparecer durante el proceso de representación. Esto indica que tenemos que ver más en la dirección vertical, por lo que hay que cambiar el rectángulo de vista a $[-20, 20]$ por $[-500, 500]$. La gráfica resultante se muestra en la figura 5b), donde se ve que todavía no acaba de revelar todas las características principales de la función, así que tratamos con $[-20, 20]$ por $[-1\,000, 1\,000]$ en la figura 5c). Ahora estamos más seguros de que hemos llegado a un rectángulo de vista más adecuado. En el capítulo 4 veremos que la gráfica en la figura 5c) en efecto, revela todas las principales características de la función.

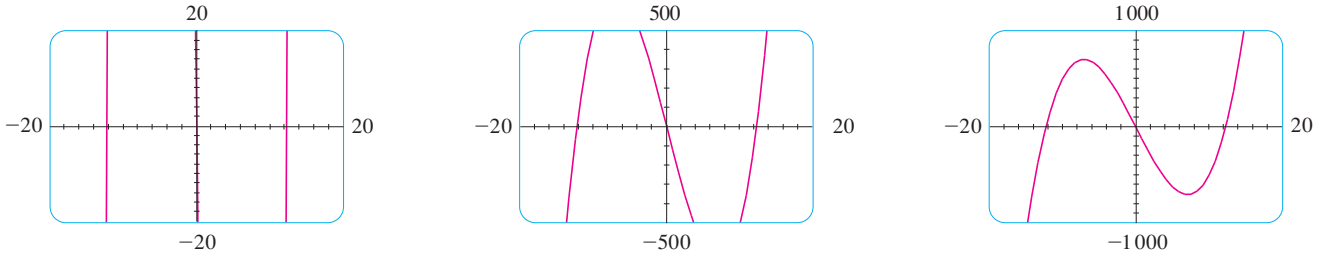


FIGURA 5 Gráficas de $y = x^3 - 150x$

V EJEMPLO 4 Grafique la función $f(x) = \operatorname{sen} 50x$ en un rectángulo de vista apropiado.

SOLUCIÓN La figura 6a) muestra la gráfica producida por una calculadora graficadora sobre una pantalla de $[-12, 12]$ por $[-1.5, 1.5]$. A primera vista, la gráfica parece ser

razonable. Pero si cambiamos el rectángulo de vista a los que se muestran en los siguientes incisos de la figura 6, las gráficas son muy diferentes. Algo extraño está sucediendo.

El aspecto de las gráficas en la figura 6 depende de la máquina utilizada. Las gráficas que se obtienen con su dispositivo de graficación podrían no parecerse a estas figuras, pero también son muy inexactas.

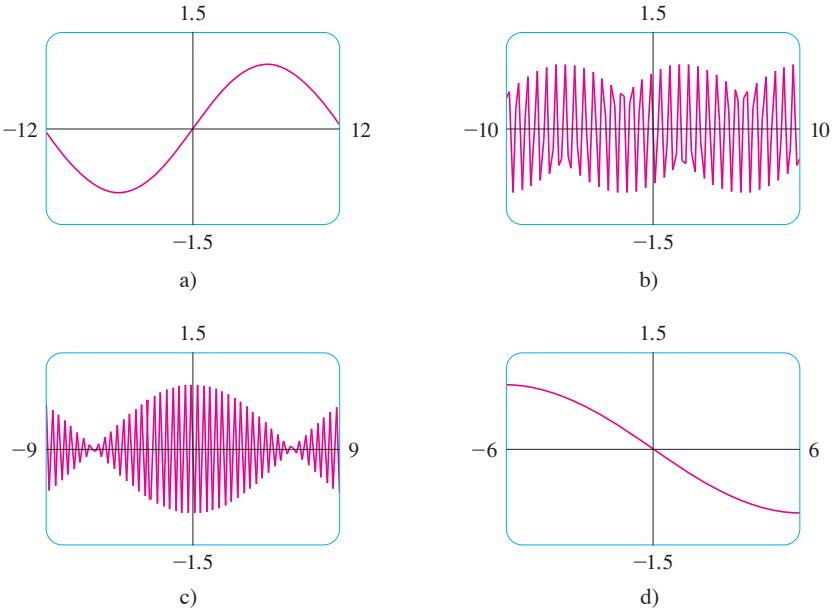


FIGURA 6
Gráficas de $f(x) = \operatorname{sen} 50x$ en cuatro rectángulos de vista

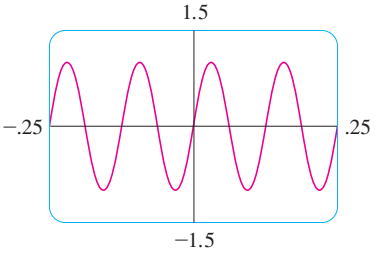


FIGURA 7
$f(x) = \operatorname{sen} 50x$

A fin de explicar las grandes diferencias en la apariencia de estas gráficas y de encontrar un rectángulo de vista adecuado, tenemos que encontrar el periodo de la función $y = \operatorname{sen} 50x$. Sabemos que la función $y = \operatorname{sen} x$ tiene periodo 2π y que la gráfica de $y = \operatorname{sen} 50x$ está comprimida horizontalmente por un factor de 50, por lo que el periodo de $y = \operatorname{sen} 50x$ debe ser

$$\frac{2\pi}{50} = \frac{\pi}{25} \approx 0.126$$

Esto sugiere que sólo debemos ocuparnos de los pequeños valores de x a fin de mostrar sólo algunas oscilaciones de la gráfica. Si optamos por el rectángulo de vista $[-0.25, 0.25]$ por $[-1.5, 1.5]$, obtenemos la gráfica que se muestra en la figura 7.

Ahora vemos lo que salió mal en la figura 6. Las oscilaciones de $y = \operatorname{sen} 50x$ son tan rápidas que cuando la calculadora representa los puntos y los une, se pierde la mayoría de los puntos máximos y mínimos y, por tanto, da una impresión engañosa de la gráfica.

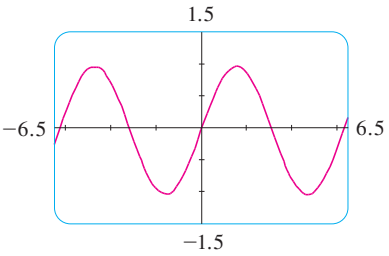


FIGURA 8

Hemos visto que el uso de un rectángulo de vista inadecuado puede dar una falsa impresión de la gráfica de una función. En los ejemplos 1 y 3 se resolvió el problema cambiando a un rectángulo de vista más amplio. En el ejemplo 4 tuvimos que hacer el rectángulo de vista más pequeño. En el siguiente ejemplo vemos una función para la que no existe un rectángulo de vista sencillo que revele la verdadera forma de la gráfica.

V EJEMPLO 5 Grafique la función $f(x) = \operatorname{sen} x + \frac{1}{100} \cos 100x$.

SOLUCIÓN La figura 8 muestra la gráfica f producida por una calculadora graficadora con rectángulo de vista de $[-6.5, 6.5]$ por $[-1.5, 1.5]$. Se parece mucho a la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$, pero con algunas protuberancias. Si nos acercamos al rectángulo de vista

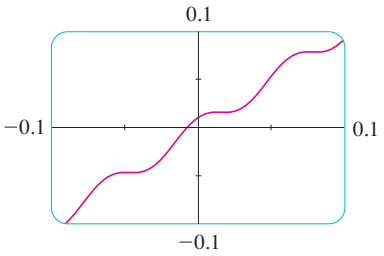


FIGURA 9

$[-0.1, 0.1]$ por $[-0.1, 0.1]$, podemos ver mucho más claramente la forma de estas protuberancia en la figura 9. La razón de este comportamiento es que el segundo término, $\frac{1}{100}\cos 100x$, es muy pequeño en comparación con el primer término, sen x. Así que en realidad necesitamos dos gráficas para ver la verdadera naturaleza de esta función.

EJEMPLO 6 Dibuje la gráfica de la función $y = \dfrac{1}{1 - x}$.

SOLUCIÓN La figura 10a) muestra la gráfica generada por una calculadora graficadora con un rectángulo de vista de $[-9, 9]$ por $[-9, 9]$. En la conexión de puntos sucesivos de la gráfica, la calculadora produce un segmento de recta con inclinación de la parte superior a la parte inferior de la pantalla. Este segmento de recta no es realmente parte de la gráfica. Observe que el dominio de la función $y = 1/(1 - x)$ es $\{x \mid x \neq 1\}$. Podemos eliminar la extraña recta casi vertical experimentando con un cambio de escala. Cuando cambiamos al rectángulo de vista más pequeño $[-4.7, 4.7]$ por $[-4.7, 4.7]$, para esta calculadora en particular, obtenemos la mucho mejor gráfica de la figura 10b).

Otra forma de evitar la extraña recta es cambiar el modo de representación gráfica de la calculadora, para que los puntos no estén conectados.

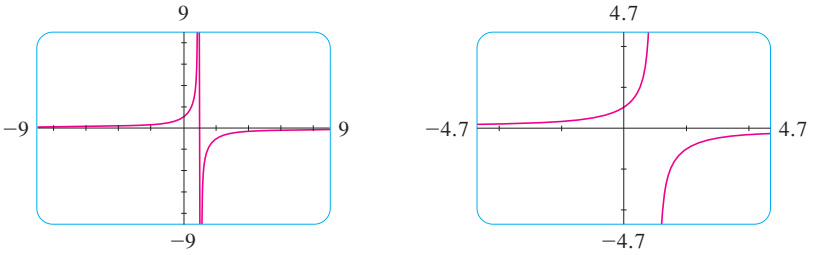


FIGURA 10 a) b)

EJEMPLO 7 Grafique la función $y = \sqrt[3]{x}$.

SOLUCIÓN Algunos dispositivos de graficación muestran la gráfica que se muestra en la figura 11, mientras que otras producen una gráfica como la de la figura 12. Sabemos de la sección 1.2 (figura 13) que la gráfica de la figura 12 es correcta, así que, ¿qué sucedió en la figura 11? La explicación es que algunas máquinas calculan la raíz cúbica de x mediante un logaritmo, que no está definido si x es negativo, por lo que sólo se produce la mitad derecha de la gráfica.

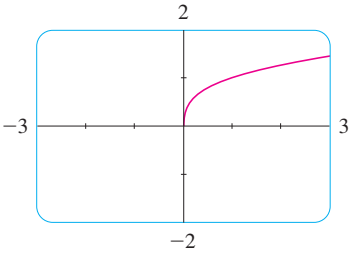


FIGURA 11

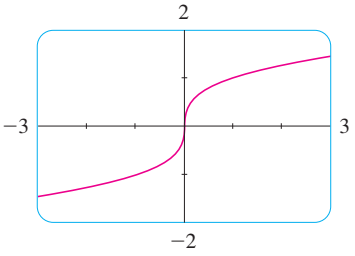


FIGURA 12

Puede obtener la gráfica correcta con Maple si primero escribe

```
with(RealDomain);
```

Usted debe experimentar con su propia máquina para ver cuál de estas dos gráficas se produce. Si se obtiene la gráfica de la figura 11, puede obtener la imagen correcta al trazar la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{x}{|x|} \cdot |x|^{1/3}$$

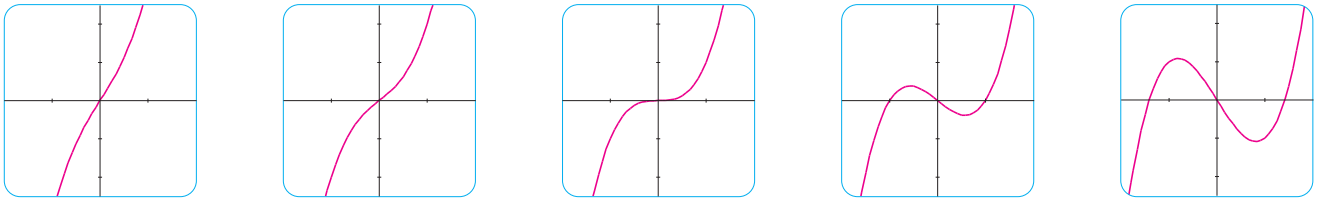
Note que esta función es igual a $\sqrt[3]{x}$ (excepto cuando $x = 0$).

Para entender cómo la expresión de una función se relaciona con su gráfica, es útil graficar una **familia de funciones**, es decir, un conjunto de funciones cuyas ecuaciones están relacionadas. En el siguiente ejemplo graficamos miembros de una familia de polinomios cúbicos.

V EJEMPLO 8 Grafique la función $y = x^3 + cx$ para varios valores del número c. ¿Cómo cambia la gráfica cuando c varía?

TEC en Visual 1.4 puede usted ver una animación de la figura 13.

SOLUCIÓN La figura 13 muestra las gráficas de $y = x^3 + cx$ para $c = 2, 1, 0, -1$ y -2. Vemos que, para valores positivos de c, la gráfica crece de izquierda a derecha, sin puntos máximos o mínimos (picos o valles). Cuando $c = 0$, la curva es plana en el origen. Cuando c es negativa, la curva tiene un punto máximo y un punto mínimo. Cuando c disminuye, el punto máximo se hace más alto, y el mínimo, más bajo.



a) $y = x^3 + 2x$ b) $y = x^3 + x$ c) $y = x^3$ d) $y = x^3 - x$ e) $y = x^3 - 2x$

FIGURA 13
Varios miembros de la familia de funciones $y = x^3 + cx$, graficadas en el rectángulo de vista $[-2, 2]$ por $[-2.5, 2.5]$

EJEMPLO 9 Encuentre la solución de la ecuación $\cos x = x$ con una aproximación de dos decimales.

SOLUCIÓN Las soluciones de la ecuación $\cos x = x$ son las coordenadas x de los puntos de intersección de las curvas $y = \cos x$, $y = x$. De la figura 14a) vemos que sólo hay una solución y se encuentra que entre 0 y 1. Acercando el rectángulo de vista a $[0, 1]$ por $[0, 1]$, podemos ver en la figura 14b) que la raíz se encuentra entre 0.7 y 0.8. Así que nos acercamos más con el rectángulo de vista $[0.7, 0.8]$ por $[0.7, 0.8]$ en la figura 14c). Al mover el cursor hasta el punto de intersección de las dos curvas, o mediante la inspección y el hecho de que la escala en el eje x es de 0.01, vemos que la solución de la ecuación es de 0.74. (Muchas calculadoras tienen una característica intersección incorporada.)

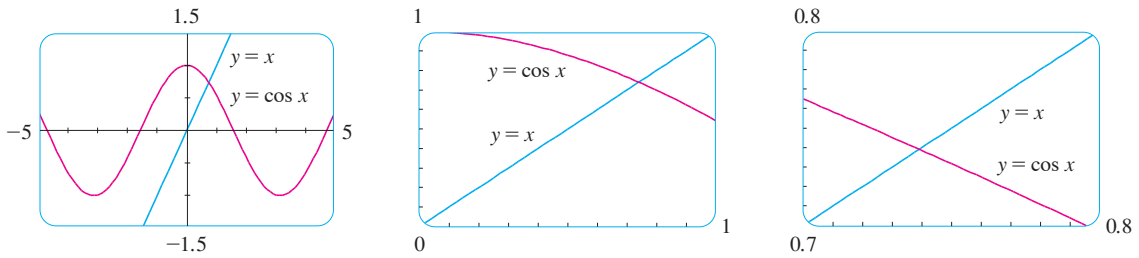


FIGURA 14
Localización de las raíces de $\cos x = x$

a) $[-5, 5]$ por $[-1.5, 1.5]$ escala: $x = 1$

b) $[0, 1]$ por $[0, 1]$ escala: $x = 0.1$

c) $[0.7, 0.8]$ por $[0.7, 0.8]$ escala: $x = 0.01$

1.4 Ejercicios

1. Utilice una calculadora graficadora o equipo de cómputo para determinar cuáles de los rectángulos de vista dados produce la gráfica más adecuada de la función $f(x) = \sqrt{x^3 - 5x^2}$.
a) $[-5, 5]$ por $[-5, 5]$ b) $[0, 10]$ por $[0, 2]$
c) $[0, 10]$ por $[0, 10]$

2. Utilice una calculadora graficadora o equipo de cómputo para determinar cuáles de los rectángulos de vista dados produce la gráfica más adecuada de la función $f(x) = x^4 - 16x^2 + 20$.
a) $[-3, 3]$ por $[-3, 3]$ b) $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$
c) $[-50, 50]$ por $[-50, 50]$ d) $[-5, 5]$ por $[-50, 50]$

3-14 Determine un rectángulo de vista apropiado para las funciones dadas y utilícelo para trazar la gráfica:

3. $f(x) = x^2 - 36x + 32$

4. $f(x) = x^3 + 15x^2 + 65x$

5. $f(x) = \sqrt{50 - 0.2x}$

6. $f(x) = \sqrt{15x - x^2}$

7. $f(x) = x^3 - 225x$

8. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 100}$

9. $f(x) = \operatorname{sen}^2(1000x)$

10. $f(x) = \cos(0.001x)$

11. $f(x) = \operatorname{sen}\sqrt{x}$

12. $f(x) = \sec(20\pi x)$

13. $y = 10 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 100x$

14. $y = x^2 + 0.02 \operatorname{sen} 50x$

15. a) Ensaye para encontrar un rectángulo de vista apropiado para $f(x) = (x - 10)^3 2^{-x}$.
b) ¿Necesita más de un rectángulo de vista? ¿Por qué?

16. Grafique la función $f(x) = x^2\sqrt{30 - x}$ en un rectángulo de vista apropiado. ¿Qué parte de la gráfica parece perderse?

17. Grafique la elipse $4x^2 + 2y^2 = 1$ graficando las funciones cuyos gráficas son las mitades superior e inferior de la elipse.

18. Grafique la hipérbola $y^2 - 9x^2 = 1$ graficando las funciones cuyos gráficos son las ramas superior e inferior de la hipérbola.

19-20 ¿Las gráficas se intersectan en el rectángulo de vista dado? Si lo hacen, ¿cuántos puntos de intersección hay?

19. $y = 3x^2 - 6x + 1$, $y = 0.23x - 2.25$; $[-1, 3]$ por $[-2.5, 1.5]$

20. $y = 6 - 4x - x^2$, $y = 3x + 18$; $[-6, 2]$ por $[-5, 20]$

21-23 Encuentre todas las soluciones de cada una de las siguientes ecuaciones con una aproximación de dos decimales.

21. $x^4 - x = 1$

22. $\sqrt{x} = x^3 - 1$

23. $\tan x = \sqrt{1 - x^2}$

24. Vimos en el ejemplo 9 que la ecuación $\cos x = x$ tiene exactamente una solución.
a) Utilice una gráfica para mostrar que la ecuación $\cos x = 0.3x$ tiene tres soluciones y encuentre sus valores con una aproximación de dos decimales.
b) Encuentre un valor aproximado de m tal que la ecuación $\cos x = mx$ tenga exactamente dos soluciones.

25. Utilice gráficas para determinar cuál de las funciones $f(x) = 10x^2$ y $g(x) = x^3/10$ es finalmente más grande (es decir, cuando x es muy grande).

26. Utilice gráficas para determinar cuál de la funciones $f(x) = x^4 - 100x^3$ y $g(x) = x^3$ es finalmente más grande.

27. ¿Para qué valores de x es cierto que $|\tan x - x| < 0.01$ y $-\pi/2 < x < \pi/2$?

28. Grafique los polinomios $P(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2x$ y $Q(x) = 3x^5$ en la misma pantalla, utilizando primero el rectángulo de vista de $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$ y, a continuación, cambiándolo a $[-10, 10]$ por $[-10000, 10000]$. ¿Qué observa en estas gráficas?

29. En este ejercicio consideramos la familia de funciones raíz $f(x) = \sqrt[n]{x}$, donde n es un entero positivo.
a) Grafique las funciones $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[4]{x}$ y $y = \sqrt[6]{x}$ en la misma pantalla usando el rectángulo de vista $[-1, 4]$ por $[-1, 3]$.
b) Grafique las funciones $y = x$, $y = \sqrt[3]{x}$ y $y = \sqrt[5]{x}$ en la misma pantalla usando el rectángulo de vista $[-3, 3]$ por $[-2, 2]$. (Véase el ejemplo 7.)
c) Grafique las funciones $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$, $y = \sqrt[4]{x}$ y $y = \sqrt[5]{x}$ en la misma pantalla usando el rectángulo de vista $[-1, 3]$ por $[-1, 2]$.
d) ¿Qué conclusiones puede usted obtener de estas gráficas?

30. En este ejercicio consideramos la familia de funciones $f(x) = 1/x^n$, donde n es un entero positivo.
a) Grafique las funciones $y = 1/x$, $y = 1/x^3$ en la misma pantalla utilizando el rectángulo de vista $[-3, 3]$ por $[-3, 3]$.
b) Grafique las funciones $y = 1/x^2$ y $y = 1/x^4$ en la misma pantalla utilizando el mismo rectángulo de vista que en el inciso a).
c) Grafique todas las funciones de los incisos a) y b) en la misma pantalla utilizando el rectángulo de vista $[-1, 3]$ por $[-1, 3]$.
d) ¿Qué conclusiones puede obtener de estas gráficas?

31. Grafique la función $f(x) = x^4 + cx^2 + x$ para varios valores de c. ¿Cómo cambia la gráfica cuando cambia c?

32. Grafique la función $f(x) = \sqrt{1 + cx^2}$ para varios valores de c. Describa cómo afectan la gráfica los cambios en c.

Se requiere calculadora graficadora o computadora **1.** Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

33. Grafique la función $y = x^n 2^{-x}$, $x \geqslant 0$, para $n = 1, 2, 3, 4, 5$ y 6. ¿Cómo cambia la gráfica cuando n aumenta?

34. Las curvas con ecuaciones

$$y = \frac{|x|}{\sqrt{c - x^2}}$$

se llaman **curvas nariz de bala**. Grafique algunas de estas curvas para saber por qué. ¿Qué pasa cuando c aumenta?

35. ¿Qué pasa con la gráfica de la ecuación $y^2 = cx^3 + x^2$ cuando c varía?

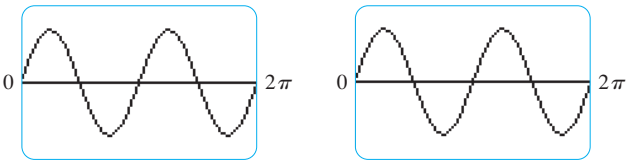
36. Este ejercicio explora el efecto de la función g en el interior de una función compuesta $y = f(g(x))$.

a) Grafique la función $y = \operatorname{sen}(\sqrt{x})$ utilizando el rectángulo de vista [0, 400] por [−1.5, 1.5]. ¿De qué manera esta gráfica difiere de la gráfica de la función seno?

b) Grafique la función $y = \operatorname{sen}(x^2)$, utilizando el rectángulo de vista [−5, 5] por [−1.5, 1.5] ¿De qué manera esta gráfica difiere de la gráfica de la función seno?

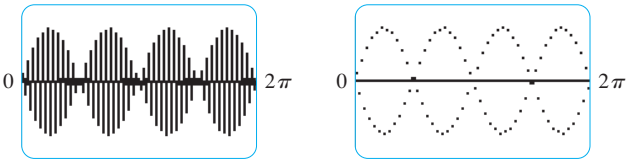
37. La figura muestra las gráficas de $y = \operatorname{sen} 96x$ y $y = \operatorname{sen} 2x$ como se muestra en la calculadora graficadora TI-83. La primera gráfica es inexacta. Explique por qué las dos gráficas parecen idénticas.

[*Sugerencia:* la ventana de graficación de la TI-83 es de 95 pixeles de ancho. ¿Qué puntos específicos grafica la calculadora?]



$y = \operatorname{sen} 96x$ $\qquad$ $y = \operatorname{sen} 2x$

38. La primera gráfica que aparece en la figura es la de $y = \operatorname{sen} 45x$ como la muestra una TI-83. Es inexacta y, por eso, para ayudar a explicar su aspecto en la segunda gráfica, se traza la curva de nuevo con el modo de puntos. ¿Cuál de las dos curvas senoidales parece estar graficando? Muestre que cada punto sobre la gráfica de $y = \operatorname{sen} 45x$ que eligió graficar la TI-83 está, de hecho, sobre una de estas curvas. (La TI-83 grafica en ventanas de 95 píxeles de ancho.)



1.5 Funciones exponenciales

La función $f(x) = 2^x$ se llama una *función exponencial* porque la variable, x, es el exponente. No debe confundirse con la $g(x)$ de la función potencia $g(x) = x^2$, en la que la variable está en la base.

En general, una **función exponencial** es una de la forma

$$f(x) = a^x$$

donde a es una constante positiva. Recordemos el significado de esto.

Si $x = n$, donde n es un entero positivo, entonces

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ factores}}$$

Si $x = 0$, entonces $a^0 = 1$, y si $x = -n$, donde n es un entero positivo, entonces

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Si x es un número racional, $x = p/q$, donde p y q son números enteros y $q > 0$, entonces

$$a^x = a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$$

Pero, ¿cuál es el significado de a^x si x es un número irracional? Por ejemplo, ¿qué significa $2^{\sqrt{3}}$ o 5^π?

Para ayudarnos a responder esta pregunta, examinemos la gráfica de la función $y = 2^x$, donde x es racional. Una representación de esta gráfica se muestra en la figura 1. Queremos ampliar el dominio de $y = 2^x$ para incluir tanto los números racionales como los irracionales.

En el apéndice G hay un enfoque alternativo a las funciones exponenciales y logarítmicas mediante cálculo Integral.

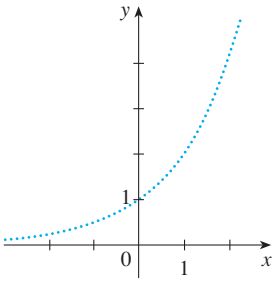


FIGURA 1
Representación de $y = 2^x$, con x racional

Hay huecos en la gráfica de la figura 1 correspondientes a valores irracionales de x. Queremos llenarlos mediante la definición de $f(x) = 2^x$, donde $x \in \mathbb{R}$, por lo que f es una función creciente. En particular, puesto que el número irracional $\sqrt{3}$ satisface

$$1.7 < \sqrt{3} < 1.8$$

debemos tener

$$2^{1.7} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.8}$$

y sabemos qué significan $2^{1.7}$ y $2^{1.8}$, ya que 1.7 y 1.8 son números racionales. Del mismo modo, si usamos mejores aproximaciones para $\sqrt{3}$, obtenemos mejores aproximaciones para $2^{\sqrt{3}}$:

$$\begin{aligned}
1.73 < \sqrt{3} < 1.74 \quad &\Rightarrow \quad 2^{1.73} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.74} \\
1.732 < \sqrt{3} < 1.733 \quad &\Rightarrow \quad 2^{1.732} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.733} \\
1.7320 < \sqrt{3} < 1.7321 \quad &\Rightarrow \quad 2^{1.7320} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.7321} \\
1.73205 < \sqrt{3} < 1.73206 \quad &\Rightarrow \quad 2^{1.73205} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.73206} \\
\vdots \qquad\quad \vdots \quad &\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots
\end{aligned}$$

Una demostración de este hecho se da en J. Marsden y A. Weinstein, *Cálculo Ilimitado* (Menlo Park, California, 1981). Para una versión en línea, consulte caltechbook.library.caltech.edu/197/

Puede demostrarse que hay exactamente un número que es mayor que todos los números

$$2^{1.7}, \quad 2^{1.73}, \quad 2^{1.732}, \quad 2^{1.7320}, \quad 2^{1.73205}, \quad \ldots$$

y menor que todos los números

$$2^{1.8}, \quad 2^{1.74}, \quad 2^{1.733}, \quad 2^{1.7321}, \quad 2^{1.73206}, \quad \ldots$$

A este número lo definimos como $2^{\sqrt{3}}$ y, utilizando este procedimiento de aproximación, podemos obtenerlo con una aproximación de seis decimales:

$$2^{\sqrt{3}} \approx 3.321997$$

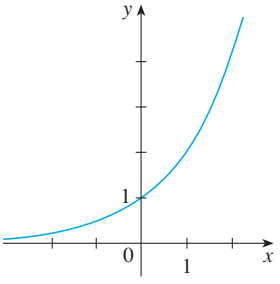


FIGURA 2
$y = 2^x$, para x real

De la misma manera, podemos definir 2^x (o a^x, si $a > 0$) donde x es cualquier número irracional. En la figura 2 se muestra cómo todos los huecos en la figura 1 han sido llenados para completar la gráfica de la función $f(x) = 2^x, x \in \mathbb{R}$.

Las gráficas de los miembros de la familia de funciones $y = a^x$ se muestran en la figura 3 para varios valores de la base a. Tenga en cuenta que todas estas gráficas pasan por el mismo punto (0, 1) porque $a^0 = 1$ para $a \neq 0$. Note también que cuando la base a se hace más grande, la función exponencial crece más rápidamente (para $x > 0$).

Si $0 < a < 1$, entonces a^x se aproxima a 0 cuando x es muy grande. Si $a > 1$, entonces a^x se aproxima a 0 cuando x disminuye al tomar valores negativos. En ambos casos el eje x es una asíntota horizontal. Estas cuestiones se tratan en la sección 2.6.

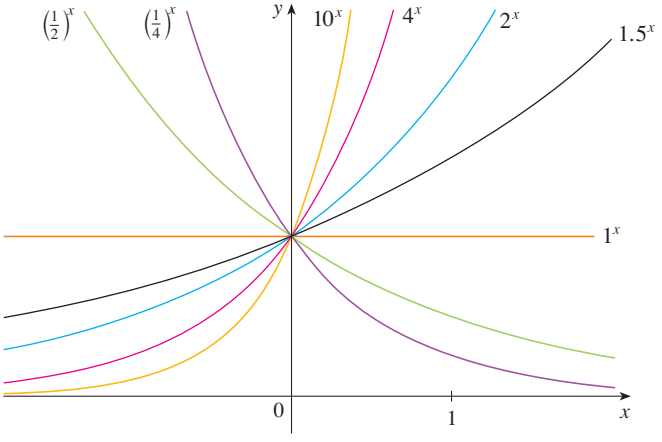


FIGURA 3

Puede verse en la figura 3 que existen básicamente tres tipos de funciones exponenciales $y = a^x$. Si $0 < a < 1$, la función exponencial decrece; si $a = 1$, es una constante, y si $a > 1$, crece. Estos tres casos se ilustran en la figura 4. Observe que si $a \neq 1$, entonces la función exponencial $y = a^x$ tiene dominio $\mathbb{R}$ y rango $(0, \infty)$. Note también que, dado que $(1/a)^x = 1/a^x = a^{-x}$ es justamente la reflexión de la gráfica de $y = a^x$ sobre el eje y.

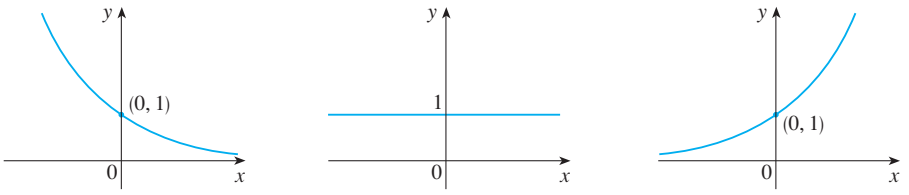


FIGURA 4 a) $y = a^x,\ 0 < a < 1$ b) $y = 1^x$ c) $y = a^x,\ a > 1$

Una de las razones de la importancia de la función exponencial se encuentra en las siguientes propiedades. Si x y y son números racionales, entonces estas leyes son bien conocidas del álgebra elemental. Puede demostrarse que seguirá siendo así para números reales x y y arbitrarios.

www.stewartcalculus.com
Para un repaso de las leyes de exponentes, haga clic en *Review of Algebra*.

Leyes de los exponentes Si a y b son números positivos, y los números x y y son reales cualesquiera, entonces

1. $a^{x+y} = a^x a^y$ **2.** $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$ **3.** $(a^x)^y = a^{xy}$ **4.** $(ab)^x = a^x b^x$

EJEMPLO 1 Grafique la función $y = 3 - 2^x$ y determine su dominio y rango.

Para un repaso de la reflexión y desplazamiento de gráficas, consulte la sección 1.3.

SOLUCIÓN Primero reflejamos la gráfica de $y = 2^x$ [se muestran en las figuras 2 y 5a)] sobre el eje x para obtener la gráfica de $y = -2^x$ en la figura 5b). Después desplazamos 3 unidades hacia arriba la gráfica de $y = -2^x$ para obtener la gráfica de $y = 3 - 2^x$ en la figura 5c). El dominio es $\mathbb{R}$, y el rango es $(-\infty, 3)$.

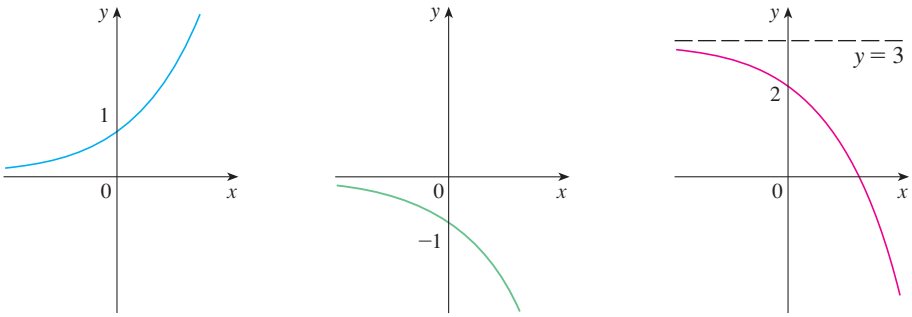


FIGURA 5 a) $y = 2^x$ b) $y = -2^x$ c) $y = 3 - 2^x$

V EJEMPLO 2 Utilice un dispositivo de graficación para comparar la función exponencial $f(x) = 2^x$ con la de la función potencia $g(x) = x^2$. ¿Cuál función crece más rápidamente cuando x es muy grande?

En el ejemplo 2 se muestra que $y = 2^x$ aumenta más rápidamente que $y = x^2$. Para demostrar lo rápido que $f(x) = 2^x$ aumenta, vamos a realizar el siguiente experimento mental. Supongamos que empezamos con un trozo de papel de una milésima de pulgada de espesor y lo doblamos por la mitad 50 veces. Cada vez que dobla el papel por la mitad, el grosor del papel se duplica, por lo que el grosor del papel resultante sería $2^{50}/1\,000$ pulgadas. ¿De qué grosor cree usted que es? ¡Más de 17 millones de millas!

SOLUCIÓN La figura 6 muestra ambas funciones representadas gráficamente en el rectángulo de vista $[-2, 6]$ por $[0, 40]$. Vemos que las gráficas se intersectan tres veces, pero para $x > 4$ la gráfica de $f(x) = 2^x$ permanece por encima de la gráfica de $g(x) = x^2$. La figura 7 da una visión más global y muestra que para grandes valores de x, la función exponencial $y = 2^x$ crece mucho más rápidamente que la función potencia $y = x^2$.

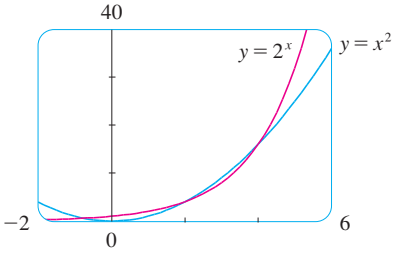


FIGURA 6

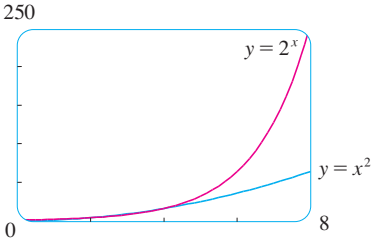


FIGURA 7

Aplicaciones de las funciones exponenciales

La función exponencial ocurre con mucha frecuencia en los modelos matemáticos de las ciencias naturales y sociales. Aquí le indicamos brevemente cómo surge en la descripción del crecimiento de una población. En capítulos posteriores seguiremos estas y otras aplicaciones en mayor detalle.

En primer lugar, consideramos una población de bacterias en un medio nutritivo homogéneo. Supongamos que por muestreo de la población a ciertos intervalos se determina que la población se duplica cada hora. Si el número de bacterias en el tiempo t es $p(t)$, donde t se mide en horas, y la población inicial es $p(0) = 1\,000$, entonces tenemos

$$p(1) = 2p(0) = 2 \times 1\,000$$

$$p(2) = 2p(1) = 2^2 \times 1\,000$$

$$p(3) = 2p(2) = 2^3 \times 1\,000$$

De este patrón, parece ser que, en general:

$$p(t) = 2^t \times 1\,000 = (1\,000)2^t$$

Esta función de la población es un múltiplo constante de la función exponencial $y = 2^t$, por lo que muestra el rápido crecimiento que hemos observado en las figuras 2 y 7. En condiciones ideales (espacio ilimitado, nutrición y la ausencia de enfermedad), este crecimiento exponencial es típico de lo que realmente ocurre en la naturaleza.

¿Qué pasa con la población humana? La tabla 1 muestra los datos de la población del mundo en el siglo XX, y en la figura 8 se muestra la gráfica de dispersión correspondiente.

TABLA 1

t	Población (millones)
0	1 650
10	1 750
20	1 860
30	2 070
40	2 300
50	2 560
60	3 040
70	3 710
80	4 450
90	5 280
100	6 080
110	6 870

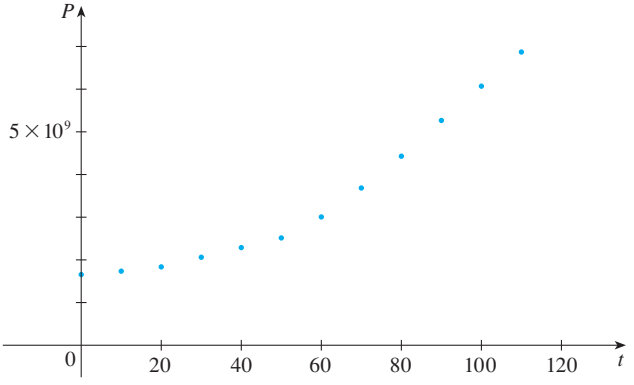


FIGURA 8 Gráfica de dispersión para el crecimiento de la población mundial

El patrón de los puntos de datos en la figura 8 sugiere un crecimiento exponencial, por eso usamos una calculadora graficadora con capacidad de regresión exponencial para aplicar el método de mínimos cuadrados y obtener el modelo exponencial

$$P = (1436.53) \cdot (1.01395)^t$$

donde $t = 0$ corresponde a 1900. La figura 9 muestra la gráfica de esta función exponencial junto con los puntos de datos originales. Vemos que la curva exponencial ajusta razonablemente bien en el conjunto de datos. El periodo de crecimiento relativamente lento de la población se explica por las dos Guerras Mundiales y la Gran Depresión de la década de 1930.

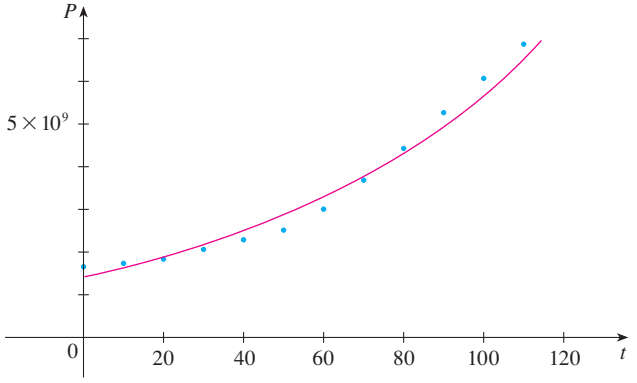


FIGURA 9
Modelo exponencial para el crecimiento de población

El número *e*

De todas las posibles bases para una función exponencial, hay una que es más conveniente para los fines del Cálculo. La elección de una base a está influida por la forma en que la gráfica de $y = a^x$ cruza el eje y. Las figuras 10 y 11 muestran las rectas tangentes a las gráficas de $y = 2^x$ y $y = 3^x$ en el punto (0, 1). (Se definirán las rectas tangentes de manera precisa en la sección 2.7. Para los presentes fines, puede considerarse que la recta tangente a una gráfica exponencial en un punto es la recta que toca la gráfica sólo en ese punto.) Si medimos las pendientes de estas rectas tangentes en (0, 1), encontramos que $m \approx 0.7$ para $y = 2^x$ y $m \approx 1.1$ para $y = 3^x$.

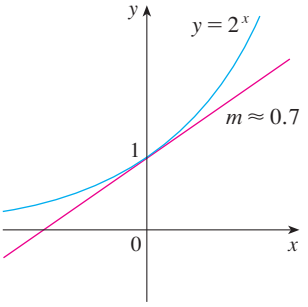


FIGURA 10

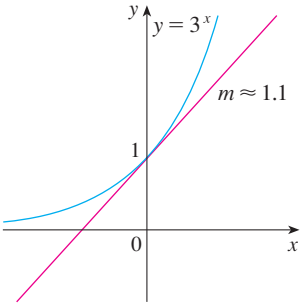


FIGURA 11

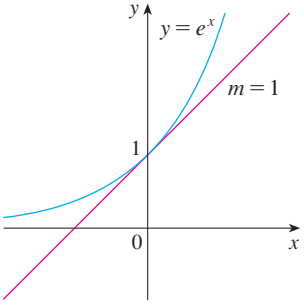


FIGURA 12
La función exponencial natural interseca al eje y con una pendiente igual a 1

Resulta que, como veremos en el capítulo 3, algunas de las fórmulas del Cálculo quedarán muy simplificadas si elegimos la base a para la que la pendiente de la tangente de recta a $y = a^x$ en (0, 1) es *exactamente* 1. (Véase la figura 12.) De hecho, *existe* tal número y se denota con la letra e. (Esta notación fue elegida por el matemático suizo Leonhard Euler en 1727, probablemente porque es la primera letra de la palabra *exponencial*.) En vista de las figuras 10 y 11, no causa ninguna sorpresa que el número e se encuentre entre 2 y 3 y que la gráfica de $y = e^x$ se halle entre las gráficas de $y = 2^x$ y $y = 3^x$. (Véase la figura 13.) En el capítulo 3 veremos que el valor de e, con una aproximación de cinco decimales, es

$$e \approx 2.71828$$

A la función $f(x) = e^x$ la llamamos **función exponencial natural**.

TEC Module 1.5 le permite graficar funciones exponenciales con diversas bases y sus rectas tangentes para calcular más de cerca el valor de a para la cual la recta tangente tiene pendiente 1.

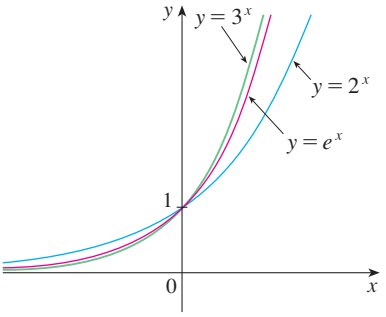
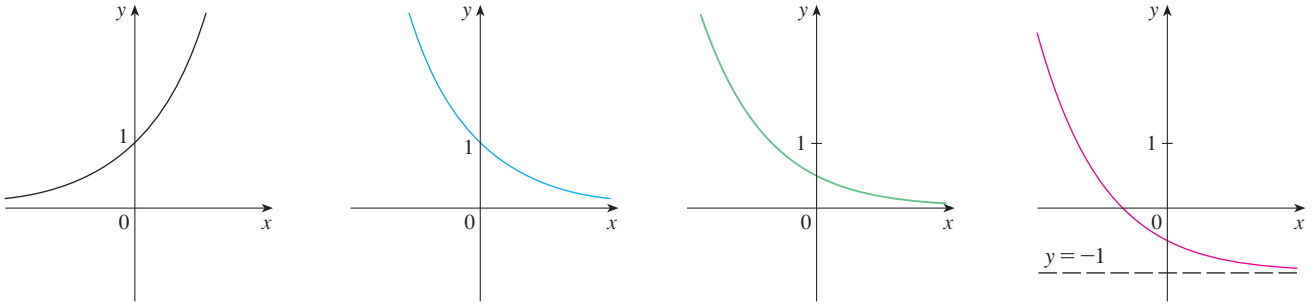


FIGURA 13

V EJEMPLO 3 Grafique la función $y = \frac{1}{2}e^{-x} - 1$ y establezca el dominio y el rango.

SOLUCIÓN Empezamos con la gráfica de $y = e^x$ de las figuras 12 y 14a) y la reflejamos sobre el eje y para obtener la gráfica de $y = e^{-x}$ en la figura 14b). (Observe que la gráfica interseca el eje y con una pendiente de -1.) A continuación, se comprime la gráfica verticalmente por un factor de dos para obtener la gráfica de $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ en la figura 14c). Por último, se desplazará la gráfica hacia abajo una unidad para obtener la gráfica deseada en la figura 14d). El dominio es $\mathbb{R}$, y el rango es $(-1, \infty)$.



a) $y = e^x$ b) $y = e^{-x}$ c) $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ d) $y = \frac{1}{2}e^{-x} - 1$

FIGURA 14

¿Hasta qué valor de x a la derecha cree usted que tendríamos que ir para que la altura de la gráfica de $y = e^x$ sea superior a un millón? En el ejemplo siguiente se muestra el rápido crecimiento de esta función proporcionando una respuesta que podría sorprenderle.

EJEMPLO 4 Utilice un dispositivo de graficación para encontrar los valores de x para los cuales $e^x > 1\,000\,000$.

SOLUCIÓN En la figura 15 vemos la gráfica de la función $y = e^x$ y la recta horizontal $y = 1\,000\,000$. Vemos que estas curvas se intersectan cuando $x \approx 13.8$. Por tanto, $e^x > 10^6$ cuando $x > 13.8$. Tal vez le sorprenda que los valores de la función exponencial ya han superado un millón cuando x es sólo 14.

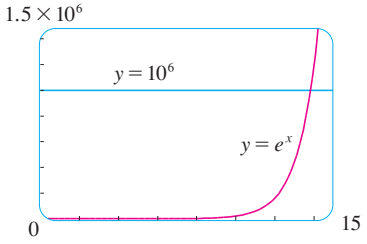


FIGURA 15

1.5 Ejercicios

1-4 Utilice las leyes de los exponentes para simplificar cada una de las siguientes expresiones:

1. a) $\dfrac{4^{-3}}{2^{-8}}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$

2. a) $8^{4/3}$ b) $x(3x^2)^3$

3. a) $b^8(2b)^4$ b) $\dfrac{(6y^3)^4}{2y^5}$

4. a) $\dfrac{x^{2n} \cdot x^{3n-1}}{x^{n+2}}$ b) $\dfrac{\sqrt{a\sqrt{b}}}{\sqrt[3]{ab}}$

5. a) Escriba una ecuación que defina la función exponencial con base $a > 0$.
a) ¿Cuál es el dominio de esta función?
c) Si $a \neq 1$, ¿cuál es el rango de esta función?
d) Dibuje la forma general de la gráfica de la función exponencial para cada uno de los siguientes casos.

i) $a > 1$ ii) $a = 1$ iii) $0 < a < 1$

6. a) ¿Cómo se define el número e?
b) ¿Cuál es un valor aproximado de e?
c) ¿Cuál es la función exponencial natural?

7-10 Grafique cada una de las siguientes funciones en una pantalla común. ¿Cómo se relacionan estas gráficas?

7. $y = 2^x$, $y = e^x$, $y = 5^x$, $y = 20^x$

8. $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $y = 8^x$, $y = 8^{-x}$

9. $y = 3^x$, $y = 10^x$, $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$

10. $y = 0.9^x$, $y = 0.6^x$, $y = 0.3^x$, $y = 0.1^x$

11-16 Haga un bosquejo de la gráfica de cada una de las siguientes funciones. No utilice calculadora. Sólo utilice las gráficas en las figuras 3 y 13 y, si es necesario, las transformaciones de la sección 1.3.

11. $y = 10^{x+2}$ **12.** $y = (0.5)^x - 2$

13. $y = -2^{-x}$ **14.** $y = e^{|x|}$

15. $y = 1 - \frac{1}{2}e^{-x}$ **16.** $y = 2(1 - e^x)$

17. A partir de la gráfica de $y = e^x$, escriba la ecuación de la gráfica que resulta de
a) desplazarla 2 unidades hacia abajo
b) desplazarla 2 unidades a la derecha
c) reflejarla sobre el eje x
d) reflejarla sobre el eje y
e) reflejarla sobre el eje x y luego sobre el eje y

18. Comenzando con la gráfica de $y = e^x$, encuentre la ecuación de la gráfica resultante al
a) reflejarla sobre la recta $y = 4$
b) reflejarla sobre la recta $x = 2$

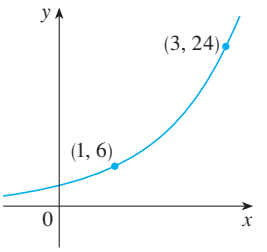
19-20 Encuentre el dominio de cada una de las siguientes funciones

19. a) $f(x) = \dfrac{1 - e^{x^2}}{1 - e^{1-x^2}}$ b) $f(x) = \dfrac{1 + x}{e^{\cos x}}$

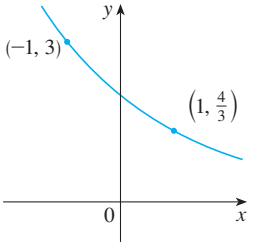
20. a) $g(t) = \operatorname{sen}(e^{-t})$ b) $g(t) = \sqrt{1 - 2^t}$

21-22 Encuentre la función exponencial $f(x) = Ca^x$ correspondiente a cada una de las siguientes gráficas:

21.



22.



23. Si $f(x) = 5^x$, demuestre que

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = 5^x\left(\frac{5^h - 1}{h}\right)$$

24. Supongamos que se le ofrece trabajo por un mes. ¿Cuál de los siguientes métodos de pago prefiere?
I. Un millón de dólares al final del mes.
II. Un centavo en el primer día del mes, dos centavos en el segundo día, cuatro centavos en el tercer día y, en general, 2^{n-1} centavos al n-ésimo día.

25. Supongamos que las gráficas de $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2^x$ se dibujan en una cuadrícula de coordenadas con 1 pulgada como unidad de medida. Demuestre que, a una distancia de 2 pies a la derecha del origen, la altura de la gráfica de f es de 48 pies, pero la altura de la gráfica de g es aproximadamente 265 millas.

26. Compare las funciones $f(x) = x^5$ y $g(x) = 5^x$ graficando ambas funciones en varios rectángulos de vista. Encuentre todos los puntos de intersección de las gráficas con aproximación a un decimal. ¿Cuál función crece más rápidamente cuando x es muy grande?

27. Compare las funciones $f(x) = x^{10}$ y $g(x) = e^x$ graficando f y g en varios rectángulos de vista. ¿Cuándo la gráfica de g finalmente supera a la gráfica de f?

28. Utilice una gráfica para estimar los valores de x tales que $e^x > 1\,000\,000\,000$.

29. Bajo condiciones ideales se sabe con certeza que una población de bacterias se duplica cada tres horas. Supongamos que inicialmente hay 100 bacterias.
a) ¿Cuál es el tamaño de la población después de 15 horas?
b) ¿Cuál es el tamaño de la población después de t horas?
c) Estime el tamaño de la población después de 20 horas.
d) Grafique la función de la población y estime el tiempo para que la población llegue a 50 000.

30. Un cultivo bacteriano se inicia con 500 bacterias y duplica su tamaño cada media hora.
a) ¿Cuántas bacterias hay después de 3 horas?
b) ¿Cuántas hay después de t horas?
c) ¿Cuántas hay después de 40 minutos?
d) Grafique la función de la población y estime el tiempo para que la población llegue a 100 000.

31. Utilice una calculadora graficadora con comando para regresión exponencial para modelar la población del mundo con los datos, desde 1950 hasta 2010, dados en la tabla 1 en la página 54. Utilice el modelo para estimar la población en 1993 y para predecir la población en el año 2020.

32. La tabla muestra la población de EU, en millones, en los años 1900-2010. Utilice una calculadora graficadora con comando de regresión exponencial para modelar la población de EU desde 1900. Utilice el modelo para estimar la población en 1925 y predecir la población en el año 2020.

Año	Población	Año	Población
1900	76	1960	179
1910	92	1970	203
1920	106	1980	227
1930	123	1990	250
1940	131	2000	281
1950	150	2010	310

33. Si graficamos la función

$$f(x) = \frac{1 - e^{1/x}}{1 + e^{1/x}}$$

veremos que f parece ser una función impar; demuéstrelo.

34. Grafique varios miembros de la familia de funciones

$$f(x) = \frac{1}{1 + ae^{bx}}$$

donde $a > 0$. ¿Cómo cambia la gráfica cuando b varía? ¿Cómo cambia cuando a varía?

1.6 Funciones inversas y logaritmos

La tabla 1 muestra los datos de un experimento en el que un cultivo de bacterias inició con 100 de ellas en un medio limitado de nutrientes; el tamaño de población de bacterias se registró a intervalos de una hora. El número N de bacterias es una función del tiempo t: $N = f(t)$.

Supongamos, sin embargo, que el biólogo cambia su punto de vista y se interesa en el tiempo requerido para que la población alcance distintos niveles. En otras palabras, piensa en t como una función de N. Esta función se llama *función inversa* de f, denotada por f^{-1} y se lee "f inversa". Así, $t = f^{-1}(N)$ es el tiempo requerido para que el nivel de la población llegue a N. Los valores de f^{-1} pueden encontrarse mediante la lectura de la tabla 1 de derecha a izquierda o consultando la tabla 2. Por ejemplo, $f^{-1}(550) = 6$ ya que $f(6) = 550$.

TABLA 1 N como función de t

t (horas)	$N = f(t)$ = población en el tiempo t
0	100
1	168
2	259
3	358
4	445
5	509
6	550
7	573
8	586

TABLA 2 t como función de N

N	$t = f^{-1}(N)$ = tiempo para llegar a N bacterias
100	0
168	1
259	2
358	3
445	4
509	5
550	6
573	7
586	8

No todas las funciones poseen inversa. Vamos a comparar las funciones f y g cuyos diagramas de flechas se muestran en la figura 1. Observe que f nunca tiene el mismo valor dos veces (cualquier par de entradas en A tienen diferentes salidas), mientras que g toma el mismo valor dos veces (2 y 3 tienen la misma salida, 4). En símbolos,

$$g(2) = g(3),$$

pero $$f(x_1) \neq f(x_2) \qquad \text{siempre que } x_1 \neq x_2.$$

Las funciones que comparten esta propiedad con f se denominan funciones *uno a uno*.

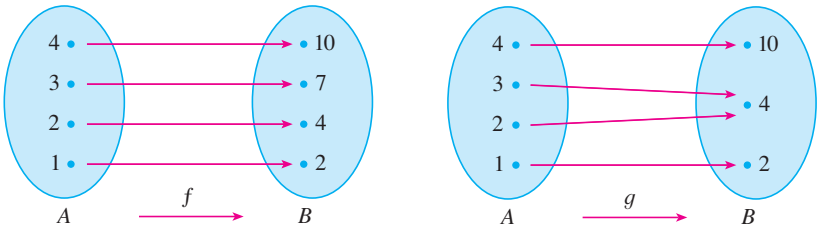


FIGURA 1
f es uno a uno; g no lo es

En el lenguaje de entradas y salidas, esta definición señala que f es *uno a uno* si a cada salida le corresponde sólo una entrada.

1 Definición Una función f se llama *uno a uno* si nunca toma el mismo valor dos veces; esto es,

$$f(x_1) \neq f(x_2) \qquad \text{siempre que } x_1 \neq x_2.$$

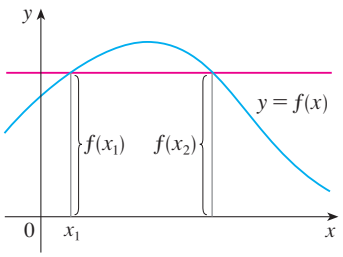


FIGURA 2
Esta función no es uno a uno, ya que $f(x_1) = f(x_2)$

Si una recta horizontal interseca la gráfica de f en más de un punto, entonces vemos en la figura 2 que hay números x_1 y x_2 tales que $f(x_1) = f(x_2)$. Esto significa que f no es uno a uno, por tanto, con el siguiente método geométrico podemos determinar si una función es uno a uno.

Prueba de la recta horizontal Una función es uno a uno si y sólo si no existe una recta horizontal que interseque su gráfica más de una vez.

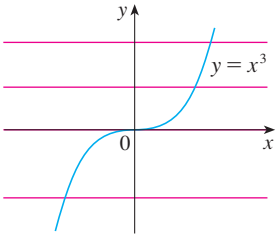


FIGURA 3
$f(x) = x^3$ es uno a uno

V EJEMPLO 1 ¿Es la función $f(x) = x^3$ uno a uno?

SOLUCIÓN 1 Si $x_1 \neq x_2$, entonces $x_1^3 \neq x_2^3$ (dos números diferentes no pueden tener el mismo cubo). Por tanto, por la definición 1, $f(x) = x^3$ es uno a uno.

SOLUCIÓN 2 De la figura 3 se observa que no existe recta horizontal que interseque a la gráfica de $f(x) = x^3$ más de una vez. Por tanto, por la prueba de la recta horizontal, f es uno a uno.

V EJEMPLO 2 ¿Es uno a uno la función $g(x) = x^2$?

SOLUCIÓN 1 Esta función no es uno a uno, ya que, por ejemplo,

$$g(1) = 1 = g(-1),$$

por lo que 1 y -1 tienen la misma salida.

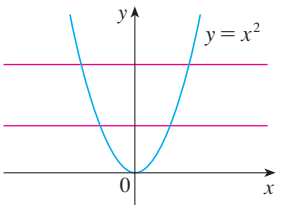


FIGURA 4
$g(x) = x^2$ no es uno a uno

SOLUCIÓN 2 De la figura 4 se observa que existen rectas horizontales que cruzan la gráfica de g más de una vez. Por tanto, por la prueba de la recta horizontal, g no es uno a uno.

Las funciones uno a uno son importantes porque son precisamente aquellas que poseen funciones inversas de acuerdo con la siguiente definición.

2 Definición Sea f una función uno a uno con dominio A y rango B. Entonces, la **función inversa** f^{-1} tiene dominio B y rango A y está definida por

$$f^{-1}(y) = x \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = y$$

para cualquier y en B.

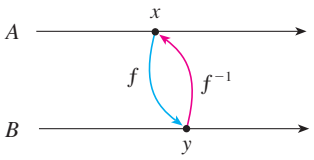


FIGURA 5

La definición dice que si f hace corresponder x con y, entonces f^{-1} hace corresponder de regreso y con x. (Si f no es uno a uno, entonces f^{-1} no está definida de manera única). El diagrama de flechas en la figura 5 indica que f^{-1} invierte el efecto de f. Note que

$$\text{dominio de } f^{-1} = \text{rango de } f$$
$$\text{rango de } f^{-1} = \text{dominio de } f$$

Por ejemplo, la función inversa de $f(x) = x^3$ es $f^{-1}(x) = x^{1/3}$ ya que si $y = x^3$, entonces

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(x^3) = (x^3)^{1/3} = x$$

CUIDADO No cometa el error de pensar en -1 en f^{-1} como un exponente. Es decir,

$$f^{-1}(x) \quad \textit{no} \text{ significa } \frac{1}{f(x)}$$

En todo caso, $1/f(x)$ es el recíproco y debería escribirse como $[f(x)]^{-1}$.

V EJEMPLO 3 Si $f(1) = 5$, $f(3) = 7$ y $f(8) = -10$, encuentre $f^{-1}(7)$, $f^{-1}(5)$ y $f^{-1}(-10)$.

SOLUCIÓN De la definición de f^{-1}, tenemos

$$f^{-1}(7) = 3 \quad \text{ya que} \quad f(3) = 7$$
$$f^{-1}(5) = 1 \quad \text{ya que} \quad f(1) = 5$$
$$f^{-1}(-10) = 8 \quad \text{ya que} \quad f(8) = -10$$

El diagrama en la figura 6 aclara cómo f^{-1} invierte el efecto de f en este caso.

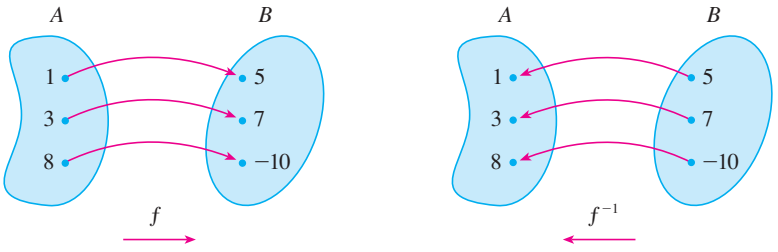


FIGURA 6
La función inversa invierte las salidas y las entradas

La letra x es tradicionalmente utilizada como la variable independiente, así que cuando nos concentramos en f^{-1} en vez de f, usualmente cambiamos los roles de x y y en la definición 2, y escribimos

3

$$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$$

Al sustituir por y en la definición 2 y sustituyendo por x en 3, obtenemos las siguientes **ecuaciones de cancelación**

4

$$f^{-1}\big(f(x)\big) = x \quad \text{para toda } x \text{ en } A$$
$$f\big(f^{-1}(x)\big) = x \quad \text{para toda } x \text{ en } B$$

La primera ecuación cancelada indica que si comenzamos con x, aplicando f y, a continuación, aplicamos f^{-1}, llegamos de regreso a x, donde empezamos (consulte el diagrama de máquinas en la figura 7). Así, f^{-1} deshace a f. La segunda ecuación señala que f deshace lo que hace f^{-1}.

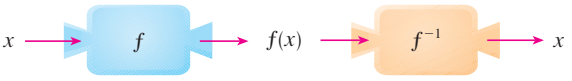


FIGURA 7

Por ejemplo, si $f(x) = x^3$, entonces $f^{-1}(x) = x^{1/3}$ y, por tanto, las ecuaciones de cancelación son

$$f^{-1}\big(f(x)\big) = (x^3)^{1/3} = x$$
$$f\big(f^{-1}(x)\big) = (x^{1/3})^3 = x$$

Estas ecuaciones dicen simplemente que la función *elevar al cubo* y la función *raíz cúbica* se anulan mutuamente cuando se aplican una después de la otra.

Ahora veamos cómo calcular funciones inversas. Si tenemos una función $y = f(x)$ y somos capaces de resolver esta ecuación para x en términos de y, entonces, de acuerdo con la definición 2, debemos obtener $x = f^{-1}(y)$. Si queremos llamar a la variable independiente x, intercambiamos x por y y llegamos a la ecuación $y = f^{-1}(x)$.

5 Cómo encontrar la función inversa de una función *f* uno a uno

Paso 1 Escribir $y = f(x)$.

Paso 2 Resolver esta ecuación para x en términos de y (si es posible).

Paso 3 Para expresar f^{-1} en función de x, intercambiamos x por y. La ecuación resultante es $y = f^{-1}(x)$.

V EJEMPLO 4 Encuentre la función inversa de $f(x) = x^3 + 2$.

SOLUCIÓN De acuerdo con 5 empezamos escribiendo

$$y = x^3 + 2$$

Después, despejamos x

$$x^3 = y - 2$$

$$x = \sqrt[3]{y - 2}$$

Finalmente, intercambiamos x y y:

$$y = \sqrt[3]{x - 2}$$

En el ejemplo 4, note cómo f^{-1} invierte el efecto de f. La función f es la regla "elevar al cubo y después sumar 2"; f^{-1} es la regla "restar dos y después tomar la raíz cúbica".

Ahora, la función inversa es $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 2}$.

El principio de intercambio de x e y para encontrar la función inversa también nos da el método para obtener la gráfica de f^{-1} a partir de la gráfica de f. Ya que $f(a) = b$ si y sólo si $f^{-1}(b) = a$, el punto (a, b) está en la gráfica de f si y sólo si el punto (b, a) está en la gráfica de f^{-1}. Así, el punto (b, a) a partir del punto (a, b) se obtiene reflejando el segundo sobre la recta $y = x$. (Véase la figura 8.)

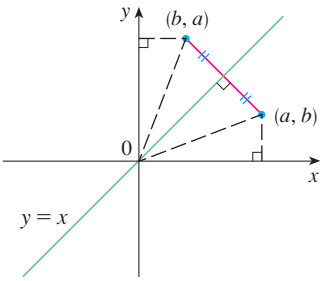


FIGURA 8

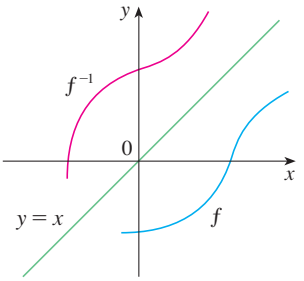


FIGURA 9

Así, como se ejemplifica en la figura 9:

> La gráfica de f^{-1} se obtiene reflejando la gráfica de f sobre la recta $y = x$.

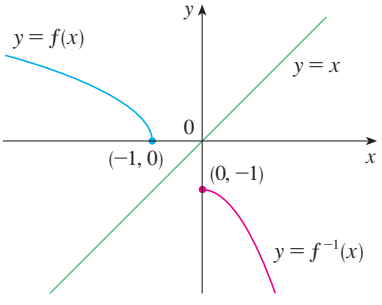


FIGURA 10

EJEMPLO 5 Dibuje las gráficas de $f(x) = \sqrt{-1 - x}$ y su función inversa utilizando el mismo eje de coordenadas.

SOLUCIÓN Primero trazamos la curva $y = \sqrt{-1 - x}$ (la mitad superior de la parábola $y^2 = -1 - x$ o $x = -y^2 - 1$) y, a continuación, reflejamos sobre la recta $y = x$ para obtener la gráfica de f^{-1}. (Véase la figura 10.) Para comprobar nuestra gráfica, observe que la expresión para f^{-1} es $f^{-1}(x) = -x^2 - 1$, $x \geqslant 0$. Por lo que la gráfica de f^{-1} es la mitad derecha de la parábola $y = -x^2 - 1$, y esto parece razonable a partir de la figura 10.

Funciones logarítmicas

Si $a > 0$ y $a \neq 1$, la función exponencial $f(x) = a^x$ siempre es creciente o decreciente, así que es uno a uno por la prueba de la recta horizontal. Por tanto, tiene una función inversa f^{-1} que se llama la **función logarítmica con base *a*** y se denota por $\log_a$. Si utilizamos

la formulación de una función inversa dada por 3,

$$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x,$$

entonces tenemos

6

$$\log_a x = y \iff a^y = x$$

Así, si $x > 0$, entonces $\log_a x$ es el exponente al que hay que elevar la base a para obtener x. Por ejemplo, el $\log_{10} 0.001 = -3$, ya que $10^{-3} = 0.001$.

Las ecuaciones de cancelación 4, cuando se aplican a la funciones $f(x) = a^x$ y $f^{-1}(x) = \log_a x$, se convierten en

7

$$\log_a(a^x) = x \quad \text{para toda } x \in \mathbb{R}$$

$$a^{\log_a x} = x \quad \text{para toda } x > 0$$

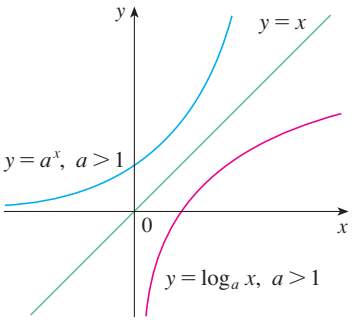


FIGURA 11

La función logarítmica $\log_a$ tiene dominio $(0, \infty)$ y rango $\mathbb{R}$. Su gráfica es la reflexión de la gráfica de $y = a^x$ sobre la recta $y = x$.

La figura 11 muestra el caso en que $a > 1$. (Las funciones logarítmicas más importantes tienen una base $a > 1$.) El hecho de que $y = a^x$ sea una función de rápido crecimiento para $x > 0$ se refleja en el hecho de que $y = \log_a x$ es una función de lento crecimiento para $x > 1$.

La figura 12 muestra las gráficas de $y = \log_a x$ con varios valores de la base $a > 1$. Puesto que $\log_a 1 = 0$, las gráficas de todas las funciones logarítmicas pasan por el punto $(1, 0)$.

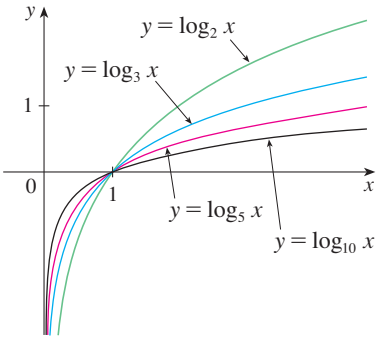


FIGURA 12

Las siguientes propiedades de las funciones logarítmicas se derivan de las correspondientes propiedades de las funciones exponenciales dadas en la sección 1.5.

Leyes de los logaritmos Si x e y son números positivos, entonces

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
3. $\log_a(x^r) = r \log_a x$ (donde r es cualquier número real)

EJEMPLO 6 Use las leyes de los logaritmos para evaluar $\log_2 80 - \log_2 5$.

SOLUCIÓN Con la ley 2, tenemos

$$\log_2 80 - \log_2 5 = \log_2\left(\frac{80}{5}\right) = \log_2 16 = 4$$

porque $2^4 = 16$.

Logaritmos naturales

La notación de los logaritmos
En la mayoría de los libros de texto de cálculo y las ciencias, así como en las calculadoras, se usa la notación $\ln x$ para el logaritmo natural de x, y $\log x$ para el "logaritmo común", $\log_{10} x$. Sin embargo, en la literatura matemática y científica más avanzada, así como en los lenguajes de programación de computadoras, la notación $\log x$ denota por lo general el logaritmo natural.

De todas las posibles bases a de los logaritmos, veremos en el capítulo 3 que la más conveniente es el número e, que se definió en la sección 1.5. Al logaritmo con base e se le llama **logaritmo natural** y tiene una notación especial:

$$\log_e x = \ln x$$

Si ponemos $a = e$ y sustituimos $\log_e$ con "ln" en 6 y 7, entonces las propiedades que definen la función logaritmo natural se convierten en

8 $$\ln x = y \iff e^y = x$$

9 $$\ln(e^x) = x \qquad x \in \mathbb{R}$$
$$e^{\ln x} = x \qquad x > 0$$

En particular, si ponemos $x = 1$, obtenemos

$$\ln e = 1$$

EJEMPLO 7 Encuentre x si $\ln x = 5$.

SOLUCIÓN 1 De 8 vemos que

$$\ln x = 5 \qquad \text{significa} \qquad e^5 = x$$

Por tanto, $x = e^5$.

(Si tiene problemas para trabajar con la notación "ln", simplemente reemplácela por $\log_e$. Entonces la ecuación se convierte en $\log_e x = 5$; así que, por la definición de logaritmo, $e^5 = x$.)

SOLUCIÓN 2 Comience con la ecuación

$$\ln x = 5$$

y aplique la función exponencial a ambos lados de la ecuación:

$$e^{\ln x} = e^5$$

Sin embargo, la segunda ecuación de cancelación 9 indica que $e^{\ln x} = x$. Por tanto, $x = e^5$.

EJEMPLO 8 Resuelva la ecuación $e^{5-3x} = 10$.

SOLUCIÓN Tomamos logaritmos naturales de ambos lados de la ecuación y usamos 9:

$$\ln(e^{5-3x}) = \ln 10$$

$$5 - 3x = \ln 10$$

$$3x = 5 - \ln 10$$

$$x = \tfrac{1}{3}(5 - \ln 10)$$

Ya que el logaritmo natural se encuentra en las calculadoras científicas, podemos aproximar la solución; para cuatro decimales tenemos: $x \approx 0.8991$.

V EJEMPLO 9 Exprese $\ln a + \frac{1}{2}\ln b$ con un solo logaritmo.

SOLUCIÓN Con las leyes 3 y 1 de los logaritmos, tenemos

$$\ln a + \tfrac{1}{2}\ln b = \ln a + \ln b^{1/2}$$

$$= \ln a + \ln \sqrt{b}$$

$$= \ln\left(a\sqrt{b}\right)$$

La siguiente fórmula muestra que los logaritmos de cualquier base pueden expresarse en términos de los logaritmos naturales.

10 Fórmula para el cambio de base Para cualquier número positivo a ($a \neq 1$), tenemos

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

DEMOSTRACIÓN Sea $y = \log_a x$. Entonces, a partir de 6, tenemos $a^y = x$. Tomando logaritmos naturales de ambos lados de esta ecuación, obtenemos $y \ln a = \ln x$. Por tanto,

$$y = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Las calculadoras científicas tienen un comando para los logaritmos naturales, por lo que la fórmula 10 nos permite utilizar una calculadora para calcular un logaritmo de cualquier base (como se muestra en el siguiente ejemplo). Del mismo modo, la fórmula 10 nos permite graficar cualquier función logarítmica en una calculadora graficadora o computadora (véanse los ejercicios 43 y 44).

EJEMPLO 10 Evalúe $\log_8 5$ con una precisión de seis decimales.

SOLUCIÓN La fórmula 10 da

$$\log_8 5 = \frac{\ln 5}{\ln 8} \approx 0.773976$$

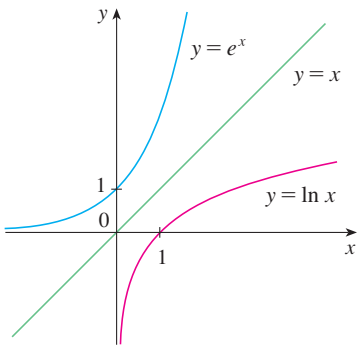


FIGURA 13
La gráfica de $y = \ln x$ es la reflexión de la gráfica $y = e^x$ sobre la recta $y = x$

Gráfica y crecimiento del logaritmo natural

Las gráficas de la función exponencial $y = e^x$ y su función inversa, la función logaritmo natural, se muestran en la figura 13. Debido a que la curva $y = e^x$ cruza el eje y con una pendiente de 1, se deduce que la curva reflejada $y = \ln x$ cruza el eje x con una pendiente de 1.

Al igual que todas las demás funciones logarítmicas con base mayor que 1, el logaritmo natural es una función creciente definida en $(0, \infty)$, y el eje y es un asíntota vertical. (Esto significa que los valores de $\ln x$ son números negativos muy grandes cuando x tiende a 0.)

EJEMPLO 11 Dibuje la gráfica de la función $y = \ln(x - 2) - 1$.

SOLUCIÓN Empezamos con la gráfica de $y = \ln x$ como se indica en la figura 13. Usando las transformaciones de la sección 1.3, la corremos 2 unidades a la derecha para obtener la gráfica de $y = \ln(x - 2)$ y luego la desplazamos una unidad hacia abajo para obtener la gráfica de $y = \ln(x - 2) - 1$. (Véase la figura 14.)

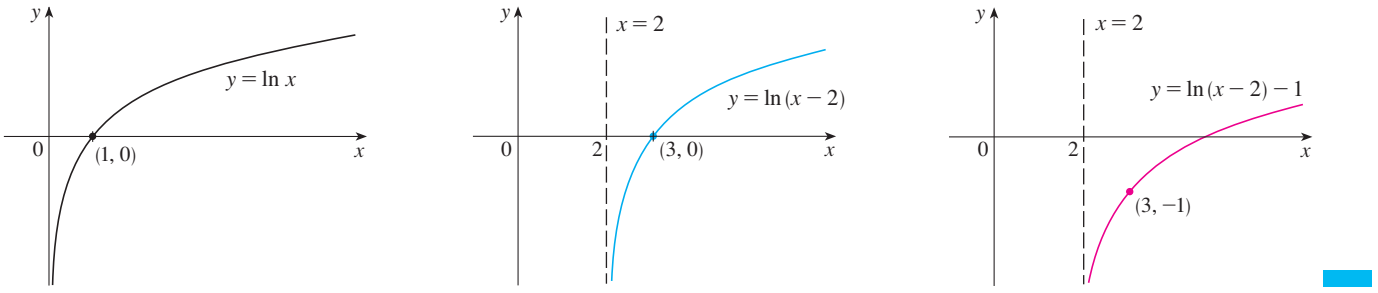


FIGURA 14

A pesar de que $\ln x$ es una función creciente, su crecimiento es muy lento cuando $x > 1$. De hecho, $\ln x$ crece más lentamente que cualquier potencia positiva de x. Para ilustrar este hecho, se comparan los valores aproximados de las funciones $y = \ln x$ y $y = x^{1/2} = \sqrt{x}$ en la siguiente tabla y las gráficas en las figuras 15 y 16. Usted puede ver que en un principio las gráficas de $y = \sqrt{x}$ y $y = \ln x$ crecen a un ritmo comparable, pero finalmente la función raíz supera con creces al logaritmo.

x	1	2	5	10	50	100	500	1 000	10 000	100 000
$\ln x$	0	0.69	1.61	2.30	3.91	4.6	6.2	6.9	9.2	11.5
$\sqrt{x}$	1	1.41	2.24	3.16	7.07	10.0	22.4	31.6	100	316
$\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$	0	0.49	0.72	0.73	0.55	0.46	0.28	0.22	0.09	0.04

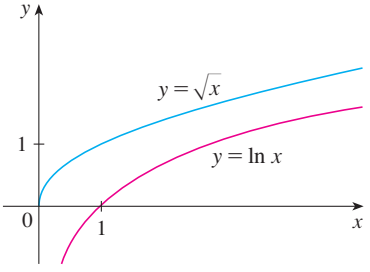


FIGURA 15

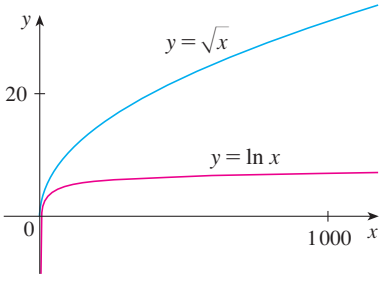


FIGURA 16

Funciones trigonométricas inversas

Cuando tratamos de encontrar las funciones trigonométricas inversas, tenemos una pequeña dificultad: debido a que las funciones trigonométricas no son uno a uno, no tienen funciones inversas. La dificultad se supera mediante la restricción de los dominios de estas funciones para que sean uno a uno.

Puede verse en la figura 17 que la función seno, $y = \operatorname{sen} x$, no es uno a uno (utilice la prueba de la recta horizontal). Pero la función $f(x) = \operatorname{sen} x, -\pi/2 \leq x \leq \pi/2$, es uno a uno (figura 18). La función inversa de la función seno restringida f existe y se denota por sen^{-1} o arcsen. Se llama **función seno inverso** o **función arco seno**.

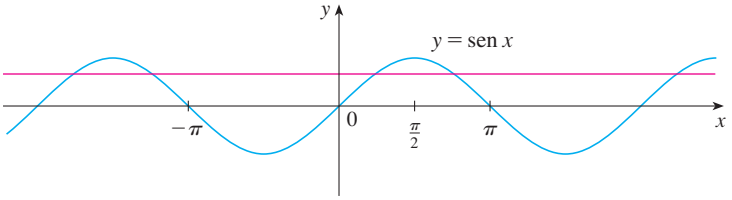


FIGURA 17

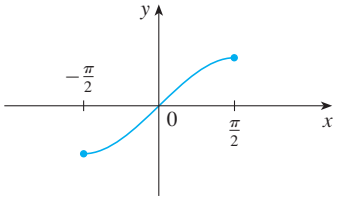


FIGURA 18 $y = \operatorname{sen} x, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

Dado que la definición de una función inversa indica que

$$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$$

tenemos

$$\operatorname{sen}^{-1} x = y \iff \operatorname{sen} y = x \quad \text{y} \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

$\operatorname{sen}^{-1} x \neq \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$

Por tanto, $-1 \leq x \leq 1$ es el número entre $-\pi/2$ y $\pi/2$ cuyo seno es x.

EJEMPLO 12 Evalúe a) $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ y b) $\tan\left(\operatorname{arcsen}\frac{1}{3}\right)$.

SOLUCIÓN

a) Tenemos que

$$\operatorname{sen}^{-1}\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

porque el $\operatorname{sen}(\pi/6) = \frac{1}{2}$ y $\pi/6$ se encuentra entre $-\pi/2$ y $\pi/2$.

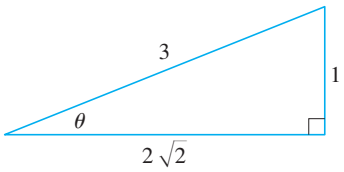


FIGURA 19

b) Sea $\theta = \operatorname{arcsen}\frac{1}{3}$, por lo que el $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{3}$. Entonces, podemos dibujar un triángulo rectángulo con un ángulo θ como en la figura 19 y deducir por el teorema de Pitágoras que el tercer lado del triángulo tiene una longitud de $\sqrt{9-1} = 2\sqrt{2}$. Esto nos permite leer que

$$\tan\left(\operatorname{arcsen}\tfrac{1}{3}\right) = \tan\theta = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Las ecuaciones de cancelación para las funciones inversas resultan ser, en este caso,

$$\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} x) = x \quad \text{para} -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} x) = x \quad \text{para} -1 \leq x \leq 1$$

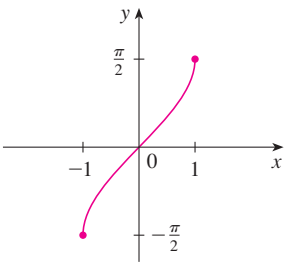


FIGURA 20
$y = \text{sen}^{-1}\, x = \text{arcsen}\, x$

La función inversa del seno, sen^{-1}, tiene dominio $[-1, 1]$ y rango $[-\pi/2, \pi/2]$, y su gráfica, que se muestra en la figura 20, se obtiene a partir de la función seno restringido (figura 18), mediante la reflexión sobre la recta $y = x$.

La **función coseno inverso** se maneja en forma similar. La función coseno restringida $f(x) = \cos x$, para $0 \leqslant x \leqslant \pi$, es uno a uno (figura 21) y, por tanto, tiene una función inversa denotada por $\cos^{-1}$ o arccos.

$$\cos^{-1} x = y \iff \cos y = x \quad \text{y} \quad 0 \leqslant y \leqslant \pi$$

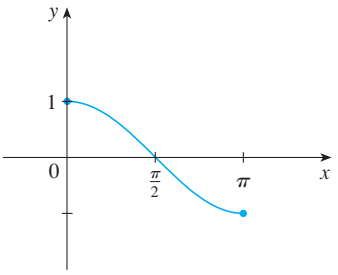


FIGURA 21
$y = \cos x,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi$

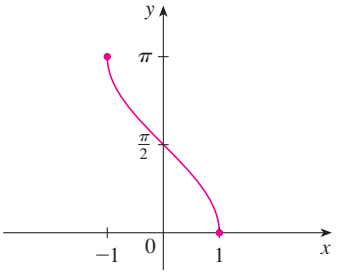


FIGURA 22
$y = \cos^{-1} x = \arccos x$

Las ecuaciones de cancelación son

$$\cos^{-1}(\cos x) = x \quad \text{para } 0 \leqslant x \leqslant \pi$$
$$\cos(\cos^{-1} x) = x \quad \text{para } -1 \leqslant x \leqslant 1$$

La función coseno inverso, $\cos^{-1}$, tiene dominio $[-1, 1]$ y rango $[0, \pi]$. Su gráfica se muestra en la figura 22.

La función tangente puede hacerse uno a uno mediante la restricción de que el intervalo sea $(-\pi/2, \pi/2)$. Así, la **función tangente inversa** se define como la inversa de la función $f(x) = \tan x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$. (Véase la figura 23), y se denota por $\tan^{-1}$ o arctan.

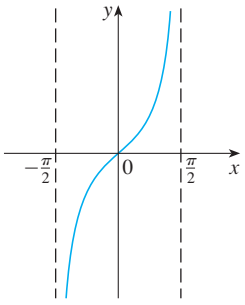


FIGURA 23
$y = \tan x,\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

$$\tan^{-1} x = y \iff \tan y = x \quad \text{y} \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

EJEMPLO 13 Simplifique la expresión $\cos(\tan^{-1} x)$.

SOLUCIÓN 1 Sea $y = \tan^{-1} x$. Tenemos que, $\tan y = x$ y $-\pi/2 < y < \pi/2$. Queremos encontrar $\cos y$, pero, ya que $\tan y$ es conocida, es más fácil encontrar primero $\sec y$:

$$\sec^2 y = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$$

$$\sec y = \sqrt{1 + x^2} \qquad (\text{ya que } \sec y > 0 \text{ para } -\pi/2 < y < \pi/2)$$

Así
$$\cos(\tan^{-1} x) = \cos y = \frac{1}{\sec y} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

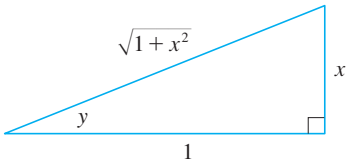


FIGURA 24

SOLUCIÓN 2 En lugar de utilizar las identidades trigonométricas como en la solución 1, es quizá más fácil usar un diagrama. Si $y = \tan^{-1} x$, entonces $\tan y = x$, y podemos leer en la figura 24 (que ilustra el caso $y > 0$) que

$$\cos(\tan^{-1} x) = \cos y = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

La función tangente inversa, $\tan^{-1} = \arctan$, tiene dominio $\mathbb{R}$ y rango $(-\pi/2, \pi/2)$. Su gráfica se muestra en la figura 25.

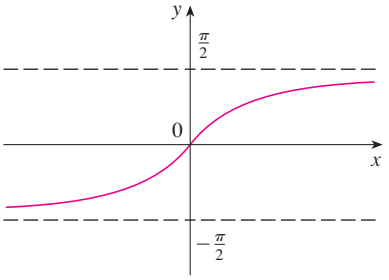


FIGURA 25
$y = \tan^{-1} x = \arctan x$

Sabemos que las rectas $x = \pm\pi/2$ son asíntotas verticales de la gráfica de tan. Dado que la gráfica de $\tan^{-1}$ se obtiene reflejando la gráfica de la función tangente restringida, sobre la recta $y = x$, se deduce que las rectas $y = \pi/2$ y $y = -\pi/2$ son asíntotas horizontales de la gráfica de $\tan^{-1}$.

El resto de las funciones trigonométricas inversas no se utilizan con tanta frecuencia y se resumen aquí.

11

$$y = \csc^{-1} x \ (|x| \geq 1) \iff \csc y = x \quad \text{y} \quad y \in (0, \pi/2] \cup (\pi, 3\pi/2$$

$$y = \sec^{-1} x \ (|x| \geq 1) \iff \sec y = x \quad \text{y} \quad y \in [0, \pi/2) \cup [\pi, 3\pi/2$$

$$y = \cot^{-1} x \ (x \in \mathbb{R}) \iff \cot y = x \quad \text{y} \quad y \in (0, \pi)$$

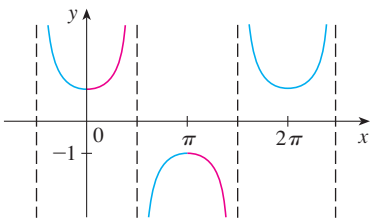


FIGURA 26
$y = \sec x$

La elección de los intervalos para y en las definiciones de $\csc^{-1}$ y $\sec^{-1}$ no es aceptada universalmente. Por ejemplo, algunos autores utilizan $y \in [0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$ en la definición de $\sec^{-1}$. (Puede verse en la gráfica de la función secante en la figura 26 que tanto esta opción como la que se encuentra en 11 funcionan.)

1.6 Ejercicios

1. a) ¿Qué es una función uno a uno?
b) ¿Cómo puede decirse, a partir de la gráfica de una función, que es uno a uno?

2. a) Supongamos que f es una función uno a uno con dominio A y rango B. ¿Cómo se define la función inversa f^{-1}? ¿Cuál es el dominio de f^{-1}? ¿Cuál es el rango de f^{-1}?
b) Si se le da una fórmula para f, ¿cómo encuentra una fórmula para f^{-1}?
c) Si se le da la gráfica para f, ¿cómo encuentra la gráfica de f^{-1}?

3-14 Una función viene dada por una tabla de valores, una gráfica, una fórmula o una descripción verbal. Determine si es uno a uno.

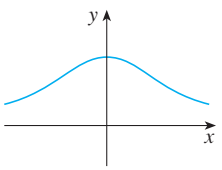
3.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1.5	2.0	3.6	5.3	2.8	2.0

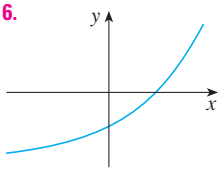
4.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1.0	1.9	2.8	3.5	3.1	2.9

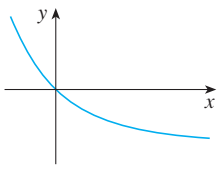
5.



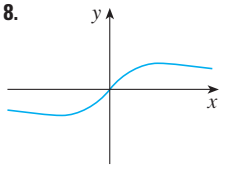
6.



7.



8.



9. $f(x) = x^2 - 2x$

10. $f(x) = 10 - 3x$

11. $g(x) = 1/x$

12. $g(x) = \cos x$

13. $f(t)$ es la altura de un balón de fútbol t segundos después de la patada inicial.

14. f(t) es su estatura a la edad t.

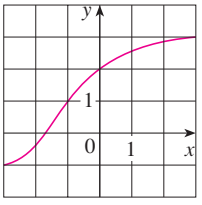
---

15. Suponga que f es una función uno a uno.
a) Si $f(6) = 17$, ¿qué es $f^{-1}(17)$?
b) Si $f^{-1}(3) = 2$, ¿qué es $f(2)$?

16. Si $f(x) = x^5 + x^3 + x$, encuentre $f^{-1}(3)$ y $f(f^{-1}(2))$.

17. Si $g(x) = 3 + x + e^x$, encuentre $g^{-1}(4)$.

18. La gráfica de f está dada.
a) ¿Por qué es f uno a uno?
b) ¿Cuáles son el dominio y el rango de f^{-1}?
c) ¿Cuál es el valor de $f^{-1}(2)$?
d) Estime el valor de $f^{-1}(0)$.



19. La fórmula $C = 5/9\,(F - 32)$, donde $F \geqslant -459.67$, expresa la temperatura Celsius C, en función de la temperatura Fahrenheit F. Halle una fórmula para la función inversa e interprétela. ¿Cuál es el dominio de la función inversa?

20. En la teoría de la relatividad, la masa de una partícula con velocidad v es

$$m = f(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

donde m_0 es la masa en reposo de la partícula y c es la velocidad de la luz en el vacío. Encuentre la función inversa de f y explique su significado.

21–26 Halle una fórmula para la inversa de la función.

21. $f(x) = 1 + \sqrt{2 + 3x}$

22. $f(x) = \dfrac{4x - 1}{2x + 3}$

23. $f(x) = e^{2x-1}$

24. $y = x^2 - x, \quad x \geqslant \frac{1}{2}$

25. $y = \ln(x + 3)$

26. $y = \dfrac{e^x}{1 + 2e^x}$

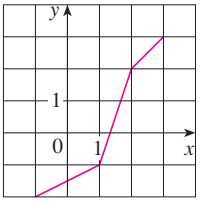
27–28 Encuentre una fórmula explícita para f^{-1} y utilícela para graficar f^{-1}, f y la recta $y = x$ en la misma pantalla. Para compro-bar su trabajo, vea si las gráficas de f y f^{-1} son reflexiones sobre la recta.

27. $f(x) = x^4 + 1, \; x \geqslant 0$

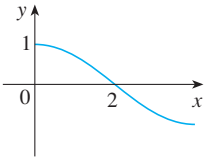
28. $f(x) = 2 - e^x$

29–30 Use la gráfica dada de f, para trazar la gráfica de f^{-1}.

29.



30.



---

31. Sea $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.
a) Encuentre f^{-1}. ¿Cómo se relaciona con f?
b) Identifique la gráfica de f y explique su respuesta al inciso a).

32. Sea $g(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$.
a) Encuentre g^{-1}. ¿Cómo se relaciona con la g?
b) Grafique g. ¿Cómo explica usted su respuesta al inciso a)?

33. a) ¿Cómo se define la función logarítmica $y = \log_a x$?
b) ¿Cuál es el dominio de esta función?
c) ¿Cuál es el rango de esta función?
d) Dibuje la forma general de la gráfica de la función $y = \log_a x$ si $a > 1$.

34. a) ¿Cuál es el logaritmo natural?
b) ¿Cuál es el logaritmo común?
c) Trace las gráficas de la función logaritmo natural y la función exponencial natural en un mismo conjunto de ejes.

35–38 Encuentre el valor exacto de cada una de las siguientes expresiones.

35. a) $\log_5 125$ b) $\log_3\left(\frac{1}{27}\right)$

36. a) $\ln(1/e)$ b) $\log_{10}\sqrt{10}$

37. a) $\log_2 6 - \log_2 15 + \log_2 20$
b) $\log_3 100 - \log_3 18 - \log_3 50$

38. a) $e^{-2\ln 5}$ b) $\ln\left(\ln e^{e^{10}}\right)$

39–41 Exprese cada una de las siguientes cantidades dadas como un solo logaritmo.

39. $\ln 5 + 5\ln 3$

40. $\ln(a + b) + \ln(a - b) - 2\ln c$

41. $\frac{1}{3}\ln(x + 2)^3 + \frac{1}{2}[\ln x - \ln(x^2 + 3x + 2)^2]$

---

42. Use la fórmula 10 para evaluar cada logaritmo con precisión de 6 decimales.
a) $\log_{12} 10$ b) $\log_2 8.4$

43-44 Use la fórmula 10 para graficar cada una de las siguientes funciones dadas, en una pantalla común. ¿Cómo se relacionan estas gráficas?

43. $y = \log_{1.5} x, \quad y = \ln x, \quad y = \log_{10} x, \quad y = \log_{50} x$

44. $y = \ln x, \quad y = \log_{10} x, \quad y = e^x, \quad y = 10^x$

45. Suponga que la gráfica de $y = \log_2 x$ se dibuja sobre una cuadrícula de coordenadas, donde la unidad de medida es de una pulgada. ¿Cuántas millas a la derecha del origen tenemos que movernos antes de que la altura de la curva alcance 3 pies?

46. Compare las funciones $f(x) = x^{0.1}$ y $g(x) = \ln x$ graficando ambas, f y g, en varios rectángulos de vista. ¿Cuándo la gráfica de f supera finalmente a la gráfica de g?

47-48 Haga un bosquejo de la gráfica de cada una de las siguientes funciones. No utilice calculadora. Sólo tiene que usar las gráficas de las figuras 12 y 13 y, si es necesario, las transformaciones de la sección 1.3.

47. a) $y = \log_{10}(x + 5)$ b) $y = -\ln x$

48. a) $y = \ln(-x)$ b) $y = \ln|x|$

49-50 a) ¿Cuáles son el dominio y el rango de f?

b) ¿Cuál es la intersección en x de la gráfica?

c) Trace la gráfica de f.

49. $f(x) = \ln x + 2$ **50.** $f(x) = \ln(x - 1) - 1$

51-54 Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones para x.

51. a) $e^{7-4x} = 6$ b) $\ln(3x - 10) = 2$

52. a) $\ln(x^2 - 1) = 3$ b) $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$

53. a) $2^{x-5} = 3$ b) $\ln x + \ln(x - 1) = 1$

54. a) $\ln(\ln x) = 1$ b) $e^{ax} = Ce^{bx}, \; a \neq b$

55-56 Resuelva cada una de las siguientes desigualdades para x.

55. a) $\ln x < 0$ b) $e^x > 5$

56. a) $1 < e^{3x-1} < 2$ b) $1 - 2\ln x < 3$

57. a) Encuentre el dominio de $f(x) = \ln(e^x - 3)$.
b) Halle f^{-1} y su dominio.

58. a) ¿Cuáles son los valores de $e^{\ln 300}$ y $\ln(e^{300})$?
b) Use su calculadora para evaluar $e^{\ln 300}$ y $\ln(e^{300})$. ¿Qué observa? ¿Puede explicar por qué la calculadora tiene problemas?

SAC **59.** Grafique la función $f(x) = \sqrt{x^3 + x^2 + x + 1}$ y explique por qué es uno a uno. A continuación, utilice un sistema de álgebra computarizado para encontrar una expresión explícita para $f^{-1}(x)$. (El SAC produce tres posibles expresiones. Explique por qué dos de ellas son irrelevantes en este contexto.)

SAC **60.** a) Si $g(x) = x^6 + x^4$, $x \geq 0$, utilice un sistema de álgebra computarizado para encontrar una expresión para $g^{-1}(x)$.
b) Utilice la expresión del inciso a) para graficar $y = g(x)$, $y = x$ y $y = g^{-1}(x)$, en la misma pantalla.

61. Si una población de bacterias comienza con 100 bacterias y se duplica cada tres horas, entonces el número de bacterias después de t horas es $n = f(t) = 100 \cdot 2^{t/3}$. (Véase el ejercicio 29 en la sección 1.5.)
a) Halle la inversa de esta función y explique su significado.
b) ¿Cuándo la población alcanzará 50 000 bacterias?

62. Cuando el flash de una cámara se apaga, las baterías comienzan a recargar de inmediato el condensador del flash, que almacena una carga eléctrica dada por

$$Q(t) = Q_0(1 - e^{-t/a})$$

(La capacidad de carga máxima es Q_0, y t se mide en segundos.)
a) Halle la inversa de esta función y explique su significado.
b) ¿Cuánto tiempo se tarda en recargar el condensador a 90% de la capacidad si $a = 2$?

63-68 Encuentre el valor exacto de cada una de las siguientes expresiones.

63. a) $\operatorname{sen}^{-1}\left(\sqrt{3}/2\right)$ b) $\cos^{-1}(-1)$

64. a) $\tan^{-1}\left(1/\sqrt{3}\right)$ b) $\sec^{-1} 2$

65. a) $\arctan 1$ b) $\operatorname{sen}^{-1}\left(1/\sqrt{2}\right)$

66. a) $\cot^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)$ b) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$

67. a) $\tan(\arctan 10)$ b) $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen}(7\pi/3))$

68. a) $\tan(\sec^{-1} 4)$ b) $\operatorname{sen}\left(2\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right)$

69. Pruebe que $\cos(\operatorname{sen}^{-1} x) = \sqrt{1 - x^2}$

70-72 Simplifique cada una de las siguientes expresiones:

70. $\tan(\operatorname{sen}^{-1} x)$ **71.** $\operatorname{sen}(\tan^{-1} x)$

72. $\cos(2\tan^{-1} x)$

73-74 Grafique las funciones dadas, en la misma pantalla. ¿Cómo se relacionan estas gráficas?

73. $y = \operatorname{sen} x, \; -\pi/2 \leq x \leq \pi/2; \quad y = \operatorname{sen}^{-1} x; \quad y = x$

74. $y = \tan x, \; -\pi/2 < x < \pi/2; \quad y = \tan^{-1} x; \quad y = x$

75. Encuentre el dominio y el rango de la función

$$g(x) = \operatorname{sen}^{-1}(3x + 1)$$

76. a) Grafique la función $f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} x)$ y explique la apariencia de la gráfica.
b) Grafique la función $g(x) = \operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} x)$. ¿Cómo se explica la apariencia de esta gráfica?

77. a) Si desplazamos la curva a la izquierda, ¿qué sucede con su reflexión sobre la recta $y = x$? En vista de este principio geométrico, encuentre una expresión para la inversa de $g(x) = f(x + c)$, donde f es una función uno a uno.
b) Encuentre una expresión para la inversa de $h(x) = f(cx)$, donde $c \neq 0$.

1 Repaso

Verificación de conceptos

1. a) ¿Qué es una función? ¿Cuáles son su dominio y su rango?
b) ¿Qué es la gráfica de una función?
c) ¿Cómo se puede saber si una curva dada es la gráfica de una función?

2. Analice cuatro maneras de representar una función. Ilustre la discusión con ejemplos.

3. a) ¿Qué es una función par? ¿Cómo puede saber si una función es par observando su gráfica? Dé tres ejemplos de una función par.
b) ¿Qué es una función impar? ¿Cómo puede saber si una función es impar observando su gráfica? Dé tres ejemplos de una función impar.

4. ¿Qué es una función creciente?

5. ¿Qué es un modelo matemático?

6. Dé un ejemplo de cada tipo de función
a) lineal
b) potencia
c) exponencial
d) cuadrática
e) polinomial de grado 5
f) racional

7. Trace a mano, en los mismos ejes, las gráficas de las siguientes funciones.
a) $f(x) = x$
b) $g(x) = x^2$
c) $h(x) = x^3$
d) $j(x) = x^4$

8. Trace a mano un bosquejo de la gráfica de cada una de las siguientes funciones.
a) $y = \operatorname{sen} x$
b) $y = \tan x$
c) $y = e^x$
d) $y = \ln x$
e) $y = 1/x$
f) $y = |x|$
g) $y = \sqrt{x}$
h) $y = \tan^{-1}x$

9. Suponga que f tiene dominio A y g tiene dominio B.
a) ¿Cuál es el dominio de $f + g$?
b) ¿Cuál es el dominio de fg?
c) ¿Cuál es el dominio de f/g?

10. ¿Cómo se define la función compuesta $f \circ g$? ¿Cuál es su dominio?

11. Suponga que la gráfica de f está dada. Escriba una ecuación para cada una de las gráficas que se obtienen de aquella de f de la siguiente manera.
a) Desplazamiento de 2 unidades hacia arriba.
b) Desplazamiento de 2 unidades hacia abajo.
c) Desplazamiento de 2 unidades a la derecha.
d) Desplazamiento de 2 unidades a la izquierda.
e) Reflexión sobre el eje x.
f) Reflexión sobre el eje y.
g) Alargamiento vertical por un factor de 2.
h) Contraer verticalmente por un factor de 2.
i) Alargar horizontalmente por un factor de 2.
j) Contraer horizontalmente por un factor de 2.

12. a) ¿Qué es una función uno a uno? ¿Cómo puede saber si una función es uno a uno observando su gráfica?
b) Si f es una función uno a uno, ¿cómo se define su función inversa f^{-1}? ¿Cómo se obtiene la gráfica de f^{-1} a partir de la gráfica de f?

13. a) ¿Cómo se define la función seno inverso $f(x) = \operatorname{sen}^{-1} x$? ¿Cuáles son su dominio y su rango?
b) ¿Cómo se define la función coseno inverso $f(x) = \cos^{-1} x$? ¿Cuáles son su dominio y rango?
c) ¿Cómo se define la función tangente inversa $f(x) = \tan^{-1} x$? ¿Cuáles son su dominio y rango?

Examen rápido Verdadero-Falso

Determine si la afirmación es verdadera o falsa. Si es verdadera, explique por qué. Si es falsa, explique por qué o dé un ejemplo que refute la afirmación.

1. Si f es una función, entonces $f(s + t) = f(s) + f(t)$.

2. Si $f(s) = f(t)$, entonces $s = t$.

3. Si f es una función, entonces $f(3x) = 3f(x)$.

4. Si $x_1 < x_2$ y f es una función decreciente, entonces $f(x_1) > f(x_2)$.

5. Una recta vertical intersecta la gráfica de una función a lo más una vez.

6. Si f y g son funciones, entonces $f \circ g = g \circ f$.

7. Si f es uno a uno, entonces $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

8. Siempre puede dividirse por e^x.

9. Si $0 < a < b$, entonces $\ln a < \ln b$.

10. Si $x > 0$, entonces $(\ln x)^6 = 6 \ln x$.

11. Si $x > 0$ y $a > 1$, entonces $\dfrac{\ln x}{\ln a} = \ln \dfrac{x}{a}$.

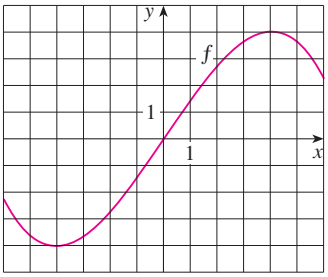
12. $\tan^{-1}(-1) = 3\pi/4$.

13. $\tan^{-1}x = \dfrac{\operatorname{sen}^{-1}x}{\cos^{-1}x}$.

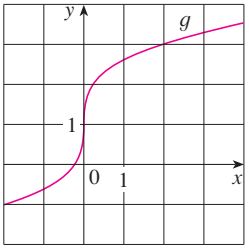
14. Si x es cualquier número real, entonces $\sqrt{x^2} = x$.

Ejercicios

1. Sea f la función cuya gráfica está dada.
a) Estime el valor de $f(2)$.
b) Estime los valores de x tales que $f(x) = 3$.
c) Establezca el dominio de f.
d) Establezca el rango de f.
e) ¿Sobre qué intervalo es creciente f?
f) ¿Es f uno a uno? Explique.
g) ¿Es f par, impar, o ninguno de los dos? Explique.



2. La gráfica de g está dada.
a) Obtenga el valor de $g(2)$.
b) ¿Por qué g es uno a uno?
c) Estime el valor de $g^{-1}(2)$.
d) Estime el dominio de g^{-1}.
e) Dibuje la gráfica de g^{-1}.



3. Si $f(x) = x^2 - 2x + 3$, evalúe el cociente de diferencias

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

4. Dibuje una gráfica aproximada de la producción de un cultivo en función de la cantidad de fertilizante utilizado.

5-8 Encuentre el dominio y rango de cada una de las siguientes funciones. Escriba su respuesta en notación de intervalos.

5. $f(x) = 2/(3x - 1)$

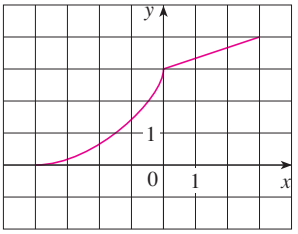
6. $g(x) = \sqrt{16 - x^4}$

7. $h(x) = \ln(x + 6)$

8. $F(t) = 3 + \cos 2t$

9. Suponga que la gráfica de f está dada. Describa cómo las gráficas de las funciones siguientes pueden obtenerse a partir de la gráfica de f.
a) $y = f(x) + 8$
b) $y = f(x + 8)$
c) $y = 1 + 2f(x)$
d) $y = f(x - 2) - 2$
e) $y = -f(x)$
f) $y = f^{-1}(x)$

10. La gráfica de f está dada. Dibuje las gráficas de las funciones siguientes.
a) $y = f(x - 8)$
b) $y = -f(x)$
c) $y = 2 - f(x)$
d) $y = \frac{1}{2}f(x) - 1$
e) $y = f^{-1}(x)$
f) $y = f^{-1}(x + 3)$



11-16 Utilice transformaciones para dibujar la gráfica de la función.

11. $y = -\operatorname{sen} 2x$

12. $y = 3 \ln(x - 2)$

13. $y = \frac{1}{2}(1 + e^x)$

14. $y = 2 - \sqrt{x}$

15. $f(x) = \dfrac{1}{x + 2}$

16. $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ e^x - 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

17. Determine si f es par, impar o ninguna de las dos.
a) $f(x) = 2x^5 - 3x^2 + 2$
b) $f(x) = x^3 - x^7$
c) $f(x) = e^{-x^2}$
d) $f(x) = 1 + \operatorname{sen} x$

18. Encuentre una expresión para la función cuya gráfica consiste en el segmento de recta desde el punto $(-2, 2)$ hasta el punto $(-1, 0)$, junto con la mitad superior de la circunferencia con centro en el origen y radio 1.

19. Si $f(x) = \ln x$ y $g(x) = x^2 - 9$, encuentre las funciones a) $f \circ g$, b) $g \circ f$, c) $f \circ f$, d) $g \circ g$, y sus dominios.

20. Exprese la función $F(x) = 1/\sqrt{x + \sqrt{x}}$ como una composición de tres funciones.

Se requiere calculadora graficadora o computadora

21. La esperanza de vida mejoró notablemente en el siglo xx. La tabla muestra la esperanza de vida al nacer (en años) de los varones nacidos en EU. Use un diagrama de dispersión para elegir un tipo adecuado de modelo. Use su modelo para predecir el tiempo de vida de un varón nacido en el año 2010.

Año de nacimiento	Esperanza de vida	Año de nacimiento	Esperanza de vida
1900	48.3	1960	66.6
1910	51.1	1970	67.1
1920	55.2	1980	70.0
1930	57.4	1990	71.8
1940	62.5	2000	73.0
1950	65.6		

22. Un pequeño fabricante de electrodomésticos descubre que cuesta 9 000 dólares producir 1 000 tostadoras a la semana y 12 000 dólares producir 1 500 tostadoras a la semana.
a) Exprese el costo en función del número de tostadoras producidas, suponiendo que es lineal. Después, trace la gráfica.
b) ¿Cuál es la pendiente de la gráfica y qué representa?
c) ¿Cuál es la intersección de la gráfica con el eje y y qué representa?

23. Si $f(x) = 2x + \ln x$, encuentre $f^{-1}(2)$.

24. Encuentre la función inversa de $f(x) = \dfrac{x + 1}{2x + 1}$.

25. Encuentre el valor exacto de cada una de las siguientes expresiones.
a) $e^{2 \ln 3}$
b) $\log_{10} 25 + \log_{10} 4$
c) $\tan\left(\operatorname{arcsen} \frac{1}{2}\right)$
d) $\operatorname{sen}\left(\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)\right)$

26. Resuelva cada cada una de las siguientes ecuaciones para x.
a) $e^x = 5$
b) $\ln x = 2$
c) $e^{e^x} = 2$
d) $\tan^{-1} x = 1$

27. La población de ciertas especies en un ambiente limitado con una población inicial de 100 y capacidad para 1 000 es

$$P(t) = \frac{100\,000}{100 + 900e^{-t}}$$

donde t se mide en años.
a) Grafique esta función y estime cuánto tiempo le toma a la población llegar a 900.
b) Encuentre la inversa de esta función y explique su significado.
c) Utilice la función inversa para encontrar el tiempo necesario para que la población llegue a 900. Compare con el resultado del inciso a).

28. Grafique las tres funciones $y = x^a$, $y = a^x$ y $y = \log_a x$ en la misma pantalla para dos o tres valores de $a > 1$. Para valores grandes de x, ¿cuál de estas funciones tiene los valores más grandes y cuál los valores más pequeños?

Principios para la resolución de problemas

No hay reglas sólidas o inmediatas que aseguren el éxito en la resolución de problemas. Sin embargo, es posible delinear algunos pasos generales en el proceso de resolución de problemas y de dar algunos principios que pueden ser útiles en la resolución de algunos de ellos. Estos pasos y principios no hacen otra cosa que explicitar el sentido común y se han adaptado del libro de George Polya *How To Solve It*.

1 COMPRENDA EL PROBLEMA

El primer paso es leer el problema y asegurarse de que lo comprende claramente. Plantéese las siguientes preguntas:

¿Cuál es la incógnita?
¿Cuáles son las cantidades que se conocen?
¿Cuáles son las condiciones dadas?

Para muchos problemas, es útil

dibujar un diagrama

y ubicar en el diagrama las cantidades dadas y las requeridas.

Por lo general, es necesario

introducir una notación adecuada

En la elección de los símbolos para las incógnitas, a menudo usamos letras como a, b, c, m, n, x o y, aunque en algunos casos es mejor usar las iniciales de las cantidades involucradas como símbolos sugerentes; por ejemplo, V para el volumen o t para tiempo.

2 PIENSE EN UN PLAN

Es importante encontrar una conexión entre la información dada y la desconocida, lo que le permitirá calcular las incógnitas. A menudo es útil preguntarse a sí mismo de manera explícita: "¿Cómo relaciono lo conocido con lo desconocido?" Si usted no ve una conexión inmediata, las siguientes ideas pueden serle útiles en la concepción de un plan.

Intente reconocer algo conocido Relacione la situación dada con los conocimientos previos. Observe lo desconocido y trate de recordar un problema más conocido que cuente con una incógnita similar.

Intente reconocer patrones Algunos problemas se resuelven mediante el reconocimiento de algún tipo de patrón que está ocurriendo. El patrón puede ser geométrica, numérica o algebraica. Si usted puede ver la regularidad o repetición en un problema, podría ser capaz de conjeturar el patrón y probarlo.

Utilice analogías Trate de pensar en un problema análogo, es decir, un problema similar, un problema relacionado, pero que sea más fácil de resolver que el problema original. Si usted puede resolver el problema similar, pero más sencillo, entonces podría dar con las claves que necesita para resolver el problema original, que es más difícil. Por ejemplo, si un problema involucra cantidades muy grandes, podría intentar primero resolver un problema similar con cifras más pequeñas. O si el problema está inmerso en la geometría en tres dimensiones, puede buscarse un problema geométrico similar en dos dimensiones. O si el problema inicial es de carácter general, puede empezar con un caso particular.

Introduzca algo extra A veces puede ser necesario introducir algo nuevo, un apoyo auxiliar para ayudar a hacer la conexión entre lo dado y lo desconocido. Por ejemplo, en un problema donde un diagrama es útil, lo auxiliar podría ser una nueva línea trazada en el diagrama. En un problema más algebraico, podría ser una nueva incógnita relacionada con la original.

Establezca casos A veces puede tener que dividir un problema en varios casos y dar un argumento diferente para cada uno de los casos. Por ejemplo, a menudo tenemos que utilizar esta estrategia al tratar con valores absolutos.

Trabaje hacia atrás En algunas ocasiones es útil imaginar que el problema está resuelto y trabajar hacia atrás, paso a paso, hasta llegar a los datos proporcionados. Entonces usted puede revertir sus pasos y construir una solución al problema original. Este procedimiento es comúnmente utilizado en la resolución de ecuaciones. Por ejemplo, en la resolución de la ecuación $3x - 5 = 7$, suponga que x es un número que satisface $3x - 5 = 7$ y trabaje hacia atrás. Sumamos 5 a cada lado de la ecuación y luego dividimos ambos lados entre 3 para obtener $x = 4$. Como cada uno de estos pasos puede revertirse, hemos resuelto el problema.

Establezca metas parciales En un problema complejo a menudo es útil establecer objetivos parciales (en los que la situación deseada se cumple con sólo en algunas partes del problema). Si primero puede llegar a estos objetivos parciales, entonces podemos construir conclusiones sobre ellos para llegar a nuestra meta final.

Razonamiento indirecto Con frecuencia es apropiado atacar en forma indirecta un problema. En el uso de la demostración por contradicción para demostrar que P implica Q, suponemos que P es cierta y Q es falsa y tratamos de ver por qué esto no puede suceder. De alguna manera, tenemos que utilizar esta información y llegar a una contradicción de lo que sabemos que es verdadero.

Inducción matemática En la demostración de proposiciones que involucran un entero positivo n, es frecuentemente útil usar el siguiente principio.

Principio de inducción matemática Sea S_n una proposición acerca del entero positivo n. Supongamos que

1. S_1 es verdadera.
2. S_{k+1} es verdadera cuando S_k es verdadera.

Entonces S_n es verdadera para todos los enteros positivos n.

Esto es razonable porque, dado que S_1 es verdadera, se deduce de la condición 2 (con $k = 1$) que la S_2 es verdadera. Luego, utilizando la condición 2 con $k = 2$, vemos que S_3 es verdadera. Una vez más, con la condición 2, esta vez con $k = 3$, tenemos que S_4 es verdadera. Este procedimiento puede seguirse indefinidamente.

3 EJECUTE EL PLAN

En el paso 2 se ideó un plan. Para llevar a cabo ese plan tenemos que verificar cada etapa de éste y escribir los detalles que demuestran que cada etapa es correcta.

4 MIRE EN RETROSPECTIVA

Después de haber completado nuestra solución, es conveniente revisarla, en parte para ver si no se han cometido errores en la solución y en parte para ver si podemos pensar una manera más fácil de resolver el problema. Otra razón para mirar hacia atrás es familiarizarnos con el método de solución, lo que puede ser útil para resolver un problema en el futuro. Descartes dijo: "Cada problema que resolví se convirtió en una regla que sirvió después para resolver otros problemas."

Estos principios de la resolución de problemas se ilustran en los siguientes ejemplos. Intente resolverlos antes de mirar las soluciones. Consulte estos principios de resolución de problemas si se queda atascado. Usted puede encontrar útil referirse a esta sección de vez en cuando al resolver los ejercicios en los restantes capítulos de este libro.

EJEMPLO 1 Exprese la hipotenusa h de un triángulo rectángulo con un área de $25\,\text{m}^2$ en función de su perímetro P.

RP Comprenda el problema

SOLUCIÓN Primero clasifique la información mediante la identificación de la incógnita y los datos:

Incógnita: hipotenusa h

Datos: perímetro P, área de $25\,\text{m}^2$

RP Dibuje un diagrama

Dibujar un diagrama como el de la figura 1 puede ser de gran ayuda.

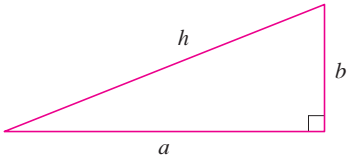


FIGURA 1

RP Relacione los datos con las incógnitas

RP Introduzca algo extra

Para establecer la relación entre las incógnitas y los datos, introduzca dos variables adicionales a y b, que representan las longitudes de los otros dos lados del triángulo. Esto nos permite expresar la condición dada, y es que, dado que el triángulo es rectángulo, por el teorema de Pitágoras:

$$h^2 = a^2 + b^2$$

El resto de relaciones entre las variables se obtienen al escribir las expresiones para el área y el perímetro:

$$25 = \tfrac{1}{2}ab \qquad P = a + b + h$$

Ya que P está dado, ahora tenemos tres ecuaciones con tres incógnitas a, b y h:

$$\boxed{1} \quad h^2 = a^2 + b^2$$

$$\boxed{2} \quad 25 = \tfrac{1}{2}ab$$

$$\boxed{3} \quad P = a + b + h$$

RP Relacione con algo conocido

A pesar de que tiene el número correcto de ecuaciones, no son fáciles de resolver en una forma sencilla. Pero si usamos la estrategia de resolución de problemas tratando de reconocer algo conocido, entonces podemos resolver estas ecuaciones por un método más fácil. Observe el lado derecho de las ecuaciones 1, 2 y 3. ¿Estas expresiones le recuerdan algo familiar? Tenga en cuenta que contienen los ingredientes de una fórmula conocida:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Con esta idea, expresamos $(a + b)^2$ de dos maneras. De las ecuaciones 1 y 2 tenemos

$$(a + b)^2 = (a^2 + b^2) + 2ab = h^2 + 4(25)$$

De la ecuación 3 tenemos

$$(a + b)^2 = (P - h)^2 = P^2 - 2Ph + h^2$$

Así

$$h^2 + 100 = P^2 - 2Ph + h^2$$

$$2Ph = P^2 - 100$$

$$h = \frac{P^2 - 100}{2P}$$

Esta es la expresión requerida para h en función de P.

Como se ilustra en el siguiente ejemplo, a menudo es necesario utilizar el principio de la resolución de problemas, de *separar en casos* cuando se trata de valores absolutos.

EJEMPLO 2 Resuelva la desigualdad $|x - 3| + |x + 2| < 11$.

SOLUCIÓN Recuerde la definición de valor absoluto:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

De esta definición, se sigue que:

$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x - 3 \geqslant 0 \\ -(x - 3) & \text{si } x - 3 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x - 3 & \text{si } x \geqslant 3 \\ -x + 3 & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

Del mismo modo

$$|x + 2| = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x + 2 \geqslant 0 \\ -(x + 2) & \text{si } x + 2 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \geqslant -2 \\ -x - 2 & \text{si } x < -2 \end{cases}$$

RP Establezca casos

Estas expresiones muestran que es necesario considerar tres casos:

$$x < -2 \qquad -2 \leqslant x < 3 \qquad x \geqslant 3$$

CASO I Si $x < -2$, tenemos

$$\begin{aligned} |x - 3| + |x + 2| &< 11 \\ -x + 3 - x - 2 &< 11 \\ -2x &< 10 \\ x &> -5 \end{aligned}$$

CASO II Si $-2 \leqslant x < 3$, la desigualdad dada se convierte en

$$\begin{aligned} -x + 3 + x + 2 &< 11 \\ 5 &< 11 \qquad \text{(siempre verdadera)} \end{aligned}$$

CASO III Si $x \geqslant 3$, la desigualdad se convierte en

$$\begin{aligned} x - 3 + x + 2 &< 11 \\ 2x &< 12 \\ x &< 6 \end{aligned}$$

De la combinación de los casos I, II y III, vemos que se cumple con la desigualdad cuando $-5 < x < 6$. Así que la solución es el intervalo $(-5, 6)$.

En el ejemplo siguiente, suponga primero una respuesta revisando los casos particulares y buscando una pauta. A continuación, demuestre su conjetura por inducción matemática.

Usando el principio de inducción matemática, seguimos tres pasos:

Paso 1 Demuestre que S_n es verdadera cuando $n = 1$.

Paso 2 Suponga que S_n es verdadera cuando $n = k$ y deduzca que S_n es verdadera cuando $n = k + 1$.

Paso 3 Concluya que S_n es verdadera para toda n por el principio de inducción matemática.

EJEMPLO 3 Si $f_0(x) = x/(x + 1)$ y $f_{n+1} = f_0 \circ f_n$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, encuentre una fórmula para $f_n(x)$.

RP Analogía: intente un problema semejante más sencillo

SOLUCIÓN Empezamos por encontrar fórmulas para $f_n(x)$ para los casos particulares $n = 1$, 2 y 3.

$$f_1(x) = (f_0 \circ f_0)(x) = f_0(f_0(x)) = f_0\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$$= \frac{\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{x}{x+1} + 1} = \frac{\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{2x+1}{x+1}} = \frac{x}{2x+1}$$

$$f_2(x) = (f_0 \circ f_1)(x) = f_0(f_1(x)) = f_0\left(\frac{x}{2x+1}\right)$$

$$= \frac{\dfrac{x}{2x+1}}{\dfrac{x}{2x+1} + 1} = \frac{\dfrac{x}{2x+1}}{\dfrac{3x+1}{2x+1}} = \frac{x}{3x+1}$$

$$f_3(x) = (f_0 \circ f_2)(x) = f_0(f_2(x)) = f_0\left(\frac{x}{3x+1}\right)$$

RP Busque un patrón

$$= \frac{\dfrac{x}{3x+1}}{\dfrac{x}{3x+1} + 1} = \frac{\dfrac{x}{3x+1}}{\dfrac{4x+1}{3x+1}} = \frac{x}{4x+1}$$

Nos damos cuenta de un patrón: el coeficiente de x en el denominador de $f_n(x)$ es $n + 1$ en los tres casos que hemos calculado. Así que hacemos la suposición de que, en general,

$$\boxed{4} \qquad f_n(x) = \frac{x}{(n+1)x + 1}$$

Para probar esto, utilizamos el principio de inducción matemática. Ya hemos comprobado que $\boxed{4}$ es verdadera para $n = 1$. Supongamos que es verdadera para $n = k$, es decir,

$$f_k(x) = \frac{x}{(k+1)x + 1}$$

Entonces $$f_{k+1}(x) = (f_0 \circ f_k)(x) = f_0\big(f_k(x)\big) = f_0\left(\frac{x}{(k+1)x+1}\right)$$

$$= \frac{\dfrac{x}{(k+1)x+1}}{\dfrac{x}{(k+1)x+1}+1} = \frac{\dfrac{x}{(k+1)x+1}}{\dfrac{(k+2)x+1}{(k+1)x+1}} = \frac{x}{(k+2)x+1}$$

Esta expresión demuestra que $\boxed{4}$ es verdadera para $n = k+1$. Por tanto, por inducción matemática, es verdadera para todo entero positivo n.

Problemas

1. Uno de los catetos de un triángulo rectángulo tiene una longitud de 4 cm. Exprese la longitud de la altura perpendicular a la hipotenusa en función de la longitud de esta última.

2. La altura perpendicular a la hipotenusa de un triángulo rectángulo es 12 cm. Exprese la longitud de la hipotenusa en función del perímetro.

3. Resuelva la ecuación $|2x-1| - |x+5| = 3$.

4. Resuelva la desigualdad $|x-1| - |x-3| \geqslant 5$.

5. Trace la gráfica de la función $f(x) = \big|x^2 - 4|x| + 3\big|$.

6. Trace la gráfica de la función $g(x) = |x^2-1| - |x^2-4|$.

7. Dibuje la gráfica de la ecuación $x + |x| = y + |y|$.

8. Dibuje la región en el plano formado por todos los puntos (x, y) tales que

$$|x-y| + |x| - |y| \leqslant 2$$

9. La notación máx$\{a, b, \ldots\}$ significa el mayor de los números $a, b, \ldots$ Dibuje la gráfica de cada función.

a) $f(x) = \text{máx}\{x, 1/x\}$ b) $f(x) = \text{máx}\{\operatorname{sen} x, \cos x\}$ c) $f(x) = \text{máx}\{x^2, 2+x, 2-x\}$

10. Dibuje la región en el plano definido por cada una de las siguientes ecuaciones o desigualdades.

a) $\text{máx}\{x, 2y\} = 1$ b) $-1 \leqslant \text{máx}\{x, 2y\} \leqslant 1$ c) $\text{máx}\{x, y^2\} = 1$

11. Evalúe $(\log_2 3)\,(\log_3 4)(\log_4 5)\cdots(\log_{31} 32)$.

12. a) Demuestre que la función $f(x) = \ln\big(x + \sqrt{x^2+1}\big)$ es una función impar.

b) Encuentre la función inversa de f.

13. Resuelva la desigualdad $\ln(x^2 - 2x - 2) \leqslant 0$

14. Use un razonamiento indirecto para probar que $\log_2 5$ es un número irracional.

15. Un conductor emprende un viaje. Durante la primera mitad del trayecto conduce a un ritmo lento de 30 mi/h; en la segunda mitad conduce a 60 mi/h. ¿Cuál es su rapidez promedio durante este viaje?

16. ¿Es verdad que $f \circ (g+h) = f \circ g + f \circ h$?

17. Demuestre que si n es un entero positivo, entonces $7^n - 1$ es divisible entre 6.

18. Demuestre que $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$.

19. Si $f_0(x) = x^2$ y $f_{n+1}(x) = f_0(f_n(x))$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, encuentre una fórmula para $f_n(x)$.

20. a) Si $f_0(x) = \dfrac{1}{2-x}$ y $f_{n+1} = f_0 \circ f_n$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, encuentre una expresión para $f_n(x)$ y utilice inducción matemática para demostrarla.

b) Grafique f_0, f_1, f_2, f_3, en la misma pantalla y describa los efectos de la composición de repetida.

Se requiere calculadora graficadora o computadora

2 Límites y derivadas



Una pelota cae más y más rápido al transcurrir el tiempo. Galileo descubrió que la distancia de caída es proporcional al cuadrado del tiempo que ha estado cayendo. El Cálculo posibilita calcular la rapidez de la pelota en cualquier instante.

© 1986 Peticolas / Megna, Fundamental Photographs, NYC

En *Un previo de Cálculo* (página 1) hemos visto cómo la idea de límite sustenta las distintas ramas del Cálculo. Por tanto, es apropiado comenzar nuestro estudio de éste investigando los límites y sus propiedades. El tipo especial de límite que se usa para encontrar rectas tangentes y velocidades da lugar a la idea central del Cálculo Diferencial, la Derivada.

2.1 Problemas de la tangente y la velocidad

En esta sección se verá cómo surgen los límites cuando tratamos de encontrar la recta tangente a una curva o la velocidad de un objeto.

El problema de la tangente

La palabra *tangente* se deriva de la voz latina *tangens*, que significa "tocar". Así, una tangente a una curva es una recta que toca la curva. En otras palabras, una recta tangente debe tener la misma dirección que la curva en el punto de contacto, pero, ¿cómo puede precisarse esta idea?

Para una circunferencia podemos simplemente seguir la idea de Euclides y decir que la tangente es una recta que interseca la circunferencia una y sólo una vez, como se ve en la figura 1a). Para curvas más complicadas esta definición es inadecuada. La figura 1b) muestra dos rectas l y t que pasan por un punto P en una curva C. La recta l cruza C sólo una vez, pero ciertamente no es la idea que tenemos de lo que es una tangente. La recta t, por otro lado, se parece más a una tangente, pero interseca a C dos veces.

Para ser más específicos, intentaremos resolver el problema de encontrar una recta t tangente a la parábola $y = x^2$ en el siguiente ejemplo.

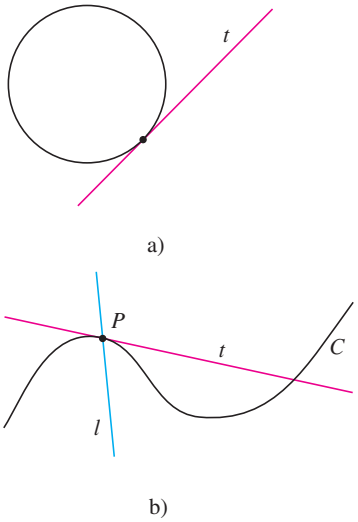


FIGURA 1

V EJEMPLO 1 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto $(1, 1)$.

SOLUCIÓN Podremos encontrar la ecuación de la recta tangente t tan pronto como conozcamos su pendiente m. La dificultad es que sólo conocemos un punto P sobre t, y para calcular la pendiente se necesitan dos puntos. Sin embargo, observamos que podemos calcular una aproximación a m eligiendo un punto cercano $Q(x, x^2)$ sobre la parábola (como en la figura 2) y calculando la pendiente m_{PQ} de la recta secante PQ. [Una **recta secante**, de la palabra latina *secans*, que significa cortar, es una recta que interseca (corta) una curva más de una vez.]

Elegimos $x \neq 1$ de manera que $Q \neq P$. Entonces

$$m_{PQ} = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

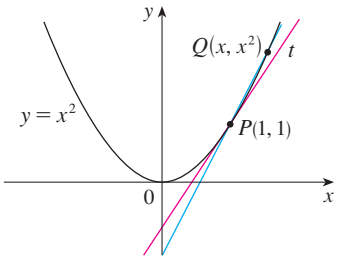


FIGURA 2

Por ejemplo, para el punto $Q(1.5, 2.25)$, tenemos

$$m_{PQ} = \frac{2.25 - 1}{1.5 - 1} = \frac{1.25}{0.5} = 2.5$$

x	m_{PQ}
2	3
1.5	2.5
1.1	2.1
1.01	2.01
1.001	2.001

x	m_{PQ}
0	1
0.5	1.5
0.9	1.9
0.99	1.99
0.999	1.999

Las tablas en el margen muestran los valores de m_{PQ} para varios valores de x cercanos a 1. Cuanto más cerca está Q de P, la x es más cercana a 1 y, de las tablas, m_{PQ} está más cerca de 2. Esto sugiere que la pendiente de la recta tangente t debe ser $m = 2$.

Decimos que la pendiente de la recta tangente es el *límite* de las pendientes de las rectas secantes, y esto lo expresamos simbólicamente escribiendo

$$\lim_{Q \to P} m_{PQ} = m \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

Suponiendo que la pendiente de la recta tangente finalmente es 2, se utiliza la ecuación de la recta en la forma punto-pendiente (véase apéndice B) para escribir la ecuación de la recta tangente en $(1, 1)$ como

$$y - 1 = 2(x - 1) \qquad \text{o bien} \qquad y = 2x - 1$$

La figura 3 muestra el proceso de límite que se presenta en este ejemplo. Cuando Q se aproxima a P a lo largo de la parábola, las correspondientes rectas secantes giran alrededor de P y se aproximan a la recta tangente t.

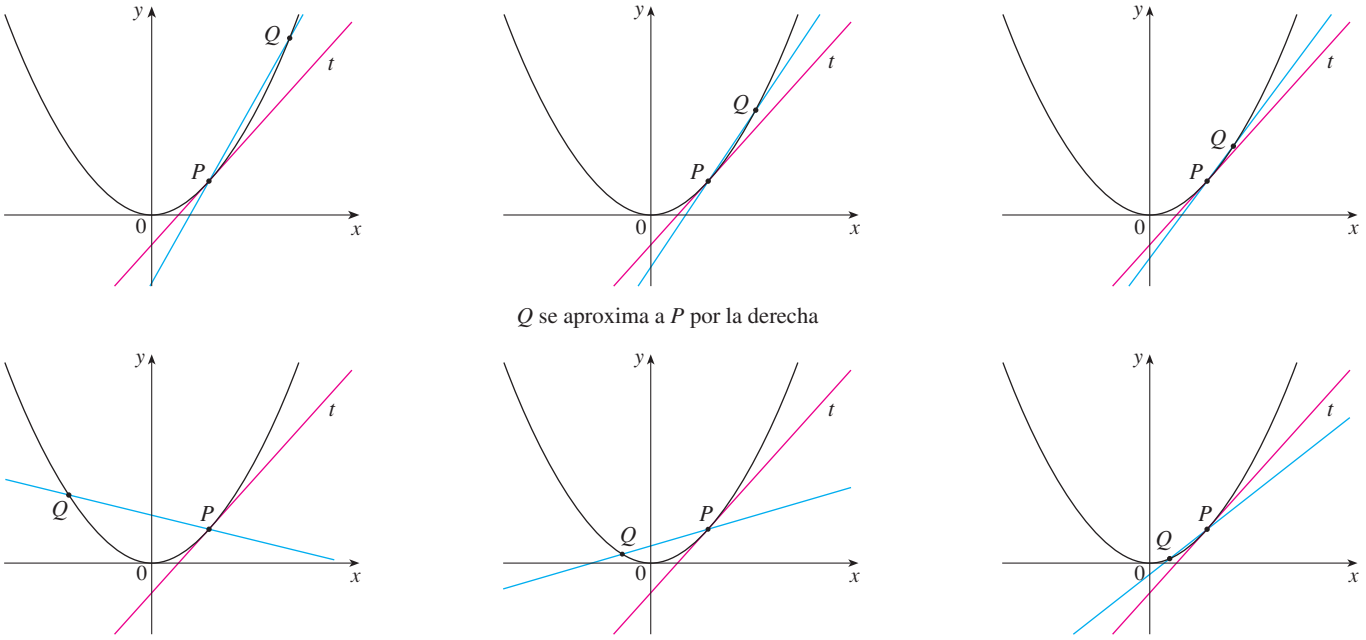


FIGURA 3

TEC En Visual 2.1 puede ver cómo funciona el proceso en la figura 3 para funciones adicionales.

Muchas de las funciones que se producen en la ciencia no están descritas por ecuaciones explícitas, sino que están definidas por datos experimentales. El siguiente ejemplo muestra cómo estimar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de este tipo de funciones.

t	Q
0.00	100.00
0.02	81.87
0.04	67.03
0.06	54.88
0.08	44.93
0.10	36.76

V EJEMPLO 2 La unidad de destello (flash) de una cámara funciona mediante el almacenamiento de carga en un condensador y su liberación repentina cuando el flash se activa. Los datos de la tabla describen la carga Q restante en el condensador (medida en microcoulombs) en el tiempo t (medido en segundos después de que el flash se dispara). Utilice los datos para dibujar la gráfica de esta función y estime la pendiente de la recta tangente en el punto donde $t = 0.04$. [*Nota*: la pendiente de la recta tangente representa la corriente eléctrica (medida en microamperios) que fluye desde el condensador a la lámpara del flash.]

SOLUCIÓN En la figura 4 se grafican los datos dados y se usan para trazar una curva que se aproxima a la gráfica de la función.

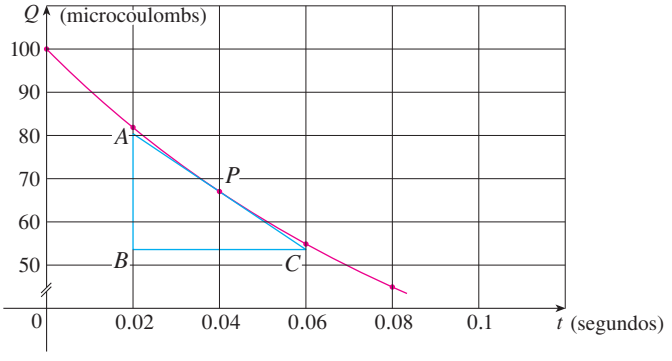


FIGURA 4

Dados los puntos $P(0.04, 67.03)$ y $R(0.00, 100.00)$ en la gráfica, nos encontramos con que la pendiente de la recta secante PR es

$$m_{PR} = \frac{100.00 - 67.03}{0.00 - 0.04} = -824.25$$

R	m_{PR}
(0.00, 100.00)	−824.25
(0.02, 81.87)	−742.00
(0.06, 54.88)	−607.50
(0.08, 44.93)	−552.50
(0.10, 36.76)	−504.50

La tabla de la izquierda muestra los resultados de cálculos similares para las pendientes de otras rectas secantes. De esta tabla se esperaría que la pendiente de la recta tangente en $t = 0.04$ se encuentre en algún valor entre -742 y -607.5. De hecho, el promedio de las pendientes de las dos rectas secantes más próximas es

$$\tfrac{1}{2}(-742 - 607.5) = -674.75$$

Así, por este método, estimamos la pendiente de la recta tangente como -675.

Otro método consiste en elaborar una aproximación a la tangente en P y medir los lados del triángulo ABC, como en la figura 4. Esto da una estimación de la pendiente de la recta tangente como

$$-\frac{|AB|}{|BC|} \approx -\frac{80.4 - 53.6}{0.06 - 0.02} = -670$$

El significado físico de la respuesta en el ejemplo 2 es que la corriente eléctrica que fluye desde el condensador a la lámpara de flash, después de 0.04 segundos, es de unos −670 microamperios.

El problema de la velocidad

Si usted mira el velocímetro de un automóvil mientras viaja en el tráfico de la ciudad, se ve que la aguja no se queda quieta por mucho tiempo, es decir, la velocidad del automóvil no es constante. Suponemos, al ver el velocímetro, que el coche tiene una velocidad determinada en cada instante, pero, ¿cómo se define la velocidad "instantánea"? Vamos a investigar el ejemplo de la caída de una pelota.

V EJEMPLO 3 Supongamos que una pelota se deja caer desde la plataforma superior de observación de la Torre CN en Toronto, a 450 m sobre el suelo. Encuentre la velocidad de la pelota después de 5 segundos.



© 2003 Brand X Pictures/Jupiter Images/Fotosearch

La Torre CN en Toronto fue el edificio autoestable más alto en el mundo durante 32 años.

SOLUCIÓN Por medio de experimentos llevados a cabo hace cuatro siglos, Galileo descubrió que la distancia que recorre cualquier cuerpo en caída libre es proporcional al cuadrado del tiempo que ha estado cayendo. (Este modelo de caída libre no considera la resistencia del aire.) Si la distancia de caída después de t segundos se denota por $s(t)$ y se mide en metros, entonces la ley de Galileo se expresa por la ecuación

$$s(t) = 4.9t^2$$

La dificultad para encontrar la velocidad después de 5 s es que se trata de un solo instante de tiempo ($t = 5$), por lo que no contamos con un intervalo de tiempo. Sin embargo, podemos aproximar la cantidad deseada mediante el cálculo de la velocidad promedio en el breve intervalo de tiempo de una décima de segundo, desde $t = 5$ hasta $t = 5.1$:

$$\text{velocidad promedio} = \frac{\text{cambio en la posición}}{\text{tiempo transcurrido}}$$

$$= \frac{s(5.1) - s(5)}{0.1}$$

$$= \frac{4.9(5.1)^2 - 4.9(5)^2}{0.1} = 49.49 \text{ m/s}$$

La siguiente tabla muestra los resultados de cálculos similares de la velocidad promedio durante periodos cada vez más pequeños.

Intervalo de tiempo	Velocidad promedio (m/s)
$5 \leqslant t \leqslant 6$	53.9
$5 \leqslant t \leqslant 5.1$	49.49
$5 \leqslant t \leqslant 5.05$	49.245
$5 \leqslant t \leqslant 5.01$	49.049
$5 \leqslant t \leqslant 5.001$	49.0049

Parece que, a medida que acorta el periodo, la velocidad promedio es cada vez más cercana a 49 m/s. La **velocidad instantánea** cuando $t = 5$ se define como el valor límite de estas velocidades promedio, durante periodos cada vez más cortos que comienzan en $t = 5$. Así, la velocidad (instantánea) después de 5 s es

$$v = 49\ \text{m/s}$$

Usted puede sospechar (y no está equivocado) que los cálculos utilizados en la solución de este problema son muy similares a los utilizados anteriormente en esta sección para encontrar tangentes. De hecho, hay una estrecha conexión entre el problema de obtener la tangente y aquel de encontrar la velocidad. Si dibujamos la gráfica de la función de la distancia recorrida por la pelota (como en la figura 5) y consideramos los puntos $P(a, 4.9a^2)$ y $Q(a + h, 4.9(a + h)^2)$ sobre la gráfica, entonces la pendiente de la recta secante PQ es

$$m_{PQ} = \frac{4.9(a + h)^2 - 4.9a^2}{(a + h) - a}$$

que es la misma que la velocidad promedio en el intervalo de tiempo $[a, a + h]$. Por tanto, la velocidad en el instante $t = a$ (el límite de las velocidades promedio cuando h tiende a 0) debe ser igual a la pendiente de la recta tangente en P (el límite de las pendientes de las rectas secantes).

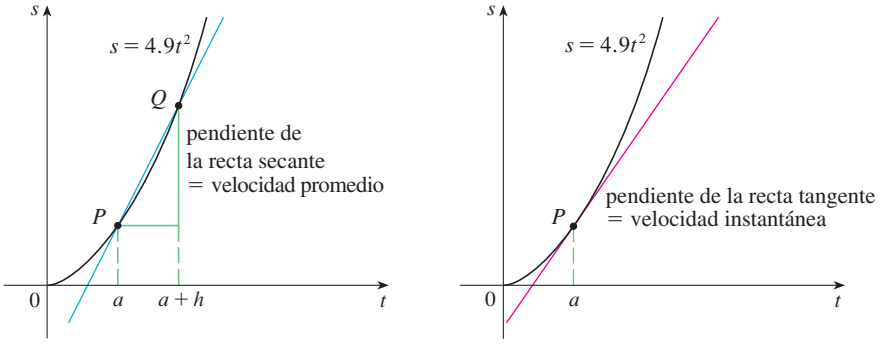


FIGURA 5

Los ejemplos 1 y 3 muestran que, para resolver los problemas de la tangente y la velocidad, debe ser capaz de calcular límites. Después de estudiar los métodos para calcular límites en las siguientes cinco secciones, regresaremos a estos problemas de encontrar tangentes y velocidades en la sección 2.7.

2.1 Ejercicios

1. Un tanque contiene 1 000 galones de agua que se drenan por la parte inferior del tanque en media hora. Los valores de la tabla muestran el volumen V de agua que queda en el tanque (en galones) después de t minutos.

t (min)	5	10	15	20	25	30
V (gal)	694	444	250	111	28	0

a) Si P es el punto (15, 250) sobre la gráfica de V, encuentre las pendientes de las rectas secantes PQ cuando Q es el punto sobre la gráfica con $t = 5$, 10, 20, 25 y 30.
b) Estime la pendiente de la recta tangente en P por medio del promedio de las pendientes de dos rectas secantes.
c) Utilice una gráfica de la función para estimar la pendiente de la recta tangente en P. (Esta pendiente representa la rapidez a la que fluye el agua del tanque después de 15 minutos.)

2. Un monitor se utiliza para medir la frecuencia cardiaca de un paciente después de una cirugía. El aparato compila el número de latidos del corazón después de t minutos y se registran en una tabla. Cuando los datos de la tabla se representan gráficamente, la pendiente de la recta tangente representa la frecuencia cardiaca en latidos por minuto.

t(min)	36	38	40	42	44
Latidos del corazón	2 530	2 661	2 806	2 948	3 080

El monitor estima este valor calculando la pendiente de una recta secante. Utilice los datos para estimar el ritmo cardiaco del paciente después de 42 minutos, utilizando la recta secante entre los puntos con los valores dados de t.

a) $t = 36$ y $t = 42$ b) $t = 38$ y $t = 42$
c) $t = 40$ y $t = 42$ d) $t = 42$ y $t = 44$

¿Cuáles son sus conclusiones?

3. El punto $P(2, -1)$ se encuentra en la curva $y = 1/(1 - x)$
a) Si Q es el punto $(x, 1/(1 - x))$, utilice la calculadora para hallar la pendiente de la recta secante PQ (con una precisión de seis decimales) para los siguientes valores de x:
i) 1.5 ii) 1.9 iii) 1.99 iv) 1.999
v) 2.5 vi) 2.1 vii) 2.01 viii) 2.001
b) Utilice los resultados del inciso a), para intuir el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en $P(2, -1)$.
c) Utilizando la pendiente del inciso b), obtenga la ecuación de la recta tangente a la curva en $P(2, -1)$.

4. El punto $P(0.5, 0)$ se encuentra sobre la curva $y = \cos \pi x$.
a) Si Q es el punto $(x, \cos \pi x)$, utilice la calculadora para hallar la pendiente de la secante PQ (con una precisión de seis decimales) para los siguientes valores de x:
i) 0 ii) 0.4 iii) 0.49 iv) 0.499
v) 1 vi) 0.6 vii) 0.51 viii) 0.501
b) Utilice los resultados del inciso a), para intuir el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en $P(0.5, 0)$.
c) Utilice la pendiente del inciso b), para hallar la ecuación de la recta tangente a la curva en $P(0.5, 0)$.
d) Dibuje la curva, dos de las rectas secantes y la recta tangente.

5. Si se lanza una pelota al aire con una velocidad de 40 pies/s, su altura en pies después de t segundos está dada por $y = 40t - 16t^2$.
a) Encuentre la velocidad promedio para el periodo que comienza cuando $t = 2$ y permanece
i) 0.5 segundos ii) 0.1 segundos
iii) 0.05 segundos iv) 0.01 segundos
b) Estime la velocidad instantánea cuando $t = 2$.

6. Si una piedra se lanza hacia arriba en el planeta Marte a una velocidad de 10 m/s, su altura en metros t segundos después está dada por $y = 10t - 1.86t^2$.
a) Encuentre la velocidad promedio en los intervalos de tiempo dados:
i) $[1, 2]$ ii) $[1, 1.5]$ iii) $[1, 1.1]$
iv) $[1, 1.01]$ v) $[1, 1.001]$
b) Estime la velocidad instantánea cuando $t = 1$.

7. La tabla muestra la posición de un ciclista.

t (segundos)	0	1	2	3	4	5
s (metros)	0	1.4	5.1	10.7	17.7	25.8

a) Encuentre la velocidad promedio para cada periodo:
i) $[1, 3]$ ii) $[2, 3]$ iii) $[3, 5]$ iv) $[3, 4]$
b) Utilice la gráfica de s en función de t para estimar la velocidad instantánea cuando $t = 3$.

8. El desplazamiento (en centímetros) de una partícula que se mueve hacia adelante y hacia atrás a lo largo de una línea recta está dado por la ecuación de movimiento $s = 2 \operatorname{sen} \pi t + 3 \cos \pi t$, donde t se mide en segundos.
a) Encuentre la velocidad promedio durante cada periodo:
i) $[1, 2]$ ii) $[1, 1.1]$
iii) $[1, 1.01]$ iv) $[1, 1.001]$
b) Estime la velocidad instantánea de la partícula cuando $t = 1$.

9. El punto $P(1, 0)$ se encuentra sobre la curva $y = \operatorname{sen}(10\pi/x)$.
a) Si Q es el punto $(x, \operatorname{sen}(10\pi/x))$, halle la pendiente de la recta secante PQ (con una precisión de cuatro decimales) para $x = 2$, 1.5, 1.4, 1.3, 1.2, 1.1, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8 y 0.9. ¿Las pendientes parecen estar acercándose a un límite?
b) Utilice la gráfica de la curva para explicar por qué las pendientes de las rectas secantes en el inciso a) no están cercanas a la pendiente de la recta tangente en P.
c) Eligiendo rectas secantes apropiadas, estime la pendiente de la recta tangente en P.

Se requiere calculadora graficadora o computadora **1.** Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

2.2 Límite de una función

En la sección anterior vimos cómo surgen los límites cuando queremos encontrar la recta tangente a una curva o la velocidad de un objeto; ahora dirigimos nuestra atención a los límites en general y los métodos numéricos y gráficos para calcularlos.

Vamos a investigar el comportamiento de la función f definida por $f(x) = x^2 - x + 2$ para valores de x cercanos a 2. La siguiente tabla muestra los valores de $f(x)$ para valores de x cercanos a 2, pero no iguales a 2.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1.0	2.000000	3.0	8.000000
1.5	2.750000	2.5	5.750000
1.8	3.440000	2.2	4.640000
1.9	3.710000	2.1	4.310000
1.95	3.852500	2.05	4.152500
1.99	3.970100	2.01	4.030100
1.995	3.985025	2.005	4.015025
1.999	3.997001	2.001	4.003001

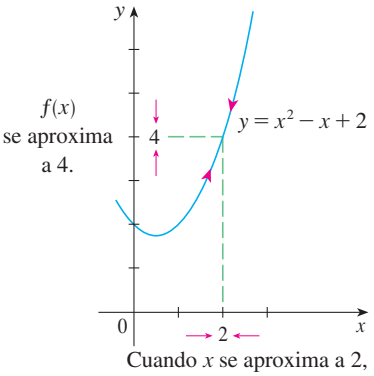


FIGURA 1

De la tabla y la gráfica de f (una parábola) que se muestra en la figura 1, vemos que cuando x se aproxima a 2 (por ambos lados de 2), $f(x)$ se aproxima a 4. De hecho, parece que podemos hacer que los valores de $f(x)$ estén tan cerca de 4 como queramos, tomando x suficientemente cercano a 2. Esto lo expresamos diciendo que "el límite de la función $f(x) = x^2 - x + 2$ cuando x tiende a 2 es igual a 4". La notación para esto es

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - x + 2) = 4$$

En general, usamos la siguiente notación.

1 Definición Supongamos que $f(x)$ está definida cuando x está cerca del número a. (Esto significa que f está definida en algún intervalo abierto que contiene a a, excepto posiblemente en a misma.) Entonces escribimos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

y decimos que "el límite de $f(x)$, cuando x tiende a a, es igual a L"

si podemos hacer que los valores de $f(x)$ estén arbitrariamente cercanos a L (tan cercanos a L como queramos), tomando valores de x suficientemente cerca de a (por ambos lados de a), pero no iguales a a.

En términos generales, esto quiere decir que los valores de $f(x)$ se aproximan a L cuando x tiende a a. En otras palabras, los valores de $f(x)$ tienden a estar más y más cerca del número L cuando x se acerca cada vez más al número a (de ambos lados de a), pero $x \neq a$. (En la sección 2.4 se dará una definición más precisa.)

Una notación alternativa para

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

es

$$f(x) \to L \quad \text{cuando} \quad x \to a$$

que suele leerse "$f(x)$ tiende a L cuando x tiende a a".

Note la frase "pero $x \neq a$" en la definición de límite. Esto significa que al encontrar el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a a, no se considera $x = a$. De hecho, $f(x)$ no necesita estar definida cuando $x = a$. Lo único que importa es cómo se define f *cerca* de a.

La figura 2 muestra las gráficas de tres funciones. Observe que en el inciso c), $f(a)$ no está definida y, en el inciso b), $f(a) \neq L$. Sin embargo, en cada caso, independientemente de lo que sucede en a, es cierto que $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

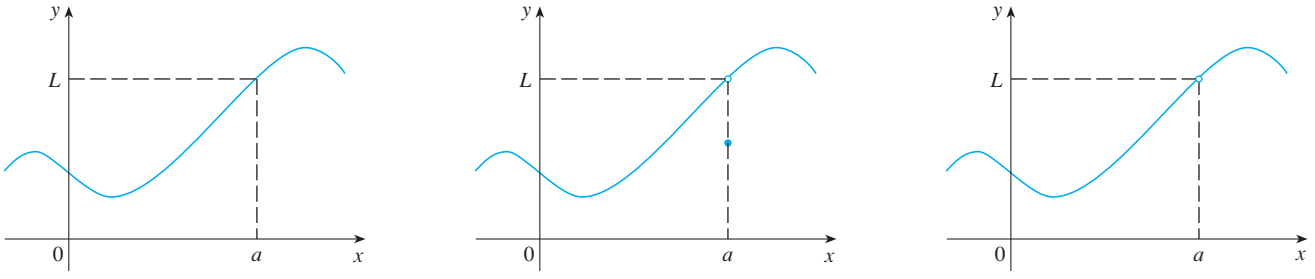


FIGURA 2 $\lim_{x \to a} f(x) = L$ en los tres casos

EJEMPLO 1 Conjeture el valor de $\lim_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{x^2 - 1}$.

$x < 1$	$f(x)$
0.5	0.666667
0.9	0.526316
0.99	0.502513
0.999	0.500250
0.9999	0.500025

$x > 1$	$f(x)$
1.5	0.400000
1.1	0.476190
1.01	0.497512
1.001	0.499750
1.0001	0.499975

SOLUCIÓN Observe que la función $f(x) = (x - 1)/(x^2 - 1)$ no está definida cuando $x = 1$, pero eso no importa, porque la definición de $\lim_{x \to a} f(x)$ dice que se consideran los valores de x que están cerca de a, pero no iguales a a.

Las tablas de la izquierda dan valores de $f(x)$ (con una precisión de seis decimales) para valores de x que tienden a 1 (pero no iguales a 1). Sobre la base de los valores en las tablas, hacemos la suposición de que

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1} = 0.5$$

El ejemplo 1 se ilustra en la gráfica de f, en la figura 3. Ahora vamos a cambiar un poco f, dándole el valor de 2 cuando $x = 1$ y llamando g a la función obtenida:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 1}{x^2 - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Esta nueva función g conserva el mismo límite cuando x tiende a 1. (Véase la figura 4.)

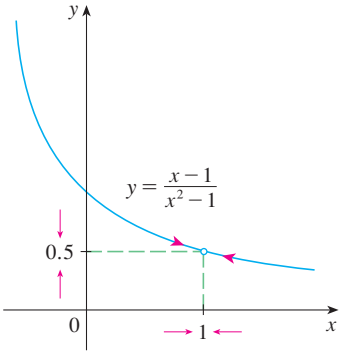


FIGURA 3

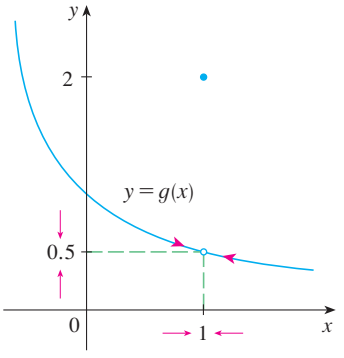


FIGURA 4

EJEMPLO 2 Estime el valor de $\lim_{t \to 0} \dfrac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$.

SOLUCIÓN La tabla enlista los valores de la función para varios valores de t cercanos a 0.

t	$\dfrac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$
±1.0	0.16228
±0.5	0.16553
±0.1	0.16662
±0.05	0.16666
±0.01	0.16667

A medida que t se acerca a 0, los valores de la función parecen acercarse a 0.1666666..., así que suponemos que

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} = \frac{1}{6}$$

t	$\dfrac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$
±0.0005	0.16800
±0.0001	0.20000
±0.00005	0.00000
±0.00001	0.00000

En el ejemplo 2, ¿qué habría sucedido si hubiéramos tomado valores aún más pequeños de t? La tabla en el margen muestra los resultados de una calculadora; sin duda, ¡algo extraño parece estar sucediendo!

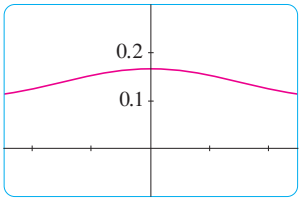
Si trata de obtener estos cálculos en su propia calculadora podría obtener valores diferentes, pero al final obtendrá el valor 0 si hace t suficientemente pequeña. ¿Significa esto que la respuesta es realmente 0, en lugar de $\frac{1}{6}$? No, el valor del límite es $\frac{1}{6}$ como se demuestra en la siguiente sección. El problema es que la calculadora dio valores falsos porque $\sqrt{t^2 + 9}$ está muy cerca de 3 cuando t es pequeña. (De hecho, cuando t es suficientemente pequeña, una calculadora da el valor de 3.000 para $\sqrt{t^2 + 9}$... para tantos dígitos como la calculadora sea capaz de aceptar.)

www.stewartcalculus.com
Para una mayor explicación de por qué las calculadoras, a veces, dan valores falsos, haga clic en *Lies My Calculator and Computer Told Me*. En particular, véase la sección llamada *The Perils of Subtraction*.

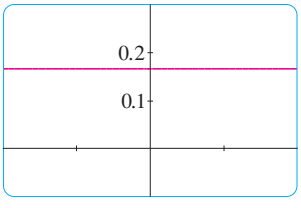
Algo similar sucede cuando tratamos de graficar la función

$$f(t) = \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$$

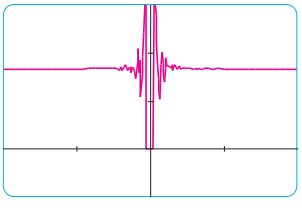
del ejemplo 2, en una calculadora graficadora o computadora. Los incisos a) y b) de la figura 5 muestran gráficas bastante precisas de f, y cuando se utiliza el modo *trace* (si está disponible) puede estimarse fácilmente que el límite es cercano a $\frac{1}{6}$. Pero si nos acercamos demasiado, como en los incisos c) y d), entonces obtenemos gráficas incorrectas, de nuevo debido a problemas con la sustracción.



a) [−5, 5] por [−0.1, 0.3]



b) [−0.1, 0.1] por [−0.1, 0.3]


c) $[-10^{-6}, 10^{-6}]$ por [−0.1, 0.3]

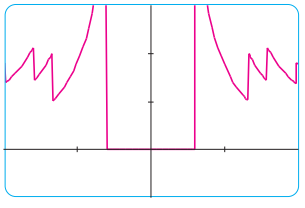

d) $[-10^{-7}, 10^{-7}]$ por [−0.1, 0.3]

FIGURA 5

V EJEMPLO 3 Obtenga el valor de $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

SOLUCIÓN La función $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$ no está definida cuando $x = 0$. Usando una calculadora (y recordando que, si $x \in \mathbb{R}$, sen x significa el seno del ángulo x medido en radianes) podemos elaborar una tabla de valores con una precisión de hasta ocho decimales. De la tabla a la izquierda y la gráfica en la figura 6 suponemos que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

De hecho, esta conjetura es correcta como se demostrará en el capítulo 3 utilizando un argumento geométrico.

x	$\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$
±1.0	0.84147098
±0.5	0.95885108
±0.4	0.97354586
±0.3	0.98506736
±0.2	0.99334665
±0.1	0.99833417
±0.05	0.99958339
±0.01	0.99998333
±0.005	0.99999583
±0.001	0.99999983

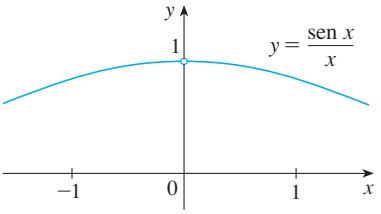


FIGURA 6

Informática de sistemas algebraicos
Los sistemas algebraicos computarizados (SAC) tienen comandos que calculan límites. A fin de evitar los tipos de trampas como las de los ejemplos 2, 4 y 5, no calculan límites a partir de la experimentación numérica. En su lugar, utilizan técnicas más sofisticadas, como el cálculo de series infinitas. Si usted tiene acceso a un SAC, utilice los comandos para límites a fin de estimar los límites de los ejemplos de esta sección y revisar sus respuestas en los ejercicios de este capítulo.

V EJEMPLO 4 Investigue $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{x}$.

SOLUCIÓN Una vez más la función $f(x) = \operatorname{sen}(\pi/x)$ no está definida en 0. Evaluando la función para algunos valores pequeños de x, obtenemos

$$f(1) = \operatorname{sen} \pi = 0 \qquad f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \operatorname{sen} 2\pi = 0$$

$$f\left(\tfrac{1}{3}\right) = \operatorname{sen} 3\pi = 0 \qquad f\left(\tfrac{1}{4}\right) = \operatorname{sen} 4\pi = 0$$

$$f(0.1) = \operatorname{sen} 10\pi = 0 \qquad f(0.01) = \operatorname{sen} 100\pi = 0$$

Del mismo modo, $f(0.001) = f(0.0001) = 0$. Sobre la base de esta información podríamos estar tentados a suponer que

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} = 0$$

pero esta vez nuestra suposición es errónea. Tenga en cuenta que, aunque $f(1/n) = \operatorname{sen} n\pi = 0$ para cualquier entero n, también es cierto que $f(x) = 1$ para muchos valores de x cercanos a 0. Esto puede verse en la gráfica de f que se muestra en la figura 7.

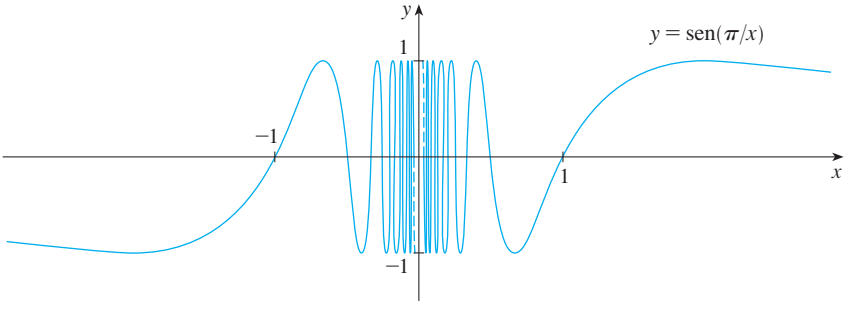


FIGURA 7

Las líneas punteadas, cerca del eje y indican que los valores del $\operatorname{sen}(\pi/x)$ oscilan infinitamente entre 1 y -1 cuando x tiende a 0. (Véase el ejercicio 45.)

Ya que los valores de $f(x)$ no se acercan a un número fijo cuando x tiende a 0,

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} \quad \text{no existe}$$

x	$x^3 + \dfrac{\cos 5x}{10\,000}$
1	1.000028
0.5	0.124920
0.1	0.001088
0.05	0.000222
0.01	0.000101

EJEMPLO 5 Encuentre el $\lim_{x \to 0} \left(x^3 + \dfrac{\cos 5x}{10\,000} \right)$.

SOLUCIÓN Como antes, elaboramos una tabla de valores. De la primera tabla en el margen parece que

$$\lim_{x \to 0} \left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10\,000} \right) = 0$$

x	$x^3 + \dfrac{\cos 5x}{10\,000}$
0.005	0.00010009
0.001	0.00010000

Pero si perseveramos con valores más pequeños de x, la segunda tabla sugiere que

$$\lim_{x \to 0} \left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10\,000} \right) = 0.000100 = \frac{1}{10\,000}$$

Más adelante veremos que $\lim_{x \to 0} \cos 5x = 1$; entonces deduciremos que el límite es 0.0001.

Los ejemplos 4 y 5 ilustran algunos de los riesgos al intentar conjeturar el valor de un límite. Es fácil caer en el valor incorrecto si utilizamos valores inadecuados de x, pero es difícil saber cuándo dejar de calcular valores. Y, como muestra la discusión después del ejemplo 2, a veces las calculadoras y las computadoras dan valores incorrectos. En la siguiente sección, sin embargo, vamos a desarrollar métodos infalibles para el cálculo de límites.

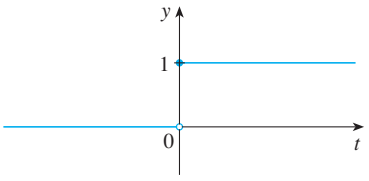


FIGURA 8
La función de Heaviside

V EJEMPLO 6 La función de Heaviside H se define por

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

[Esta función lleva el nombre del ingeniero eléctrico Oliver Heaviside (1850-1925) y se utiliza para describir una corriente eléctrica en un circuito en el tiempo $t = 0$.] Su gráfica se muestra en la figura 8.

Cuando t se aproxima a 0 por la izquierda, $H(t)$ se aproxima a 0. Conforme t se aproxima a 0 por la derecha, $H(t)$ se aproxima a 1. No hay un único número al que se aproxime $H(t)$ cuando t se aproxima a 0. Por tanto, $\lim_{t \to 0} H(t)$ no existe.

Límites laterales

Hemos notado en el ejemplo 6 que $H(t)$ tiende a 0 cuando t se aproxima a 0 por la izquierda y $H(t)$ tiende a 1 a medida t se aproxima a 0 por la derecha. Esta situación se indica simbólicamente escribiendo

$$\lim_{t \to 0^-} H(t) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{t \to 0^+} H(t) = 1$$

El símbolo "$t \to 0^-$" indica que se consideran sólo los valores de t que son menores que 0. De igual modo, "$t \to 0^+$" indica que se consideran sólo los valores de t que son mayores que 0.

2 Definición Cuando escribimos

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

estamos diciendo que el **límite izquierdo de $f(x)$ cuando x se aproxima a a** [o **el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a por la izquierda**] es igual a L si podemos hacer que los valores de $f(x)$ se acerquen arbitrariamente a L, tanto como queramos, tomando x suficientemente cercanos a a, pero menores que a.

Observe que la definición 2 difiere de la definición 1 sólo en el hecho de que x sea necesariamente menor que a. Del mismo modo, si se requiere que x sea mayor que a, se obtiene "el **límite de $f(x)$ cuando x tiende a a por la derecha** es igual a L" y escribimos

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Así, el símbolo "$x \to a^+$" significa que se consideran sólo $x > a$. Estas definiciones se ilustran en la figura 9.

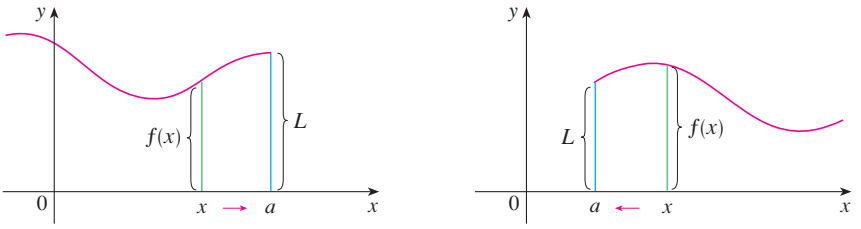


FIGURA 9

a) $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

Al comparar la definición 1 con las de los límites laterales, vemos que se cumple con lo siguiente.

3 $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si y sólo si $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

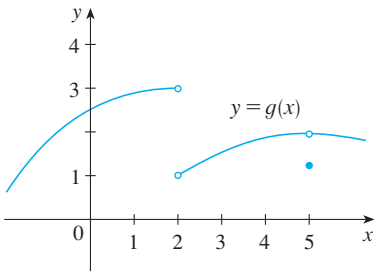


FIGURA 10

V EJEMPLO 7 La gráfica de una función g se muestra en la figura 10. Utilícela para establecer los valores (si existen) de lo siguiente:

a) $\lim_{x \to 2^-} g(x)$ b) $\lim_{x \to 2^+} g(x)$ c) $\lim_{x \to 2} g(x)$

d) $\lim_{x \to 5^-} g(x)$ e) $\lim_{x \to 5^+} g(x)$ f) $\lim_{x \to 5} g(x)$

SOLUCIÓN En la gráfica vemos que los valores de $g(x)$ tienden a 3 conforme x tiende a 2 por la izquierda, pero se acercan a 1 a medida x tiende a 2 por la derecha. Por tanto,

a) $\lim_{x \to 2^-} g(x) = 3$ y b) $\lim_{x \to 2^+} g(x) = 1$

c) Dado que los límites por la izquierda y por la derecha son diferentes, llegamos a la conclusión de 3 que $\lim_{x \to 2} g(x)$ no existe.

La gráfica también muestra que

d) $\lim_{x \to 5^-} g(x) = 2$ y e) $\lim_{x \to 5^+} g(x) = 2$

f) Esta vez los límites por la izquierda y por la derecha son los mismos, así que, por 3, tenemos

$$\lim_{x \to 5} g(x) = 2$$

A pesar de esto, observe que $g(5) \neq 2$

Límites infinitos

EJEMPLO 8 Encuentre $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2}$ si existe.

x	$\dfrac{1}{x^2}$
± 1	1
± 0.5	4
± 0.2	25
± 0.1	100
± 0.05	400
± 0.01	10 000
± 0.001	1 000 000

SOLUCIÓN Conforme x se acerca a 0, x^2 también se acerca a 0, y $1/x^2$ se hace muy grande. (Véase la tabla en el margen.) De hecho, se desprende de la gráfica de la función $f(x) = 1/x^2$ en la figura 11, que los valores de $f(x)$ pueden ser arbitrariamente grandes, tomando x lo suficientemente cercano a 0. Así, los valores de $f(x)$ no se aproximan a un número, por lo que $\lim_{x \to 0} (1/x^2)$ no existe.

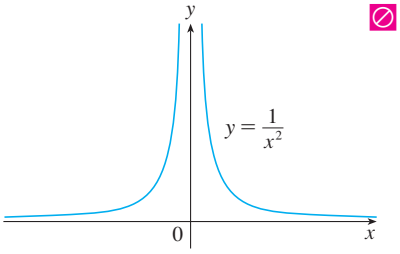


FIGURA 11

Para indicar el tipo de comportamiento exhibido en el ejemplo 8, se usa la notación

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

Esto no quiere decir que estemos considerando a ∞ como un número. Tampoco significa que el límite existe. Simplemente expresa la forma particular en que el límite no existe: $1/x^2$ puede hacerse tan grande como queramos, tomando a x suficientemente cerca de 0.

En general, podemos escribir simbólicamente

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

para indicar que los valores de $f(x)$ tienden a ser más y más grandes (o "crecen sin límite") a medida que x se acerca más y más a a.

4 Definición Sea f una función definida por ambos lados de a, excepto posiblemente en la misma a. Entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

significa que los valores de $f(x)$ pueden ser arbitrariamente grandes (tan grandes como queramos), tomando x suficientemente cerca de a, pero no igual a a.

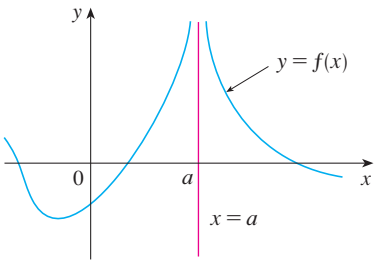


FIGURA 12
$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$

Otra notación para $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ es

$$f(x) \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to a$$

Una vez más, el símbolo ∞ no es un número, pero la expresión $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ se lee a menudo como

"el límite de $f(x)$, cuando x tiende a a, es infinito"

o bien "$f(x)$ tiende al infinito cuando x se aproxima a a"

o bien "$f(x)$ crece sin cota cuando x se aproxima a a".

Esta definición se ilustra gráficamente en la figura 12.

Cuando decimos que un número es "negativo muy grande", lo que queremos decir que es negativo, pero su magnitud (valor absoluto) es grande.

Un tipo similar de límite, para las funciones que se convierten en negativos muy grandes conforme x se aproxima a a, se precisa en la definición 5 y se ilustra en la figura 13.

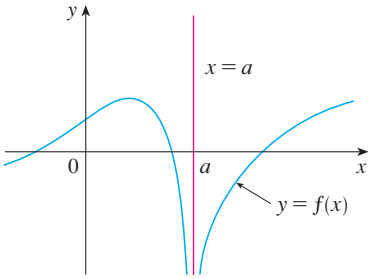


FIGURA 13
$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

5 Definición Sea f definida por ambos lados de a, excepto posiblemente en a misma. Entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

significa que los valores de $f(x)$ pueden ser negativos arbitrariamente grandes, tomando x suficientemente cerca de a, pero no igual a a.

El símbolo $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ puede leerse como "el límite de $f(x)$, cuando x se aproxima a a, es infinito negativo" o "$f(x)$ decrece sin límite conforme x tiende a a". Como ejemplo tenemos

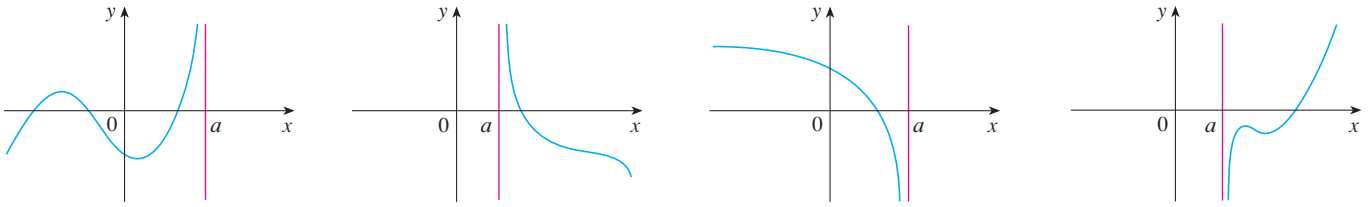
$$\lim_{x \to 0} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\infty$$

Definiciones similares pueden darse a los límites laterales infinitos

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

recordando que "$x \to a^-$" significa que se consideran sólo los valores de x que son menores que a, y del mismo modo "$x \to a^+$" significa que se consideran sólo $x > a$. En la figura 14, se ilustran cuatro de estos casos.



a) $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$ b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$ c) $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ d) $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

FIGURA 14

6 Definición La recta $x = a$ se llama **asíntota vertical** de la curva $y = f(x)$ si al menos una de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

Por ejemplo, el eje y es una asíntota vertical de la curva $y = 1/x^2$ debido a que $\lim_{x \to 0} (1/x^2) = \infty$. En la figura 14 la recta $x = a$ es una asíntota vertical en cada uno de los cuatro casos que se muestran. En general, el conocimiento de asíntotas verticales es muy útil para dibujar gráficas.

EJEMPLO 9 Encuentre $\lim_{x \to 3^+} \dfrac{2x}{x - 3}$ y $\lim_{x \to 3^-} \dfrac{2x}{x - 3}$.

SOLUCIÓN Si x tiende a 3 con valores mayores que 3, entonces el denominador $x - 3$ es un número positivo muy pequeño y $2x$ está muy cerca de 6, así que el cociente $2x/(x - 3)$ es un número *positivo* muy grande. Por tanto, intuitivamente, podemos ver que

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{2x}{x - 3} = \infty$$

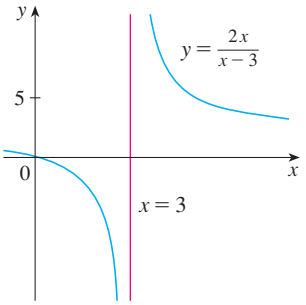


FIGURA 15

Asimismo, si x es cercano a 3, pero con valores menores que 3, entonces $x - 3$ es un número negativo pequeño, pero $2x$ es aún un número positivo (cercano a 6). Así, $2x/(x - 3)$ es un número *negativo* muy grande. Por tanto,

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{2x}{x - 3} = -\infty$$

La gráfica de la curva $y = 2x/(x - 3)$ se ilustra en la figura 15. La recta $x = 3$ es una asíntota vertical.

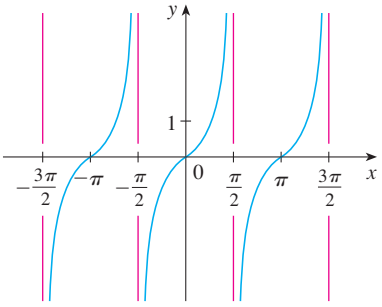


FIGURA 16
$y = \tan x$

EJEMPLO 10 Encuentre las asíntotas verticales de $f(x) = \tan x$.

SOLUCIÓN Ya que

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

hay posibles asíntotas verticales donde $\cos x = 0$. De hecho, puesto que $\cos x \to a^+$ cuando $x \to (\pi/2)^-$ y $\cos x \to 0^-$ a medida que $x \to (\pi/2)^+$, mientras sen x es positivo cuando x está cerca de $\pi/2$, tenemos

$$\lim_{x \to (\pi/2)^-} \tan x = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to (\pi/2)^+} \tan x = -\infty$$

Esto muestra que la recta $x = \pi/2$ es una asíntota vertical. Un razonamiento similar, muestra que las rectas $x = (2n + 1)\pi/2$, donde n es un número entero, son todas asíntotas verticales de $f(x) = \tan x$. La gráfica en la figura 16 confirma esto.

Otro ejemplo de una función cuya gráfica tiene una asíntota vertical es la función logaritmo natural $y = \ln x$. En la figura 17 vemos que

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$$

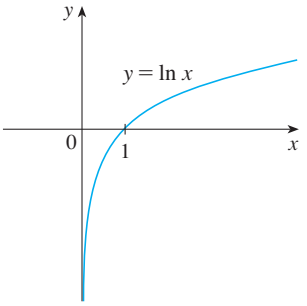


FIGURA 17
El eje y es una asíntota vertical de la función logaritmo natural.

y así, la recta $x = 0$ (el eje y) es una asíntota vertical. De hecho, lo mismo es cierto para $y = \log_a x$ siempre que $a > 1$. (Véanse las figuras 11 y 12 en la sección 1.6.)

2.2 Ejercicios

1. Explique con sus propias palabras cuál es el significado de la ecuación

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 5$$

¿Es posible que se cumpla con esta proposición y que aún $f(2) = 3$ sea verdadero? Explique.

2. Explique qué significa decir que

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 3 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = 7$$

En esta situación, ¿es posible que $\lim_{x \to 1} f(x)$ exista? Explique.

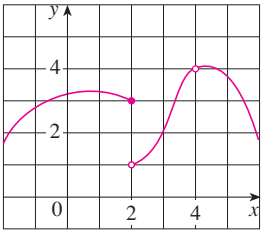
3. Explique el significado de cada una de las siguientes proposiciones.

a) $\lim_{x \to -3} f(x) = \infty$ b) $\lim_{x \to 4^+} f(x) = -\infty$

4. Utilice la gráfica de f para establecer el valor de cada cantidad si ésta existe. Si no existe, explique por qué.

a) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ b) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ c) $\lim_{x \to 2} f(x)$

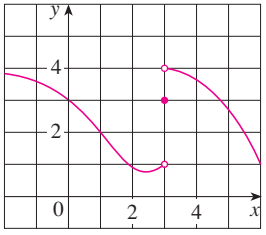
d) $f(2)$ e) $\lim_{x \to 4} f(x)$ f) $f(4)$



5. Para la función f cuya gráfica está dada, establezca el valor de cada una de las siguientes cantidades. Si no existe, explique por qué.

a) $\lim_{x \to 1} f(x)$ b) $\lim_{x \to 3^-} f(x)$ c) $\lim_{x \to 3^+} f(x)$

d) $\lim_{x \to 3} f(x)$ e) $f(3)$



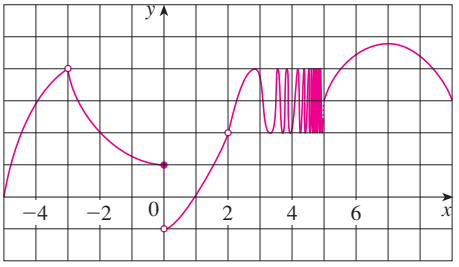
6. Para la función h cuya gráfica está dada, establezca el valor de cada una de las siguientes cantidades. Si no existe, explique por qué.

a) $\lim_{x \to -3^-} h(x)$ b) $\lim_{x \to -3^+} h(x)$ c) $\lim_{x \to -3} h(x)$

d) $h(-3)$ e) $\lim_{x \to 0^-} h(x)$ f) $\lim_{x \to 0^+} h(x)$

g) $\lim_{x \to 0} h(x)$ h) $h(0)$ i) $\lim_{x \to 2} h(x)$

j) $h(2)$ k) $\lim_{x \to 5^+} h(x)$ l) $\lim_{x \to 5^-} h(x)$

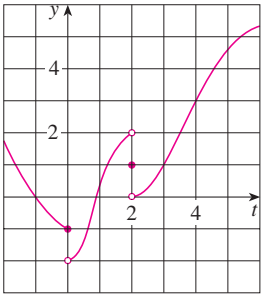


7. Para la función g cuya gráfica está dada, establezca el valor de cada una de las siguientes cantidades si existe. Si no, explique por qué.

a) $\lim_{t \to 0^-} g(t)$ b) $\lim_{t \to 0^+} g(t)$ c) $\lim_{t \to 0} g(t)$

d) $\lim_{t \to 2^-} g(t)$ e) $\lim_{t \to 2^+} g(t)$ f) $\lim_{t \to 2} g(t)$

g) $g(2)$ h) $\lim_{t \to 4} g(t)$

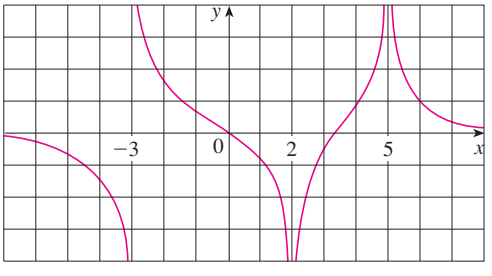


8. Para la función R cuya gráfica se muestra, establezca lo siguiente.

a) $\lim_{x \to 2} R(x)$ b) $\lim_{x \to 5} R(x)$

c) $\lim_{x \to -3^-} R(x)$ d) $\lim_{x \to -3^+} R(x)$

e) Las ecuaciones de las asíntotas verticales.

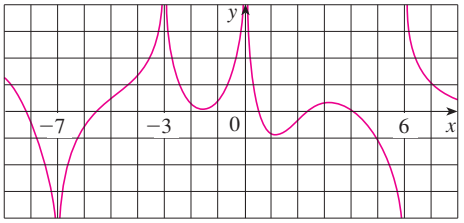


9. Para la función f cuya gráfica se muestra, establezca lo siguiente.

a) $\lim_{x\to -7} f(x)$ b) $\lim_{x\to -3} f(x)$ c) $\lim_{x\to 0} f(x)$

d) $\lim_{x\to 6^-} f(x)$ e) $\lim_{x\to 6^+} f(x)$

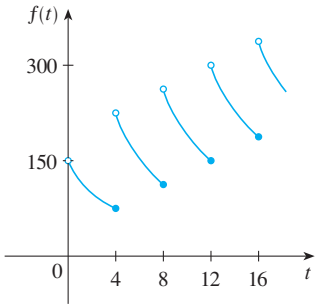
f) Las ecuaciones de las asíntotas verticales.



10. Un paciente recibe una inyección de 150 mg de un medicamento cada 4 horas. La gráfica muestra la cantidad $f(t)$ del medicamento en el torrente sanguíneo después de t horas. Encuentre

$$\lim_{t\to 12^-} f(t) \qquad \text{y} \qquad \lim_{t\to 12^+} f(t)$$

y explique el significado de estos límites laterales.



11-12 Trace la gráfica de cada una de las siguientes funciones y utilícela para determinar los valores de a para los cuales $\lim_{x\to a} f(x)$ existe.

11. $f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \leqslant x < 1 \\ 2 - x & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

12. $f(x) = \begin{cases} 1 + \operatorname{sen} x & \text{si } x < 0 \\ \cos x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ \operatorname{sen} x & \text{si } x > \pi \end{cases}$

13-14 Utilice la gráfica de la función f para establecer el valor de cada uno de los siguientes límites, si es que existen. Si no, explique por qué.

a) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ b) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ c) $\lim_{x\to 0} f(x)$

13. $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{1/x}}$ **14.** $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{\sqrt{x^3 + x^2}}$

15-18 Trace la gráfica de un ejemplo de una función f que cumpla con todas las condiciones dadas.

15. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1, \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 2, \quad f(0) = 1$

16. $\lim_{x\to 0} f(x) = 1, \quad \lim_{x\to 3^-} f(x) = -2, \quad \lim_{x\to 3^+} f(x) = 2,$
$f(0) = -1, \quad f(3) = 1$

17. $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 4, \quad \lim_{x\to 3^-} f(x) = 2, \quad \lim_{x\to -2} f(x) = 2,$
$f(3) = 3, \quad f(-2) = 1$

18. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 2, \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 4^-} f(x) = 3,$
$\lim_{x\to 4^+} f(x) = 0, \quad f(0) = 2, \quad f(4) = 1$

19-22 Conjeture el valor de cada uno de los siguientes límites (si existen) evaluando la función dada en los números propuestos (con una precisión de seis decimales).

19. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2}$,
$x = 2.5, 2.1, 2.05, 2.01, 2.005, 2.001,$
$1.9, 1.95, 1.99, 1.995, 1.999$

20. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2}$,
$x = 0, -0.5, -0.9, -0.95, -0.99, -0.999,$
$-2, -1.5, -1.1, -1.01, -1.001$

21. $\lim_{t\to 0} \dfrac{e^{5t} - 1}{t}$, $t = \pm 0.5, \pm 0.1, \pm 0.01, \pm 0.001, \pm 0.0001$

22. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(2 + h)^5 - 32}{h}$,
$h = \pm 0.5, \pm 0.1, \pm 0.01, \pm 0.001, \pm 0.0001$

23-26 Utilice una tabla de valores para estimar el valor de cada uno de los siguientes límites. Si dispone usted de una calculadora o computadora, utilícela para confirmar gráficamente su resultado.

23. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x + 4} - 2}{x}$ **24.** $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan 3x}{\tan 5x}$

25. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^6 - 1}{x^{10} - 1}$ **26.** $\lim_{x\to 0} \dfrac{9^x - 5^x}{x}$

27. a) Por medio de la grafica de la función $f(x) = (\cos 2x - \cos x)/x^2$ y un acercamiento al punto donde la gráfica interseca el eje y, estime el valor de $\lim_{x\to 0} f(x)$.

b) Verifique su respuesta del inciso a) mediante la evaluación de $f(x)$ para valores de x que tiendan a 0.

28. a) Estime el valor de

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} \pi x}$$

graficando la función $f(x) = (\operatorname{sen} x)/(\operatorname{sen} \pi x)$. Exprese su respuesta con una precisión de dos decimales.

b) Verifique su respuesta del inciso a) evaluando $f(x)$ para valores de x que tiendan a 0.

29–37 Determine cada uno de los siguientes límites infinitos.

29. $\lim_{x \to -3^+} \dfrac{x + 2}{x + 3}$

30. $\lim_{x \to -3^-} \dfrac{x + 2}{x + 3}$

31. $\lim_{x \to 1} \dfrac{2 - x}{(x - 1)^2}$

32. $\lim_{x \to 5^-} \dfrac{e^x}{(x - 5)^3}$

33. $\lim_{x \to 3^+} \ln(x^2 - 9)$

34. $\lim_{x \to \pi^-} \cot x$

35. $\lim_{x \to 2\pi^-} x \csc x$

36. $\lim_{x \to 2^-} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}$

37. $\lim_{x \to 2^+} \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 5x + 6}$

---

38. a) Encuentre las asíntotas verticales de la función

$$y = \frac{x^2 + 1}{3x - 2x^2}$$

b) Verifique su respuesta al inciso a) graficando la función.

39. Determine $\lim_{x \to 1^-} \dfrac{1}{x^3 - 1}$ y $\lim_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x^3 - 1}$

a) evaluando $f(x) = 1/(x^3 - 1)$ para valores de x que tiendan a 1, por el lado izquierdo y por el lado derecho.

b) razonando como en el ejemplo 9, y

c) a partir de la gráfica de f.

40. a) Por medio de la gráfica de la función $f(x) = (\tan 4x)/x$ y un acercamiento al punto donde la gráfica interseca el eje y estime el valor de $\lim_{x \to 0} f(x)$.

b) Verifique su respuesta del inciso a) para evaluar $f(x)$ para valores de x que tiendan a 0.

41. a) Estime el valor de $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}$ con una precisión de cinco decimales. ¿Le parece conocido este número?

b) Ilustre el inciso a) graficando la función $y = (1 + x)^{1/x}$.

42. a) Grafique la función $f(x) = e^x + \ln|x - 4|$ para $0 \leq x \leq 5$. ¿Piensa que la gráfica es una buena representación de f?

b) ¿Cómo conseguiría una gráfica que represente mejor a f?

43. a) Evalúe la función $f(x) = x^2 - (2^x/1\,000)$ para $x = 1$, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2, 0.1 y 0.05 e intuya el valor de

$$\lim_{x \to 0} \left(x^2 - \frac{2^x}{1\,000} \right)$$

b) Evalúe $f(x)$ para $x = 0.04$, 0.02, 0.01, 0.005, 0.003 y 0.001. Intuya otra vez.

44. a) Evalúe $h(x) = (\tan x - x)/x^3$ para $x = 1$, 0.5, 0.1, 0.05, 0.01 y 0.005.

b) Intuya el valor de $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan x - x}{x^3}$.

c) Evalúe $h(x)$ para sucesivos valores pequeños de x hasta que finalmente alcance un valor de 0 para $h(x)$. ¿Aún confía usted en que su conjetura en el inciso b) es correcta? Explique por qué finalmente obtuvo valores 0. (En la sección 4.4 se explicará un método para evaluar el límite.)

d) Grafique la función h en un rectángulo de vista $[-1, 1]$ por $[0, 1]$. Después haga un acercamiento hacia el punto donde la gráfica interseca el eje y, para estimar el límite de $h(x)$ cuando x tienda a 0. Continúe el acercamiento hasta que observe distorsiones en la gráfica de h. Compare con los resultados del inciso c).

45. Grafique la función $f(x) = \operatorname{sen}(\pi/x)$ del ejemplo 4 en el rectángulo de vista $[-1, 1]$ por $[-1, 1]$. Después haga acercamientos al origen varias veces. Haga comentarios relacionados con el comportamiento de esta función.

46. En la teoría de la relatividad, la masa de una partícula con velocidad v es

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

donde m_0 es la masa de la partícula en reposo y c es la rapidez de la luz. ¿Qué pasa cuando $v \to c^-$?

47. Utilice una gráfica para estimar la ecuación de todas las asíntotas verticales de la curva

$$y = \tan(2 \operatorname{sen} x) \qquad -\pi \leq x \leq \pi$$

Después, encuentre las ecuaciones exactas de estas asíntotas.

48. a) Utilice evidencias numéricas y gráficas para intuir el valor del límite

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

b) ¿Qué tan cerca a 1 debe estar x para asegurar que la función del inciso a) está dentro de una distancia de 0.5 de este límite?

2.3 Cálculo de límites usando las leyes de los límites

En la sección 2.2 utilizamos calculadoras y gráficas para intuir los valores de un límite, pero observamos que tales métodos no siempre nos llevan a la respuesta correcta. En esta sección utilizaremos las siguientes propiedades de los límites, llamadas *leyes de los límites*, para calcularlos.

Leyes de los límites Suponga que c es una constante y que los límites

$$\lim_{x\to a} f(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a} g(x)$$

existen. Entonces

1. $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$
2. $\lim_{x\to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$
3. $\lim_{x\to a} [cf(x)] = c \lim_{x\to a} f(x)$
4. $\lim_{x\to a} [f(x)\, g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$
5. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ si $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$

Estas cinco leyes pueden expresarse verbalmente como sigue:

Ley de la suma
Ley de la diferencia
Ley del múltiplo constante
Ley del producto
Ley del cociente

1. El límite de una suma es la suma de los límites.
2. El límite de una diferencia es la diferencia de los límites.
3. El límite de una constante por una función es la constante por el límite de la función.
4. El límite de un producto es el producto de los límites.
5. El límite de un cociente es el cociente de los límites (siempre que el límite del denominador no sea cero).

Es fácil creer que estas propiedades son verdaderas. Por ejemplo, si $f(x)$ está cerca de L y $g(x)$ está cerca de M, es razonable concluir que $f(x) + g(x)$ está muy cerca de $L + M$. Esto nos da una base intuitiva para creer que la ley 1 es verdadera. En la sección 2.4 daremos una definición precisa de la idea de límite y la utilizaremos para demostrar esta ley. Las demostraciones del resto de las leyes están dadas en el apéndice F.

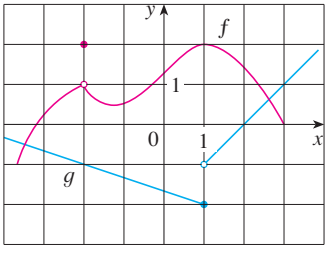


FIGURA 1

EJEMPLO 1 Utilice las leyes de los límites y las gráficas de f y g en la figura 1 para evaluar los siguientes límites, si es que existen.

a) $\lim_{x\to -2} [f(x) + 5g(x)]$ b) $\lim_{x\to 1} [f(x)g(x)]$ c) $\lim_{x\to 2} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

SOLUCIÓN

a) De las gráficas de f y g vemos que

$$\lim_{x\to -2} f(x) = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to -2} g(x) = -1$$

Por tanto, tenemos

$$\lim_{x\to -2}[f(x)+5g(x)] = \lim_{x\to -2} f(x) + \lim_{x\to -2}[5g(x)] \qquad \text{(por la ley 1)}$$

$$= \lim_{x\to -2} f(x) + 5\lim_{x\to -2} g(x) \qquad \text{(por la ley 3)}$$

$$= 1 + 5(-1) = -4$$

b) Vemos que $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$. Pero $\lim_{x\to 1} g(x)$ no existe porque los límites por la izquierda y por la derecha son diferentes:

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = -2 \qquad \lim_{x\to 1^+} g(x) = -1$$

Así que no podemos utilizar la ley 4 para el límite deseado, pero *podemos* utilizarla para los límites laterales:

$$\lim_{x\to 1^-}[f(x)g(x)] = 2\cdot(-2) = -4 \qquad \lim_{x\to 1^+}[f(x)g(x)] = 2\cdot(-1) = -2$$

Los límites por la izquierda y por la derecha no son iguales, así que $\lim_{x\to 1}[f(x)g(x)]$ no existe.

c) La gráfica muestra que

$$\lim_{x\to 2} f(x) \approx 1.4 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 2} g(x) = 0$$

Ya que el límite del denominador es 0, no podemos utilizar la ley 5. El límite dado no existe porque el denominador tiende a 0, mientras que el numerador se acerca a un número no cero. ■

Si utilizamos repetidamente la ley del producto con $g(x) = f(x)$, obtenemos la siguiente ley.

Ley de la potencia

6. $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$ donde n es un número entero positivo

Para la aplicación de estas seis leyes, necesitamos utilizar dos límites especiales:

7. $\lim_{x\to a} c = c$ **8.** $\lim_{x\to a} x = a$

Estos límites son obvios desde un punto de vista intuitivo (establézcalos en palabras o dibuje las gráficas de $y = c$ y $y = x$), pero en los ejercicios de la sección 2.4 se requieren las demostraciones basadas en la definición precisa.

Si hacemos $f(x) = x$ en la ley 6 y utilizamos la ley 8, obtenemos otra forma especial de límite.

9. $\lim_{x\to a} x^n = a^n$ donde n es un número entero positivo

Un límite similar con el que se cumple para las raíces es el siguiente. (Para la raíz cuadrada, la demostración se resume en el ejercicio 37 de la sección 2.4.)

10. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ donde n es un número entero positivo

(Si n es par, suponemos que $a > 0$.)

Más generalmente, tenemos la siguiente ley que hemos de demostrar en la sección 2.5 como una consecuencia de la ley 10.

Ley de la raíz

11. $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$ donde n es un número entero positivo

[Si n es par, suponemos que $\lim_{x\to a} f(x) > 0$.]

EJEMPLO 2 Evalúe los siguientes límites y justifique cada paso

a) $\lim_{x\to 5}(2x^2 - 3x + 4)$ b) $\lim_{x\to -2}\dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$

SOLUCIÓN

a)
$$\lim_{x\to 5}(2x^2 - 3x + 4) = \lim_{x\to 5}(2x^2) - \lim_{x\to 5}(3x) + \lim_{x\to 5} 4 \qquad \text{(por las leyes 2 y 1)}$$

$$= 2\lim_{x\to 5} x^2 - 3\lim_{x\to 5} x + \lim_{x\to 5} 4 \qquad \text{(por la ley 3)}$$

$$= 2(5^2) - 3(5) + 4 \qquad \text{(por las leyes 9, 8 y 7)}$$

$$= 39$$

b) Empezamos utilizando la ley 5, pero su uso está completamente justificado sólo en la etapa final cuando vemos que los límites del numerador y el denominador existen y el límite del denominador no es cero.

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x} = \frac{\lim_{x\to -2}(x^3 + 2x^2 - 1)}{\lim_{x\to -2}(5 - 3x)} \qquad \text{(por la ley 5)}$$

$$= \frac{\lim_{x\to -2} x^3 + 2\lim_{x\to -2} x^2 - \lim_{x\to -2} 1}{\lim_{x\to -2} 5 - 3\lim_{x\to -2} x} \qquad \text{(por las leyes 1, 2 y 3)}$$

$$= \frac{(-2)^3 + 2(-2)^2 - 1}{5 - 3(-2)} \qquad \text{(por las leyes 9, 8 y 7)}$$

$$= -\frac{1}{11}$$

NOTA Si hacemos $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$, entonces $f(5) = 39$. En otras palabras, habríamos obtenido la respuesta correcta del ejemplo 2a) sustituyendo 5 por x. Del mismo modo, la sustitución directa aporta la respuesta correcta en el inciso b). Las funciones en el ejemplo 2 son una función polinomial y una función racional, respectivamente, y el mismo uso de las leyes de los límites demuestra que la sustitución directa siempre sirve para este tipo de funciones (Véanse los ejercicios 55 y 56). Este hecho se expresa de la siguiente manera:

Propiedad de sustitución directa Si f es una función polinomial o una función racional y a está en el dominio de f, entonces

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Newton y los límites

Isaac Newton nació el día de Navidad en 1642, año de la muerte de Galileo. Cuando entró en la Universidad de Cambridge en 1661, Newton no sabía muchas matemáticas, pero aprendió rápidamente mediante la lectura de Euclides y Descartes, y asistiendo a las conferencias de Isaac Barrow. Cambridge fue cerrada a causa de la peste en 1665 y 1666, y Newton regresó a su casa a reflexionar sobre lo que había aprendido. Esos dos años fueron extraordinariamente productivos porque hizo cuatro de sus descubrimientos más importantes: 1) su representación de funciones como sumas de series infinitas, incluyendo el teorema del binomio; 2) su trabajo sobre el cálculo diferencial e integral; 3) sus leyes del movimiento y la ley de la gravitación universal y 4) sus experimentos con el prisma relacionados con la naturaleza de la luz y el color. Debido a un temor a la controversia y la crítica, se mostró reacio a publicar sus descubrimientos y no fue sino hasta 1687, a instancias del astrónomo Halley, que Newton publicó sus *Principia Mathematica*. En este trabajo, el tratado científico más grande jamás escrito, Newton expone su versión del Cálculo y su utilización en la investigación de la mecánica, la dinámica de fluidos, y el movimiento ondulatorio, así como en la explicación del movimiento de los planetas y los cometas.

Los inicios del Cálculo se encuentran en los procedimientos para obtener áreas y volúmenes ideados por los antiguos sabios griegos Eudoxo y Arquímedes. A pesar de que los aspectos de la idea de límite están implícitos en su "método de agotamiento", Eudoxo y Arquímedes nunca formularon explícitamente el concepto de límite. Tampoco matemáticos como Cavalieri, Fermat ni Barrow, antecesores inmediatos de Newton en el desarrollo del Cálculo, utilizaron los límites. Isaac Newton fue el primero en hablar explícitamente de límites. Explicó que la idea principal detrás de los límites es que las cantidades "se acercan más que cualquier diferencia dada". Newton dijo que el límite era el concepto básico en el Cálculo, pero fue el posterior trabajo de matemáticos como Cauchy y otros más el que finalmente clarificó las ideas relacionadas con los límites.

Las funciones con la propiedad de sustitución directa se llaman *continuas* en $x = a$ y las estudiaremos en la sección 2.5. Sin embargo, no todos los límites pueden ser evaluados por sustitución directa, como se muestra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 3 Encuentre $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$.

SOLUCIÓN Sea $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$. No podemos encontrar el límite por sustitución directa de $x = 1$ porque $f(1)$ no está definida. Tampoco podemos aplicar la ley del cociente porque el límite del denominador es 0. Ahora, necesitamos de un proceso algebraico preliminar. Factorizando el numerador como una diferencia de cuadrados:

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$$

El numerador y el denominador tienen un factor común de $x - 1$. Cuando tomamos el límite cuando x tiende a 1, tenemos que $x \neq 1$ y, por tanto, $x - 1 \neq 0$. Así, podemos cancelar el factor común y calcular el límite como sigue:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} &= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1} (x + 1) \\ &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

El límite en este ejemplo surgió en la sección 2.1 cuando intentamos hallar la recta tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto $(1, 1)$.

NOTA En el ejemplo 3 pudimos calcular el límite sustituyendo la función dada, $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$, por la función más sencilla, $g(x) = x + 1$, que posee el mismo límite. Esto es válido porque $f(x) = g(x)$, excepto cuando $x = 1$, y al calcular el límite cuando x tiende 1, no se considera qué sucede cuando x es en realidad *igual* a 1. En general, se tiene el siguiente hecho.

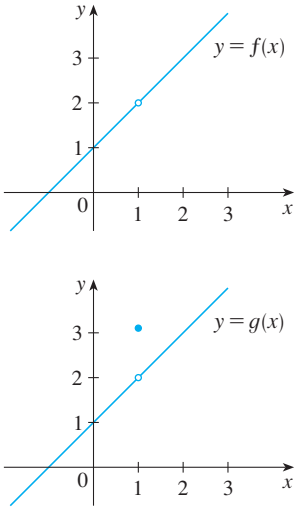


FIGURA 2
Las gráficas de las funciones f (del ejemplo 3) y g (del ejemplo 4)

Si $f(x) = g(x)$ cuando $x \neq a$, entonces $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x)$ siempre que el límite exista.

EJEMPLO 4 Encuentre $\lim_{x \to 1} g(x)$ donde

$$g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \neq 1 \\ \pi & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Aquí g está definida en $x = 1$ y $g(1) = \pi$, pero el valor del límite cuando x tiende a 1, no depende del valor de la función en 1. Ya que $g(x) = x + 1$ para $x \neq 1$, tenemos

$$\lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2$$

Note que los valores de las funciones en los ejemplos 3 y 4 son idénticos, excepto cuando $x = 1$ (véase la figura 2) y tienen el mismo límite cuando x tiende a 1.

V EJEMPLO 5 Evalúe $\lim_{h \to 0} \dfrac{(3+h)^2 - 9}{h}$.

SOLUCIÓN Si definimos

$$F(h) = \frac{(3+h)^2 - 9}{h},$$

entonces, como en el ejemplo 3, no podemos calcular $\lim_{h \to 0} F(h)$ poniendo $h = 0$, ya que $F(0)$ es indefinida. Pero si simplificamos algebraicamente a $F(h)$, encontramos que

$$F(h) = \frac{(9 + 6h + h^2) - 9}{h} = \frac{6h + h^2}{h} = 6 + h$$

(Recuerde que consideramos sólo $h \neq 0$ cuando hacemos que h tienda a 0.) Así

$$\lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - 9}{h} = \lim_{h \to 0} (6 + h) = 6$$

EJEMPLO 6 Encuentre $\lim_{t \to 0} \dfrac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$.

SOLUCIÓN No podemos aplicar inmediatamente la ley del cociente, ya que el límite del denominador es 0. Aquí, el álgebra preliminar consiste en la racionalización del numerador:

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} &= \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} \cdot \frac{\sqrt{t^2 + 9} + 3}{\sqrt{t^2 + 9} + 3} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{(t^2 + 9) - 9}{t^2\left(\sqrt{t^2 + 9} + 3\right)} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{t^2}{t^2\left(\sqrt{t^2 + 9} + 3\right)} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{1}{\sqrt{t^2 + 9} + 3} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\lim_{t \to 0} (t^2 + 9)} + 3} \\
&= \frac{1}{3 + 3} = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Este cálculo confirma la conjetura que hicimos en el ejemplo 2 de la sección 2.2.

Algunos límites se calculan mejor encontrando primero los límites por la izquierda y por la derecha. El siguiente teorema es un recordatorio de lo que se descubrió en la sección 2.2. Decimos que los límites por los dos lados existen si y sólo si ambos límites existen y son iguales.

1 Teorema $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si y sólo si $\lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x)$

Cuando calculamos límites laterales, utilizamos el hecho de que las leyes de los límites también se cumplen para límites de este tipo.

EJEMPLO 7 Demuestre que $\lim_{x \to 0} |x| = 0$.

SOLUCIÓN Recuerde que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

El resultado del ejemplo 7 parece verosímil viendo la figura 3.

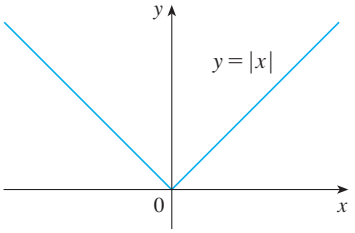


FIGURA 3

Dado que $|x| = x$ para $x > 0$, tenemos

$$\lim_{x \to 0^+} |x| = \lim_{x \to 0^+} x = 0$$

Para $x < 0$ tenemos $|x| = -x$ así que

$$\lim_{x \to 0^-} |x| = \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0$$

Por tanto, por el teorema 1

$$\lim_{x \to 0} |x| = 0$$

V EJEMPLO 8 Demuestre que $\lim_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x}$ no existe.

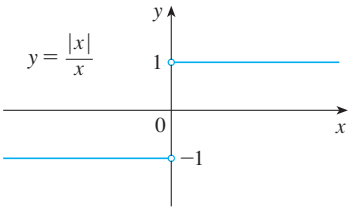


FIGURA 4

SOLUCIÓN

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1$$

Puesto que los límites por la izquierda y por la derecha son diferentes, se sigue, del teorema 1, que $\lim_{x \to 0} |x|/x$ no existe. La gráfica de la función $f(x) = |x|/x$ se muestra en la figura 4 y exhibe la coincidencia con los límites laterales que encontró.

EJEMPLO 9 Si

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x - 4} & \text{si } x > 4 \\ 8 - 2x & \text{si } x < 4 \end{cases}$$

determine si $\lim_{x \to 4} f(x)$ existe.

Se muestra en el ejemplo 3 de la sección 2.4 que el $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

SOLUCIÓN Ya que $f(x) = \sqrt{x - 4}$ para $x > 4$, tenemos

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} \sqrt{x - 4} = \sqrt{4 - 4} = 0$$

Dado que $f(x) = 8 - 2x$ para $x < 4$, tenemos

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^-} (8 - 2x) = 8 - 2 \cdot 4 = 0$$

Los límites por la izquierda y por la derecha son iguales. Así que el límite existe y

$$\lim_{x \to 4} f(x) = 0$$

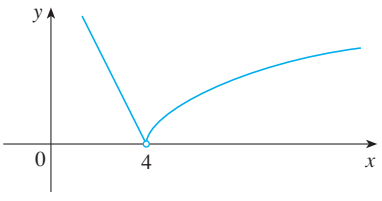


FIGURA 5

La gráfica de f se muestra en la figura 5.

Otras notaciones para $[\![x]\!]$ son $[x]$ y $\lfloor x \rfloor$. En ocasiones, la función entero mayor se llama *función piso*.

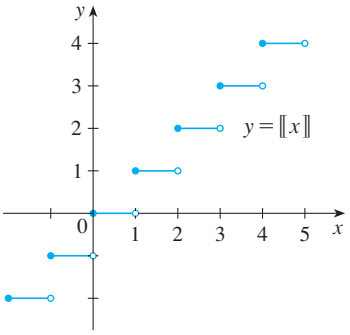


FIGURA 6
Función entero mayor

EJEMPLO 10 La **función entero mayor** está definida por $[\![x]\!]$ = el mayor entero que es menor que o igual a x. (Por ejemplo, $[\![4]\!] = 4$, $[\![4.8]\!] = 4$, $[\![\pi]\!] = 3$, $[\![\sqrt{2}\,]\!] = 1$, $[\![-\frac{1}{2}]\!] = -1$.) Demuestre que $\lim_{x \to 3} [\![x]\!]$ no existe.

SOLUCIÓN La gráfica de la función entero mayor se ilustra en la figura 6. Dado que $[\![x]\!] = 3$ para $3 \leqslant x < 4$, tenemos

$$\lim_{x \to 3^+} [\![x]\!] = \lim_{x \to 3^+} 3 = 3$$

Así que $[\![x]\!] = 2$ para $2 \leqslant x < 3$, tenemos

$$\lim_{x \to 3^-} [\![x]\!] = \lim_{x \to 3^-} 2 = 2$$

Ya que estos límites laterales no son iguales, $\lim_{x \to 3} [\![x]\!]$ no existe por el teorema 1.

Los dos teoremas siguientes dan dos propiedades adicionales para los límites. Sus demostraciones se encuentran en el apéndice F.

2 Teorema Si $f(x) \leqslant g(x)$ cuando x tiende a a (excepto posiblemente en $x = a$) y los límites de f y g existen cuando x tiende a a, entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) \leqslant \lim_{x \to a} g(x)$$

3 El teorema de la compresión Si $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ cuando x tiende a a (excepto posiblemente en a) y

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$$

entonces

$$\lim_{x \to a} g(x) = L$$

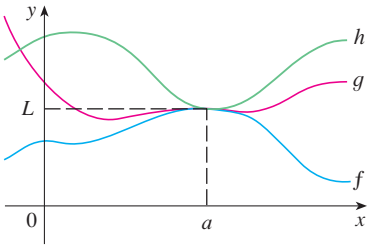


FIGURA 7

El teorema de la compresión, llamado a veces teorema del sándwich o del apretón, se ilustra en la figura 7. Se dice que si $g(x)$ se comprime entre $f(x)$ y $h(x)$ cerca de a, y si f y h tienen el mismo límite L en a, entonces g es forzada a tener el mismo límite L en a.

V EJEMPLO 11 Demuestre que $\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} = 0$.

SOLUCIÓN Primero note que **no podemos** utilizar

$$\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0} x^2 \cdot \lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

ya que $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(1/x)$ no existe (véase el ejemplo 4 en la sección 2.2).

En su lugar aplicamos el teorema de la compresión, así que tenemos que encontrar una función f menor que $g(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ y una función h mayor que g tal que $f(x)$ y $h(x)$ tiendan a 0.

Para hacer esto, utilizamos lo que sabemos de la función seno. Ya que el seno de cualquier número está entre -1 y 1, podemos afirmar que

$$-1 \leqslant \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leqslant 1 \qquad \boxed{4}$$

Cualquier desigualdad permanece válida cuando la multiplicamos por un número positivo. Sabemos que $x^2 \geqslant 0$ para toda x, así que multiplicando cada lado de la desigualdad en $\boxed{4}$ por x^2, obtenemos

$$-x^2 \leqslant x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leqslant x^2$$

como se ilustra en la figura 8. Sabemos que

$$\lim_{x \to 0} x^2 = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 0} (-x^2) = 0$$

Tomando $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ y $h(x) = x^2$ del teorema de la compresión, obtenemos

$$\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$$

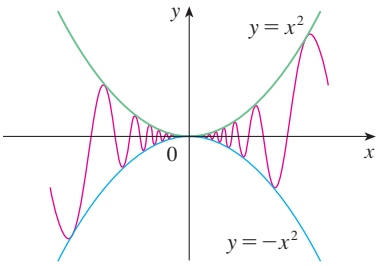


FIGURA 8
$y = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$

2.3 Ejercicios

1. Dado que

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4 \qquad \lim_{x \to 2} g(x) = -2 \qquad \lim_{x \to 2} h(x) = 0$$

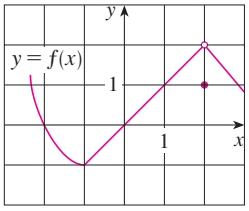
encuentre los límites que existen. Si el límite no existe, explique por qué.

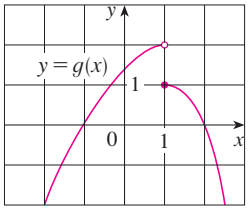
a) $\lim_{x \to 2} [f(x) + 5g(x)]$ b) $\lim_{x \to 2} [g(x)]^3$

c) $\lim_{x \to 2} \sqrt{f(x)}$ d) $\lim_{x \to 2} \dfrac{3f(x)}{g(x)}$

e) $\lim_{x \to 2} \dfrac{g(x)}{h(x)}$ f) $\lim_{x \to 2} \dfrac{g(x)h(x)}{f(x)}$

2. Las gráficas de f y g están dadas. Utilícelas para evaluar cada límite si es que existe. Si el límite no existe, explique por qué.





a) $\lim_{x \to 2} [f(x) + g(x)]$ b) $\lim_{x \to 1} [f(x) + g(x)]$

c) $\lim_{x \to 0} [f(x)g(x)]$ d) $\lim_{x \to -1} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

e) $\lim_{x \to 2} [x^3 f(x)]$ f) $\lim_{x \to 1} \sqrt{3 + f(x)}$

3-9 Evalúe el límite y justifique cada paso indicando las leyes de los límites apropiadas.

3. $\lim_{x \to 3} (5x^3 - 3x^2 + x - 6)$

4. $\lim_{x \to -1} (x^4 - 3x)(x^2 + 5x + 3)$

5. $\lim_{t \to -2} \dfrac{t^4 - 2}{2t^2 - 3t + 2}$

6. $\lim_{u \to -2} \sqrt{u^4 + 3u + 6}$

7. $\lim_{x \to 8} \left(1 + \sqrt[3]{x}\right)(2 - 6x^2 + x^3)$

8. $\lim_{t \to 2} \left(\dfrac{t^2 - 2}{t^3 - 3t + 5} \right)^2$

9. $\lim_{x \to 2} \sqrt{\dfrac{2x^2 + 1}{3x - 2}}$

10. a) ¿Cuál es el error en la siguiente ecuación?

$$\frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = x + 3$$

b) Considerando el inciso a), explique por qué la ecuación

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 3)$$

es correcta.

11-32 Evalúe cada uno de los siguientes límites si éstos existen.

11. $\lim_{x\to 5} \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x - 5}$

12. $\lim_{x\to 4} \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x - 4}$

13. $\lim_{x\to 5} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 5}$

14. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x - 4}$

15. $\lim_{t\to -3} \dfrac{t^2 - 9}{2t^2 + 7t + 3}$

16. $\lim_{x\to -1} \dfrac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 2x - 3}$

17. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(-5 + h)^2 - 25}{h}$

18. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(2 + h)^3 - 8}{h}$

19. $\lim_{x\to -2} \dfrac{x + 2}{x^3 + 8}$

20. $\lim_{t\to 1} \dfrac{t^4 - 1}{t^3 - 1}$

21. $\lim_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{9 + h} - 3}{h}$

22. $\lim_{u\to 2} \dfrac{\sqrt{4u + 1} - 3}{u - 2}$

23. $\lim_{x\to -4} \dfrac{\frac{1}{4} + \frac{1}{x}}{4 + x}$

24. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^4 - 1}$

25. $\lim_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{1 + t} - \sqrt{1 - t}}{t}$

26. $\lim_{t\to 0} \left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t^2 + t} \right)$

27. $\lim_{x\to 16} \dfrac{4 - \sqrt{x}}{16x - x^2}$

28. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(3 + h)^{-1} - 3^{-1}}{h}$

29. $\lim_{t\to 0} \left(\dfrac{1}{t\sqrt{1 + t}} - \dfrac{1}{t} \right)$

30. $\lim_{x\to -4} \dfrac{\sqrt{x^2 + 9} - 5}{x + 4}$

31. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(x + h)^3 - x^3}{h}$

32. $\lim_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{(x + h)^2} - \dfrac{1}{x^2}}{h}$

33. a) Estime el valor de

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1 + 3x} - 1}$$

graficando la función $f(x) = x/\left(\sqrt{1 + 3x} - 1\right)$.

b) Haga una tabla de valores de $f(x)$ para x cercana a 0 e intuya el valor del límite.

c) Utilice las leyes de los límites para probar que su conjetura es correcta.

34. a) Utilice la gráfica de

$$f(x) = \frac{\sqrt{3 + x} - \sqrt{3}}{x}$$

para estimar el valor de $\lim_{x\to 0} f(x)$ con dos decimales.

b) Utilice una tabla de valores de $f(x)$ para estimar el límite con cuatro decimales.

c) Utilice las leyes de los límites para encontrar el valor exacto del límite.

35. Utilice el teorema de la compresión para demostrar que $\lim_{x\to 0} (x^2 \cos 20\pi x) = 0$. Ilustre las funciones $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^2 \cos 20\pi x$ y $h(x) = x^2$ graficando en la misma pantalla.

36. Utilice el teorema de la compresión para demostrar que

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x^3 + x^2}\ \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} = 0$$

evidenciándolo con las gráficas de las funciones f, g y h (en la notación del teorema de la compresión), en la misma pantalla.

37. Si $4x - 9 \leq f(x) \leq x^2 - 4x + 7$ para $x \geq 0$, encuentre $\lim_{x\to 4} f(x)$.

38. Si $2x \leq g(x) \leq x^4 - x^2 + 2$ para toda x, evalúe $\lim_{x\to 1} g(x)$.

39. Demuestre que $\lim_{x\to 0} x^4 \cos \dfrac{2}{x} = 0$.

40. Demuestre que $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\, e^{\operatorname{sen}(\pi/x)} = 0$.

41-46 Encuentre cada uno de los siguientes límites si éstos existen. Si el límite no existe, explique por qué.

41. $\lim_{x\to 3} \left(2x + |x - 3|\right)$

42. $\lim_{x\to -6} \dfrac{2x + 12}{|x + 6|}$

43. $\lim_{x\to 0.5^-} \dfrac{2x - 1}{|2x^3 - x^2|}$

44. $\lim_{x\to -2} \dfrac{2 - |x|}{2 + x}$

45. $\lim_{x\to 0^-} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{|x|} \right)$

46. $\lim_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{|x|} \right)$

47. La *función signo*, denotada por sgn, está definida por

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) Trace la gráfica de esta función

b) Encuentre cada uno de los siguientes límites o explique por qué no existen.

i) $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sgn} x$ ii) $\lim_{x\to 0^-} \operatorname{sgn} x$

iii) $\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn} x$ iv) $\lim_{x\to 0} |\operatorname{sgn} x|$

48. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 1 \\ (x - 2)^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

a) Encuentre $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ y $\lim_{x\to 1^+} f(x)$.

b) ¿Existe $\lim_{x\to 1} f(x)$?

c) Trace la gráfica de f.

49. Sea $g(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{|x - 2|}$.

a) Encuentre

i) $\lim_{x\to 2^+} g(x)$ ii) $\lim_{x\to 2^-} g(x)$

b) ¿Existe $\lim_{x\to 2} g(x)$?

c) Trace la gráfica de g.

50. Sea

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ 2 - x^2 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ x - 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a) Evalúe cada una de los siguientes límites si es que existen.

i) $\lim_{x \to 1^-} g(x)$ ii) $\lim_{x \to 1} g(x)$ iii) $g(1)$

iv) $\lim_{x \to 2^-} g(x)$ v) $\lim_{x \to 2^+} g(x)$ vi) $\lim_{x \to 2} g(x)$

b) Trace la gráfica de g.

51. a) Si el símbolo $[\![\ ]\!]$ denota la función entero mayor definida en el ejemplo 10, evalúe:

i) $\lim_{x \to -2^+} [\![x]\!]$ ii) $\lim_{x \to -2} [\![x]\!]$ iii) $\lim_{x \to -2.4} [\![x]\!]$

b) Si n es un entero, evalúe

i) $\lim_{x \to n^-} [\![x]\!]$ ii) $\lim_{x \to n^+} [\![x]\!]$

c) ¿Para qué valores de a $\lim_{x \to a} [\![x]\!]$ existe?

52. Sea $f(x) = [\![\cos x]\!]$, $-\pi \leq x \leq \pi$.

a) Trace la gráfica de f.

b) Evalúe cada uno de los siguientes límites si existen.

i) $\lim_{x \to 0} f(x)$ ii) $\lim_{x \to (\pi/2)^-} f(x)$

iii) $\lim_{x \to (\pi/2)^+} f(x)$ iv) $\lim_{x \to \pi/2} f(x)$

c) ¿Para qué valores de a $\lim_{x \to a} f(x)$ existe?

53. Si $f(x) = [\![x]\!] + [\![-x]\!]$, muestre que $\lim_{x \to 2} f(x)$ existe, pero no es igual a $f(2)$.

54. En la teoría de la relatividad, la fórmula de Contracción de Lorentz

$$L = L_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

expresa la longitud L de un objeto como función de su velocidad v respecto a un observador, donde L_0 es la longitud del objeto en reposo y c es la rapidez de la luz. Encuentre $\lim_{v \to c^-} L$ e interprete el resultado. ¿Por qué es necesario el límite lateral por la izquierda?

55. Si p es una función polinomial, demuestre que $\lim_{x \to a} p(x) = p(a)$.

56. Si r es una función racional, utilice el ejercicio 55 para demostrar que $\lim_{x \to a} r(x) = r(a)$ para todo número a en el dominio de r.

57. Si $\lim_{x \to 1} \dfrac{f(x) - 8}{x - 1} = 10$, encuentre $\lim_{x \to 1} f(x)$.

58. Si $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x^2} = 5$, encuentre cada uno de los siguientes límites.

a) $\lim_{x \to 0} f(x)$ b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}$

59. Si

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

demuestre que $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

60. Demuestre por medio de un ejemplo que $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)]$ puede existir, aunque no existan $\lim_{x \to a} f(x)$ ni $\lim_{x \to a} g(x)$.

61. Demuestre por medio de un ejemplo que $\lim_{x \to a} [f(x)\,g(x)]$ puede existir, aunque no existan $\lim_{x \to a} f(x)$ ni $\lim_{x \to a} g(x)$.

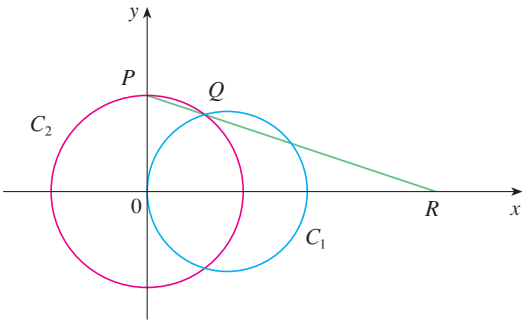
62. Evalúe $\lim_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{6 - x} - 2}{\sqrt{3 - x} - 1}$

63. ¿Existe un número a tal que

$$\lim_{x \to -2} \frac{3x^2 + ax + a + 3}{x^2 + x - 2}$$

exista? Si es así, encuentre el valor de a y el valor del límite.

64. La figura muestra una circunferencia C_1 con ecuación $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ y una circunferencia C_2 que se contrae con radio r y centro en el origen. P es el punto $(0, r)$, Q es el punto superior de intersección de las dos circunferencias, y R es el punto de intersección de la recta PQ y el eje de las x. ¿Qué pasa con R cuando C_2 se contrae, esto es, cuando $r \to 0^+$?



2.4 La definición precisa de límite

La definición intuitiva de límite dada en la sección 2.2 es inadecuada para algunos propósitos porque frases como "x es muy cercano a 2" y "$f(x)$ se acerca más y más a L" son muy vagas. A fin de demostrar convincentemente que

$$\lim_{x \to 0} \left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10\,000} \right) = 0.0001 \qquad \text{o} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

debemos precisar la definición de límite.

Para motivar la definición precisa de límite, consideremos la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \neq 3 \\ 6 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

Intuitivamente, es claro que cuando x está cerca de 3, pero $x \neq 3$, entonces $f(x)$ está cerca de 5, así que $\lim_{x \to 3} f(x) = 5$

Para obtener una información más detallada de cómo varía $f(x)$ cuando x está cerca de 3, nos preguntamos:

¿Qué tan cerca tiene que estar x de 3 para que $f(x)$ difiera de 5 en menos de 0.1?

En esta situación es tradicional utilizar la letra griega δ (delta).

La distancia de x a 3 es $|x - 3|$, y la distancia de $f(x)$ a 5 es $|f(x) - 5|$, así que nuestro problema es encontrar un número δ tal que

$$|f(x) - 5| < 0.1 \quad \text{si} \quad |x - 3| < \delta \quad \text{con } x \neq 3$$

Si $|x - 3| > 0$, entonces $x \neq 3$, así que una formulación equivalente de nuestro problema es encontrar un número δ tal que

$$|f(x) - 5| < 0.1 \quad \text{si} \quad 0 < |x - 3| < \delta$$

Note que si $0 < |x - 3| < (0.1)/2 = 0.05$, entonces

$$|f(x) - 5| = |(2x - 1) - 5| = |2x - 6| = 2|x - 3| < 2(0.05) = 0.1$$

esto es, $$|f(x) - 5| < 0.1 \quad \text{si} \quad 0 < |x - 3| < 0.05$$

Así, una respuesta al problema está dada por $\delta = 0.05$; esto es, si x está dentro de una distancia de 0.05 de 3, entonces $f(x)$ deberá estar dentro de una distancia de 0.1 de 5.

Si cambiamos el número 0.1 en nuestro problema por el número menor 0.01, entonces, utilizando el mismo método, encontramos que $f(x)$ diferirá de 5 por menos de 0.01 siempre que x difiera de 3 por menos de $(0.01)/2 = 0.005$:

$$|f(x) - 5| < 0.01 \quad \text{si} \quad 0 < |x - 3| < 0.005$$

Del mismo modo,

$$|f(x) - 5| < 0.001 \quad \text{si} \quad 0 < |x - 3| < 0.0005$$

Los números 0.1, 0.01 y 0.001 que hemos considerado son las *tolerancias de error* que nos podemos permitir. Para que 5 sea el límite exacto de $f(x)$ cuando x tiende a 3, debemos no sólo poder hacer la diferencia entre $f(x)$ y 5 por debajo de cada uno de estos tres números; también debemos ser capaces de estar por debajo de *cualquier* número positivo. Así, por el mismo razonamiento, ¡claro que es posible! Si escribimos ε (la letra griega épsilon) para un número positivo arbitrario, entonces encontramos al igual que antes

$$\boxed{1} \qquad |f(x) - 5| < \varepsilon \quad \text{si} \quad 0 < |x - 3| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$$

Esta es una forma precisa de decir que $f(x)$ está cerca de 5 cuando x se acerca a 3 porque $\boxed{1}$ establece que podemos hacer que los valores de $f(x)$ queden dentro de una distancia arbitraria ε a partir de 5, tomando los valores de x dentro de una distancia $\varepsilon/2$ de 3 (con $x \neq 3$).

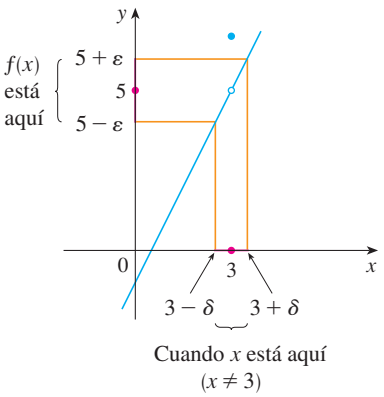


FIGURA 1

Note que 1 puede reescribirse como sigue:

$$\text{si} \quad 3 - \delta < x < 3 + \delta \quad (x \neq 3) \quad \text{entonces} \quad 5 - \varepsilon < f(x) < 5 + \varepsilon$$

y se ilustra en la figura 1. Tomando los valores de x ($\neq 3$) en el intervalo $(3 - \delta, 3 + \delta)$, podemos lograr que los valores de $f(x)$ estén en el intervalo $(5 - \varepsilon, 5 + \varepsilon)$.

Utilizando 1 como un modelo, damos una definición precisa de límite.

2 Definición Sea f la función definida sobre algún intervalo abierto que contiene el número a, excepto posiblemente en a misma. Entonces, decimos que el **límite de $f(x)$ cuando x tiene a a es L**, y lo expresamos como

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

si para cada número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Puesto que $|x - a|$ es la distancia de x a a y $|f(x) - L|$ es la distancia de $f(x)$ a L, y como ε puede ser arbitrariamente pequeña, la definición de límite puede expresarse en palabras como sigue:

> $\lim_{x \to a} f(x) = L$ significa que la distancia entre $f(x)$ y L puede hacerse arbitrariamente pequeña, tomando la distancia de x a a suficientemente pequeña (pero no 0).

Alternamente,

> $\lim_{x \to a} f(x) = L$ significa que los valores de $f(x)$ pueden hacerse tan cercanos a L como queramos, tomando x lo suficientemente cerca de a (pero no igual a a).

También podemos reformular la definición 2 en términos de intervalos, observando que la desigualdad $|x - a| < \delta$ es equivalente a $-\delta < x - a < \delta$, que puede escribirse como $a - \delta < x < a + \delta$. Además, $0 < |x - a|$ es verdadera si y sólo si $x - a \neq 0$; esto es, $x \neq a$. Del mismo modo, la desigualdad $|f(x) - L| < \varepsilon$ es equivalente al par de desigualdades $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$. Por tanto, en términos de intervalos, la definición 2 puede establecerse como sigue:

> $\lim_{x \to a} f(x) = L$ significa que para toda $\varepsilon > 0$ (sin importar que tan pequeña sea ε), podemos encontrar una $\delta > 0$ tal que si x está dentro del intervalo abierto $(a - \delta, a + \delta)$ y $x \neq a$, entonces $f(x)$ está dentro del intervalo abierto $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

Geométricamente, esta afirmación se interpreta representando una función por un diagrama de flechas, como en la figura 2, donde f hace corresponder un subconjunto de $\mathbb{R}$ con otro subconjunto de $\mathbb{R}$.

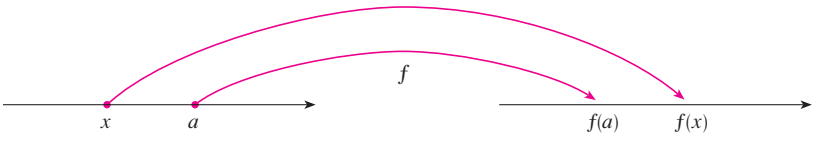


FIGURA 2

La definición de límite señala que si cualquier intervalo pequeño $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ está dado alrededor de L, entonces podemos encontrar un intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ alrededor de a tal que f hace corresponder todos los puntos de $(a - \delta, a + \delta)$ (excepto posiblemente en a) con los puntos del intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. (Véase la figura 3.)

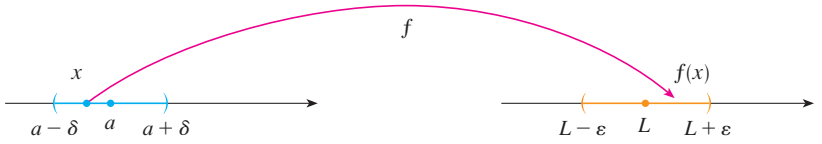


FIGURA 3

Geométricamente, puede darse otra interpretación de límite en términos de la gráfica de una función. Si $\varepsilon > 0$ está dada, entonces dibujamos las recta horizontales $y = L + \varepsilon$, $y = L - \varepsilon$ y la gráfica de f (véase la figura 4). Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$, entonces podemos encontrar un número $\delta > 0$ tal que si restringimos a x en el intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ y tomamos $x \neq a$, entonces la curva $y = f(x)$ está entre las rectas $y = L - \varepsilon$ y $y = L + \varepsilon$ (véase la figura 5). Puede usted ver que si se encuentra tal δ, entonces cualquier δ más pequeña también funcionará.

Es importante percatarse de que el proceso ilustrado en las figuras 4 y 5 debe funcionar para *todo* número positivo ε, sin importar qué tan pequeño se elija. En la figura 6 se ilustra que si se elige un ε más pequeño, entonces podría requerirse una δ más pequeña.

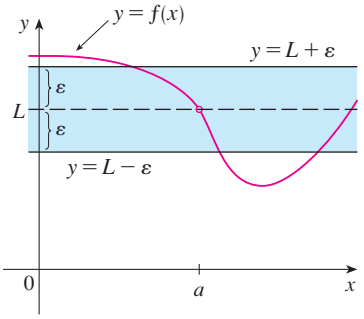


FIGURA 4

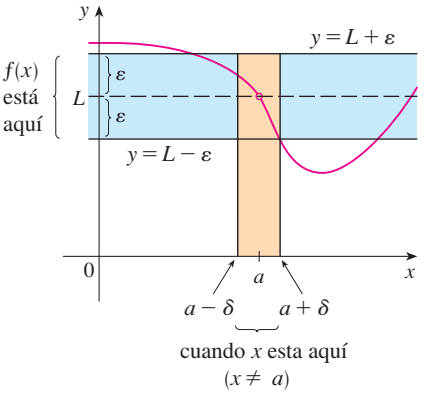


FIGURA 5

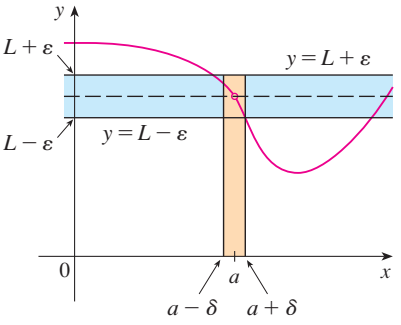


FIGURA 6

EJEMPLO 1 Utilice una gráfica para encontrar un número δ tal que

$$\text{si} \quad |x - 1| < \delta \quad \text{entonces} \quad |(x^3 - 5x + 6) - 2| < 0.2$$

En otras palabras, encuentre un número δ que corresponda a $\varepsilon = 0.2$ en la definición de límite para la función $f(x) = x^3 - 5x + 6$ con $a = 1$ y $L = 2$.

SOLUCIÓN La gráfica de f se muestra en la figura 7; estamos interesados en la región cerca del punto (1, 2). Note que podemos reescribir la desigualdad

$$|(x^3 - 5x + 6) - 2| < 0.2$$

como

$$1.8 < x^3 - 5x + 6 < 2.2$$

Así que necesitamos determinar los valores de x para los cuales la curva $y = x^3 - 5x + 6$ está entre las rectas horizontales $y = 1.8$ y $y = 2.2$. Por eso, graficamos las curvas $y = x^3 - 5x + 6$, $y = 1.8$ y $y = 2.2$ cerca del punto (1, 2) en la figura 8. Después utilizamos el cursor para estimar que la coordenada x del punto de intersección de la recta $y = 2.2$ y la curva $y = x^3 - 5x + 6$ está cerca de 0.911. Del mismo modo, $y = x^3 - 5x + 6$ interseca la recta $y = 1.8$ cuando $x \approx 1.124$. Así, al redondear para estar seguro, podemos decir que

$$\text{si} \quad 0.92 < x < 1.12, \quad \text{entonces} \quad 1.8 < x^3 - 5x + 6 < 2.2$$

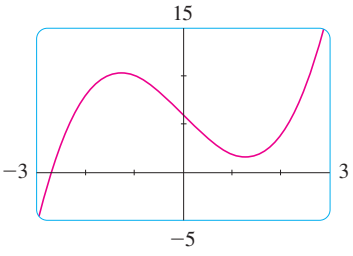


FIGURA 7

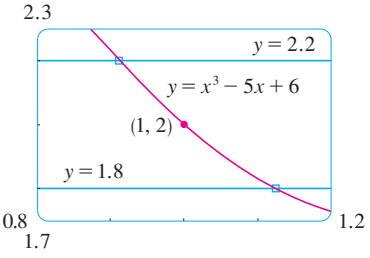


FIGURA 8

Este intervalo (0.92, 1.12) no es simétrico respecto a $x = 1$. La distancia de $x = 1$ al punto extremo izquierdo es $1 - 0.92 = 0.08$, y la distancia al punto extremo derecho es 0.12. Es posible elegir δ más pequeña que estos números, esto es, $\delta = 0.08$. Entonces, podemos reescribir nuestras desigualdades en términos de distancias como sigue:

$$\text{si} \quad |x - 1| < 0.08 \quad \text{entonces,} \quad |(x^3 - 5x + 6) - 2| < 0.2$$

Esto dice justamente que manteniendo a x dentro del 0.08 de 1, mantendremos $f(x)$ dentro del 0.2 de 2.

Aunque seleccionamos $\delta = 0.08$, cualquier valor positivo más pequeño de δ habría funcionado.

El procedimiento gráfico en el ejemplo 1 proporciona una ilustración de la definición para $\varepsilon = 0.2$, pero no *demuestra* que el límite es igual a 2. Una demostración tiene que proporcionar una δ para *toda* ε.

Para pulir los enunciados de límite sería útil pensar en la definición de límite como un desafío. Primero lo retan con un número ε. Después, debe usted ser capaz de producir una δ adecuada. Debe ser capaz de hacerlo para *toda* $\varepsilon > 0$, no sólo para una ε en particular.

TEC En Module 2.4/2.6 puede explorar la definición precisa de límite, gráfica y numéricamente.

Imagine una contienda entre dos personas A y B, en la que usted es B. La persona A estipula que debe aproximarse al número fijo L por medio de valores de $f(x)$ dentro de un grado de exactitud ε, (digamos 0.01). Por tanto, la persona B (usted) responde determinando un número δ tal que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$. Después, A podría exigir aún más y desafiarlo con un valor más pequeño de ε, (digamos 0.0001). Una vez más, usted tiene que responder encontrando una correspondiente δ. Usualmente, a medida que el valor de ε es más pequeño, es menor el correspondiente valor de δ. Si usted siempre gana, sin importar qué tan pequeño haga A a ε, entonces $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

V EJEMPLO 2 Pruebe que $\lim_{x \to 3} (4x - 5) = 7$.

SOLUCIÓN

1. *Análisis preliminar del problema* (*intuir un valor para* δ). Sea ε un número positivo dado. Queremos encontrar un número δ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - 3| < \delta, \quad \text{entonces} \quad |(4x - 5) - 7| < \varepsilon$$

Pero $|(4x - 5) - 7| = |4x - 12| = |4(x - 3)| = 4|x - 3|$. Por tanto, queremos una δ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - 3| < \delta, \quad \text{entonces} \quad 4|x - 3| < \varepsilon$$

esto es,

$$\text{si} \quad 0 < |x - 3| < \delta, \quad \text{entonces} \quad |x - 3| < \frac{\varepsilon}{4}$$

Esto sugiere que debe elegir $\delta = \varepsilon/4$.

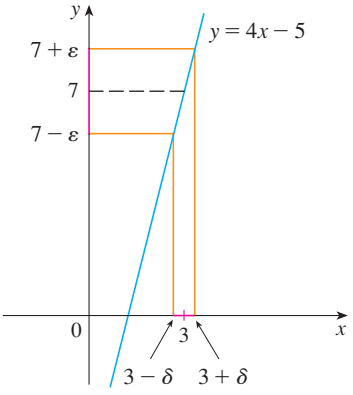


FIGURA 9

2. *Demostración* (*demostrar que esta* δ *funciona*). Dado $\varepsilon > 0$, elegir $\delta = \varepsilon/4$. Si $0 < |x - 3| < \delta$, entonces

$$|(4x - 5) - 7| = |4x - 12| = 4|x - 3| < 4\delta = 4\left(\frac{\varepsilon}{4}\right) = \varepsilon$$

Así

$$\text{si} \quad 0 < |x - 3| < \delta, \quad \text{entonces} \quad |(4x - 5) - 7| < \varepsilon$$

Por tanto, por la definición de límite,

$$\lim_{x \to 3} (4x - 5) = 7$$

Este ejemplo se ilustra en la figura 9.

Note que en la solución del ejemplo 2 hay dos etapas: intuir y verificar. Efectuamos un análisis preliminar que posibilitó suponer un valor de δ. Pero luego, en la segunda etapa, tuvimos que regresar y verificar en forma cuidadosa y lógica que dimos una opinión correcta. Este procedimiento es característico de gran parte de las matemáticas. Algunas veces necesita hacerse primero una conjetura inteligente respecto a la respuesta de un problema y luego demostrar que la suposición es correcta.

Las definiciones intuitivas de límites laterales que se presentan en la sección 2.2 pueden reformularse como se señala a continuación.

3 Definición de límite por la izquierda

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad a - \delta < x < a, \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

4 Definición de límite por la derecha

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

si para todo número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad a < x < a + \delta, \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Observe que la definición 3 es la misma que la definición 2, excepto que x está restringida a quedar en la mitad *izquierda* $(a - \delta, a)$ del intervalo $(a - \delta, a + \delta)$. En la definición 4, x está restringida a estar en la mitad *derecha* $(a, a + \delta)$ del intervalo $(a - \delta, a + \delta)$.

V EJEMPLO 3 Utilice la definición 4 para demostrar que $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

SOLUCIÓN

1. *Intuya un valor para* δ. Sea ε un número positivo dado. Aquí $a = 0$ y $L = 0$, así que queremos encontrar un número δ tal que

$$\text{si} \quad 0 < x < \delta, \quad \text{entonces} \quad |\sqrt{x} - 0| < \varepsilon$$

es decir,

$$\text{si} \quad 0 < x < \delta, \quad \text{entonces} \quad \sqrt{x} < \varepsilon$$

o, elevando al cuadrado ambos lados de la desigualdad $\sqrt{x} < \varepsilon$, obtenemos

$$\text{si} \quad 0 < x < \delta, \quad \text{entonces} \quad x < \varepsilon^2$$

Esto sugiere que debemos elegir $\delta = \varepsilon^2$.

2. *Demuestre que este* δ *funciona*. Dado $\varepsilon > 0$, sea $\delta = \varepsilon^2$. Si $0 < x < \delta$, entonces

$$\sqrt{x} < \sqrt{\delta} = \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$$

Así que,

$$|\sqrt{x} - 0| < \varepsilon$$

De acuerdo con la definición 4, esto demuestra que $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

Cauchy y los límites

Después de la invención del Cálculo en el siglo XVII, siguió un periodo de fecundo desarrollo de la materia en el siglo XVIII. Matemáticos como las familias Bernoulli y Euler estaban ansiosos por aprovechar el potencial del Cálculo, por lo que exploraron audazmente las consecuencias de esta nueva y maravillosa teoría matemática, sin preocuparse demasiado por si sus demostraciones eran completamente correctas.

El siglo XIX, por el contrario, fue la Edad del Rigor en matemáticas. Hubo un movimiento para volver a los fundamentos del tema, para proporcionar cuidadosas definiciones y rigurosas demostraciones. A la vanguardia de este movimiento estaba el matemático francés Augustin Louis Cauchy (1789-1857), que comenzó como ingeniero militar antes de convertirse en profesor de matemáticas en París. Cauchy tomo la idea de Newton de límite, que mantuvo viva el matemático francés Jean d'Alembert, en el siglo XVIII, haciéndola más precisa. Su definición de un límite reza así: "Cuando los valores sucesivos atribuidos a una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo para terminar diferendo por tan poco como uno quiera, esto se llama el límite de los otros". Pero cuando Cauchy aplicaba esta definición en ejemplos y demostraciones, utilizaba a menudo desigualdades delta-epsilon similares a las de esta sección. Una demostración típica de Cauchy comienza con: "designar por δ y ε dos números muy pequeños; ..." Utilizaba ε debido a la correspondencia entre épsilon y la palabra francesa *erreur*. Posteriormente, el matemático alemán Karl Weierstrass (1815-1897) estableció la definición de límite exactamente como en nuestra definición 2.

EJEMPLO 4 Demuestre que $\lim_{x \to 3} x^2 = 9$.

SOLUCIÓN

1. *Intuya un valor para* δ. Sea $\varepsilon > 0$ un valor dado. Tenemos que encontrar un número $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - 3| < \delta, \quad \text{entonces} \quad |x^2 - 9| < \varepsilon$$

Para relacionar $|x^2 - 9|$ con $|x - 3|$ escribimos $|x^2 - 9| = |(x + 3)(x - 3)|$. Entonces queremos que

$$\text{si} \quad 0 < |x - 3| < \delta, \quad \text{entonces} \quad |x + 3||x - 3| < \varepsilon$$

Note que si podemos encontrar un número constante positivo C tal que $|x + 3| < C$, entonces

$$|x + 3||x - 3| < C|x - 3|$$

y podemos hacer $C|x - 3| < \varepsilon$ tomando $|x - 3| < \varepsilon/C = \delta$.

Podemos encontrar tal número C si restringimos x a algún intervalo centrado en 3. De hecho, estamos interesados sólo en valores de x cercanos a 3, así que es razonable suponer que x está dentro de una distancia de 1 de 3, esto es, $|x - 3| < 1$. Entonces $2 < x < 4$, así que $5 < x + 3 < 7$. Así, tenemos que $|x + 3| < 7$, y, por tanto, $C = 7$ es una elección adecuada para la constante.

Pero ahora hay dos restricciones sobre $|x - 3|$, haciendo

$$|x - 3| < 1 \qquad \text{y} \qquad |x - 3| < \frac{\varepsilon}{C} = \frac{\varepsilon}{7}$$

Para asegurarnos de que ambas desigualdades se satisfacen, tomamos δ como el menor de los dos números 1 y $\varepsilon/7$. La notación para esto es $\delta = \text{mín}\{1, \varepsilon/7\}$.

2. *Demuestre que esta* δ *funciona*. Dado $\varepsilon > 0$, sea $\delta = \text{mín}\{1, \varepsilon/7\}$. Si $0 < |x - 3| < \delta$, entonces $|x - 3| < 1 \Rightarrow 2 < x < 4 \Rightarrow |x + 3| < 7$ (como en el inciso 1). También tenemos $|x - 3| < \varepsilon/7$, así que

$$|x^2 - 9| = |x + 3||x - 3| < 7 \cdot \frac{\varepsilon}{7} = \varepsilon$$

Esto demuestra que $\lim_{x \to 3} x^2 = 9$. ■

Como se ilustra en el ejemplo 4, no siempre es fácil demostrar que los enunciados de límite son verdaderos utilizando la definición ε-δ. De hecho, si tenemos una función más complicada como $f(x) = (6x^2 - 8x + 9)/(2x^2 - 1)$, una demostración requeriría una gran cantidad de ingenio. Afortunadamente, esto es innecesario porque las leyes de los límites establecidas en la sección 2.3 pueden demostrarse utilizando la definición 2, y luego los límites de funciones complicadas pueden determinarse en forma rigurosa a partir de estas leyes, sin recurrir directamente a la definición.

Por ejemplo, para demostrar la ley de la suma: si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$ ambas existen, entonces

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = L + M$$

Las leyes restantes se demuestran en los ejercicios y en el apéndice F.

DEMOSTRACIÓN DE LA LEY DE LA SUMA Sea $\varepsilon > 0$. Debemos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta, \quad \text{entonces} \quad |f(x) + g(x) - (L + M)| < \varepsilon$$

Desigualdad del triángulo:

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|$$

(Véase el apéndice A.)

Utilizando la desigualdad del triángulo podemos escribir

$$\boxed{5} \qquad |f(x) + g(x) - (L + M)| = |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \leqslant |f(x) - L| + |g(x) - M|$$

Llevamos a cabo $|f(x) + g(x) - (L + M)|$ menor que ε haciendo cada uno de los términos $|f(x) - L|$ y $|g(x) - M|$ menores que $\varepsilon/2$.

Dado que $\varepsilon/2 > 0$ y $\lim_{x \to a} f(x) = L$, existe un número $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta_1, \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Del mismo modo, puesto que $\lim_{x \to a} g(x) = M$, existe un número $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta_2, \quad \text{entonces} \quad |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sea $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$, los más pequeños de los números δ_1 y δ_2. Note que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta, \quad \text{entonces} \quad 0 < |x - a| < \delta_1 \quad \text{y} \quad 0 < |x - a| < \delta_2$$

Así que $$|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{y} \qquad |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Por tanto, por $\boxed{5}$,

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| \leqslant |f(x) - L| + |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Para resumir,

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta, \quad \text{entonces} \quad |f(x) + g(x) - (L + M)| < \varepsilon$$

Así, por la definición de límite,

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = L + M$$

Límites infinitos

Los límites infinitos también pueden definirse de manera precisa. La siguiente es una versión exacta de la definición 4 de la sección 2.2.

6 Definición Sea f una función definida sobre algún intervalo abierto que contiene al número a, excepto posiblemente en a misma. Entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

significa que para todo número positivo M existe un número positivo δ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta, \quad \text{entonces} \quad f(x) > M$$

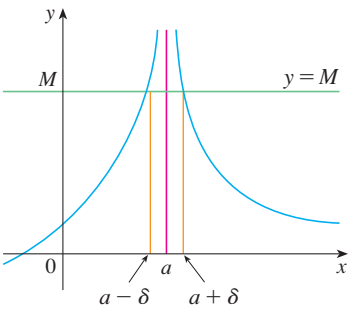


FIGURA 10

Esto dice que los valores de $f(x)$ pueden hacerse arbitrariamente grandes (más grandes que cualquier número M dado), tomando x suficientemente cercano a a (dentro de una distancia δ, donde δ depende de M, pero con $x \neq a$). Una ilustración geométrica se muestra en la figura 10.

Dada cualquier recta horizontal $y = M$, podemos encontrar un número $\delta > 0$ tal que si restringimos x al intervalo $(a - \delta, a + \delta)$, pero $x \neq a$, entonces la curva $y = f(x)$ está por debajo de la recta $y = M$. Usted puede ver que si se elige un valor muy grande de M, entonces se puede requerir un δ muy pequeño.

V EJEMPLO 5 Utilice la definición 6, para demostrar que $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = \infty$

SOLUCIÓN Sea M un número positivo dado. Queremos encontrar un número δ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x| < \delta, \quad \text{entonces} \quad 1/x^2 > M$$

Pero $$\frac{1}{x^2} > M \iff x^2 < \frac{1}{M} \iff |x| < \frac{1}{\sqrt{M}}$$

Así que si elegimos $\delta = 1/\sqrt{M}$ y $0 < |x| < \delta = 1/\sqrt{M}$, entonces $1/x^2 > M$. Esto muestra que $1/x^2 \to \infty$ conforme $x \to 0$.

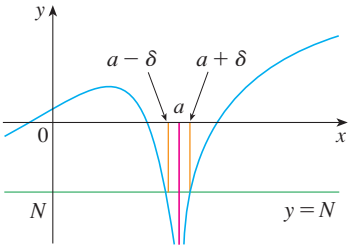


FIGURA 11

Del mismo modo, la siguiente es una versión precisa de la definición 5 de la sección 2.2. Esto se ilustra en la figura 11.

7 Definición Sea f una función definida sobre algún intervalo abierto que contiene el número a, excepto posiblemente en a misma. Entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

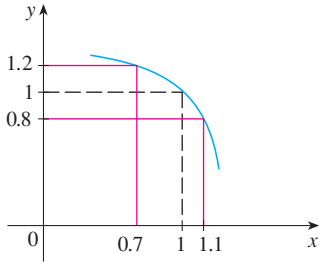
significa que para todo número negativo N existe un número positivo δ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta, \quad \text{entonces} \quad f(x) < N$$

2.4 Ejercicios

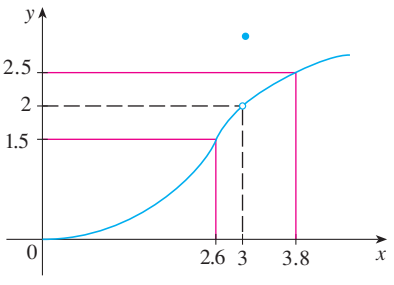
1. Utilice la gráfica de f para encontrar un número δ tal que

$$\text{si} \quad |x - 1| < \delta, \quad \text{entonces} \quad |f(x) - 1| < 0.2$$



2. Utilice la gráfica de f para encontrar un número δ tal que

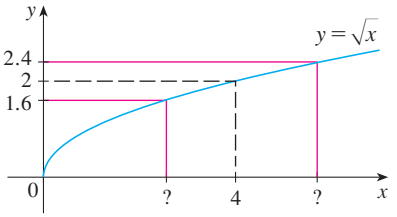
$$\text{si} \quad 0 < |x - 3| < \delta, \quad \text{entonces} \quad |f(x) - 2| < 0.5$$



Se requiere calculadora graficadora o computadora SAC Se requiere sistema algebraico computarizado 1. Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

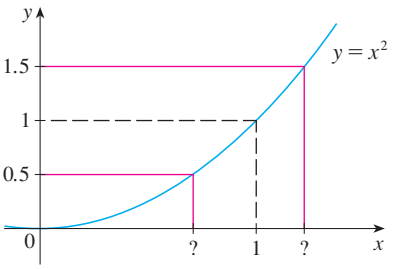
3. Utilice la gráfica dada de $f(x) = \sqrt{x}$ para encontrar un número δ tal que

$$\text{si} \quad |x - 4| < \delta, \quad \text{entonces} \quad |\sqrt{x} - 2| < 0.4$$



4. Utilice la gráfica dada de $f(x) = x^2$ para encontrar un número δ tal que

$$\text{si} \quad |x - 1| < \delta, \quad \text{entonces} \quad |x^2 - 1| < \tfrac{1}{2}$$



5. Utilice una gráfica para encontrar un número δ tal que

$$\text{si} \quad \left|x - \frac{\pi}{4}\right| < \delta, \quad \text{entonces} \quad |\tan x - 1| < 0.2$$

6. Utilice una gráfica para encontrar un número δ tal que

$$\text{si} \quad |x - 1| < \delta \quad \text{entonces} \quad \left|\frac{2x}{x^2 + 4} - 0.4\right| < 0.1$$

7. Para el límite

$$\lim_{x \to 2} (x^3 - 3x + 4) = 6$$

ilustre la definición 2 para encontrar valores de δ que correspondan a $\varepsilon = 0$ y $\varepsilon = 0.1$.

8. Para el límite

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = 2$$

ilustre la definición 2 para encontrar valores de δ que correspondan a $\varepsilon = 0.5$ y $\varepsilon = 0.1$.

9. Dado que $\lim_{x \to \pi/2} \tan^2 x = \infty$, ilustre la definición 6 para encontrar valores de δ que correspondan a a) $M = 1000$ y b) $M = 10\,000$.

10. Utilice una gráfica para encontrar un número δ tal que

$$\text{si} \quad 5 < x < 5 + \delta, \quad \text{entonces} \quad \frac{x^2}{\sqrt{x - 5}} > 100$$

11. Se requiere un tornero para fabricar un disco metálico circular con 1000 cm^2 de área.
a) ¿Qué radio produce tal disco?
b) Si al tornero se le permite una tolerancia de error de ± 5 cm^2 en el área del disco, ¿qué tan cercano al radio ideal del inciso a) debe el tornero mantener el radio?
c) En términos de la definición ε-δ de $\lim_{x \to a} f(x) = L$, ¿Qué es x? ¿Qué es $f(x)$? ¿Qué es a? ¿Qué es L? ¿Qué valor de ε se da? ¿Cuál es el valor correspondiente de δ?

12. Un horno de confección de cristales, se utiliza en la investigación para determinar la mejor manera de fabricar cristales que se usarán en las partes electrónicas de los transbordadores espaciales. Para que el crecimiento de los cristales sea el idóneo, la temperatura se tiene que controlar exactamente ajustando la potencia de entrada. Suponga que la relación se representa con

$$T(w) = 0.1w^2 + 2.155w + 20$$

donde T es la temperatura en grados Celsius y w es la potencia de entrada en watts.
a) ¿Cuánta potencia se requiere para mantener la temperatura a 200°C?
b) Si se permite una variación de temperatura de 200°C ± 1°C, ¿qué intervalo se potencia en watts se permite para la potencia de entrada?
c) De acuerdo con la definición ε-δ de $\lim_{x \to a} f(x) = L$, ¿qué es x? ¿Qué es $f(x)$? ¿Qué es a? ¿Qué es L? ¿Qué valor de ε se da? ¿Cuál es el valor correspondiente de δ?

13. a) Encuentre un número δ tal que si $|x - 2| < \delta$, entonces $|4x - 8| < \varepsilon$, donde $\varepsilon = 0.1$.
b) Repita el inciso a) con $\varepsilon = 0.01$.

14. Dado que $\lim_{x \to 2}(5x - 7) = 3$, ilustre la definición 2 encontrando valores de δ que corresponden a $\varepsilon = 0.1$, $\varepsilon = 0.05$ y $\varepsilon = 0.01$.

15-18 Demuestre cada una de las siguientes proposiciones utilizando la definición ε-δ de límite e ilústrelo con un diagrama como el de la figura 9.

15. $\lim_{x \to 3} (1 + \frac{1}{3}x) = 2$

16. $\lim_{x \to 4} (2x - 5) = 3$

17. $\lim_{x \to -3} (1 - 4x) = 13$

18. $\lim_{x \to -2} (3x + 5) = -1$

19-32 Demuestre cada una de las siguientes proposiciones utilizando la definición ε-δ de límite.

19. $\lim_{x \to 1} \dfrac{2 + 4x}{3} = 2$

20. $\lim_{x \to 10} (3 - \frac{4}{5}x) = -5$

21. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2} = 5$

22. $\lim_{x \to -1.5} \dfrac{9 - 4x^2}{3 + 2x} = 6$

23. $\lim_{x \to a} x = a$

24. $\lim_{x \to a} c = c$

25. $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$

26. $\lim_{x \to 0} x^3 = 0$

27. $\lim_{x \to 0} |x| = 0$

28. $\lim_{x \to -6^+} \sqrt[8]{6 + x} = 0$

29. $\lim_{x \to 2} (x^2 - 4x + 5) = 1$

30. $\lim_{x \to 2} (x^2 + 2x - 7) = 1$

31. $\lim_{x\to -2}(x^2 - 1) = 3$

32. $\lim_{x\to 2} x^3 = 8$

33. Verifique que otra posible elección de δ para mostrar que $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$ en el ejemplo 4 es $\delta = \text{mín}\{2, \varepsilon/8\}$.

34. Verifique con argumentos geométricos que la mayor posible elección de δ para demostrar que $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$ es $\delta = \sqrt{9 + \varepsilon} - 3$.

SAC **35.** a) Para el límite $\lim_{x\to 1}(x^3 + x + 1) = 3$, utilice una gráfica para encontrar un valor de δ que corresponda a $\varepsilon = 0.4$.

b) Utilizando un sistema algebraico computarizado para resolver la ecuación cúbica $x^3 + x + 1 = 3 + \varepsilon$, encuentre el mayor valor posible de δ que funciona para cualquier $\varepsilon > 0$ dado.

c) Ponga $\varepsilon = 0.4$ en su repuesta del inciso b) y compárelo con su respuesta del inciso a).

36. Demuestre que $\lim_{x\to 2} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2}$

37. Demuestre que $\lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ si $a > 0$.

$$\left[\textit{Sugerencia:} \text{ utilice } \left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}.\right]$$

38. Si H es la función de Heaviside definida en el ejemplo 6 en la sección 2.2, demuestre, utilizando la definición 2, que $\lim_{t\to 0} H(t)$ no existe. [*Sugerencia:* utilice una demostración indirecta como sigue. Suponga que el límite es L. Tome $\varepsilon = \frac{1}{2}$ en la definición de límite y trate de llegar a una contradicción.]

39. Si la función f está definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

Demuestre que $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe.

40. Comparando las definiciones 2, 3 y 4, demuestre el teorema 1 de la sección 2.3.

41. ¿Qué tan cerca a -3 tiene que tomar x de manera que

$$\frac{1}{(x + 3)^4} > 10\,000?$$

42. Demuestre, utilizando la definición 6, que $\lim_{x\to -3} \dfrac{1}{(x + 3)^4} = \infty$.

43. Demuestre que $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.

44. Suponga que $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = c$, donde c es un número real. Demuestre cada una de las siguientes proposiciones.

a) $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \infty$

b) $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = \infty$ si $c > 0$

c) $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = -\infty$ si $c < 0$

2.5 Continuidad

En la sección 2.3, hemos visto que el límite de una función cuando x tiende a a, con frecuencia se obtiene simplemente calculando el valor de la función en a. Las funciones con esta propiedad son llamadas *continuas en* $x = a$. Veremos que la definición matemática de continuidad coincide notoriamente con el sentido de *continuidad* que la palabra tiene en el lenguaje cotidiano. (Un proceso continuo es uno que se lleva a cabo gradualmente, sin interrupción o cambio brusco.)

Como se ilustra en la figura 1, si f es continua, entonces los puntos $(x, f(x))$ en la gráfica de f tienden al punto $(a, f(a))$ sobre la gráfica. Así que no existe ninguna brecha en la curva.

1 Definición Una función f es **continua en un número** $x = a$ si

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

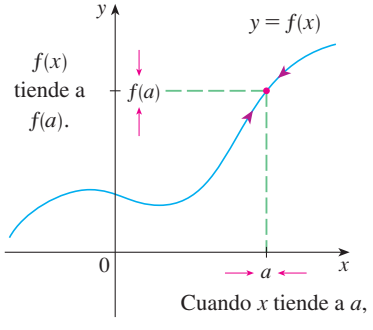


FIGURA 1

Note que la definición 1 requiere implícitamente tres cosas. Si f es continua en a, entonces:

1. $f(a)$ está definida (esto es, a está en el dominio de f)
2. $\lim_{x\to a} f(x)$ existe
3. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

La definición indica que f es continua en a si $f(x)$ tiende a $f(a)$ cuando x tiende a a. Así, una función continua f tiene la propiedad de que un pequeño cambio en x produce sólo un

pequeño cambio en $f(x)$. De hecho, el cambio en $f(x)$ puede mantenerse tan pequeño como se quiera manteniendo el cambio en x suficientemente pequeño.

Si f está definida cerca de a (en otras palabras, f está definida sobre un intervalo abierto que contiene a a, excepto quizás en a), decimos que f es **discontinua en a** (o f tiene una **discontinuidad** en a) si f no es continua en a.

Los fenómenos físicos son generalmente continuos. Por ejemplo, el desplazamiento o la velocidad de un vehículo varían continuamente con el tiempo, como lo hace la estatura de una persona. Pero hay otras situaciones, como la corriente eléctrica, donde ocurren discontinuidades. [Véase el ejemplo 6 en el punto 2.2, donde la función de Heaviside es discontinua en 0 porque $\lim_{t\to 0} H(t)$ no existe.]

Geométricamente, una función continua en cada número de un intervalo puede pensarse como una función cuya gráfica no tiene interrupciones. La gráfica puede dibujarse sin levantar la pluma del papel.

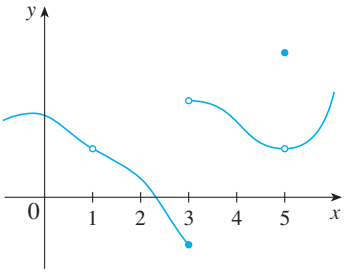


FIGURA 2

EJEMPLO 1 La figura 2 muestra la gráfica de una función f. ¿Para qué valores de $x = a$, f es discontinua? ¿Por qué?

SOLUCIÓN Pareciera que hay una discontinuidad cuando $a = 1$ porque la gráfica tiene una ruptura allí. La razón formal de que f es discontinua en 1 es que $f(1)$ no está definida.

La gráfica también tiene una ruptura cuando $a = 3$, pero la razón para la discontinuidad es diferente. Aquí, $f(3)$ está definida, pero $\lim_{x\to 3} f(x)$ no existe (porque los límites por la izquierda y por la derecha son diferentes), así que f es discontinua en $x = 3$.

¿Qué hay en relación con $a = 5$? Aquí, $f(5)$ está definida y el $\lim_{x\to 5} f(x)$ existe (porque los límites por la izquierda y por la derecha son iguales). Pero

$$\lim_{x\to 5} f(x) \neq f(5)$$

Así que f es discontinua en 5.

Ahora veremos cómo detectar discontinuidades cuando una función está definida por una fórmula.

V EJEMPLO 2 ¿Dónde es discontinua cada una de las siguientes funciones?

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

d) $f(x) = [\![x]\!]$

SOLUCIÓN

a) Note que $f(2)$ no está definida, así que f es discontinua en $x = 2$. Más tarde veremos por qué f es continua en todos los otros números.

b) Aquí $f(0) = 1$ está definida, pero

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$$

no existe. (Véase el ejemplo 8 de la sección 2.2.) Así que f es discontinua en $x = 0$.

c) Aquí $f(2) = 1$ está definida y

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x - 2)(x + 1)}{x - 2} = \lim_{x\to 2} (x + 1) = 3$$

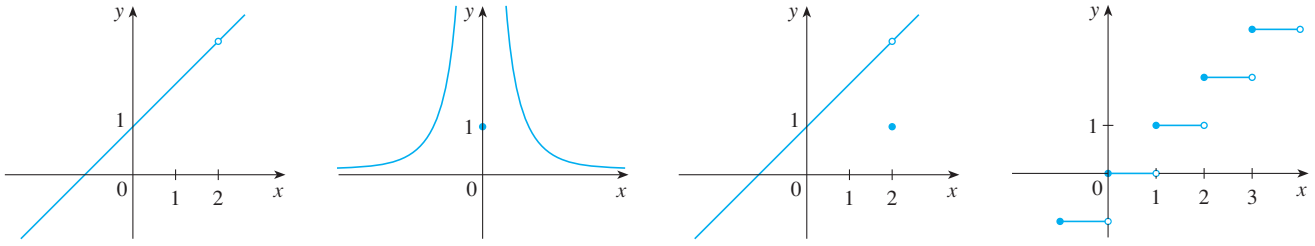
existe. Pero

$$\lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$$

así que f no es continua en $x = 2$.

d) La función entero mayor $f(x) = [\![x]\!]$ tiene discontinuidades en todos los enteros porque $\lim_{x \to n} [\![x]\!]$ no existe si n es un entero. (Véanse el ejemplo 10 y el ejercicio 51 en la sección 2.3).

La figura 3 muestra las gráficas de las funciones del ejemplo 2. En cada caso la gráfica no puede ser dibujada sin levantar el lápiz del papel porque hay un agujero o ruptura o salto en la gráfica. El tipo de discontinuidad ilustrada en los incisos a) y c) se llama **removible** porque podemos remover la discontinuidad redefiniendo f sólo en $x = 2$. [La función $g(x) = x + 1$ es continua.] La discontinuidad en el inciso b) se llama **discontinuidad infinita**. Las discontinuidades en el inciso d) se llaman **discontinuidades de salto** porque la función "salta" de un valor a otro.



a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

d) $f(x) = [\![x]\!]$

FIGURA 3
Gráficas de las funciones del ejemplo 2

2 Definición Una función f es **continua por la derecha de un número $x = a$** si

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

y f es **continua por la izquierda de $x = a$** si

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

EJEMPLO 3 En cada entero n, la función $f(x) = [\![x]\!]$ [Véase la figura 3d)] es continua por la derecha, pero discontinua por la izquierda porque

$$\lim_{x \to n^+} f(x) = \lim_{x \to n^+} [\![x]\!] = n = f(n)$$

pero

$$\lim_{x \to n^-} f(x) = \lim_{x \to n^-} [\![x]\!] = n - 1 \neq f(n)$$

3 Definición Una función f es **continua sobre un intervalo** si es continua en cada número en el intervalo. (Si f está definida sólo en un lado de un punto extremo del intervalo, entendemos por *continua* en el punto extremo, como *continua por la derecha* o *continua por la izquierda*.)

EJEMPLO 4 Demuestre que la función $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ es continua sobre el intervalo $[-1, 1]$.

SOLUCIÓN Si $-1 < a < 1$, entonces utilizando las leyes de los límites, tenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} f(x) &= \lim_{x \to a} \left(1 - \sqrt{1 - x^2}\right) \\
&= 1 - \lim_{x \to a} \sqrt{1 - x^2} && \text{(por las leyes 2 y 7)} \\
&= 1 - \sqrt{\lim_{x \to a} (1 - x^2)} && \text{(por la ley 11)} \\
&= 1 - \sqrt{1 - a^2} && \text{(por las leyes 2, 7 y 9)} \\
&= f(a)
\end{aligned}$$

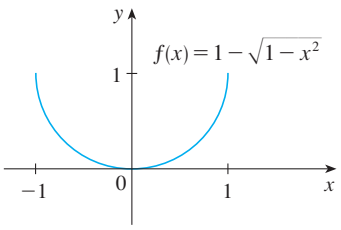


FIGURA 4

Así, por la definición 1, f es continua en $x = a$ si $-1 < a < 1$. Cálculos similares muestran que

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = 1 = f(-1) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 = f(1)$$

de manera que f es continua por la derecha en $x = -1$ y continua por la izquierda en $x = 1$. Por eso, de acuerdo con la definición 3, f es continua en $[-1, 1]$.

La gráfica de f está trazada en la figura 4 y es la mitad inferior de la circunferencia

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1$$

En lugar de aplicar siempre las definiciones 1, 2 y 3 para verificar la continuidad de una función como lo hicimos en el ejemplo 4, a menudo es conveniente utilizar el siguiente teorema, que muestra cómo construir funciones continuas complicadas a partir de otras simples.

4 Teorema Si f y g son continuas en $x = a$ y $x = c$ es una constante, entonces las siguientes funciones son también continuas en $x = a$:

1. $f + g$
2. $f - g$
3. cf
4. fg
5. $\dfrac{f}{g}$ si $g(a) \neq 0$

DEMOSTRACIÓN Cada uno de los cinco incisos de este teorema se sigue de las correspondientes leyes de los límites de la sección 2.3 Por ejemplo, damos la demostración del inciso 1. Ya que f y g son continuas en $x = a$, tenemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = g(a)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} (f + g)(x) &= \lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] \\
&= \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) && \text{(por la ley 1)} \\
&= f(a) + g(a) \\
&= (f + g)(a)
\end{aligned}$$

Esto demuestra que $f + g$ es continua en $x = a$.

Del teorema 4 y la definición 3 se deduce que si f y g son continuas sobre un intervalo, entonces también lo son las funciones $f + g$, $f - g$, cf, fg y f/g (si g no es cero). El siguiente teorema se estableció en la sección 2.3 como la propiedad de sustitución directa.

5 Teorema

a) Cualquier función polinomial es continua en todo su dominio; es decir, es continua sobre $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

b) Cualquier función racional es continua siempre que esté definida; esto es, es continua en su dominio.

DEMOSTRACIÓN

a) Una función polinomial es de la forma

$$P(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

donde $c_0, c_1, \ldots, c_n$ son constantes. Sabemos que

$$\lim_{x \to a} c_0 = c_0 \qquad \text{(por la ley 7)}$$

y

$$\lim_{x \to a} x^m = a^m \qquad m = 1, 2, \ldots, n \qquad \text{(por la ley 9)}$$

Esta ecuación es precisamente la proposición de que la función $f(x) = x^m$ es una función continua. Así, por el inciso 3 del teorema 4, la función $g(x) = cx^m$ es continua. Como P es una suma de funciones de esta forma y una función constante, se sigue del inciso 1 del teorema 4 que P es continua.

b) Una función racional es una de la forma

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P y Q son funciones polinomiales. El dominio de f es $D = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$. Sabemos del inciso a) que P y Q son continuas en todo su dominio. Así, por el inciso 5 del teorema 4, f es continua en todo número en D.

Como una ilustración del teorema 5, observe que el volumen de una esfera varía continuamente con su radio porque la fórmula $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ muestra que V es una función polinomial de r. Del mismo modo, si una pelota se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad de 50 pies/s, entonces la altura de la pelota en pies, t segundos después, está dada por la fórmula $h = 50t - 16t^2$. Otra vez, ésta es una función polinomial, así que la altura es una función continua del tiempo transcurrido.

Saber qué funciones son continuas nos permite evaluar muy rápidamente algunos límites como se ve en el siguiente ejemplo. Compárelo con el ejemplo 2b) de la sección 2.3.

EJEMPLO 5 Encuentre el $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$.

SOLUCIÓN La función

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$$

es racional, así que por el teorema 5 es continua en su dominio, que es $\left\{x \mid x \neq \frac{5}{3}\right\}$.

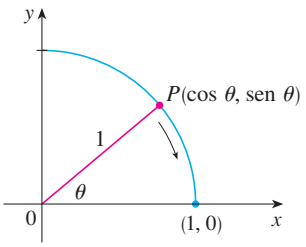


FIGURA 5

Por tanto,

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+2x^2-1}{5-3x}=\lim_{x\to -2}f(x)=f(-2)$$
$$=\frac{(-2)^3+2(-2)^2-1}{5-3(-2)}=-\frac{1}{11}$$

Resulta que la mayor parte de las funciones conocidas son continuas en todo número de su dominio. Por ejemplo, la ley 10 de los límites (página 100) es exactamente la proposición de que las funciones raíz son continuas.

Del aspecto de las gráficas de las funciones seno y el coseno (figura 18 de la sección 1.2), podríamos suponer con toda certeza que son continuas. De acuerdo con la definición de sen θ y cos θ, las coordenadas del punto P de la figura 5 son (cos θ, sen θ). Cuando $\theta \to 0$, vemos que P tiende al punto (1, 0), así que $\theta \to 1$ y sen $\theta \to 0$. Así,

$$\boxed{6}\qquad \lim_{\theta\to 0}\cos\theta=1 \qquad \lim_{\theta\to 0}\operatorname{sen}\theta=0$$

Dado que cos 0 = 1 y sen 0 = 0, las ecuaciones en 6 afirman que las funciones coseno y seno son continuas en 0. Las fórmulas de adición para senos y cosenos pueden ser utilizadas entonces para deducir que estas funciones son continuas para toda x (ejercicios 60 y 61).

Otra manera de establecer los límites en 6 es utilizar el teorema de la compresión con la desigualdad sen $\theta < \theta$ (para $\theta > 0$), que se demostró en la sección 3.3

Del inciso 5 del teorema 4, se deduce que

$$\tan x=\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}$$

es continua, excepto donde cos $x = 0$. Esto sucede cuando x es un número entero impar múltiplo de $\pi/2$, así que $y = \tan x$ tiene infinitas discontinuidades cuando $x = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2$, y así sucesivamente (figura 6).

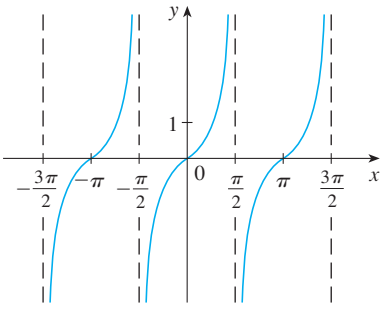


FIGURA 6
$y = \tan x$

La función inversa de cualquier función continua uno a uno también es continua. (Este hecho se comprueba en el apéndice F, pero la intuición geométrica lo hace parecer razonable: la gráfica de f^{-1} se obtiene reflejando la gráfica de f respecto a la recta $y = x$. También, si la gráfica de f no tiene ruptura alguna, tampoco la tiene la gráfica de f^{-1}.) De este modo, las funciones trigonométricas inversas son continuas.

En la sección 1.5 definimos la función exponencial $y = a^x$ de modo que se llenaran los huecos en la gráfica de esta función donde x es racional. En otras palabras, la simple definición de $y = a^x$ la hace una función continua en $\mathbb{R}$. Por tanto, su función inversa $y = \log_a x$ es continua sobre $(0, \infty)$.

En la sección 1.6 se hace un repaso de las funciones trigonométricas inversas.

7 Teorema Los siguientes tipos de funciones son continuas en todo número de sus dominios:

funciones polinomiales — funciones racionales — funciones raíz
funciones trigonométricas — funciones trigonométricas inversas
funciones exponenciales — funciones logarítmicas

EJEMPLO 6 ¿En dónde es continua la función $f(x)=\dfrac{\ln x+\tan^{-1}x}{x^2-1}$?

SOLUCIÓN Por el teorema 7 sabemos que la función $y = \ln x$ es continua para $x > 0$ y $y = \tan^{-1}x$ es continua sobre $\mathbb{R}$. Así, por el inciso 1 del teorema 4, $y = \ln x + \tan^{-1}x$ es continua sobre $(0, \infty)$. El denominador, $y = x^2 - 1$, es una función polinomial, de modo que

es continua para toda x. Por tanto, por el inciso 5 del teorema 4, f es continua en todos los números positivos x, excepto donde $x^2 - 1 = 0$. Por ende, f es continua sobre los intervalos $(0, 1)$ y $(1, \infty)$.

EJEMPLO 7 Evalúe $\lim_{x \to \pi} \dfrac{\operatorname{sen} x}{2 + \cos x}$.

SOLUCIÓN El teorema 7 nos dice que $y = \operatorname{sen} x$ es continua. La función en el denominador, $y = 2 + \cos x$, es la suma de dos funciones continuas y en consecuencia es continua. Note que esta función jamás es cero porque $\cos x \geqslant -1$ para toda x y también $2 + \cos x > 0$ para toda x. Así, el cociente

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{2 + \cos x}$$

es continuo para toda x. Por tanto, mediante la definición de función continua,

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\operatorname{sen} x}{2 + \cos x} = \lim_{x \to \pi} f(x) = f(\pi) = \frac{\operatorname{sen} \pi}{2 + \cos \pi} = \frac{0}{2 - 1} = 0$$

Otra manera de combinar las funciones continuas f y g para obtener una nueva función continua es formar la función compuesta $f \circ g$. Este hecho es una consecuencia del siguiente teorema.

Este teorema expresa que puede moverse un símbolo de límite a través de un símbolo de función si la función es continua y el límite existe. En otras palabras, puede invertirse el orden de estos dos símbolos.

8 Teorema Si f es continua en b, y $\lim_{x \to a} g(x) = b$, entonces $\lim_{x \to a} f\big(g(x)\big) = f(b)$. En otras palabras,

$$\lim_{x \to a} f\big(g(x)\big) = f\Big(\lim_{x \to a} g(x)\Big)$$

Intuitivamente, el teorema 8 es razonable porque si x está cerca de a, entonces $g(x)$ está cerca de b, y como f es continua en b, si $g(x)$ está cerca de b, entonces $f(g(x))$ está cerca de $f(b)$. En el apéndice F se proporciona una demostración del teorema 8.

EJEMPLO 8 Evalúe $\lim_{x \to 1} \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}\right)$.

SOLUCIÓN Ya que arcsen es una función continua, aplicamos el teorema 8:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 1} \operatorname{arcsen}\left(\frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}\right) &= \operatorname{arcsen}\left(\lim_{x \to 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}\right) \\
&= \operatorname{arcsen}\left(\lim_{x \to 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})}\right) \\
&= \operatorname{arcsen}\left(\lim_{x \to 1} \frac{1}{1 + \sqrt{x}}\right) \\
&= \operatorname{arcsen} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

Aplicamos el teorema 8 en el caso especial donde $f(x) = \sqrt[n]{x}$, donde n es un entero positivo. Entonces

$$f\big(g(x)\big) = \sqrt[n]{g(x)}$$

y $$f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} g(x)}$$

Si sustituimos estas expresiones en el teorema 8 obtenemos

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{g(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} g(x)}$$

con lo que queda demostrada la ley 11 de los límites. (Suponiendo que las raíces existen.)

9 Teorema Si g es continua en $x = a$ y f es continua en $g(a)$, entonces la función compuesta $f \circ g$ dada por $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$ es continua en $x = a$.

A menudo, este teorema se expresa de manera informal diciendo: "una función continua de una función continua es una función continua".

DEMOSTRACIÓN Como g es continua en $x = a$, tenemos

$$\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$$

Puesto que f es continua en $b = g(a)$, podemos aplicar el teorema 8 para obtener

$$\lim_{x\to a} f\big(g(x)\big) = f\big(g(a)\big)$$

que es precisamente la proposición de que la función $h(x) = f\big(g(x)\big)$ es continua en $x = a$; es decir, $f \circ g$ es continua en $x = a$.

V EJEMPLO 9 ¿En dónde son continuas las siguientes funciones?

a) $h(x) = \operatorname{sen}(x^2)$ b) $F(x) = \ln(1 + \cos x)$

SOLUCIÓN

a) Tenemos $h(x) = f\big(g(x)\big)$, donde

$$g(x) = x^2 \qquad \text{y} \qquad f(x) = \operatorname{sen} x$$

Ahora g es continua sobre $\mathbb{R}$ puesto que es una función polinomial, y f también es continua para toda x. Por consiguiente, $h = f \circ g$ es continua sobre $\mathbb{R}$ por el teorema 9.

b) Con base en el teorema 7, sabemos que $f(x) = \ln x$ es continua y $g(x) = 1 + \cos x$ es continua (porque tanto $y = 1$ como $y = \cos x$ son continuas). Por tanto, del teorema 9, $F(x) = f(g(x))$ es continua siempre que esté definida. Ahora bien, $\ln(1 + \cos x)$ está definida cuando $1 + \cos x > 0$. De este modo, no está definido cuando $\cos x = -1$, y esto sucede cuando $x = \pm\pi, \pm 3\pi, \ldots$ Así, F tiene discontinuidades cuando x es un múltiplo impar de π y es continua sobre los intervalos entre estos valores (véase la figura 7).

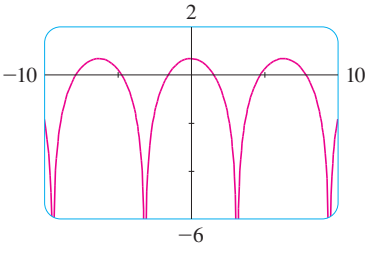


FIGURA 7
$y = \ln(1 + \cos x)$

Una propiedad importante de las funciones continuas se expresa con el siguiente teorema, cuya demostración se encuentra en libros más avanzados de cálculo.

10 Teorema del valor intermedio Suponga que f es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$ y sea N cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, donde $f(a) \neq f(b)$. Entonces existe un número c en (a, b) tal que $f(c) = N$.

El teorema del valor intermedio establece que una función continua toma todos los valores intermedios entre los valores de la función $f(a)$ y $f(b)$. Este hecho se ilustra en la figura 8. Observe que el valor N puede tomarse una vez [como en la parte a)] o más de una vez [como en la parte b)].

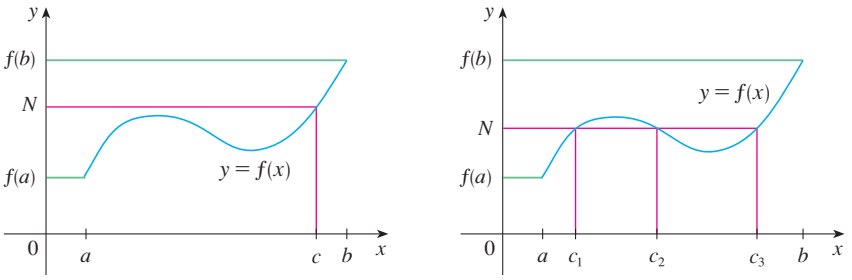


FIGURA 8 a) b)

Si piensa en una función continua como en una función cuya gráfica no tiene huecos o rupturas, es fácil creer que el teorema del valor intermedio es verdadero. En términos geométricos, señala que si se da cualquier recta horizontal $y = N$ entre $y = f(a)$ y $y = f(b)$, como en la figura 9, entonces la gráfica de f no puede saltar la recta: debe intersecar $y = N$ en alguna parte.

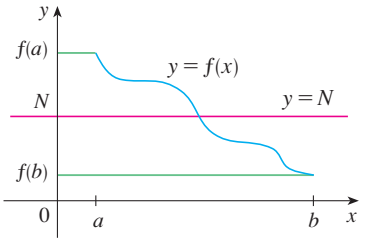


FIGURA 9

Es importante que la función f del teorema 10 sea continua. En general, el teorema del valor intermedio no se cumple para las funciones discontinuas (véase el ejercicio 48).

Un uso del teorema del valor intermedio es en la búsqueda de las raíces de ecuaciones, como en el ejemplo siguiente.

V EJEMPLO 10 Demuestre que existe una raíz de la ecuación

$$4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$$

entre 1 y 2.

SOLUCIÓN Sea $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$. Buscamos una solución de la ecuación dada; es decir, un número c entre 1 y 2 tal que $f(c) = 0$. Por tanto, tomando $a = 1$, $b = 2$ y $N = 0$ en el teorema 10, tenemos

$$f(1) = 4 - 6 + 3 - 2 = -1 < 0$$

y

$$f(2) = 32 - 24 + 6 - 2 = 12 > 0$$

Así, $f(1) < 0 < f(2)$; es decir, $N = 0$ es un número entre $f(1)$ y $f(2)$. Ahora bien, f es continua porque es polinomial, de modo que el teorema del valor intermedio afirma que existe un número c entre 1 y 2 tal que $f(c) = 0$. En otras palabras, la ecuación $4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$ tiene por lo menos una raíz c en el intervalo $(1, 2)$.

De hecho, podemos localizar con mayor precisión una raíz aplicando de nuevo el teorema del valor intermedio. Puesto que

$$f(1.2) = -0.128 < 0 \qquad \text{y} \qquad f(1.3) = 0.548 > 0$$

una raíz debe estar entre 1.2 y 1.3. Una calculadora da, por ensayo y error,

$$f(1.22) = -0.007008 < 0 \qquad \text{y} \qquad f(1.23) = 0.056068 > 0$$

así que la raíz está en el intervalo (1.22, 1.23)

Podemos utilizar una calculadora graficadora o computadora para ilustrar el uso del teorema del valor intermedio en el ejemplo 10. La figura 10 muestra la gráfica de f en el rectángulo de vista $[-1, 3]$ por $[-3, 3]$, y puede usted ver que la gráfica cruza el eje x entre 1 y 2. La figura 11 muestra el resultado de un acercamiento en un rectángulo de vista $[1.2, 1.3]$ por $[-0.2, 0.2]$.

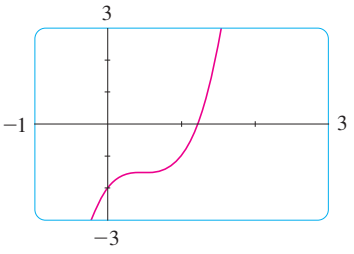


FIGURA 10

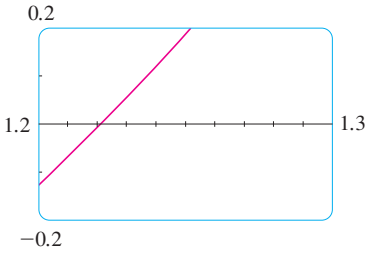


FIGURA 11

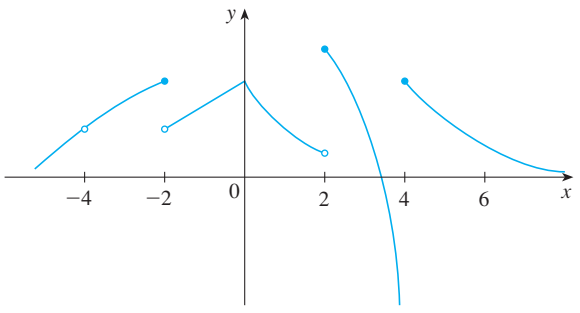
De hecho, el teorema del valor intermedio desempeña un importante papel en el modo en que funcionan estos dispositivos de graficación. Una computadora calcula un número finito de puntos de la gráfica y activa los píxeles que contienen estos puntos calculados. Se supone que la función es continua y toma todos los valores intermedios entre dos puntos consecutivos. La computadora une los píxeles activando aquellos intermedios.

2.5 Ejercicios

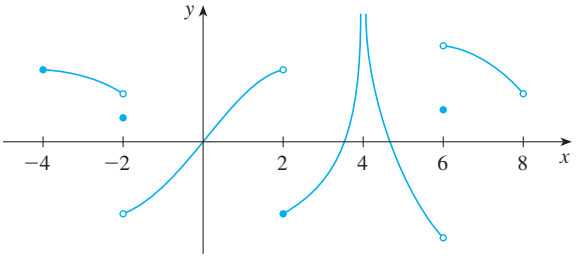
1. Escriba una ecuación que exprese el hecho de que una función f es continua en el número 4.

2. Si f es continua sobre $(-\infty, \infty)$, ¿qué puede decir acerca de su grafica?

3. a) A partir de la grafica de f, establezca el número en el cual f es discontinua y explique por qué.
b) Para cada uno de los números que se obtuvieron en el inciso a), determine si f es continua por la derecha, por la izquierda o por ninguno de los dos lados.



4. A partir de la grafica de g, establezca los intervalos sobre los que g es continua.



5-8 Dibuje la gráfica de una función f que es continua, a excepción de la discontinuidad señalada.

5. Discontinua, pero continua por la derecha, en $x = 2$.

6. Discontinuidades en $x = -1$ y $x = 4$, pero continuas por la izquierda en $x = -1$ y por la derecha en $x = 4$.

7. Discontinuidad removible en $x = 3$, discontinuidad de salto en $x = 5$.

8. Ni por la izquierda ni por la derecha es continua en $x = -2$, continua sólo por la izquierda en $x = 2$.

Se requiere calculadora graficadora o computadora **1.** Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

9. El peaje T que se cobra por conducir en un determinado tramo de una carretera es de \$5, excepto durante las horas pico (entre las 7 y las 10 y entre las 16 y 19 horas) cuando el peaje es de \$7.
   a) Esboce una gráfica de T como una función del tiempo t, medido en horas pasada la medianoche.
   b) Analice las discontinuidades de esta función y su significado para alguien que utiliza la carretera.

10. Explique por qué cada una de las siguientes funciones es continua o discontinua.
   a) La temperatura en una localidad específica como una función del tiempo
   b) La temperatura en un momento determinado como una función de la distancia al oeste de la ciudad de Nueva York
   c) La altitud sobre el nivel del mar como una función de la distancia al oeste de la ciudad de Nueva York
   d) El costo de transportarse en taxi como una función de la distancia de traslado
   e) La corriente en un circuito de iluminación en una habitación como una función del tiempo

11. Si f y g son funciones continuas tales que $g(2) = 6$ y $\lim_{x\to 2}\,[3f(x) + f(x)g(x)] = 36$, encuentre $f(2)$.

12-14 Utilice la definición de continuidad y las propiedades de los limites para demostrar que cada una de las siguientes funciones es continua en el número dado $x = a$.

12. $f(x) = 3x^4 - 5x + \sqrt[3]{x^2 + 4}, \quad a = 2$

13. $f(x) = (x + 2x^3)^4, \quad a = -1$

14. $h(t) = \dfrac{2t - 3t^2}{1 + t^3}, \quad a = 1$

15-16 Utilice la definición de continuidad y las propiedades de los límites para demostrar que cada una de las siguientes funciones es continua sobre el intervalo dado.

15. $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x - 2}, \quad (2, \infty)$

16. $g(x) = 2\sqrt{3 - x}, \quad (-\infty, 3]$

17-22 Explique por qué cada una de las siguientes funciones es discontinua en el número dado $x = a$. Dibuje la gráfica de la función.

17. $f(x) = \dfrac{1}{x + 2} \qquad a = -2$

18. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x + 2} & \text{si } x \neq -2 \\ 1 & \text{si } x = -2 \end{cases} \qquad a = -2$

19. $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} \qquad a = 0$

20. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases} \qquad a = 1$

21. $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 - x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad a = 0$

22. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - 5x - 3}{x - 3} & \text{si } x \neq 3 \\ 6 & \text{si } x = 3 \end{cases} \qquad a = 3$

23-24 ¿Cómo podría "remover la discontinuidad" en cada una de las siguientes funciones? En otras palabras, ¿cómo redefiniría $f(2)$ a fin de que sean continuas en $x = 2$?

23. $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ **24.** $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$

25-32 Utilizando los teoremas 4, 5, 7 y 9, explique por qué cada una de las siguientes funciones es continua en todo número de su dominio. Determine el dominio.

25. $F(x) = \dfrac{2x^2 - x - 1}{x^2 + 1}$ **26.** $G(x) = \dfrac{x^2 + 1}{2x^2 - x - 1}$

27. $Q(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x - 2}}{x^3 - 2}$ **28.** $R(t) = \dfrac{e^{\operatorname{sen} t}}{2 + \cos \pi t}$

29. $A(t) = \operatorname{arcsen}(1 + 2t)$ **30.** $B(x) = \dfrac{\tan x}{\sqrt{4 - x^2}}$

31. $M(x) = \sqrt{1 + \dfrac{1}{x}}$ **32.** $N(r) = \tan^{-1}(1 + e^{-r^2})$

33-34 Identifique las discontinuidades de cada una de las siguientes funciones e ilústrelas con una gráfica.

33. $y = \dfrac{1}{1 + e^{1/x}}$ **34.** $y = \ln(\tan^2 x)$

35-38 Utilice la continuidad para evaluar cada uno de los siguientes límites.

35. $\lim_{x\to 4} \dfrac{5 + \sqrt{x}}{\sqrt{5 + x}}$ **36.** $\lim_{x\to \pi} \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} x)$

37. $\lim_{x\to 1} e^{x^2 - x}$ **38.** $\lim_{x\to 2} \arctan\left(\dfrac{x^2 - 4}{3x^2 - 6x}\right)$

39-40 Demuestre que cada una de las siguientes funciones es continua sobre $(-\infty, \infty)$.

39. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

40. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x < \pi/4 \\ \cos x & \text{si } x \geqslant \pi/4 \end{cases}$

41-43 Encuentre los números en los que f es discontinua. ¿En cuáles de estos números f es continua por la derecha, por la izquierda o por ninguna de las dos? Trace la gráfica de f.

41. $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 2 - x & \text{si } 0 < x \leqslant 2 \\ (x - 2)^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

42. $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 1/x & \text{si } 1 < x < 3 \\ \sqrt{x - 3} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

43. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < 0 \\ e^x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

44. La fuerza gravitacional ejercida por la Tierra sobre una masa unitaria a una distancia r del centro del planeta es

$$F(r) = \begin{cases} \dfrac{GMr}{R^3} & \text{si } r < R \\ \dfrac{GM}{r^2} & \text{si } r \geq R \end{cases}$$

donde M es la masa de la Tierra, R su radio y G la constante gravitacional. ¿Es F una función continua de r?

45. ¿Para qué valor de la constante c la función f es continua sobre $(-\infty, \infty)$?

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 + 2x & \text{si } x < 2 \\ x^3 - cx & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

46. Encuentre los valores de a y b que hacen a f continua para toda x.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x < 2 \\ ax^2 - bx + 3 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 2x - a + b & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

47. ¿Cuál de las funciones f siguientes tiene discontinuidad removible en $x = a$? Si la discontinuidad es removible, determine una función g que concuerde con f para $x \neq a$ y sea continua en $x = a$.

a) $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x - 1}, \quad a = 1$

b) $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - 2x}{x - 2}, \quad a = 2$

c) $f(x) = [\![\operatorname{sen} x]\!], \quad a = \pi$

48. Suponga que una función f es continua sobre $[0, 1]$, excepto en 0.25 y que $f(0) = 1$ y $f(1) = 3$. Sea $N = 2$. Trace dos posibles graficas de f, una en que se muestre que f podría no satisfacer la conclusión del teorema del valor intermedio y la otra que muestre que f todavía podría satisfacer ese teorema (aun cuando no satisfaga la hipótesis).

49. Si $f(x) = x^2 + 10 \operatorname{sen} x$, demuestre que existe un número c tal que $f(c) = 1\,000$.

50. Suponga que f es continua sobre $[1, 5]$ y las únicas soluciones de la ecuación $f(x) = 6$ son $x = 1$ y $x = 4$. Si $f(2) = 8$, explique por qué $f(3) > 6$.

51-54 Utilice el teorema del valor intermedio para demostrar que existe una raíz en cada una de las ecuaciones dadas en el intervalo especificado.

51. $x^4 + x - 3 = 0, \quad (1, 2)$

52. $\sqrt[3]{x} = 1 - x, \quad (0, 1)$

53. $e^x = 3 - 2x, \quad (0, 1)$

54. $\operatorname{sen} x = x^2 - x, \quad (1, 2)$

55-56 a) Demuestre que cada una de las siguientes ecuaciones tiene cuando menos una raíz real.
b) Utilice su calculadora para hallar un intervalo de longitud 0.01 que contenga una raíz.

55. $\cos x = x^3$

56. $\ln x = 3 - 2x$

57-58 a) Demuestre que cada una de las siguientes ecuaciones tiene cuando menos una raíz real.
b) Utilice un dispositivo de graficación para encontrar la raíz correcta hasta tres cifras decimales.

57. $100e^{-x/100} = 0.01x^2$

58. $\arctan x = 1 - x$

59. Demuestre que f es continua en a *si* y sólo si

$$\lim_{h \to 0} f(a + h) = f(a)$$

60. Para demostrar que la función seno es continua necesita demostrar que $\lim_{x \to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$ para todo número real $x = a$. Según el ejercicio 59, una proposición equivalente es que

$$\lim_{h \to 0} \operatorname{sen}(a + h) = \operatorname{sen} a$$

Aplique 6 para demostrar que esto es cierto.

61. Demuestre que la función coseno es continua.

62. a) Demuestre el teorema 4, inciso 3.

b) Demuestre el teorema 4, inciso 5.

63. ¿Para qué valores de x es f continua?

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

64. ¿Para qué valores de x es g continua?

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es racional} \\ x & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

65. ¿Existe un número que es exactamente 1 más que su cubo?

66. Si a y b son números positivos, demuestre que la ecuación

$$\frac{a}{x^3 + 2x^2 - 1} + \frac{b}{x^3 + x - 2} = 0$$

tiene por lo menos una solución en el intervalo $(-1, 1)$.

67. Demuestre que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \operatorname{sen}(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es continua sobre $(-\infty, \infty)$

68. a) Demuestre que la función valor absoluto $F(x) = |x|$ es continua para toda x.
b) Demuestre que si f es una función continua sobre un intervalo, entonces también lo es $|f|$.
c) ¿Lo inverso de la proposición del inciso b) también es verdadero? En otras palabras, si $|f|$ es continua, ¿se deduce que f es continua? De ser así, demuéstrelo. En caso de no ser así, halle un contraejemplo.

69. Un monje tibetano sale del monasterio a las 7:00 y emprende su camino habitual hacia la cima de la montaña, adonde llega a las 19:00. La mañana siguiente inicia el regreso desde la cima por la misma ruta a las 7:00 y llega al monasterio a las 19:00. Mediante el teorema del valor intermedio demuestre que existe un punto a lo largo de la ruta que el monje cruzará exactamente a la misma hora en ambos días.

2.6 Límites al infinito, asíntotas horizontales

En las secciones 2.2 y 2.4 se trataron los límites infinitos y las asíntotas verticales. Ahí aproximamos x a un número y vimos que los valores de y se vuelven arbitrariamente grandes (ya sean positivos o negativos). En esta sección haremos x arbitrariamente grande en magnitud y observaremos qué ocurre con y.

Empecemos por investigar el comportamiento de la función f definida por

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

a medida que x se hace grande. La tabla al margen da valores de esta función con una aproximación de seis decimales, y en la figura 1 se ha trazado la gráfica de f por medio de la computadora.

x	$f(x)$
0	−1
±1	0
±2	0.600000
±3	0.800000
±4	0.882353
±5	0.923077
±10	0.980198
±50	0.999200
±100	0.999800
±1 000	0.999998

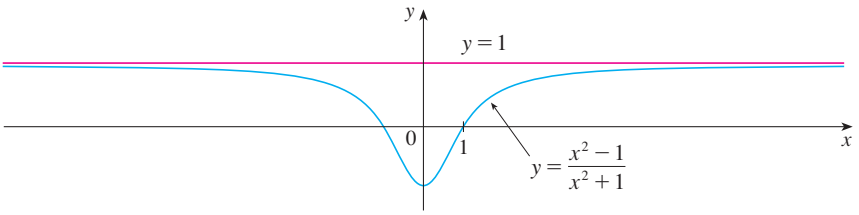


FIGURA 1

Conforme x crece más y más, puede verse que los valores de $f(x)$ se aproximan cada vez más a 1. De hecho, parece que puede acercar cuanto quiera los valores de $f(x)$ a 1 eligiendo una x lo suficientemente grande. Esta situación se expresa en forma simbólica escribiendo

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

En general, utilizamos la notación

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

para indicar que los valores de $f(x)$ tienden a L conforme x se hace más y más grande.

1 Definición Sea f una función definida sobre algún intervalo (a, ∞). Entonces

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

significa que los valores de $f(x)$ pueden aproximarse arbitrariamente a L tanto como desee, eligiendo a x suficientemente grande.

Otra notación para $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ es

$$f(x) \to L \quad \text{conforme} \quad x \to \infty$$

El símbolo ∞ no representa un número. No obstante, la expresión $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ a menudo se lee como

"el límite de $f(x)$ cuando x tiende al infinito, es L"

o "el límite de $f(x)$, cuando x se va al infinito, es L"

o bien "el límite de $f(x)$, cuando x crece sin cota, es L".

El significado de estas frases está dado por la definición 1. Al final de esta sección, se encuentra una definición más precisa, utilizando la definición ε-δ de la sección 2.4.

En la figura 2 se muestran ilustraciones geométricas de la definición 1. Advierta que hay muchas maneras de aproximar la gráfica de f a la recta $y = L$ (la cual se llama *asíntota horizontal*) a medida que usted ve hacia el extremo derecho de cada gráfica.

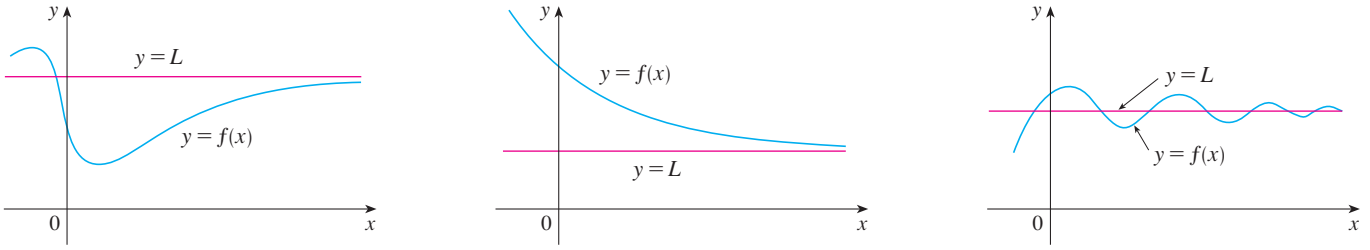


FIGURA 2
Ejemplos que ilustran $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

Si regresa a la figura 1, verá que para valores negativos de x grandes en magnitud, los valores de $f(x)$ están cercanos a 1. Al decrecer x a través de valores negativos sin cota, puede acercar cuando quiera $f(x)$ a 1. Esto se expresa escribiendo

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

La definición general es como sigue.

2 Definición Sea f una función definida sobre algún intervalo $(-\infty, a)$. Entonces

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

significa que los valores de $f(x)$ pueden hacerse arbitrariamente cercanos a L haciendo que x sea negativa y suficientemente grande en magnitud.

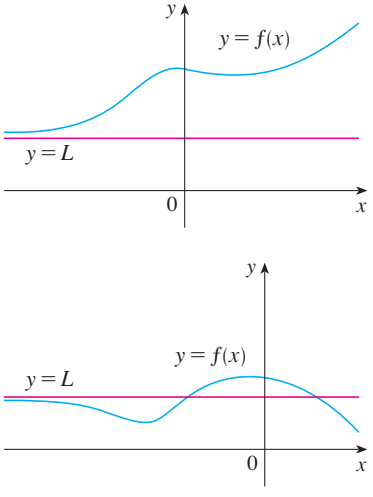


FIGURA 3
Ejemplos que ilustran $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$

Es necesario subrayar que el símbolo $-\infty$ no representa un número, pero la expresión $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ se lee a menudo como

"el límite de $f(x)$, cuando x tiende al infinito negativo o a menos infinito, es L".

La definición 2 se ilustra en la figura 3. Observe que la gráfica tiende a la recta $y = L$ a medida que vemos hacia el extremo izquierdo de cada gráfica.

3 Definición La recta $y = L$ se llama **asíntota horizontal** de la curva $y = f(x)$ si

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \quad \text{o} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

Por ejemplo, la curva que se ilustra en la figura 1 tiene a la recta $y = 1$ como asíntota horizontal porque

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

Un ejemplo de una curva con dos asíntotas horizontales es $y = \tan^{-1}x$. (Véase la figura 4.) En efecto,

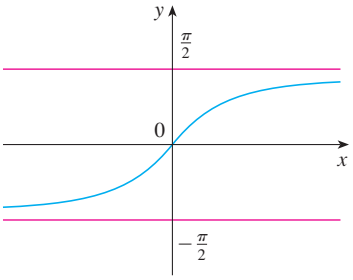


FIGURA 4
$y = \tan^{-1}x$

4

$$\lim_{x \to -\infty} \tan^{-1}x = -\frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x \to \infty} \tan^{-1}x = \frac{\pi}{2}$$

de modo que las rectas $y = -\pi/2$ y $y = \pi/2$ son asíntotas horizontales. (Esto se sigue del hecho de que las rectas $x = \pm\pi/2$ son asíntotas verticales de la gráfica de $y = \tan x$.)

EJEMPLO 1 Encuentre los límites infinitos, los límites en el infinito y las asíntotas para la función f cuya gráfica se muestra en la figura 5.

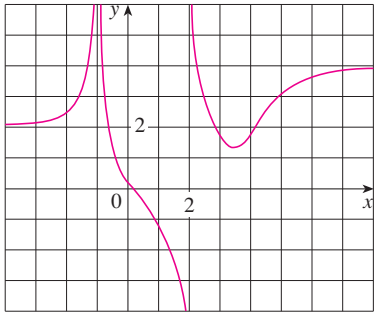


FIGURA 5

SOLUCIÓN Vemos que los valores de $f(x)$ se vuelven grandes cuando $x \to -1$ por ambos lados, así que

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \infty$$

Advierta que $f(x)$ se hace negativo grande en magnitud cuando x tiende a 2 por la izquierda, pero grande positivo cuando x tiende a 2 por la derecha. De este modo,

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 2^+} f(x) = \infty$$

Del comportamiento de estos límites, las dos rectas $x = -1$ y $x = 2$ son asíntotas verticales.

Cuando x es muy grande, parece que $f(x)$ tiende a 4. Pero, a medida que x decrece a través de valores negativos, $f(x)$ tiende a 2. Por tanto,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 4 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$$

Esto significa que tanto $y = 4$ como $y = 2$ son asíntotas horizontales.

EJEMPLO 2 Encuentre $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}$ y $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x}$.

SOLUCIÓN Observe que cuando x es grande, $1/x$ es pequeño. Por ejemplo,

$$\frac{1}{100} = 0.01 \qquad \frac{1}{10\,000} = 0.0001 \qquad \frac{1}{1\,000\,000} = 0.000001$$

De hecho, si elige una x suficientemente grande, puede aproximar $1/x$ a 0 cuanto quiera. Por tanto, según la definición 1, tenemos

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Un razonamiento similar hace ver que cuando x es negativo grande en magnitud, $1/x$ es pequeño negativo; de este modo, también se tiene que

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

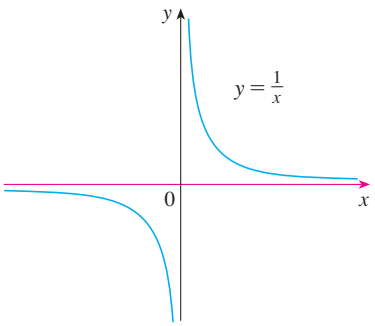


FIGURA 6

$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

Se infiere que la recta $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal de la curva $y = 1/x$ (que es una hipérbola equilátera; véase figura 6).

La mayor parte de las leyes de los límites que se dieron en la sección 2.3 también se cumplen para los límites en el infinito. Puede demostrarse que las *leyes de los límites, cuya lista se da en la sección 2.3 (con la excepción de las leyes 9 y 10), también son válidas si "$x \to a$" se reemplaza con "$x \to \infty$" o con "$x \to -\infty$"*. En particular, si combinamos las leyes 6 y 11 con los resultados del ejemplo 2, obtenemos la siguiente importante regla para el cálculo de límites.

5 Teorema Si $r > 0$ es un número racional, entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

Si $r > 0$ es un número racional tal que x^r está definida para toda x, entonces

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

V EJEMPLO 3 Evalúe

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$$

e indique cuáles propiedades de los límites se utilizaron en cada paso.

SOLUCIÓN Cuando x es muy grande, tanto numerador como denominador son muy grandes, así que no es obvio qué pasa con su cociente. Necesitamos hacer algo de álgebra preliminar.

Para evaluar el límite en el infinito de cualquier función racional, primero dividimos el numerador y el denominador por la potencia mayor de x que hay en el denominador. (Suponemos que $x \neq 0$, ya que estamos interesados sólo en valores muy grandes de x). En este caso, la potencia mayor del denominador es x^2, así que tenemos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{3x^2 - x - 2}{x^2}}{\dfrac{5x^2 + 4x + 1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}}{5 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{\lim_{x\to\infty}\left(3 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}\right)}{\lim_{x\to\infty}\left(5 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)} \qquad \text{(por la ley de los límites 5)}$$

$$= \frac{\lim_{x\to\infty} 3 - \lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} - 2\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2}}{\lim_{x\to\infty} 5 + 4\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} + \lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2}} \qquad \text{(por las leyes 1, 2 y 3)}$$

$$= \frac{3 - 0 - 0}{5 + 0 + 0} \qquad \text{(por la ley 7 y el teorema 5)}$$

$$= \frac{3}{5}$$

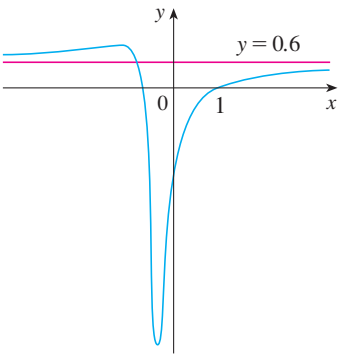


FIGURA 7
$y = \dfrac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$

Un cálculo semejante muestra que el límite cuando $x \to -\infty$ también es $\frac{3}{5}$. En la figura 7 se ilustran los resultados de estos cálculos mostrando cómo la gráfica de la función racional dada se aproxima a la asíntota horizontal $y = \frac{3}{5}$.

EJEMPLO 4 Encuentre la asíntotas horizontales y verticales de la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5}$$

SOLUCIÓN Al dividir entre x tanto el numerador como el denominador y aplicar las propiedades de los límites, tenemos

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{2 + \dfrac{1}{x^2}}}{3 - \dfrac{5}{x}} \qquad (\text{ya que } \sqrt{x^2} = x \text{ para } x > 0)$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{2 + \dfrac{1}{x^2}}}{\lim\limits_{x \to \infty} \left(3 - \dfrac{5}{x}\right)} = \frac{\sqrt{\lim\limits_{x \to \infty} 2 + \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^2}}}{\lim\limits_{x \to \infty} 3 - 5 \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x}} = \frac{\sqrt{2 + 0}}{3 - 5 \cdot 0} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Por tanto, la recta $y = \sqrt{2}/3$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f.

En el cálculo del límite conforme $x \to -\infty$, debemos recordar que para $x < 0$, tenemos $\sqrt{x^2} = |x| = -x$. Así que cuando dividimos el numerador entre x, para $x < 0$ obtenemos

$$\frac{1}{x}\sqrt{2x^2 + 1} = -\frac{1}{\sqrt{x^2}}\sqrt{2x^2 + 1} = -\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}$$

Por tanto,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-\sqrt{2 + \dfrac{1}{x^2}}}{3 - \dfrac{5}{x}} = \frac{-\sqrt{2 + \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2}}}{3 - 5 \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x}} = -\frac{\sqrt{2}}{3}$$

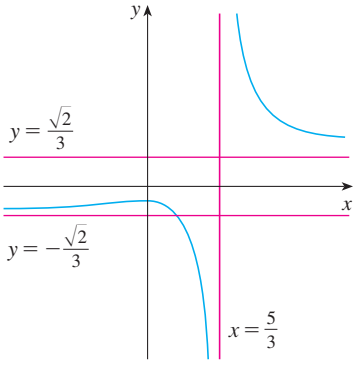


FIGURA 8
$y = \dfrac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5}$

Así que la recta $y = -\sqrt{2}/3$ también es una asíntota horizontal.

Es probable que haya una asíntota vertical cuando el denominador, $3x - 5$, es 0; esto es, cuando $x = \frac{5}{3}$. Si x esta cerca de $\frac{5}{3}$ y $x > \frac{5}{3}$, entonces el denominador está cerca de 0 y $3x - 5$ es positivo. El numerador $\sqrt{2x^2 + 1}$ es siempre positivo, así que $f(x)$ es positivo. Por tanto,

$$\lim_{x \to (5/3)^+} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5} = \infty$$

Si x está cerca de $\frac{5}{3}$, pero $x < \frac{5}{3}$, entonces $3x - 5 < 0$, así que $f(x)$ es negativo grande. Así,

$$\lim_{x \to (5/3)^-} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5} = -\infty$$

La asíntota vertical es $x = \frac{5}{3}$. Las tres asíntotas se muestran en la figura 8.

EJEMPLO 5 Calcule $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

SOLUCIÓN Ya que tanto $\sqrt{x^2+1}$ como x son muy grandes cuando x es grande, es difícil ver qué pasa con su diferencia, así que utilizamos el álgebra para reescribir la función. Primero multiplicamos el numerador y el denominador por el radical conjugado:

Puede considerar que la función dada tiene un denominador igual a 1.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

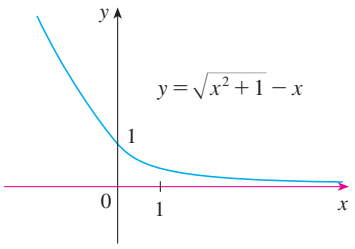


FIGURA 9

Observe que el denominador de esta última expresión $\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$ resulta muy grande cuando $x\to\infty$ (más grande que x). Así que

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$$

La figura 9 ilustra este resultado.

EJEMPLO 6 Evalúe el $\lim_{x\to 2^+}\arctan\left(\frac{1}{x-2}\right)$.

SOLUCIÓN Si hacemos $t=1/(x-2)$, sabemos que $t\to\infty$ cuando $x\to 2^+$. Por tanto, por la segunda ecuación en [4], tenemos

$$\lim_{x\to 2^+}\arctan\left(\frac{1}{x-2}\right)=\lim_{t\to\infty}\arctan t=\frac{\pi}{2}$$

La gráfica de la función exponencial natural $y=e^x$ tiene a la recta $y=0$ (el eje x) como una asíntota horizontal. (Lo mismo es verdadero para cualquier función exponencial con base $a>1$). De hecho, de la gráfica en la figura 10 y la correspondiente tabla de valores, vemos que

6 $$\lim_{x\to-\infty}e^x=0$$

Note que los valores de e^x se aproximan a 0 muy rápidamente.

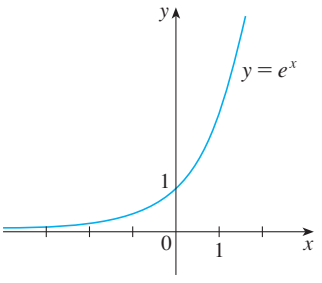


FIGURA 10

x	e^x
0	1.00000
−1	0.36788
−2	0.13534
−3	0.04979
−5	0.00674
−8	0.00034
−10	0.00005

RP La estrategia para resolver los problemas 6 y 7 es *introducir algo extra* (véase la página 75). Aquí, el algo extra, el elemento auxiliar, es la nueva variable t.

V EJEMPLO 7 Evalúe $\lim_{x \to 0^-} e^{1/x}$.

SOLUCIÓN Si hacemos $t = 1/x$, sabemos que $t \to -\infty$ cuando $x \to 0^-$. Por tanto, por 6,

$$\lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = \lim_{t \to -\infty} e^t = 0$$

(Véase el ejercicio 75.)

EJEMPLO 8 Evalúe $\lim_{x \to \infty} \operatorname{sen} x$.

SOLUCIÓN Conforme x crece, los valores de sen x oscilan infinitamente entre 1 y -1, así que no se aproximan a ningún número definido, por lo que $\lim_{x \to \infty} \operatorname{sen} x$ no existe.

Límites infinitos en el infinito

La notación

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

se utiliza para indicar que los valores de $f(x)$ se hacen más grandes cuando x se hace muy grande. Un significado similar está asociado con los siguientes símbolos:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

EJEMPLO 9 Encuentre $\lim_{x \to \infty} x^3$ y $\lim_{x \to -\infty} x^3$.

SOLUCIÓN Cuando x se hace más grande, x^3 también se hace grande. Por ejemplo,

$$10^3 = 1\,000 \qquad 100^3 = 1\,000\,000 \qquad 1\,000^3 = 1\,000\,000\,000$$

De hecho, podemos hacer x^3 tan grande como queramos tomando x suficientemente grande. Por esta razón, podemos escribir

$$\lim_{x \to \infty} x^3 = \infty$$

Del mismo modo, cuando x es muy grande negativo, también lo es x^3. Así que

$$\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$$

Estos límites establecidos también pueden verse en la gráfica de $y = x^3$ en la figura 11.

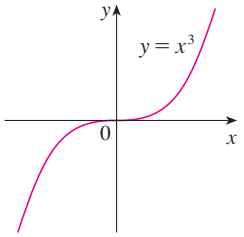


FIGURA 11
$\lim_{x \to \infty} x^3 = \infty$, $\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

En la figura 10 vemos que

$$\lim_{x \to \infty} e^x = \infty$$

pero, como se observa en la figura 12, $y = e^x$ se hace más grande cuando $x \to \infty$, con mucha mayor rapidez que $y = x^3$.

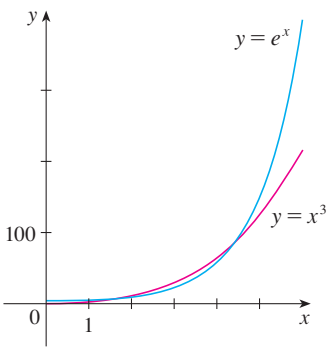


FIGURA 12
e^x es mucho más grande que x^3 cuando x es muy grande.

EJEMPLO 10 Encuentre $\lim_{x \to \infty} (x^2 - x)$.

SOLUCIÓN Sería un **error** escribir

$$\lim_{x \to \infty} (x^2 - x) = \lim_{x \to \infty} x^2 - \lim_{x \to \infty} x = \infty - \infty$$

Las leyes de los límites no pueden aplicarse a límites infinitos porque ∞ no es un número ($\infty - \infty$ no puede definirse). Sin embargo, *podemos* escribir

$$\lim_{x \to \infty} (x^2 - x) = \lim_{x \to \infty} x(x - 1) = \infty$$

debido a que tanto x como $x - 1$ se hacen arbitrariamente grandes y, por tanto, también su producto.

EJEMPLO 11 Encuentre $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + x}{3 - x}$.

SOLUCIÓN Como en el ejemplo 3, dividimos el numerador y el denominador entre la mayor potencia de x en el denominador, que es justamente x:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + x}{3 - x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x + 1}{\dfrac{3}{x} - 1} = -\infty$$

ya que $x + 1 \to \infty$ y $3/x - 1 \to -1$ conforme $x \to \infty$.

El siguiente ejemplo muestra que utilizando límites infinitos al infinito, además de las intersecciones, podemos tener una idea general de la gráfica de una función polinomial sin tener que disponer de un gran número de puntos.

V EJEMPLO 12 Trace la gráfica de $y = (x - 2)^4(x + 1)^3(x - 1)$ encontrando las intersecciones y sus límites cuando $x \to \infty$ y cuando $x \to -\infty$.

SOLUCIÓN La intersección con el eje y es $f(0) = (-2)^4(1)^3(-1) = -16$ y las intersecciones con el eje x, $x = 2, -1, 1$ se encuentran haciendo $y = 0$. Note que puesto que $(x - 2)^4$ es positivo, la función no cambia de signo en 2; así que la gráfica no cruza el eje x en 2. La gráfica interseca el eje x en -1 y 1.

Cuando x es un número positivo muy grande, todos los factores son muy grandes, así que

$$\lim_{x \to \infty} (x - 2)^4(x + 1)^3(x - 1) = \infty$$

Cuando x es un número negativo muy grande, el primero de los factores es un número positivo muy grande y los factores segundo y tercero son negativos muy grandes, así que

$$\lim_{x \to -\infty} (x - 2)^4(x + 1)^3(x - 1) = \infty$$

Combinando esta información, obtenemos el esbozo de la gráfica de la figura 13.

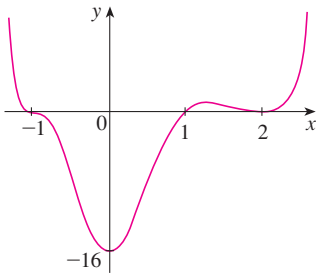


FIGURA 13
$y = (x - 2)^4(x + 1)^3(x - 1)$

Definición precisa

La definición 1 puede establecerse de manera precisa como sigue.

7 Definición Sea f una función definida sobre algún intervalo (a, ∞). Entonces

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

significa que para toda $\varepsilon > 0$ existe un correspondiente número N tal que

$$\text{si} \quad x > N, \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

En palabras, esto indica que los valores de $f(x)$ pueden acercarse arbitrariamente a L (dentro de una distancia ε, donde ε es cualquier número positivo) tomando x suficientemente grande (más grande que N, donde N depende de ε). Gráficamente, esto nos dice que eligiendo x suficientemente grande (más grande que algún número N) podemos hacer que la gráfica de f esté atrapada entre las rectas horizontales dadas $y = L - \varepsilon$ y

$y = L + \varepsilon$ como se ve en la figura 14. Esto debe ser verdadero sin importar qué tan pequeño elijamos ε. La figura 15 muestra que si elegimos un valor de ε muy pequeño, entonces puede necesitarse un valor de N muy grande.

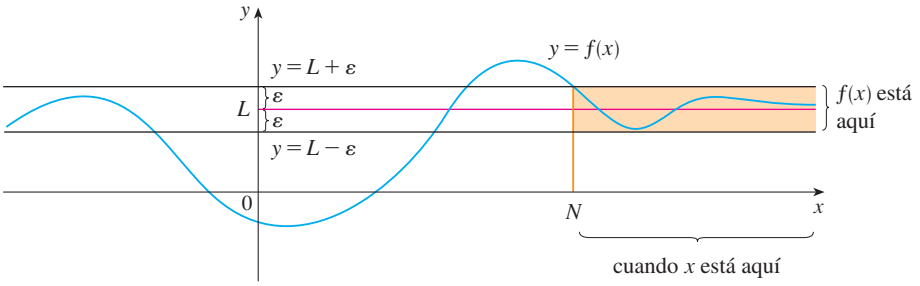


FIGURA 14
$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

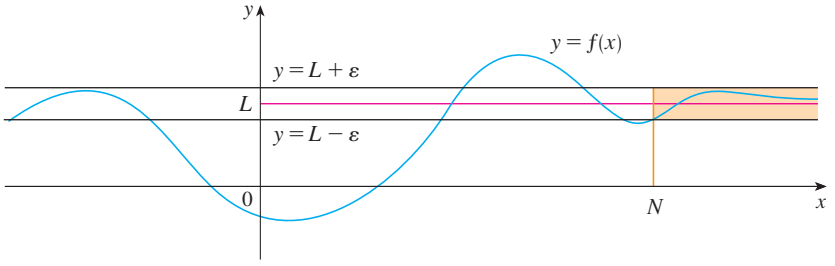


FIGURA 15
$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

Del mismo modo, una versión precisa de la definición 2 está dada por la definición 8, que se ilustra en la figura 16.

8 Definición Sea f una función definida sobre algún intervalo $(-\infty, a)$. Entonces

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe un correspondiente número N tal que

$$\text{si} \quad x < N, \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

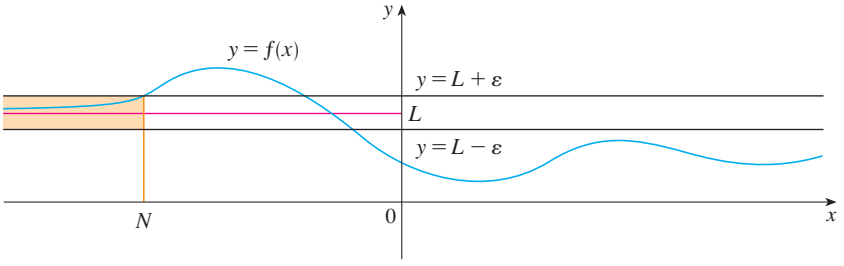


FIGURA 16
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$

En el ejemplo 3 obtuvimos que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} = \frac{3}{5}$$

En el siguiente ejemplo utilizamos una calculadora o computadora para relacionar esta proposición con la definición 7, con $L = \frac{3}{5}$ y $\varepsilon = 0.1$.

TEC En Module 2.4/2.6 puede explorar la definición precisa de límite de manera gráfica o numérica.

EJEMPLO 13 Utilice una gráfica para encontrar un número N tal que

$$\text{si} \quad x > N, \quad \text{entonces} \quad \left| \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} - 0.6 \right| < 0.1$$

SOLUCIÓN Reescribimos la desigualdad dada como

$$0.5 < \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} < 0.7$$

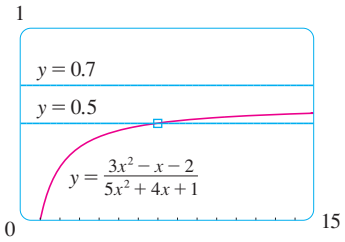


FIGURA 17

Necesitamos determinar las valores de x para los cuales la curva dada está entre las rectas horizontales $y = 0.5$ y $y = 0.7$. Las gráficas de la curva y de estas rectas se muestran en la figura 17. Entonces utilizamos el cursor para estimar que la curva cruza la recta $y = 0.5$ cuando $x \approx 6.7$. A la derecha de este número parece que la curva está entre las rectas $y = 0.5$ y $y = 0.7$. Redondeando, podemos decir que

$$\text{si} \quad x > 7, \quad \text{entonces} \quad \left| \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} - 0.6 \right| < 0.1$$

En otras palabras, para $\varepsilon = 0.1$ podemos elegir $N = 7$ (o cualquier otro número mayor) en la definición 7.

EJEMPLO 14 Utilice la definición 7 para demostrar que $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$.

SOLUCIÓN Dado $\varepsilon > 0$, queremos encontrar N tal que

$$\text{si} \quad x > N, \quad \text{entonces} \quad \left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon$$

Al calcular el límite podemos suponer que $x > 0$. Entonces $1/x < \varepsilon \iff x > 1/\varepsilon$. Elegimos $N = 1/\varepsilon$. Así que

$$\text{si} \quad x > N = \frac{1}{\varepsilon}, \quad \text{entonces} \quad \left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \frac{1}{x} < \varepsilon$$

Por tanto, de la definición 7

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

La figura 18 ilustra la demostración mostrando algunos valores de ε y los correspondientes valores de N.

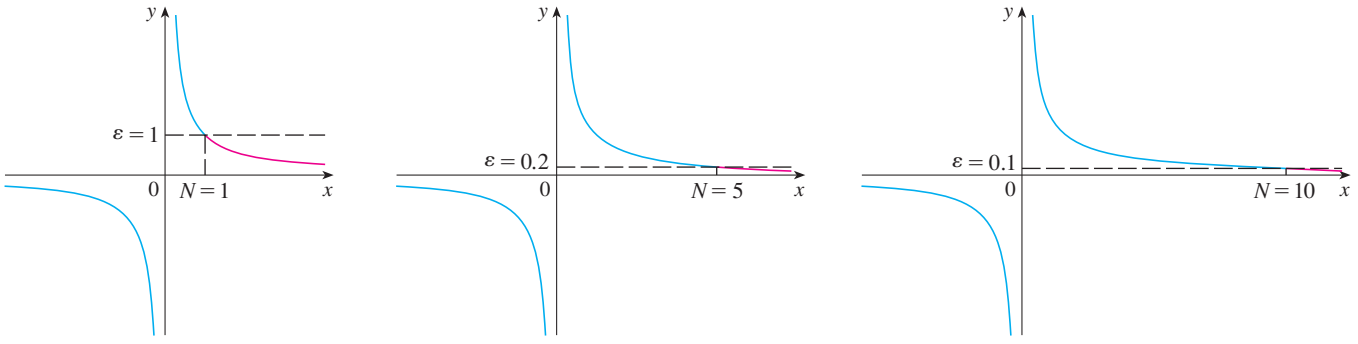


FIGURA 18

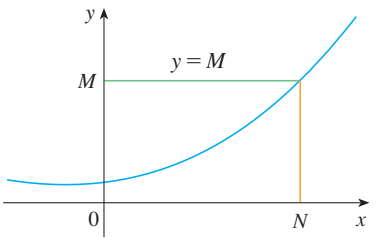


FIGURA 19
$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

Finalmente notamos que un límite infinito al infinito puede definirse como sigue. En la figura 19 se muestra una ilustración geométrica.

9 Definición Sea f una función definida sobre algún intervalo (a, ∞). Entonces

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

significa que para todo número positivo M existe un correspondiente número positivo N tal que

$$\text{si} \quad x > N, \qquad \text{entonces} \qquad f(x) > M$$

Definiciones similares se aplican cuando el símbolo ∞ se reemplaza por $-\infty$. (Véase el ejercicio 74.)

2.6 Ejercicios

1. Explique con sus propias palabras el significado de cada uno de los siguientes límites

a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 5$ b) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$

2. a) ¿Puede la gráfica de $y = f(x)$ intersecar una asíntota vertical? ¿Puede intersecar una asíntota horizontal? Ilustre trazando gráficas.

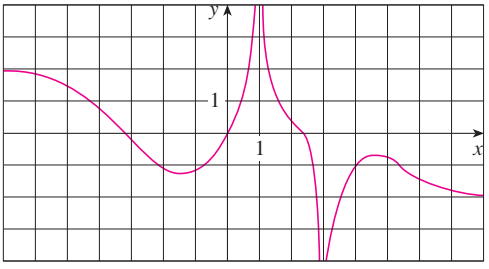
b) ¿Cuántas asíntotas horizontales puede tener la gráfica de $y = f(x)$? Trace gráficas que muestren las posibilidades.

3. Para la función f cuya gráfica está dada, establezca lo siguiente:

a) $\lim_{x\to\infty} f(x)$ b) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

c) $\lim_{x\to1} f(x)$ d) $\lim_{x\to3} f(x)$

e) Las ecuaciones de las asíntotas

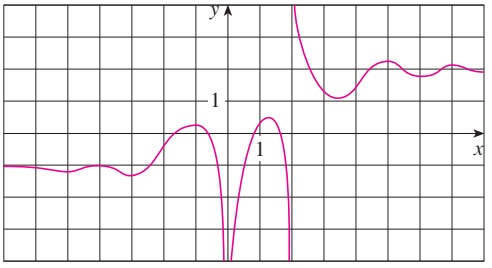


4. Para la función g cuya gráfica está dada, establezca lo siguiente.

a) $\lim_{x\to\infty} g(x)$ b) $\lim_{x\to-\infty} g(x)$

c) $\lim_{x\to0} g(x)$ d) $\lim_{x\to2^-} g(x)$

e) $\lim_{x\to2^+} g(x)$ f) Las ecuaciones de las asíntotas



5-10 Trace la gráfica de un ejemplo de una función f que satisfaga todas las condiciones dadas

5. $\lim_{x\to0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 5$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = -5$

6. $\lim_{x\to2} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-2^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-2^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, $f(0) = 0$

7. $\lim_{x\to2} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to0^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to0^-} f(x) = -\infty$

8. $\lim_{x\to\infty} f(x) = 3$, $\lim_{x\to2^-} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to2^+} f(x) = -\infty$, f es impar

9. $f(0) = 3$, $\lim_{x\to0^-} f(x) = 4$, $\lim_{x\to0^+} f(x) = 2$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to4^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to4^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 3$

10. $\lim_{x\to3} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$, $f(0) = 0$, f es par

11. Conjeture el valor del límite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2^x}$$

evaluando la función $f(x) = x^2/2^x$ para $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 50$ y 100. Después, utilice una gráfica de f para respaldar su conjetura.

12. a) Utilice la gráfica de

$$f(x) = \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$$

para estimar el valor de $\lim_{x\to\infty} f(x)$ con una aproximación de dos cifras decimales.

b) Utilice una tabla de valores de $f(x)$ para estimar el límite con una aproximación de cuatro cifras decimales.

13-14 Evalúe el límite y justifique cada paso indicando las propiedades adecuadas de los límites.

13. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 - x + 4}{2x^2 + 5x - 8}$

14. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{\dfrac{12x^3 - 5x + 2}{1 + 4x^2 + 3x^3}}$

15-38 Encuentre el límite o demuestre que no existe.

15. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x - 2}{2x + 1}$

16. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1 - x^2}{x^3 - x + 1}$

17. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x - 2}{x^2 + 1}$

18. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{4x^3 + 6x^2 - 2}{2x^3 - 4x + 5}$

19. $\lim_{t\to\infty} \dfrac{\sqrt{t} + t^2}{2t - t^2}$

20. $\lim_{t\to\infty} \dfrac{t - t\sqrt{t}}{2t^{3/2} + 3t - 5}$

21. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{(2x^2 + 1)^2}{(x - 1)^2(x^2 + x)}$

22. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^4 + 1}}$

23. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{9x^6 - x}}{x^3 + 1}$

24. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{9x^6 - x}}{x^3 + 1}$

25. $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{9x^2 + x} - 3x\right)$

26. $\lim_{x\to-\infty} \left(x + \sqrt{x^2 + 2x}\right)$

27. $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx}\right)$

28. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2 + 1}$

29. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^4 - 3x^2 + x}{x^3 - x + 2}$

30. $\lim_{x\to\infty} (e^{-x} + 2\cos 3x)$

31. $\lim_{x\to-\infty} (x^4 + x^5)$

32. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{1 + x^6}{x^4 + 1}$

33. $\lim_{x\to\infty} \arctan(e^x)$

34. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{e^{3x} - e^{-3x}}{e^{3x} + e^{-3x}}$

35. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1 - e^x}{1 + 2e^x}$

36. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2 + 1}$

37. $\lim_{x\to\infty} (e^{-2x}\cos x)$

38. $\lim_{x\to 0^+} \tan^{-1}(\ln x)$

39. a) Estime el valor de

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} + x\right)$$

dibujando la gráfica de la función

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + x.$$

b) Utilice una tabla de valores de $f(x)$ para conjeturar el valor del límite.

c) Pruebe que su conjetura es correcta.

40. a) Utilice la gráfica de

$$f(x) = \sqrt{3x^2 + 8x + 6} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

para estimar el valor de $\lim_{x\to\infty} f(x)$ con una aproximación de una cifra decimal.

b) Utilice una tabla de valores de $f(x)$ para estimar el límite con una aproximación de cuatro cifras decimales.

c) Halle el valor exacto del límite.

41-46 Encuentre las asíntotas horizontal y vertical de cada curva. Si tiene un dispositivo graficador, verifique su trabajo graficando la curva y estimando las asíntotas.

41. $y = \dfrac{2x + 1}{x - 2}$

42. $y = \dfrac{x^2 + 1}{2x^2 - 3x - 2}$

43. $y = \dfrac{2x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2}$

44. $y = \dfrac{1 + x^4}{x^2 - x^4}$

45. $y = \dfrac{x^3 - x}{x^2 - 6x + 5}$

46. $y = \dfrac{2e^x}{e^x - 5}$

47. Estime la asíntota horizontal de la función

$$f(x) = \frac{3x^3 + 500x^2}{x^3 + 500x^2 + 100x + 2\,000}$$

mediante la gráfica de f para $-10 \leqslant x \leqslant 10$. Después obtenga la ecuación de la asíntota evaluando el límite. ¿Cómo explica la discrepancia?

48. a) Grafique la función

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5}$$

¿Cuántas asíntotas horizontales y verticales observa? Utilice la gráfica para estimar el valor de los límites

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5}$$

b) Calcule algunos valores de $f(x)$ y proporcione estimaciones numéricas de los límites del inciso a).

c) Calcule los valores exactos de los límites en el inciso a). ¿Obtiene el mismo valor o valores diferentes de esos dos límites? [En relación con su respuesta al inciso a), tendrá que verificar su cálculo para el segundo límite.]

49. Encuentre una fórmula para una función f que satisfaga las condiciones siguientes:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 0} f(x) = -\infty, \quad f(2) = 0,$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$$

50. Proponga una fórmula para una función que tiene asíntotas verticales $x = 1$ y $x = 3$ y asíntota horizontal $y = 1$.

51. Una función f es un cociente de funciones cuadráticas y tiene una asíntota vertical $x = 4$ y una intersección de x en $x = 1$. Se sabe que f tiene una discontinuidad removible en $x = -1$ y $\lim_{x\to -1} f(x) = 2$. Evalúe

a) $f(0)$ b) $\lim_{x\to\infty} f(x)$

52-56 Determine los límites cuando $x \to \infty$ y cuando $x \to -\infty$. Utilice esta información junto con las intersecciones para esbozar la gráfica como en el ejemplo 12.

52. $y = 2x^3 - x^4$ **53.** $y = x^4 - x^6$

54. $y = x^3(x + 2)^2(x - 1)$

55. $y = (3 - x)(1 + x)^2(1 - x)^4$

56. $y = x^2(x^2 - 1)^2(x + 2)$

---

57. a) Utilice el teorema de la compresión para evaluar $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

b) Grafique $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$. ¿Cuántas veces cruza la gráfica la asíntota?

58. Por el *comportamiento al final* de una función entenderemos una descripción de lo que sucede con sus valores cuando $x \to \infty$ y a medida que $x \to -\infty$

a) Describa y compare el comportamiento al final de las funciones

$$P(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2x \qquad Q(x) = 3x^5$$

graficando las dos funciones en los rectángulos de vista $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$ y $[-10, 10]$ por $[-10\,000, 10\,000]$.

b) Se dice que dos funciones tienen el *mismo comportamiento al final* si su cociente tiende a 1 cuando $x \to \infty$. Demuestre que P y Q tienen el mismo comportamiento al final.

59. Sean P y Q dos polinomios. Encuentre

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

si el grado de P es a) menor que el grado de Q y b) mayor que el grado de Q.

60. Haga un esbozo aproximado de la gráfica de la curva $y = x^n$ (n un entero) para los cinco casos siguientes:

i) $n = 0$ ii) $n > 0$, n impar
iii) $n > 0$, n par iv) $n < 0$, n impar
v) $n < 0$, n par

Después utilice estos esbozos para encontrar los límites siguientes:

a) $\lim_{x\to 0^+} x^n$ b) $\lim_{x\to 0^-} x^n$

c) $\lim_{x\to\infty} x^n$ d) $\lim_{x\to -\infty} x^n$

61. Determine $\lim_{x\to\infty} f(x)$ si, para toda $x > 1$,

$$\frac{10e^x - 21}{2e^x} < f(x) < \frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x - 1}}$$

62. a) Un depósito contiene 5 000 L de agua pura. Se bombea salmuera que contiene 30 g de sal por litro de agua al depósito con una proporción de 25 L/min. Demuestre que la concentración de sal t minutos después (en gramos por litro) es

$$C(t) = \frac{30t}{200 + t}$$

b) ¿Qué sucede con la concentración cuando $x \to \infty$?

63. En el capítulo 9 se demostrará que, según ciertas hipótesis, la velocidad $v(t)$ de una gota de lluvia que cae, en el instante t, es

$$v(t) = v^*(1 - e^{-gt/v^*})$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad y v^* es la *velocidad final* de la gota de lluvia.

a) Encuentre $\lim_{t\to\infty} v(t)$.

b) Trace la grafica de $v(t)$ si $v^* = 1\,\text{m/s}$ y $g = 9.8\,\text{m/s}^2$. ¿Cuánto tiempo transcurre para que la velocidad de la gota de agua alcance 99% de su velocidad final?

64. a) Mediante el trazo de $y = e^{-x/10}$ y $y = 0.1$ en una pantalla común, descubra cuánto tiene que aumentar x de modo que $e^{-x/10} < 0.1$.

b) ¿Puede resolver el inciso a) sin un dispositivo de graficación?

65. Mediante una gráfica determine un número N tal que

$$\text{si} \quad x > N, \quad \text{entonces} \quad \left| \frac{3x^2 + 1}{2x^2 + x + 1} - 1.5 \right| < 0.05$$

66. En el caso del límite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x + 1} = 2$$

ilustre la definición 7 mediante la determinación de valores de N que correspondan a $\varepsilon = 0.5$ y $\varepsilon = 0.1$.

67. Ilustre la definición 8 para el límite

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x + 1} = -2$$

determinando valores de N que correspondan a $\varepsilon = 0.5$ y $\varepsilon = 0.1$.

68. Ilustre la definición 9 para el límite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x + 1}{\sqrt{x + 1}} = \infty$$

calculando valores de N que correspondan a $M = 100$.

69. a) ¿Qué tan grande tenemos que hacer x para que $1/x^2 < 0.0001$?

b) Al hacer $r = 2$ en el teorema 5, tenemos la proposición

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Demuéstrela directamente aplicando la definición 7.

70. a) ¿Qué tan grande debemos tomar a x de manera que $1/\sqrt{x} < 0.0001$?

b) Tomando $r = \frac{1}{2}$ en el teorema 5, tenemos la proposición

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

Demuéstrela directamente aplicando la definición 7.

71. Demuestre, mediante la definición 8, que $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

72. Demuestre, mediante la definición 9, que $\lim_{x \to \infty} x^3 = \infty$.

73. Utilice la definición 9 para demostrar que $\lim_{x \to \infty} e^x = \infty$.

74. Formule una definición precisa de

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Después utilice su definición para demostrar que

$$\lim_{x \to -\infty} (1 + x^3) = -\infty$$

75. Demuestre que

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{t \to 0^+} f(1/t)$$

y

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{t \to 0^-} f(1/t)$$

si estos límites existen.

2.7 Derivadas y razones de cambio

El problema de encontrar la recta tangente a una curva y el problema de encontrar la velocidad de un objeto involucran encontrar el mismo tipo de límite, como vimos en la sección 2.1. Este tipo especial de límite se denomina *derivada* y en las ciencias e ingeniería puede ser interpretada como una razón de cambio.

Tangentes

Si una curva C tiene la ecuación $y = f(x)$ y quiere usted hallar la recta tangente a C en el punto $P(a, f(a))$, entonces considere un punto cercano $Q(x, f(x))$, donde $x \neq a$, y calcule la pendiente de la recta secante PQ:

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Después, acerque Q a P a lo largo de la curva C, haciendo que x tienda a a. Si m_{PQ} tiende un número m, entonces definimos la *tangente* t como la recta que pasa por P con pendiente m. (Esto equivale a decir que la recta tangente es la posición límite de la recta secante PQ cuando Q tiene a P. (Véase la figura 1.)

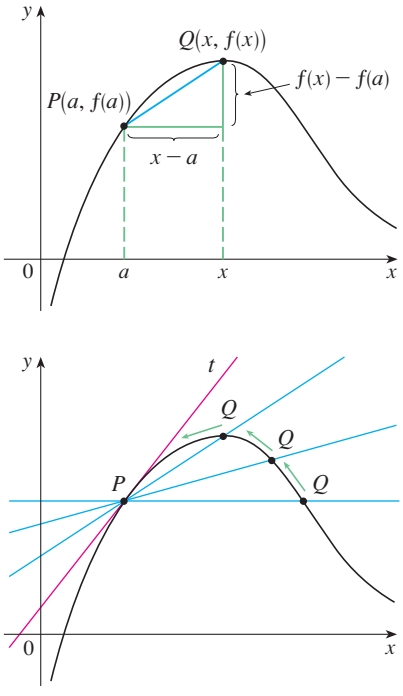


FIGURA 1

1 Definición La **recta tangente** a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$ es la recta que pasa por P con pendiente

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

siempre que este límite exista.

En nuestro primer ejemplo, se confirma la suposición que hicimos en el ejemplo 1 de la sección 2.1.

V EJEMPLO 1 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2$, en el punto $P(1,1)$.

SOLUCIÓN En este caso, $a = 1$ y $f(x) = x^2$, de modo que la pendiente es

$$m = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2$$

Forma punto-pendiente para una recta que pasa por el punto (x_1, y_1) con pendiente m:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Con la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta, se encuentra que la ecuación de la recta tangente en (1, 1) es

$$y - 1 = 2(x - 1) \quad \text{o bien} \quad y = 2x - 1$$

A veces se hace referencia a la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto como la **pendiente de la curva** en el punto. La idea es que si se acerca lo suficiente al punto, la curva parece una línea recta. En la figura 2 se ilustra este procedimiento para la curva $y = x^2$ del ejemplo 1. Cuanto más se acerque, tanto más la parábola se parece a una recta. En otras palabras, la curva casi se vuelve indistinguible de su recta tangente.

TEC Visual 2.7 muestra una animación de la figura 2.

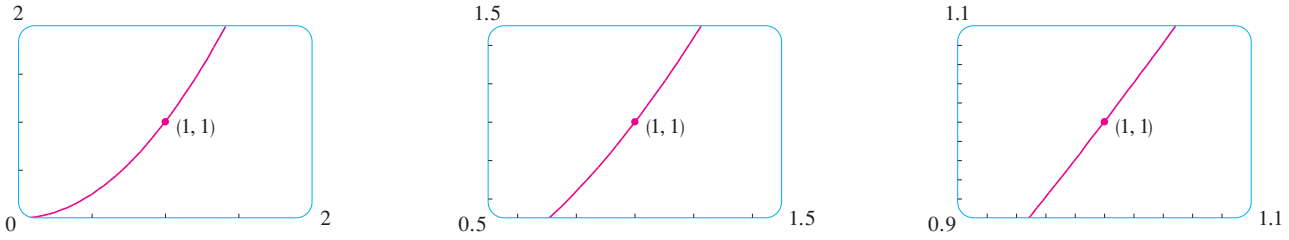


FIGURA 2 Acercamiento hacia el punto (1, 1) sobre la parábola $y = x^2$

Existe otra expresión para la pendiente de la recta tangente que a veces es más fácil de usar. Si $h = x - a$, en este caso $x = a + h$, entonces la pendiente de la recta secante PQ es

$$m_{PQ} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

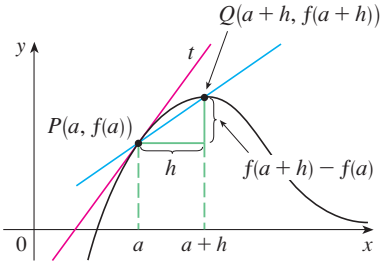


FIGURA 3

(Véase la figura 3, donde se ilustra el caso $h > 0$ y Q está a la derecha de P. Sin embargo, si $h < 0$, Q estaría a la izquierda de P.)

Note que conforme x se aproxima a a, h se acerca a 0 (puesto que $h = x - a$) y, por ende, la expresión de la pendiente de la recta tangente, en la definición 1 se convierte en

2

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

EJEMPLO 2 Encuentre una ecuación de la recta tangente a la hipérbola $y = 3/x$, en el punto (3, 1).

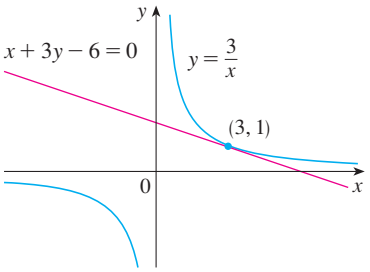


FIGURA 4

SOLUCIÓN Sea $f(x) = 3/x$. Entonces, la pendiente de la tangente en (3, 1) es

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{3}{3+h} - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{3 - (3+h)}{3+h}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h(3+h)} = \lim_{h \to 0} -\frac{1}{3+h} = -\frac{1}{3}$$

En consecuencia, la ecuación de la tangente en el punto (3, 1) es

$$y - 1 = -\tfrac{1}{3}(x - 3)$$

la cual se simplifica a

$$x + 3y - 6 = 0$$

En la figura 4 se muestra la hipérbola y su tangente.

Velocidades

En la sección 2.1 investigamos el movimiento de una pelota que se dejó caer desde la Torre CN, y se definió su velocidad como el límite del valor de las velocidades promedio sobre periodos de tiempo cada vez más cortos.

En general, suponga que un objeto se mueve a lo largo de una línea recta, de acuerdo con una ecuación del movimiento $s = f(t)$, donde s es el desplazamiento (distancia dirigida) del objeto respecto al origen, en el tiempo t. La función f que describe el movimiento se conoce como **función posición** del objeto. En el intervalo de tiempo $t = a$ hasta $t = a + h$, el cambio en la posición es $f(a + h) - f(a)$. (Véase la figura 5.) La velocidad promedio en este intervalo de tiempo es

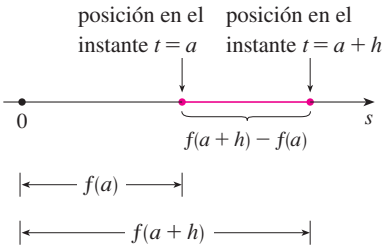


FIGURA 5

$$\text{velocidad promedio} = \frac{\text{desplazamiento}}{\text{tiempo}} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

que es lo mismo que la pendiente de la recta secante PQ en la figura 6.

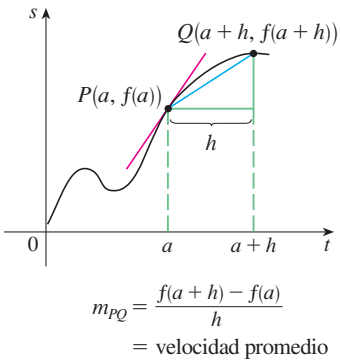


FIGURA 6

Suponga ahora que calcula las velocidades promedio sobre intervalos de tiempo $[a, a + h]$ más y más cortos. En otras palabras, haga que h tienda a 0. Como en el ejemplo de la pelota que cae, se definió la **velocidad** (o **velocidad instantánea**) $v(a)$ en el instante $t = a$ como el límite de estas velocidades promedio:

3

$$v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Esto significa que la velocidad en el instante $t = a$ es igual a la pendiente de la recta tangente en P. (Compare las ecuaciones 2 y 3.)

Ahora que sabe calcular límites, vuelva a considerar el problema de la pelota que cae.

V EJEMPLO 3 Suponga que se deja caer una pelota desde la plataforma superior de observación de la Torre CN, a 450 m sobre el nivel del suelo.

a) ¿Cuál es la velocidad de la pelota después de 5 segundos?

b) ¿Con qué rapidez cae cuando choca contra el suelo?

Recuerde que en la sección 2.1 vimos que la distancia (en metros) que recorre la pelota que cae una vez que transcurre t segundos es $4.9t^2$.

SOLUCIÓN Necesita usted hallar la velocidad cuando $t = 5$ y cuando la pelota golpea el suelo, de tal manera que es conveniente iniciar la búsqueda de la velocidad en

un tiempo general $t = a$. Empleando la ecuación de movimiento $s = f(t) = 4.9t^2$, se tiene

$$v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4.9(a + h)^2 - 4.9a^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4.9(a^2 + 2ah + h^2 - a^2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4.9(2ah + h^2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 4.9(2a + h) = 9.8a$$

a) La velocidad después de 5 s es $v(5) = (9.8)(5) = 49$ m/s.
b) Puesto que la plataforma de observación está a 450 m sobre el nivel del suelo, la pelota chocará contra el suelo en el instante t_1, cuando $s(t_1) = 450$; es decir,

$$4.9t_1^2 = 450$$

Esto da

$$t_1^2 = \frac{450}{4.9} \qquad \text{y} \qquad t_1 = \sqrt{\frac{450}{4.9}} \approx 9.6 \text{ s}$$

Por tanto, la velocidad de la pelota cuando choca contra el suelo es

$$v(t_1) = 9.8t_1 = 9.8\sqrt{\frac{450}{4.9}} \approx 94 \text{ m/s}$$

Derivadas

Hemos visto que en la búsqueda de la pendiente de una recta tangente (ecuación 2) o la velocidad de un objeto (ecuación 3) surge la misma clase de límite. De hecho, límites en la forma

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

surgen cuando calculamos una razón de cambio en cualquiera de las ciencias o en ingeniería, tal como la velocidad de reacción en química o un costo marginal en economía. Ya que esta clase de límite aparece muy a menudo, se da un nombre y notación especial.

4 Definición La **derivada de una función f en un número $x = a$**, denotada por $f'(a)$, es

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

si este límite existe.

$f'(a)$ se lee "f prima de a".

Si se escribe $x = a + h$, entonces $h = x - a$ y h tiende a 0 si y sólo si x tiende a a. En consecuencia, una manera equivalente de expresar la definición de la derivada, como vimos en la búsqueda de rectas tangentes, es

5

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

V EJEMPLO 4 Encuentre la derivada de la función $f(x) = x^2 - 8x + 9$ en el número $x = a$.

SOLUCIÓN De la definición 4 se tiene

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{[(a+h)^2 - 8(a+h) + 9] - [a^2 - 8a + 9]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - 8a - 8h + 9 - a^2 + 8a - 9}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2ah + h^2 - 8h}{h} = \lim_{h\to 0} (2a + h - 8) \\ &= 2a - 8 \end{aligned}$$

Definimos la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$ como la recta que pasa por P y tiene pendiente m, dada por la ecuación 1 o 2. Ya que, por la definición 4, ésta es la misma que la derivada $f'(a)$, podemos decir lo siguiente.

La recta tangente a $y = f(x)$ en $(a, f(a))$ es la recta que pasa por $(a, f(a))$ cuya pendiente es igual a $f'(a)$, la derivada de f en $x = a$.

Si utilizamos la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta, podemos escribir la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

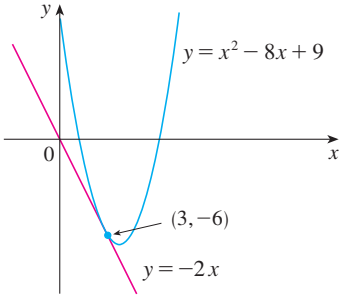


FIGURA 7

V EJEMPLO 5 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2 - 8x + 9$ en el punto $(3, -6)$.

SOLUCIÓN Del ejemplo 4 sabemos que la derivada de $f(x) = x^2 - 8x + 9$ en el número $x = a$ es $f'(a) = 2a - 8$. En consecuencia, la pendiente de la recta tangente en $(3, -6)$ es $f'(3) = 2(3) - 8 = -2$. En estos términos, la ecuación de la recta tangente que se muestra en la figura 7, es

$$y - (-6) = (-2)(x - 3) \quad \text{o bien} \quad y = -2x$$

Razones de cambio

Suponga que y es una cantidad que depende de otra cantidad x. Así, y es una función de x y lo expresamos como $y = f(x)$. Si x cambia de x_1 a x_2, entonces el cambio en x (también conocido como **incremento** de x) es

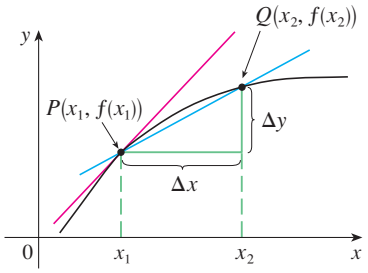
$$\Delta x = x_2 - x_1$$

y el cambio correspondiente en y es

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

El cociente de diferencias

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



razón de cambio promedio = m_{PQ}

razón de cambio instantánea = pendiente de la recta tangente en P

FIGURA 8

se llama **razón de cambio promedio de *y* respecto a *x*** sobre el intervalo $[x_1, x_2]$, y puede interpretarse como la pendiente de la recta secante PQ en la figura 8.

Por analogía con la velocidad, considere la razón de cambio promedio en intervalos cada vez más pequeños haciendo que x_2 tienda a x_1 y, por tanto, hacer que Δx tienda a 0. El límite de estas razones de cambio promedio se llama **razón de cambio (instantánea) de *y* respecto a *x*** en $x = x_1$, lo cual se interpreta como la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $P(x_1, f(x_1))$:

6 Razón de cambio instantánea $= \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

Reconocemos este límite como la derivada $f'(x_1)$.

Sabemos que una interpretación de la derivada $f'(a)$ es como la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ cuando $x = a$. Ahora tenemos una segunda interpretación:

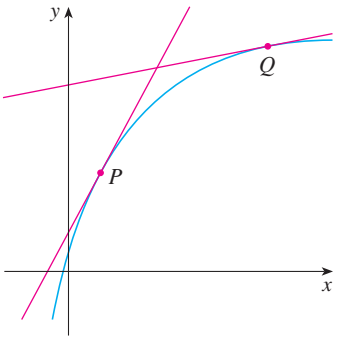


FIGURA 9
Los valores de y cambian rápidamente en P y lentamente en Q.

La derivada $f'(a)$ es la razón de cambio instantánea de $y = f(x)$ respecto a x cuando $x = a$.

El vínculo con la primera interpretación es que si dibuja la curva $y = f(x)$, entonces la razón de cambio instantánea es la pendiente de la recta tangente a esta curva en el punto donde $x = a$. Esto significa que cuando la derivada es grande (y, en consecuencia, la curva es escarpada, como en el punto P de la figura 9), los valores de y cambian rápidamente. Cuando la derivada es pequeña, la curva es relativamente plana (como en el punto Q), y el valor de y cambia lentamente.

En particular, si $s = f(t)$ es la función posición de una partícula que se mueve a lo largo de una línea recta, entonces $f'(a)$ es la razón de cambio del desplazamiento s respecto al tiempo t. En otras palabras, *$f'(a)$ es la velocidad de la partícula en el tiempo $t = a$*. La **rapidez** de la partícula es el valor absoluto de la velocidad, es decir, $|f'(a)|$.

En el siguiente ejemplo se analiza el significado de la derivada de una función que está definida verbalmente.

V EJEMPLO 6 Un fabricante produce un rollo de un tejido con ancho fijo. El costo de producir x yardas de este tejido es de $C = f(x)$ dólares.

a) ¿Cuál es el significado de la derivada $f'(x)$? ¿Cuáles son sus unidades?

b) En términos prácticos, ¿qué significa decir que $f'(1\,000) = 9$?

c) ¿Cuál piensa que es más grande $f'(50)$ o $f'(500)$? ¿Qué hay respecto a $f'(5\,000)$?

SOLUCIÓN

a) La derivada $f'(x)$ es la razón de cambio instantánea de C respecto a x, es decir, $f'(x)$ significa la razón de cambio del costo de producción respecto al número de yardas producidas. (Los economistas llaman a esta rapidez de cambio *costo marginal*. Esta idea se analiza en más detalle en las secciones 3.7 y 4.7.)

Ya que

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x}$$

las unidades para $f'(x)$ son las mismas que las unidades para el cociente de diferencias $\Delta C/\Delta x$. Puesto que ΔC se mide en dólares y Δx en yardas, las unidades para $f'(x)$ son dólares por cada yarda.

b) El enunciado de que $f'(1\,000) = 9$ significa que, después de fabricar 1 000 yardas de tejido, la cantidad a la cual se incrementa el costo de producción es de 9 dólares/yarda. (Cuando $x = 1\,000$, C se incrementa 9 veces tan rápido como x.)

En este caso suponga que la función costo se comporta bien; en otras palabras, $C(x)$ no oscila rápidamente cerca de $x = 1\,000$.

Dado que $\Delta x = 1$ es pequeño si se le compara con $x = 1\,000$, podría usarse la aproximación

$$f'(1\,000) \approx \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{\Delta C}{1} = \Delta C$$

y decimos que el costo de fabricación de las 1 000 yardas (o de la 1 001) es de casi 9 dólares.

c) La razón a la cual se incrementa el costo de producción (por cada yarda) probablemente es inferior cuando $x = 500$ que cuando $x = 50$ (el costo de fabricación de la yarda 500 es menor que el costo de la yarda 50) debido a la escala económica. (El fabricante hace más eficiente el uso de los costos de producción fijos.) De manera que

$$f'(50) > f'(500)$$

Pero, conforme se expande la producción, el resultado de la operación a gran escala será ineficiente y con eso los costos de horas extra de trabajo. En estos términos, es posible que la razón de incremento de costos empezarán con el tiempo a subir. De este modo, es posible que suceda que

$$f'(5\,000) > f'(500)$$

En el ejemplo siguiente estimaremos la razón de cambio de la deuda nacional respecto al tiempo. En este caso, la función no se define mediante una fórmula sino mediante una tabla de valores.

t	$D(t)$
1980	930.2
1985	1 945.9
1990	3 233.3
1995	4 974.0
2000	5 674.2
2005	7 932.7

V EJEMPLO 7 Sea $D(t)$ la deuda nacional de EU en el tiempo t. La tabla en el margen proporciona valores aproximados de esta función siempre que se estime a fin de año, en miles de millones de dólares, desde 1980 hasta 2005. Interprete y estime el valor de $D'(1990)$.

SOLUCIÓN La derivada $D'(1990)$ significa la razón de cambio de D respecto a t cuando $t = 1990$, es decir, la razón de incremento de la deuda nacional en 1990.

De acuerdo con la ecuación 5,

$$D'(1990) = \lim_{t \to 1990} \frac{D(t) - D(1990)}{t - 1990}$$

Así que calculamos y tabulamos los valores del cociente de diferencias (la razón de cambio promedio) como sigue.

t	$\dfrac{D(t) - D(1990)}{t - 1990}$
1980	230.31
1985	257.48
1995	348.14
2000	244.09
2005	313.29

A partir de esta tabla vemos que $D'(1990)$ se localiza en alguna parte entre 257.48 y 348.14 miles de millones de dólares por cada año. [En este caso, está haciendo la suposición razonable de que la deuda no fluctuará de manera errática entre 1980 y el 2000.] Se estima que la razón de incremento de la deuda nacional de EU en 1990 fue el promedio de estos números, específicamente

$$D'(1990) \approx 303 \text{ miles de millones de dólares por cada año.}$$

Una nota sobre unidades

Las unidades de la razón de cambio promedio $\Delta D/\Delta t$ son las unidades para ΔD divididas entre las unidades de Δt, o sea, miles de millones de dólares por cada año. La razón de cambio instantánea es el límite de la razón de cambio promedio, de este modo, se mide en las mismas unidades: miles de millones de dólares por cada año.

Otro método sería una gráfica de la función deuda y estimar la pendiente de la recta tangente cuando $t = 1990$.

En los ejemplos 3, 6 y 7 aparecen tres casos específicos de razones de cambio: la velocidad de un objeto es la razón de cambio del desplazamiento respecto al tiempo; el costo marginal es la razón de cambio del costo de producción respecto al número de artículos producidos; la razón de cambio de la deuda respecto al tiempo es de interés en economía. Existen otras razones de cambio: en física, la razón de cambio de trabajo respecto al tiempo se le denomina *potencia*. Los químicos que estudian una reacción química están interesados en la razón de cambio de la concentración de un reactivo respecto al tiempo (denominada *velocidad de reacción*). Un biólogo se interesa en la relación de cambio de la población de una colonia de bacterias respecto al tiempo. De hecho, el cálculo de razones de cambio es importante en todas las ciencias naturales, en la ingeniería e, incluso, en las ciencias sociales. En la sección 3.7 se darán más ejemplos.

Todas estas razones de cambio son derivadas y pueden interpretarse como pendientes de rectas tangentes. Esto le confiere un significado adicional a la solución del problema de la tangente. Siempre que resuelve usted problemas en que intervienen rectas tangentes, no sólo resuelve un problema de geometría, también resuelve implícitamente gran variedad de problemas de las ciencias y la ingeniería, en que intervienen razones de cambio.

2.7 Ejercicios

1. Una curva tiene la ecuación $y = f(x)$.
a) Escriba una expresión para la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $P(3, f(3))$ y $Q(x, f(x))$.
b) Escriba una expresión para la pendiente de la recta tangente en P.

2. Dibuje la curva $y = e^x$ en los rectángulos de vista $[-1, 1]$ por $[0, 2]$, $[-0.5, 0.5]$ por $[0.5, 1.5]$ y $[-0.1, 0.1]$ por $[0.9, 1.1]$. ¿Qué advierte acerca de la curva conforme hace un acercamiento hacia el punto $(0, 1)$?

3. a) Halle la pendiente de la recta tangente a la parábola $y = 4x - x^2$ en el punto $(1, 3)$
i) usando la definición 1 ii) usando la ecuación 2
b) Encuentre la ecuación de la recta tangente del inciso a).
c) Dibuje la parábola y la recta tangente. Como verificación de su trabajo, haga un acercamiento hacia el punto $(1, 3)$ hasta que la parábola y la recta tangente sean indistinguibles.

4. a) Encuentre la pendiente de la recta tangente a la curva $y = x - x^3$ en el punto $(1, 0)$
i) usando la definición 1 ii) usando la ecuación 2
b) Halle la ecuación de la recta tangente del inciso a).
c) Dibuje la curva y la recta tangente en rectángulos de vista cada vez más pequeños centrados en $(1, 0)$ hasta que parezcan coincidir la curva y la recta.

5-8 Encuentre la ecuación de la recta tangente a cada una de las siguientes curvas en el punto dado.

5. $y = 4x - 3x^2, \quad (2, -4)$

6. $y = x^3 - 3x + 1, \quad (2, 3)$

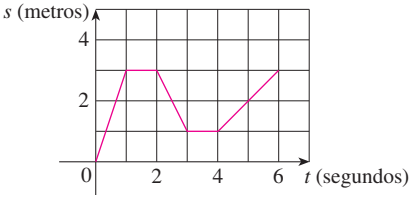
7. $y = \sqrt{x}, \quad (1, 1)$

8. $y = \dfrac{2x + 1}{x + 2}, \quad (1, 1)$

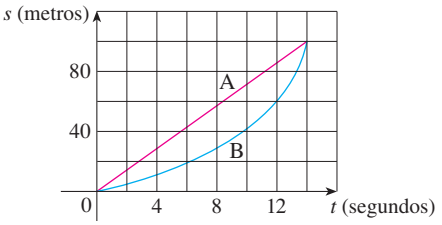
9. a) Determine la pendiente de la recta tangente a la curva $y = 3 + 4x^2 - 2x^3$ en el punto donde $x = a$.
b) Determine las ecuaciones de las rectas tangentes en los puntos $(1, 5)$ y $(2, 3)$.
c) Grafique la curva y ambas rectas tangentes en una misma pantalla.

10. a) Determine la pendiente de la recta tangente a la curva $y = 1/\sqrt{x}$ en el punto donde $x = a$.
b) Plantee las ecuaciones de las rectas tangentes en los puntos $(1, 1)$ y $\left(4, \frac{1}{2}\right)$.
c) Grafique la curva y ambas rectas tangentes en una misma pantalla.

11. a) Una partícula empieza moviéndose a la derecha a lo largo de una recta horizontal; la gráfica de su función posición se muestra enseguida. ¿Cuándo se mueve la partícula a la derecha? ¿Cuándo a la izquierda? ¿Cuándo permanece inmóvil?
b) Dibuje una gráfica de la función velocidad.



12. Se muestran las gráficas de las funciones posición de dos competidoras, A y B, quienes compiten en los 100 m y terminan en empate.



a) Describa y compare cómo desarrollaron la carrera las competidoras.
b) ¿En qué momento hay la mayor distancia entre las competidoras?
c) ¿En qué momento tienen la misma velocidad?

13. Si una pelota se lanza al aire verticalmente hacia arriba, con una velocidad de 40 pies/s, su altura (en pies) una vez que transcurren t segundos, está dada por $y = 40t - 16t^2$. Encuentre la velocidad cuando $t = 2$.

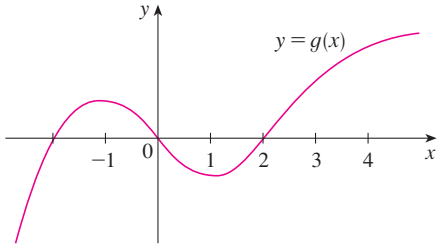
14. Si se lanza una roca verticalmente hacia arriba en el planeta Marte con una velocidad de 10 m/s, su altura (en metros) después de t segundos está dada por $H = 10t - 1.86t^2$.
a) Halle la velocidad de la roca después de un segundo.
b) Halle la velocidad de la roca cuando $t = a$.
c) ¿Cuándo caerá la roca a la superficie?
d) ¿Con qué velocidad la roca chocará contra la superficie?

15. El desplazamiento (en metros) de una partícula que se mueve en línea recta está dado por la ecuación de movimiento $s = 1/t^2$, donde t se mide en segundos. Halle la velocidad de la partícula en los instantes $t = a$, $t = 1$, $t = 2$ y $t = 3$.

16. El desplazamiento (en metros) de una partícula que se mueve en línea recta esta dado por $s = t^2 - 8t + 18$, donde t se mide en segundos.
a) Encuentre la velocidad promedio en cada intervalo de tiempo:
i) $[3, 4]$ ii) $[3.5, 4]$
iii) $[4, 5]$ iv) $[4, 4.5]$
b) Halle la velocidad instantánea cuando $t = 4$.
c) Dibuje la grafica de s como función de t y trace las rectas secantes cuyas pendientes son las velocidades promedio en el inciso a) y la recta tangente cuya pendiente es la velocidad instantánea en el inciso b).

17. Para la función g cuya gráfica está dada, reordene los números siguientes en orden creciente y explique su razonamiento.

$$0 \qquad g'(-2) \qquad g'(0) \qquad g'(2) \qquad g'(4)$$



18. Halle una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = g(x)$ en $x = 5$ si $g(5) = -3$ y $g'(5) = 4$.

19. Si la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto donde $a = 2$ es $y = 4x - 5$, encuentre $f(2)$ y $f'(2)$.

20. Si la recta tangente a $y = f(x)$ en (4, 3) pasa a través del punto (0, 2), halle $f(4)$ y $f'(4)$.

21. Dibuje la gráfica de una función f para la cual $f(0) = 0$, $f'(0) = 3$, $f'(1) = 0$ y $f'(2) = -1$.

22. Dibuje la grafica de una función g para la cual

$$g(0) = g(2) = g(4) = 0,\ g'(1) = g'(3) = 0,\ g'(0) = g'(4) = 1,$$
$$g'(2) = -1,\ \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty \text{ y } \lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty.$$

23. Si $f(x) = 3x^2 - x^3$, encuentre $f'(1)$ y utilícela para encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 3x^2 - x^3$ en el punto (1, 2).

24. Si $g(x) = x^4 - 2$ encuentre $g'(1)$ y utilícela para encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^4 - 2$ en el punto $(1, -1)$.

25. a) Si $F(x) = 5x/(1 + x^2)$, encuentre $F'(2)$ y utilícela para encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 5x/(1 + x^2)$ en el punto (2, 2).
b) Ilustre el inciso a) graficando la curva y la recta tangente en la misma pantalla.

26. a) Si $G(x) = 4x^2 - x^3$, encuentre $G'(a)$ y utilícela para encontrar las rectas tangentes a la curva $y = 4x^2 - x^3$ en los puntos (2, 8) y (3, 9).
b) Ilustre el inciso a) graficando la curva y las rectas tangentes en la misma pantalla.

27-32 Encuentre f'a) en cada una de las siguientes funciones.

27. $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$

28. $f(t) = 2t^3 + t$

29. $f(t) = \dfrac{2t + 1}{t + 3}$

30. $f(x) = x^{-2}$

31. $f(x) = \sqrt{1 - 2x}$

32. $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{1 - x}}$

33-38 Cada uno de los siguientes límites representa la derivada de alguna función f en algún número $x = a$. Establezca una f y una a en cada caso.

33. $\lim_{h\to0} \dfrac{(1 + h)^{10} - 1}{h}$

34. $\lim_{h\to0} \dfrac{\sqrt[4]{16 + h} - 2}{h}$

35. $\lim_{x\to5} \dfrac{2^x - 32}{x - 5}$

36. $\lim_{x\to\pi/4} \dfrac{\tan x - 1}{x - \pi/4}$

37. $\lim_{h\to0} \dfrac{\cos(\pi + h) + 1}{h}$

38. $\lim_{t\to1} \dfrac{t^4 + t - 2}{t - 1}$

39-40 Una partícula se desplaza a lo largo de una línea recta con ecuación de movimiento $s = f(t)$, donde s se mide en metros y t en segundos. Halle la velocidad y la rapidez cuando $t = 5$.

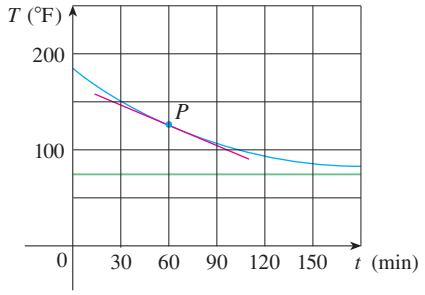
39. $f(t) = 100 + 50t - 4.9t^2$

40. $f(t) = t^{-1} - t$

41. Una lata de gaseosa tibia se pone a enfriar en un refrigerador. Grafique la temperatura de la gaseosa como función del tiempo. ¿La razón de cambio inicial de la temperatura es mayor o menor que la relación de cambio después de una hora?

42. Se saca un pavo asado del horno cuando su temperatura ha alcanzado 185°F y se coloca sobre la mesa de un cuarto donde

la temperatura es de 75°F. En la gráfica se muestra cómo disminuye la temperatura del pavo y, finalmente, tiende a la temperatura del cuarto. Por medio de la medición de la pendiente de la recta tangente, estime la razón de cambio de la temperatura después de una hora.



43. La tabla muestra el número N de usuarios de telefonía celular en EU. (Se proporcionan estimaciones semestrales.)

t	1996	1998	2000	2002	2004	2006
N	44	69	109	141	182	233

a) Halle la razón de crecimiento promedio de celulares
   i) de 2002 a 2006 ii) de 2002 a 2004
   iii) de 2000 a 2002
   En cada caso, incluya las unidades.
b) Estime la razón de crecimiento instantáneo en 2002 tomando dos razones de cambio promedio. ¿Cuáles son sus unidades?
c) Estime la razón de crecimiento instantáneo en 2002 midiendo la pendiente de una recta tangente.

44. En la tabla se proporciona el numero N de establecimientos de una popular cadena de cafeterías. (Se dan los números de establecimientos al 1 de octubre.)

Año	2004	2005	2006	2007	2008
N	8569	10 241	12 440	15 011	16 680

a) Determine la tasa promedio de crecimiento
   i) desde 2006 hasta 2008 ii) desde 2006 hasta 2007
   iii) de 2005 hasta 2006
   En cada caso incluya las unidades.
b) Estime la razón de crecimiento instantáneo en 2006 considerando dos razones de cambio promedio. ¿Cuáles son sus unidades?
c) Estime la razón de crecimiento instantáneo en 2006 midiendo la pendiente de una recta tangente.
d) Estime la razón de crecimiento instantáneo en 2007 y compárela con la razón de crecimiento en 2006. ¿Qué concluye?

45. El costo (en dólares) de producir x unidades de cierto artículo es $C(x) = 5\,000 + 10x + 0.05x^2$.
a) Encuentre la razón de cambio promedio de C respecto a x, cuando cambia el nivel de producción:
   i) de $x = 100$ a $x = 105$
   ii) de $x = 100$ a $x = 101$
b) Halle la razón de cambio instantáneo de C respecto a x, cuando $x = 100$. (Esto se conoce como *costo marginal*. En la sección 3.7 se explica su significado.)

46. Si un tanque cilíndrico contiene 100 000 galones de agua que se pueden drenar por el fondo del depósito en 1 h, entonces la ley de Torricelli da el volumen V del agua que queda después de t minutos como

$$V(t) = 100\,000\left(1 - \tfrac{1}{60}t\right)^2 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 60$$

Encuentre la rapidez con que fluye el agua hacia afuera del tanque (la razón de cambio instantáneo de V respecto a t) como función de t. ¿Cuáles son sus unidades? Para los instantes $t = 0$, 10, 20, 30, 40, 50 y 60 min, encuentre el gasto y la cantidad de agua que queda en el tanque. Resuma sus hallazgos en una frase o dos. ¿En qué instante el gasto es máximo? ¿Cuándo es mínimo?

47. El costo de producir x onzas de oro a partir de una reciente mina de oro es $C = f(x)$ dólares.
a) ¿Cual es el significado de la derivada $f'(x)$? ¿Cuáles son sus unidades?
b) ¿Que significa establecer $f'(800) = 17$?
c) Qué piensa usted: ¿los valores de $f'(x)$ se incrementarán o disminuirán en corto plazo? ¿Y a largo plazo? Explique.

48. El número de bacterias después de t horas en un experimento controlado de laboratorio es $n = f(t)$.
a) ¿Cuál es el significado de la derivada $f'(5)$? ¿Cuáles son sus unidades?
b) Considere que existe una cantidad de espacio y nutrientes para la bacteria. Qué cree usted: ¿Es mayor $f'(5)$ o $f'(10)$? Si se limita el suministro de nutrientes, ¿afectaría su conclusión? Explique.

49. Sea $T(t)$ la temperatura (en °F) en Phoenix t horas después de la medianoche del 10 de septiembre de 2008. La tabla muestra los valores de esta función registrada cada dos horas. ¿Cuál es el significado de $T'(8)$? Estime su valor.

t	0	2	4	6	8	10	12	14
T	82	75	74	75	84	90	93	94

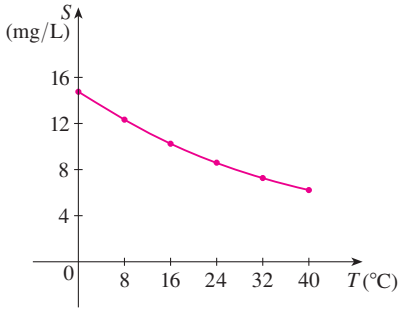
50. La cantidad (en libras) de un café que es vendido por una compañía en un precio de p dólares por cada libra es $Q = f(p)$.
a) ¿Cuál es el significado de la derivada $f'(8)$? ¿Cuáles son sus unidades?
b) ¿$f'(8)$ es positiva o negativa? Explique.

51. La cantidad de oxígeno que puede disolverse en agua depende de la temperatura de ésta. (De esa manera la polución térmica induce el contenido de oxígeno en el agua.) La gráfica muestra

cómo varia la solubilidad S de oxígeno como una función de la temperatura del agua T.

a) ¿Cuál es el significado de la derivada $S'(T)$? ¿Cuáles son sus unidades?

b) Estime e interprete el valor de $S'(16)$.

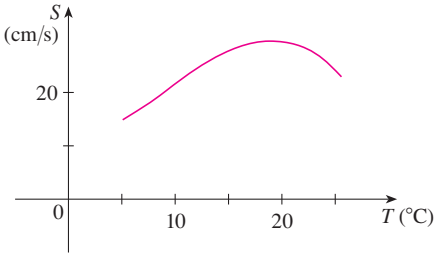


Adaptada de *Environmental Science: Living Within the System of Nature*, 2a. ed.; por Charles E. Kupchella, © 1989. Reimpreso con autorizacion de Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, N.J.

52. La grafica muestra la influencia de la temperatura T en la rapidez máxima sostenible de nado del salmón Coho.

a) ¿Cuál es el significado de la derivada $S'(T)$? ¿Cuáles son sus unidades?

b) Estime los valores de $S'(15)$ y $S'(25)$ e interprételos.



53-54 Determine si $f'(0)$ existe en cada una de las siguientes funciones.

53. $$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

54. $$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

REDACCIÓN DE PROYECTO PRIMEROS MÉTODOS PARA ENCONTRAR TANGENTES

La primera persona en formular explícitamente las ideas de límites y derivadas fue Isaac Newton en la década de 1660. Pero Newton reconoció: "Si he visto más lejos que otros hombres, es porque he estado parado sobre los hombros de gigantes". Dos de esos gigantes fueron Pierre Fermat (1601-1665) y el maestro de Newton en Cambridge, Isaac Barrow (1630-1677). Newton estaba familiarizado con los métodos que estos hombres habían aplicado para hallar rectas tangentes, y los métodos de ambos tuvieron que ver con la formulación final del cálculo a la que llegó Newton.

Las siguientes referencias contienen explicaciones de estos métodos. Lea una o varias de estas referencias y escriba un informe en que compare los métodos de Fermat o de Barrow con los métodos modernos. En particular, aplique el método de la sección 2.7 para hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 + 2x$ en el punto $(1, 3)$ y muestre cómo habrían resuelto Fermat o Barrow el mismo problema. Aunque usted usó derivadas y ellos no, señale las semejanzas entre los dos métodos.

1. Carl Boyer y Uta Merzbach, *A History of Mathematics* (Nueva York: Wiley, 1989), pp. 389, 432.
2. C. H. Edwards, *The Historical Development of the Calculus* (Nueva York: Springer-Verlag, 1979), pp. 124, 132.
3. Howard Eves, *An Introduction to the History of Mathematics*, 6a. ed. (Nueva York: Saunders, 1990), pp. 391, 395.
4. Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* (Nueva York: Oxford University Press, 1972), pp. 344, 346.

2.8 La derivada como una función

En la sección anterior consideramos la derivada de una función f en un número fijo $x = a$:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \quad \boxed{1}$$

Ahora cambiaremos el punto de vista y haremos que el número $x = a$ varíe. Si en la ecuación 1 reemplaza a con una variable x, obtenemos

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}} \quad \boxed{2}$$

Dado cualquier numero x para el cual este límite exista, asignamos a x el número $f(x)$. De modo que consideramos a f' como una nueva función, llamada **derivada de f** y definida por medio de la ecuación 2. Sabemos que el valor de f' en x, $f'(x)$ puede interpretarse geométricamente como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x, f(x))$.

La función f' se conoce como derivada de f porque se ha "derivado" de f por medio de la operación de hallar el límite en la ecuación 2. El dominio de f' es el conjunto $\{x \mid f'(x) \text{ existe}\}$ y puede ser menor que el dominio de f.

V EJEMPLO 1 En la figura 1 se muestra la gráfica de una función f. Utilícela para dibujar la gráfica de la derivada f'.

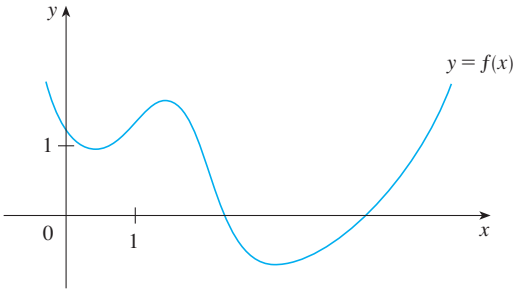
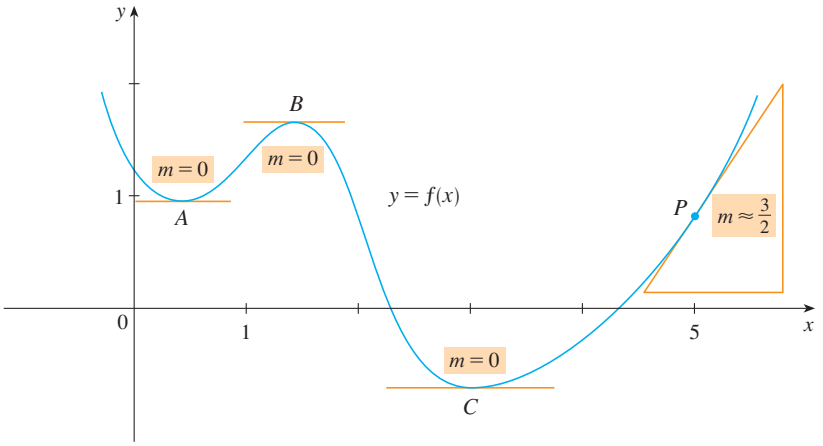


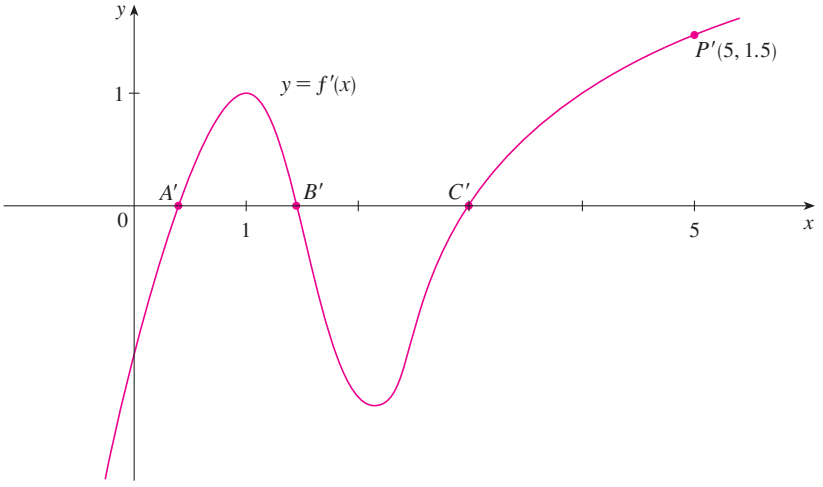
FIGURA 1

SOLUCIÓN Puede estimar el valor de la derivada, en cualquier valor de x, trazando la tangente en el punto $(x, f(x))$ y estimando su pendiente. Por ejemplo, para $x = 5$, trace la recta tangente en P de la figura 2a) y estime su pendiente alrededor de $\frac{3}{2}$, por tanto, $f'(5) \approx 1.5$. Esto nos permite situar el punto $P'(5, 1.5)$ en la gráfica de f' directamente debajo de P. Si repite este procedimiento en varios puntos, se obtiene la gráfica que se muestra en la figura 2b). Advierta que las tangentes en A, B y C son horizontales, de modo que la derivada es 0 allí, y la gráfica de f' cruza el eje x en los puntos A', B' y C', directamente debajo de A, B y C. Entre A y B las tangentes tienen pendiente positiva, por lo que $f'(x)$ es positiva allí. Pero entre B y C las tangentes tienen pendiente negativa, de modo que $f'(x)$ allí es negativa.



a)

TEC Visual 2.8 muestra una animación de la figura 2 para diferentes funciones.



b)

FIGURA 2

V EJEMPLO 2

a) Si $f(x) = x^3 - x$, encuentre una fórmula para $f'(x)$.
b) Ilústrela comparando las gráficas de f y f'.

SOLUCIÓN

a) Cuando se usa la ecuación 2 para calcular una derivada, hay que recordar que la variable es h y que x se considera temporalmente como una constante durante el cálculo del límite.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[(x+h)^3 - (x+h)] - [x^3 - x]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x - h - x^3 + x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 - h}{h} = \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2 - 1) = 3x^2 - 1$$

b) Use un dispositivo de graficación para trazar las graficas de f y f' de la figura 3. Note que $f'(x) = 0$ cuando f tiene tangentes horizontales y que $f'(x)$ es positiva cuando las tangentes tienen pendientes positivas. De modo que estas graficas sirven como comprobación de nuestra solución del inciso a).

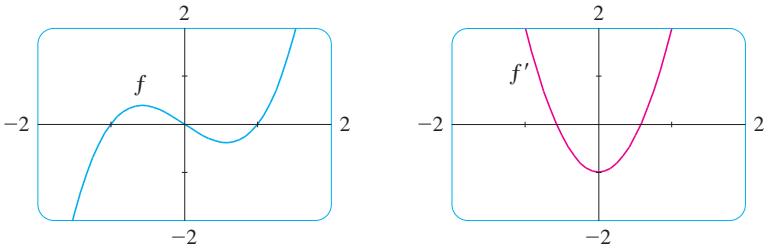


FIGURA 3

EJEMPLO 3 Si $f(x) = \sqrt{x}$, encuentre la derivada de f. Establezca el dominio de f'.

SOLUCIÓN

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

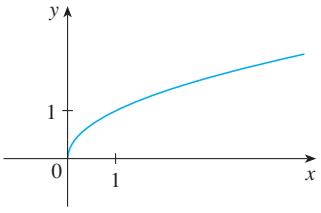
$$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - x}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

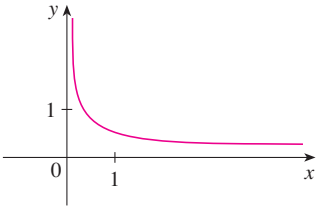
$$= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Aquí, racionalice el numerador

Observe que $f'(x)$ existe si $x > 0$, de modo que el dominio de f' es $(0, \infty)$ y es menor que el dominio de f, $[0, \infty)$.



a) $f(x) = \sqrt{x}$



b) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

FIGURA 4

Compruebe que el resultado del ejemplo 3 es razonable observando las graficas de f y f' en la figura 4. Cuando x esta cerca de 0, $\sqrt{x}$ está cerca de 0, por tanto, $f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$ es muy grande, y esto corresponde a rectas tangentes muy empinadas cerca de (0, 0) de la figura 4a), y a valores grandes de $f'(x)$ justo a la derecha de 0 en la figura 4b). Cuando x es grande, $f'(x)$ es muy pequeña, y esto corresponde a rectas tangentes más aplanadas en la extrema derecha de la gráfica de f y a la asíntota horizontal de la gráfica de f'.

EJEMPLO 4 Encuentre f' si $f(x) = \dfrac{1-x}{2+x}$.

SOLUCIÓN

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{1-(x+h)}{2+(x+h)} - \dfrac{1-x}{2+x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(1-x-h)(2+x) - (1-x)(2+x+h)}{h(2+x+h)(2+x)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(2-x-2h-x^2-xh) - (2-x+h-x^2-xh)}{h(2+x+h)(2+x)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-3h}{h(2+x+h)(2+x)} = \lim_{h \to 0} \frac{-3}{(2+x+h)(2+x)} = -\frac{3}{(2+x)^2}$$

$$\frac{\frac{a}{b} - \frac{c}{d}}{e} = \frac{ad - bc}{bd} \cdot \frac{1}{e}$$

Otras notaciones

Si usamos la notación tradicional $y = f(x)$ para indicar que la variable independiente es x y la dependiente es y, entonces algunas otras notaciones comunes para la derivada son:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = Df(x) = D_x f(x)$$

Los símbolos D y d/dx se llaman **operadores de derivación** porque indican la operación de **derivación**, que es el proceso de calcular una derivada.

El símbolo dy/dx, introducido por Leibniz, no debe considerarse como una razón (por ahora); es sencillamente un sinónimo de $f'(x)$. No obstante, es una notación útil y sugerente, en especial cuando se usa en la notación de incrementos. Con base en la ecuación 2.7.6, puede volver a escribir la definición de derivada en la notación de Leibniz en la forma

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Si desea indicar el valor de una derivada dy/dx en la notación de Leibniz en un número específico $x = a$, use la notación

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} \quad \text{o bien} \quad \left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=a}$$

que es un sinónimo para $f'(a)$.

3 Definición Una función f es **derivable en $x = a$** si $f'(a)$ existe. Es **derivable sobre un intervalo abierto** (a, b) [o (a, ∞) o $(-\infty, a)$ o $(-\infty, \infty)$] si es derivable en todo número del intervalo.

V EJEMPLO 5 ¿Dónde es derivable la función $f(x) = |x|$?

SOLUCIÓN Si $x > 0$, entonces $|x| = x$ y podemos elegir h lo suficientemente pequeño de modo que $x + h > 0$, de aquí que $|x + h| = x + h$. Por tanto, para $x > 0$ tenemos

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{|x + h| - |x|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x + h) - x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1$$

y, por consiguiente, f es derivable para cualquier $x > 0$.

De manera análoga, para $x < 0$ se tiene que $|x| = -x$ y se puede elegir h lo suficientemente pequeña para que $x + h < 0$ y, así, $|x + h| = -(x + h)$. Por tanto, para $x < 0$,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{|x + h| - |x|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-(x + h) - (-x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h} = \lim_{h \to 0} (-1) = -1$$

así que f es derivable para cualquier $x < 0$.

Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz nació en Leipzig, en 1646, y estudio leyes, teología, filosofía y matemáticas en la universidad de allí. Obtuvo el grado de bachiller a los 17 años. Después de lograr su doctorado en leyes a la edad de 20, ingresó al servicio diplomático y pasó la mayor parte de su vida viajando por las capitales de Europa, en misiones diplomáticas. En particular, trabajó para conjurar una amenaza militar francesa contra Alemania e intentó reconciliar las Iglesias católica y protestante.

Su estudio formal de las matemáticas no se inició sino hasta 1672, cuando se encontraba en una misión diplomática en París. Allí construyó una máquina para realizar cálculos y se encontró con científicos, como Huygens, quienes dirigieron su atención hacia los desarrollos más recientes en las matemáticas y las ciencias. Leibniz se empeñó en desarrollar una lógica simbólica y un sistema de notación que simplificara el razonamiento lógico. En su versión del Cálculo, que publicó en 1684, estableció la notación y las reglas para hallar derivadas que aún se usan en la actualidad.

Por desgracia, en la década de 1690 surgía una terrible disputa entre los seguidores de Newton y los de Leibniz acerca de quién había inventado el Cálculo. Leibniz incluso fue acusado de plagio por los miembros de la Real Academia de Inglaterra. La verdad es que cada uno lo inventó por separado. Newton llegó primero a su versión del Cálculo; pero, debido a su temor a la controversia, no la publicó de inmediato. Por tanto, el informe de Leibniz del Cálculo en 1684 fue el primero en publicarse.

Para $x = 0$ debemos investigar

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|0 + h| - |0|}{h} \qquad \text{(si existe).}$$

Calcule por separado los límites por la izquierda y por la derecha:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{|0 + h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0^+} 1 = 1$$

y

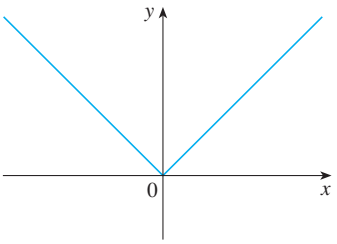
$$\lim_{h \to 0^-} \frac{|0 + h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h \to 0^-} (-1) = -1$$

Puesto que estos límites son diferentes, $f'(0)$ no existe. Así, f es derivable en toda x, excepto en $x = 0$.

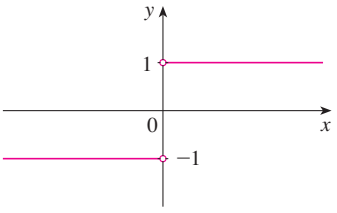
La fórmula para f' está dada por

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

y su gráfica aparece en la figura 5b). La inexistencia de $f'(0)$ se refleja geométricamente en el hecho de que la curva $y = |x|$ no tiene una recta tangente en (0, 0). [Véase la figura 5a).]



a) $y = f(x) = |x|$



b) $y = f'(x)$

FIGURA 5

Tanto la continuidad como la derivabilidad son propiedades deseables para una función. El teorema siguiente muestra cómo se relacionan estas propiedades.

4 Teorema Si f es derivable en $x = a$, entonces f es continua en $x = a$.

DEMOSTRACIÓN Para demostrar que f es continua en $x = a$, debemos demostrar que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Para esto empezamos por probar que la diferencia $f(x) - f(a)$ tiende a 0.

La información dada es que f es derivable en $x = a$; es decir,

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

RP Un aspecto importante de la solución de problemas es intentar encontrar una conexión entre lo dado y lo desconocido. Consulte el paso 2 (Piense en un plan) en Principios para la resolución de problemas, en la página 75.

existe (véase la ecuación 2.7.5). Para relacionar lo dado con lo desconocido, divida y multiplique $f(x) - f(a)$ por $x - a$ (lo cual es posible cuando $x \neq a$):

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a)$$

De este modo, si usamos la ley del producto y la ecuación (2.7.5), podemos escribir

$$\lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a)$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a} (x - a)$$

$$= f'(a) \cdot 0 = 0$$

Para utilizar lo que acabamos de demostrar, comenzamos con $f(x)$ y sumamos y restamos $f(a)$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x) &= \lim_{x\to a} [f(a) + (f(x) - f(a))] \\ &= \lim_{x\to a} f(a) + \lim_{x\to a} [f(x) - f(a)] \\ &= f(a) + 0 = f(a)\end{aligned}$$

En consecuencia, f es continua en $x = a$.

NOTA El inverso del teorema 4 es falso; es decir, hay funciones que son continuas, pero que no son derivables. Por ejemplo, la función $f(x) = |x|$ es continua en $x = 0$ porque

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} |x| = 0 = f(0)$$

(Véase el ejemplo 7 de la sección 2.3.) Pero en el ejemplo 5 demostramos que f no es derivable en $x = 0$.

¿Cómo deja de ser derivable una función?

En el ejemplo 5 vimos que la función $y = |x|$ no es derivable en $x = 0$ y en la figura 5a) se muestra que su gráfica cambia de dirección repentinamente cuando $x = 0$. En general, si la gráfica de una función f tiene "esquinas" o "picos", la gráfica de f no tiene recta tangente en esos puntos y f no es derivable allí. [Al intentar calcular $f'(a)$, encontramos que los limites por la izquierda y por la derecha son diferentes.]

El teorema 4 señala otra forma en que una función no tiene derivada. En él se afirma que si f no es continua en a, entonces f no es derivable en $x = a$. Por ende, en cualquier discontinuidad (p. ej., una discontinuidad de salto), f no es derivable.

Una tercera posibilidad es que la curva tenga una **recta tangente vertical** cuando $x = a$; es decir, f es continua en $x = a$ y

$$\lim_{x\to a} |f'(x)| = \infty$$

Esto significa que las rectas tangentes se vuelven más y más empinadas cuando $x \to a$. En la figura 6 se muestra una forma en que esto puede suceder; la figura 7c) ilustra otra. Las tres posibilidades recién analizadas se ilustran en la figura 7.

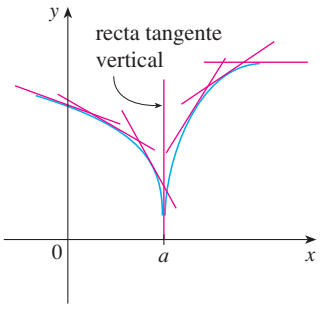
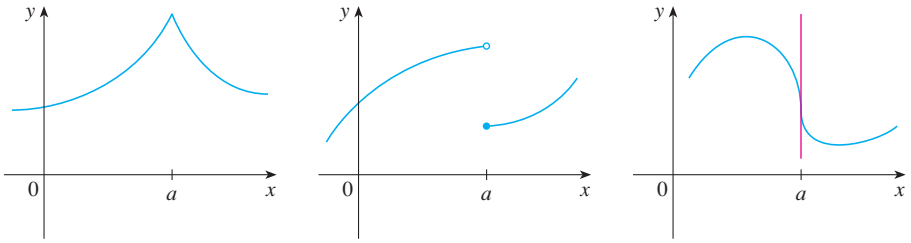


FIGURA 6



a) Una esquina o pico b) Una discontinuidad c) Una tangente vertical

FIGURA 7
Tres maneras para que f no sea derivable en $x = a$

Una calculadora graficadora o una computadora ofrecen otra manera de ver la derivabilidad. Si f es derivable en $x = a$, entonces, con un acercamiento al punto $(a, f(a))$, la gráfica

se alinea y adquiere más y más la apariencia de un recta. (Véase la figura 8. Un ejemplo específico es la figura 2 de la sección 2.7.) Pero no importa cuánto se acerque a puntos como los de las figuras 6 y 7a): no puede eliminar el punto agudo o esquina. (Véase la figura 9.)

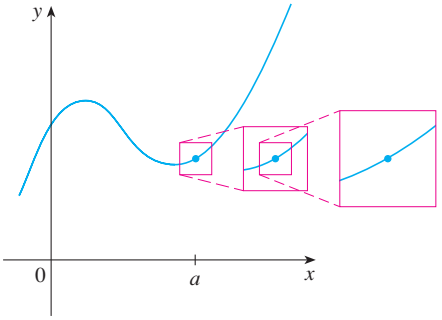


FIGURA 8
f es derivable en $x = a$.

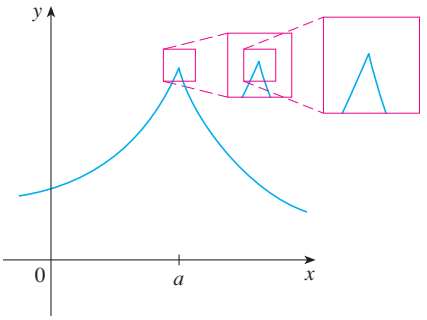


FIGURA 9
f no es derivable en $x = a$.

Derivadas superiores

Si f es una función derivable, entonces su derivada f' también es una función, así que f' puede tener una derivada de sí misma, señalada por $(f')' = f''$. Esta nueva función f'' se denomina **segunda derivada** de f porque es la derivada de la derivada de f. Utilizando la notación de Leibniz, la segunda derivada de $y = f(x)$ se escribe como

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

EJEMPLO 6 Si $f(x) = x^3 - x$, halle e interprete $f''(x)$.

SOLUCIÓN En el ejemplo 2 encontramos que la primera derivada es $f'(x) = 3x^2 - 1$. Así que la segunda derivada es

$$\begin{aligned} f''(x) = (f')'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{[3(x+h)^2 - 1] - [3x^2 - 1]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 1 - 3x^2 + 1}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (6x + 3h) = 6x \end{aligned}$$

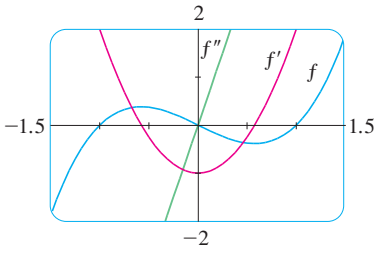


FIGURA 10

Las gráficas de f, f' y f'' se exhiben en la figura 10.

Puede interpretarse $f''(x)$ como la pendiente de la curva $y = f'(x)$ en el punto $(x, f'(x))$. En otras palabras, es la razón de cambio de la pendiente de la curva original $y = f(x)$.

Observe de la figura 10 que $f''(x)$ es negativa cuando $y = f'(x)$ tiene pendiente negativa y es positiva cuando $y = f'(x)$ tiene pendiente positiva. De esta manera, las gráficas sirven como una comprobación de sus cálculos.

TEC En Module 2.8 puede usted ver cómo cambian los coeficientes de un polinomio f y cómo afectan el aspecto de la gráfica de f, f' y f''.

En general, puede interpretarse una segunda derivada como una razón de cambio de una razón de cambio. El ejemplo más conocido es la *aceleración*, que se define como sigue.

Si $s = s(t)$ es la función posición de un objeto que se desplaza en línea recta, su primera derivada representa la velocidad $v(t)$ del objeto como una función del tiempo:

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}$$

A la razón de cambio de la velocidad instantánea respecto al tiempo se le llama **aceleración** $a(t)$ del objeto. En estos términos, la función aceleración es la derivada de la función velocidad y, en consecuencia, es la segunda derivada de la función posición:

$$a(t) = v'(t) = s''(t)$$

o en la notación de Leibniz

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

La tercera derivada f''' es la derivada de la segunda derivada: $f''' = (f'')'$. De este modo, $f'''(x)$ puede interpretarse como la pendiente de la curva $y = f''(x)$ o como la razón de cambio de $f''(x)$. Si $y = f(x)$, entonces, las notaciones alternativas para la tercera derivada son

$$y''' = f'''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3}$$

El proceso puede continuar. La cuarta derivada f'''' usualmente se denota mediante $f^{(4)}$. En general, la n-ésima derivada de f se denota mediante $f^{(n)}$ y se obtiene derivando n veces a f. Si $y = f(x)$, escribimos

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}$$

EJEMPLO 7 Si $f(x) = x^3 - x$, halle $f'''(x)$ y $f^{(4)}(x)$.

SOLUCIÓN En el ejemplo 6 encontramos que $f''(x) = 6x$. La gráfica de la segunda derivada tiene ecuación $y = 6x$ y, de este modo, es una línea recta con pendiente 6. Ya que la derivada $f'''(x)$ es la pendiente de $f''(x)$, se tiene

$$f'''(x) = 6$$

para todos los valores de x. Así, f''' es una función constante y su gráfica es una recta horizontal. En consecuencia, para todos los valores de x,

$$f^{(4)}(x) = 0$$

Puede interpretarse físicamente la tercera derivada en el caso donde la función es la función posición $s = s(t)$ de un objeto que se desplaza a lo largo de una línea recta. Como $s''' = (s'')' = a'$, la tercera derivada de la función posición es la derivada de la función aceleración y se le denomina **jerk** (tirón):

$$j = \frac{da}{dt} = \frac{d^3s}{dt^3}$$

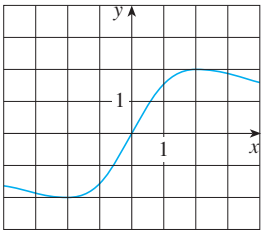
Así, el jerk, j, es la razón de cambio de la aceleración. Nombre apropiado porque un jerk considerable significa un cambio repentino de aceleración, que ocasiona un movimiento repentino en un vehículo.

Se ha visto que una aplicación de la segunda y tercera derivada sucede al analizar el movimiento de objetos empleando aceleración y jerk. Se investigará otra aplicación de la segunda derivada en la sección 4.3, donde se muestra cómo el conocer f'' proporciona información acerca de la forma de la gráfica de f. En el capítulo 11 veremos cómo la segunda derivada y las derivadas superiores nos permiten representar funciones como sumas de series infinitas.

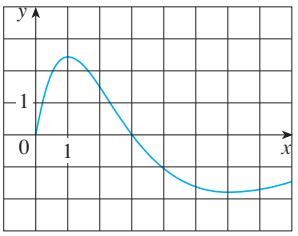
2.8 Ejercicios

1-2 Utilice la gráfica que se proporciona para estimar el valor de cada derivada. Luego dibuje f'.

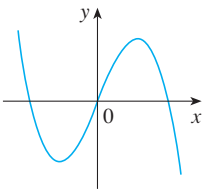
1. a) $f'(-3)$
b) $f'(-2)$
c) $f'(-1)$
d) $f'(0)$
e) $f'(1)$
f) $f'(2)$
g) $f'(3)$

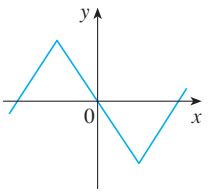


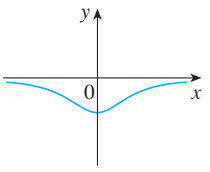
2. a) $f'(0)$
b) $f'(1)$
c) $f'(2)$
d) $f'(3)$
e) $f'(4)$
f) $f'(5)$
g) $f'(6)$
h) $f'(7)$

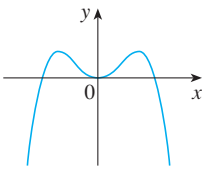


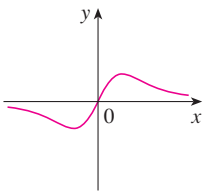
3. Relacione la gráfica de cada función dada en las figuras a)-d) con las gráficas de sus derivadas en las figuras I a IV. Dé las razones para sus selecciones.

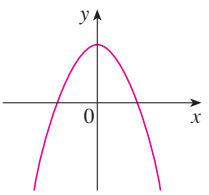
a)


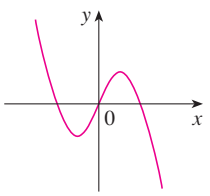
b)


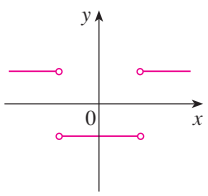
c)


d)


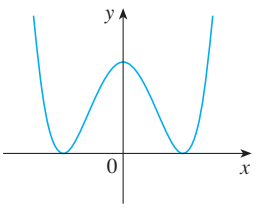
I


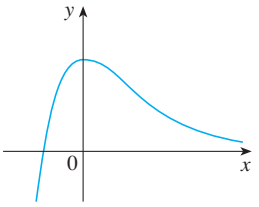
II


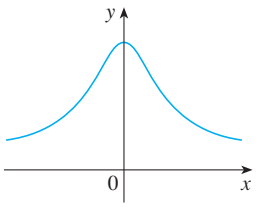
III


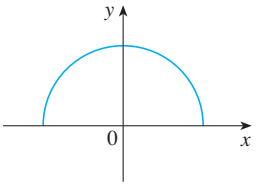
IV


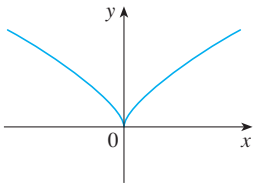
4-11 Trace o copie la gráfica de la función dada f. (Suponga que los ejes tienen escalas iguales.) Luego aplique el método del ejemplo 1 para trazar la gráfica de f' debajo de ella.

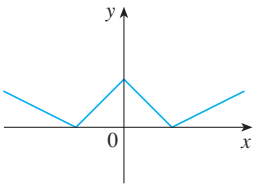
4.


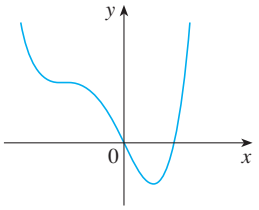
5.


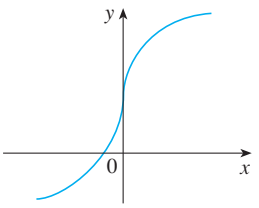
6.


7.


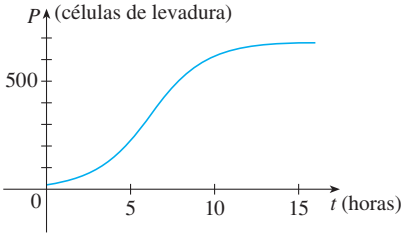
8.


9.


10.


11.


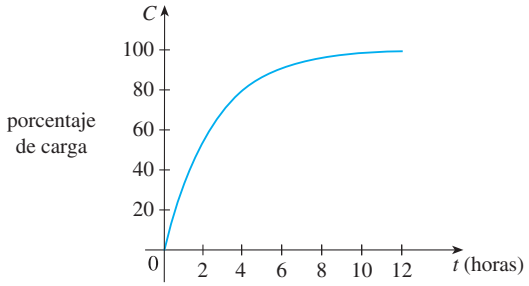
12. Se muestra la gráfica de la función población $P(t)$ para células de levadura en un cultivo de laboratorio. Utilice el método



del ejemplo 1 para dibujar la derivada $P'(t)$. ¿Qué indica la gráfica de P' acerca de la población de levadura?

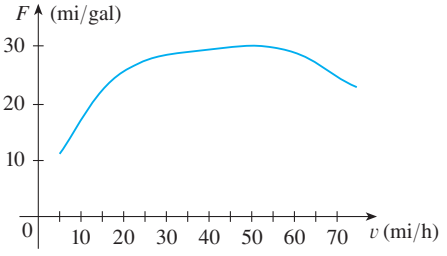
13. Una batería recargable se conecta con un cargador. La gráfica muestra $C(t)$, el porcentaje de capacidad que la batería alcanza como una función del tiempo t transcurrido (en horas).

a) ¿Cuál es el significado de la derivada $C'(t)$?
b) Trace la gráfica de $C'(t)$. ¿Qué le indica la gráfica?

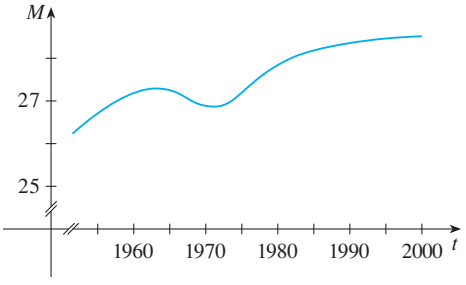


14. La gráfica (proporcionada por el Departamento de Energía de EU) muestra cómo afecta la rapidez de manejo el consumo de combustible. La economía F se mide en millas por galón, y la rapidez v se mide en millas por hora.

a) ¿Cuál es el significado de la derivada $F'(v)$?
b) Trace la gráfica de la derivada de $F'(v)$.
c) ¿A qué rapidez debería manejar si quiere ahorrar combustible?



15. La gráfica ilustra cómo ha variado la edad promedio en que contraían matrimonio por primera vez los hombres japoneses en la segunda mitad del siglo XX. Trace la gráfica de la función derivada $M'(t)$. ¿Durante cuáles años fue negativa la derivada?



16-18 Trace una gráfica cuidadosa de f y debajo de ella la grafica de f' de la misma manera que en los ejercicios 4-11. ¿Puede intuir una fórmula para $f'(x)$ a partir de su gráfica?

16. $f(x) = \operatorname{sen} x$

17. $f(x) = e^x$

18. $f(x) = \ln x$

19. Sea $f(x) = x^2$.

a) Estime los valores de $f'(0), f'\left(\frac{1}{2}\right), f'(1)$, y $f'(2)$ usando un dispositivo graficador para hacer un acercamiento sobre la grafica de f.
b) Utilice la simetría para deducir los valores de $f'\left(-\frac{1}{2}\right)$ $f'(-1)$ y $f'(-2)$.
c) Con los resultados de los incisos a) y b), proponga una fórmula para $f'(x)$.
d) Aplique la definición de derivada para probar que su propuesta del inciso c) es correcta.

20. Sea $f(x) = x^3$.

a) Estime los valores de $f'(0), f'\left(\frac{1}{2}\right), f'(1), f'(2)$ y $f'(3)$ usando un dispositivo graficador para hacer un acercamiento sobre la grafica de f.
b) Aplique la simetría para deducir los valores de $f'\left(-\frac{1}{2}\right), f'(-1)$, y $f'(-2)$ y $f'(-3)$.
c) Utilice los valores de los incisos a) y b) para trazar la gráfica de f'.
d) Proponga una fórmula para $f'(x)$.
e) Aplique la definición de derivada para probar que su propuesta del inciso d) es correcta.

21-31 Encuentre la derivada de cada una de las siguientes funciones aplicando la definición de derivada. Establezca los dominios de la función y de su derivada.

21. $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$

22. $f(x) = mx + b$

23. $f(t) = 5t - 9t^2$

24. $f(x) = 1.5x^2 - x + 3.7$

25. $f(x) = x^2 - 2x^3$

26. $g(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$

27. $g(x) = \sqrt{9 - x}$

28. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x - 3}$

29. $G(t) = \dfrac{1 - 2t}{3 + t}$

30. $f(x) = x^{3/2}$

31. $f(x) = x^4$

32. a) Dibuje la gráfica de $f(x) = \sqrt{6 - x}$ a partir de la gráfica $y = \sqrt{x}$ y aplicando las transformaciones de la sección 1.3.
b) Use la gráfica del inciso a) para trazar la gráfica de f'.
c) Aplique la definición de derivada para hallar $f'(x)$. ¿Cuáles son los dominios de f y de f'?
d) Utilice un dispositivo graficador para trazar la grafica de f' y compárela con su trazo del inciso b).

33. a) Si $f(x) = x^4 + 2x$, encuentre $f'(x)$.
b) Vea si su respuesta al inciso a) es razonable comparando las graficas de f y de f'.

34. a) Si $f(x) = x + 1/x$, encuentre $f'(x)$.
b) Vea si su respuesta al inciso a) es razonable comparando las graficas de f y de f'.

35. La tasa de desempleo $U(t)$ varía con el tiempo. La tabla del Bureau of Labor Statistics (Oficina de Estadísticas de Empleo) proporciona el porcentaje de desempleados en la fuerza laboral de EU de 1999 a 2008.

t	$U(t)$	t	$U(t)$
1999	4.2	2004	5.5
2000	4.0	2005	5.1
2001	4.7	2006	4.6
2002	5.8	2007	4.6
2003	6.0	2008	5.8

a) ¿Cuál es el significado de $U'(t)$? ¿Cuáles son sus unidades?
b) Elabore una tabla de valores estimados para $U'(t)$.

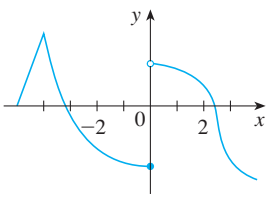
36. Sea $P(t)$ el porcentaje de estadounidenses por debajo de 18 años de edad en el instante t. La tabla proporciona valores de esta función en los años en que se levantó un censo de 1950 a 2000.

t	$P(t)$	t	$P(t)$
1950	31.1	1980	28.0
1960	35.7	1990	25.7
1970	34.0	2000	25.7

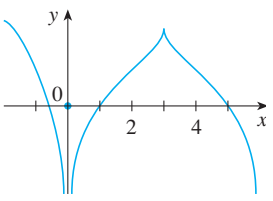
a) ¿Cuál es el significado de $P'(t)$? ¿Cuáles son sus unidades?
b) Elabore una tabla de valores para $P'(t)$.
c) Dibuje P y P'.
d) ¿Cómo sería posible obtener valores más precisos para $P'(t)$?

37-40 Se proporciona la gráfica de f. Establezca con argumentos, los números en los cuales f no es derivable.

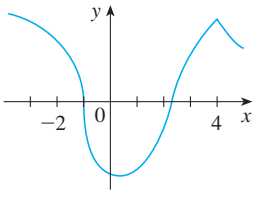
37.



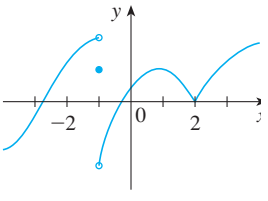
38.



39.



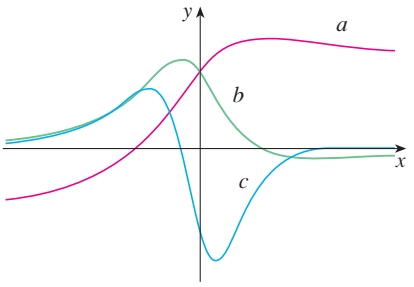
40.



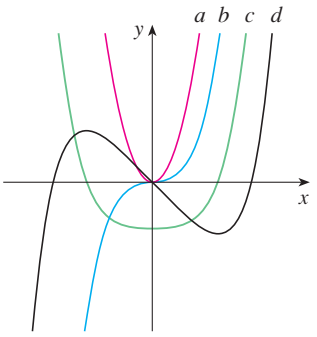
41. Grafique la función $f(x) = x + \sqrt{|x|}$. Haga acercamientos sucesivos primero hacia el punto $(-1, 0)$ y luego en dirección al origen. ¿Qué diferencia existe en cuanto al comportamiento de f en las cercanías de estos dos puntos? ¿Qué conclusiones infiere acerca de la derivabilidad de f?

42. Haga un acercamiento hacia los puntos $(1, 0)$, $(0, 1)$ y $(-1, 0)$ sobre la gráfica de la función $g(x) = (x^2 - 1)^{2/3}$. ¿Que observa? Registre lo que observa en términos de la derivabilidad de g.

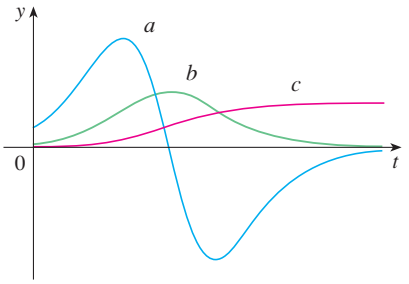
43. La figura muestra las graficas de f, f' y f''. Indique cada curva y explique el porqué de su elección.



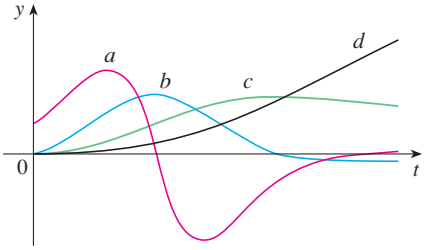
44. La figura muestra gráficas de f, f', f'' y f'''. Identifique cada curva y explique las razones de su elección.



45. La figura exhibe las gráficas de tres funciones. Una es la función posición de un automóvil, otra es la velocidad del mismo, y la de su aceleración. Identifique cada curva y explique las razones de su elección.



46. La figura muestra las gráficas de cuatro funciones relacionadas con el movimiento de un automóvil: la de posición, la de velocidad, la de aceleración y la del jerk. Identifique cada curva y explique los motivos de su elección.

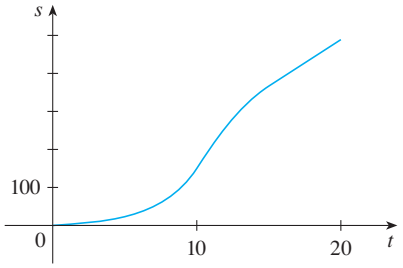


47-48 Utilice la definición de derivada para hallar $f'(x)$ y $f''(x)$. Después, grafique f, f' y f'' en una misma pantalla y verifique para ver si sus respuestas son razonables.

47. $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ **48.** $f(x) = x^3 - 3x$

49. Si $f(x) = 2x^2 - x^3$, encuentre $f'(x), f''(x)$ y $f'''(x)$ y $f^{(4)}(x)$. Grafique f, f' f'' y f''' en una misma pantalla. ¿Las gráficas son consistentes con la interpretación geométrica de estas derivadas?

50. a) Se muestra la gráfica de una función posición de un automóvil, donde s se mide en pies y t en segundos. Utilice la gráfica de la velocidad y la aceleración del automóvil. ¿Cuá1 es la aceleración en $t = 10$ segundos?



b) Utilice la curva de aceleración del inciso a) para estimar el jerk en $t = 10$ segundos. ¿Cuáles son las unidades del jerk?

51. Sea $f(x) = \sqrt[3]{x}$.
a) Si $a \neq 0$, utilice la ecuación 2.7.5 para hallar $f'(a)$.
b) Demuestre que $f'(0)$ no existe.
c) Demuestre que $y = \sqrt[3]{x}$ tiene una recta tangente vertical en (0, 0). (*Recuerde:* la forma de la función de f. Véase la figura 13 de la sección 1.2.)

52. a) Si $g(x) = x^{2/3}$, demuestre que $g'(0)$ no existe.
b) Si $a \neq 0$, encuentre $g'(a)$.
c) Demuestre que $y = x^{2/3}$ tiene una recta tangente vertical en (0, 0).
d) Ilustre el inciso c) graficando $y = x^{2/3}$.

53. ¿Demuestre que la función $f(x) = |x - 6|$ no es derivable en $x = 6$. Encuentre una fórmula para f' y trace su gráfica.

54. ¿Dónde no es derivable la función entero mayor $f(x) = [\![x]\!]$? Encuentre una fórmula para f' y trace su gráfica.

55. a) Dibuje la gráfica de la función $f(x) = x\,|x|$.
b) ¿Para qué valores de x es f derivable?
c) Encuentre una fórmula para f'.

56. Las **derivadas por la izquierda** y **por la derecha** de f en $x = a$ están definidas por

$$f'_-(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

y

$$f'_+(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

si estos límites existen. En tal caso, $f'(a)$ existe si y sólo si estas derivadas laterales existen y son iguales.
a) Halle $f'_-(4)$ y $f'_+(4)$ para la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 5 - x & \text{si } 0 < x < 4 \\ \dfrac{1}{5 - x} & \text{si } x \geqslant 4 \end{cases}$$

b) Dibuje la grafica de f
c) ¿Dónde es discontinua f?
d) ¿Dónde f no es derivable?

57. Recuerde que a una función f se le denomina *par* si $f(-x) = f(x)$ para toda x en su dominio, e *impar* si $f(-x) = -f(x)$ para toda x. Demuestre cada uno de los siguientes enunciados
a) La derivada de una función par es una función impar.
b) La derivada de una función impar es una función par.

58. Cuando abre el grifo del agua caliente, la temperatura T del agua depende del tiempo que el agua ha estado corriendo.
a) Trace una posible gráfica de T como función del tiempo transcurrido desde que abrió el grifo.
b) Describa cómo varía la razón de cambio de T respecto a t, conforme ésta aumenta.
c) Dibuje la derivada de T.

59. Sea ℓ la recta tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto (1, 1). El *ángulo de inclinación* de ℓ es el ángulo ϕ que ℓ forma con la dirección positiva del eje x. Calcule ϕ con una aproximación al grado más cercano.

2 Repaso

Verificación de conceptos

1. Explique qué significa cada una de las siguientes afirmaciones e ilustre mediante un esbozo.

a) $\lim_{x \to a} f(x) = L$ b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

c) $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ d) $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$

e) $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

2. Describa varias formas en que un límite puede no existir. Ilustre con gráficas.

3. Enuncie las siguientes leyes de los límites.
a) Ley de la suma b) Ley de la diferencia
c) Ley del múltiplo constante d) Ley del producto
e) Ley del cociente f) Ley de la potencia
g) Ley de la raíz

4. ¿Qué establece el teorema de la compresión?

5. a) ¿Qué quiere darse a entender al decir que la recta $x = a$ es una asíntota vertical de la curva $y = f(x)$? Dibuje curvas para ilustrar las diversas posibilidades.
b) ¿Qué significa decir que la recta $y = L$ es una asíntota horizontal de la curva $y = f(x)$? Dibuje curvas para ilustrar las diversas posibilidades.

6. ¿Cuál de las curvas siguientes tiene asíntotas verticales? ¿Cuál tiene asíntotas horizontales?
(a) $y = x^4$ (b) $y = \operatorname{sen} x$
(c) $y = \tan x$ (d) $y = \tan^{-1} x$
(e) $y = e^x$ (f) $y = \ln x$
(g) $y = 1/x$ (h) $y = \sqrt{x}$

7. a) ¿Qué significa que f sea continua en $x = a$?
b) ¿Qué significa que f sea continua sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$? ¿Qué puede decir acerca de la gráfica de tal función?

8. ¿Qué establece el teorema del valor intermedio?

9. Escriba una expresión para la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$.

10. Suponga que un objeto se mueve a lo largo de una línea recta con posición $f(t)$ en el instante t. Escriba una expresión para la velocidad instantánea de un objeto en el instante $t = a$. ¿Cómo puede interpretar esta velocidad en términos de la grafica de f?

11. Si $y = f(x)$ y x cambia de x_1 a x_2, escriba expresiones para lo siguiente.
a) La razón promedio de cambio de y respecto a x a lo largo del intervalo $[x_1, x_2]$.
b) La razón de cambio instantáneo de y respecto a x en $x = x_1$.

12. Defina la derivada $f'(a)$. Analice dos maneras de interpretar este número.

13. Defina la segunda derivada de f. Si $f(t)$ es la función de posición de una partícula, ¿cómo puede interpretar la segunda derivada?

14. a) ¿Qué significa que f sea derivable en $x = a$?
b) ¿Cuál es la relación entre la derivabilidad y la continuidad de una función?
c) Trace la gráfica de una función que sea continua, pero no derivable en $a = 2$.

15. Describa varias maneras en que una función puede no ser derivable. Ilustre con gráficas.

Examen rápido Verdadero-Falso

Determine si la proposición es verdadera o falsa. Si es verdadera explique por qué. Si es falsa, explique por qué o dé un ejemplo que refute la proposición.

1. $\lim_{x\to 4}\left(\dfrac{2x}{x-4} - \dfrac{8}{x-4}\right) = \lim_{x\to 4}\dfrac{2x}{x-4} - \lim_{x\to 4}\dfrac{8}{x-4}$

2. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+6x-7}{x^2+5x-6} = \dfrac{\lim_{x\to 1}(x^2+6x-7)}{\lim_{x\to 1}(x^2+5x-6)}$

3. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x-3}{x^2+2x-4} = \dfrac{\lim_{x\to 1}(x-3)}{\lim_{x\to 1}(x^2+2x-4)}$

4. Si $\lim_{x\to 5} f(x) = 2$ y $\lim_{x\to 5} g(x) = 0$, entonces $\lim_{x\to 5}[f(x)/g(x)]$ no existe.

5. Si $\lim_{x\to 5} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to 5} g(x) = 0$, entonces $\lim_{x\to 5}[f(x)/g(x)]$ no existe.

6. Si $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$ no existen, entonces $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)]$ no existe.

7. Si $\lim_{x\to a} f(x)$ existe, pero $\lim_{x\to a} g(x)$ no existe, entonces $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)]$ no existe.

8. Si $\lim_{x\to 6}[f(x)\,g(x)]$ existe, entonces el límite debe ser $f(6)\,g(6)$.

9. Si p es un polinomio, entonces $\lim_{x\to b} p(x) = p(b)$.

10. Si $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to 0} g(x) = \infty$, entonces $\lim_{x\to 0}[f(x) - g(x)] = 0$.

11. Una función puede tener dos asíntotas horizontales distintas.

12. Si f tiene dominio $[0, \infty)$ y no tiene asíntota horizontal entonces $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ o $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.

13. Si la recta $x = 1$ es una asíntota vertical de $y = f(x)$, entonces f no está definida en 1.

14. Si $f(1) > 0$ y $f(3) < 0$, entonces existe un número c entre 1 y 3 tal que $f(c) = 0$.

15. Si f es continua en 5 y $f(5) = 2$ y $f(4) = 3$, entonces $\lim_{x\to 2} f(4x^2 - 11) = 2$.

16. Si f es continua en $[-1, 1]$ y $f(-1) = 4$ y $f(1) = 3$, entonces existe un número r tal que $|r| < 1$ y $f(r) = \pi$.

17. Sea f una función tal que $\lim_{x\to 0} f(x) = 6$. Entonces existe un número δ tal que si $0 < |x| < \delta$, entonces $|f(x) - 6| < 1$.

18. Si $f(x) > 1$ para toda x y $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe, entonces $\lim_{x\to 0} f(x) > 1$.

19. Si f es continua en $x = a$, entonces f es derivable en $x = a$.

20. Si $f'(r)$ existe, entonces $\lim_{x\to r} f(x) = f(r)$.

21. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$

22. La ecuación $x^{10} - 10x^2 + 5 = 0$ tiene una raíz en el intervalo $(0, 2)$.

23. Si f es continua en $x = a$, también lo es $|f|$.

24. Si $|f|$ es continua en $x = a$, también lo es $|f|$.

Ejercicios

1. Se da la gráfica de f.

a) Encuentre cada uno de los siguientes límites o explique por qué no existen.

i) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ ii) $\lim_{x\to -3^+} f(x)$

iii) $\lim_{x\to -3} f(x)$ iv) $\lim_{x\to 4} f(x)$

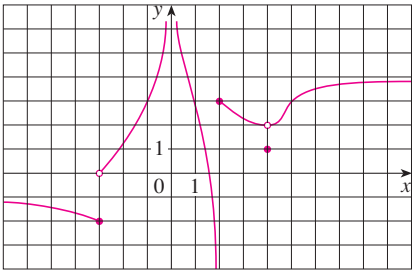
v) $\lim_{x\to 0} f(x)$ vi) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$

vii) $\lim_{x\to \infty} f(x)$ viii) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$

b) Establezca las ecuaciones de las asíntotas horizontales.

c) Establezca las ecuaciones de las asíntotas verticales.

d) ¿En qué números f es discontinua? Explique.



2. Trace la gráfica de un ejemplo de una función f que satisfaga todas las condiciones siguientes

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -2$, $\lim_{x\to \infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to -3} f(x) = \infty$,

$\lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 2$,

f es continua por la derecha en $x = 3$

3-20 Encuentre cada uno de los siguientes límites

3. $\lim_{x\to 1} e^{x^3-x}$

4. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x^2+2x-3}$

5. $\lim_{x\to -3} \dfrac{x^2-9}{x^2+2x-3}$

6. $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-9}{x^2+2x-3}$

7. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(h-1)^3+1}{h}$

8. $\lim_{t\to 2} \dfrac{t^2-4}{t^3-8}$

9. $\lim_{r\to 9} \dfrac{\sqrt{r}}{(r-9)^4}$

10. $\lim_{v\to 4^+} \dfrac{4-v}{|4-v|}$

11. $\lim_{u\to 1} \dfrac{u^4-1}{u^3+5u^2-6u}$

12. $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+6}-x}{x^3-3x^2}$

13. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{2x-6}$

14. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{2x-6}$

15. $\lim_{x\to \pi^-} \ln(\operatorname{sen} x)$

16. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{1-2x^2-x^4}{5+x-3x^4}$

17. $\lim_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2+4x+1}-x\right)$

18. $\lim_{x\to \infty} e^{x-x^2}$

19. $\lim_{x\to 0^+} \tan^{-1}(1/x)$

20. $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)$

21-22 Utilice las gráficas para evidenciar las asíntotas de la curva. Después, pruebe que realmente son evidencias.

21. $y = \dfrac{\cos^2 x}{x^2}$

22. $y = \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x}$

23. Si $2x - 1 \leq f(x) \leq x^2$ para $0 < x < 3$, encuentre $\lim_{x\to 1} f(x)$.

24. Demuestre que $\lim_{x\to 0} x^2 \cos(1/x^2) = 0$.

25-28 Demuestre cada uno de los siguientes resultados, utilizando la definición precisa de límite.

25. $\lim_{x\to 2} (14 - 5x) = 4$

26. $\lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x} = 0$

27. $\lim_{x\to 2} (x^2 - 3x) = -2$

28. $\lim_{x\to 4^+} \dfrac{2}{\sqrt{x-4}} = \infty$

29. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \\ 3 - x & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ (x-3)^2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

a) Evalúe cada límite, si éste existe

i) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ ii) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ iii) $\lim_{x\to 0} f(x)$

iv) $\lim_{x\to 3^-} f(x)$ v) $\lim_{x\to 3^+} f(x)$ vi) $\lim_{x\to 3} f(x)$

b) ¿Dónde es discontinua f?

c) Trace la gráfica de f

30. Sea

$$g(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 2 - x & \text{si } 2 < x \leq 3 \\ x - 4 & \text{si } 3 < x < 4 \\ \pi & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

a) Para cada uno de los números 2, 3 y 4, descubra si g es continua por la izquierda, por la derecha o continua en el número.

b) Bosqueje la gráfica de g.

Se requiere calculadora graficadora o computadora

31-32 Demuestre que cada una de las siguientes funciones es continua en su dominio. Establézcalo.

31. $h(x) = xe^{\operatorname{sen} x}$

32. $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^2 - 2}$

33-34 Utilice el teorema del valor intermedio para demostrar que existe una raíz de la ecuación en el intervalo dado.

33. $x^5 - x^3 + 3x - 5 = 0, \quad (1, 2)$

34. $\cos\sqrt{x} = e^x - 2, \quad (0, 1)$

35. a) Encuentre la pendiente de la recta tangente a la curva $y = 9 - 2x^2$ en el punto (2, 1).
b) Determine la ecuación de esta tangente.

36. Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva

$$y = \frac{2}{1 - 3x}$$

y los puntos de abscisas 0 y -1.

37. El desplazamiento en metros de un objeto que se mueve en línea recta está dado por $s = 1 + 2t + \frac{1}{4}t^2$, donde t se mide en segundos.
a) Encuentre la velocidad promedio en los siguientes periodos de tiempo:
i) $[1, 3]$ ii) $[1, 2]$
iii) $[1, 1.5]$ iv) $[1, 1.1]$
b) Halle la velocidad instantánea cuando $t = 1$.

38. Según la ley de Boyle, si la temperatura de un gas confinado se mantiene fija, entonces el producto de la presión P y el volumen V es constante. Suponga que, para cierto gas, $PV = 800$, donde P se mide en libras por pulgada cuadrada y V en pulgadas cúbicas.
a) Encuentre la razón de cambio promedio de P cuando V se incrementa de 200 a 250 pulg^3.
b) Exprese V como función de P y demuestre que la razón de cambio instantáneo de V respecto a P es inversamente proporcional al cuadrado de ésta.

39. a) Utilice la definición de derivada para hallar $f'(2)$, donde $f(x) = x^3 - 2x$.
b) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 - 2x$ en el punto (2, 4).
c) Ilustre el inciso b) dibujando la curva y la recta tangente en la misma pantalla.

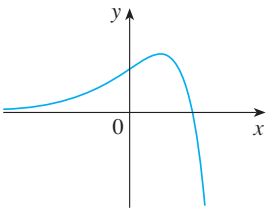
40. Encuentre una función f y un número $x = a$ tales que

$$\lim_{h \to 0} \frac{(2 + h)^6 - 64}{h} = f'(a)$$

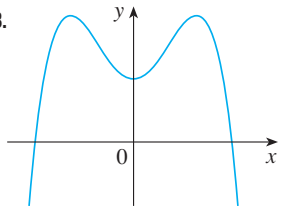
41. El costo total de pagar un préstamo para estudiante a una tasa de interés de $r\%$ por año es $C = f(r)$.
a) ¿Cuál es el significado de la derivada $f'(r)$? ¿Cuáles son sus unidades?
b) ¿Que significa la afirmación $f'(10) = 1\,200$?
c) ¿$f'(r)$ siempre es positiva o cambia de signo?

42-44 Trace o copie la gráfica de la función dada. Luego dibuje directamente debajo su derivada.

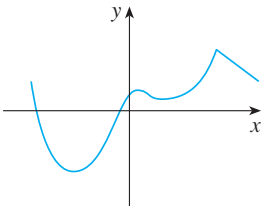
42.



43.



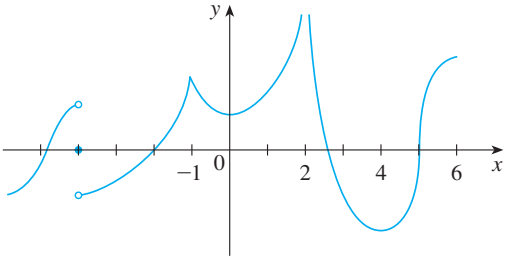
44.



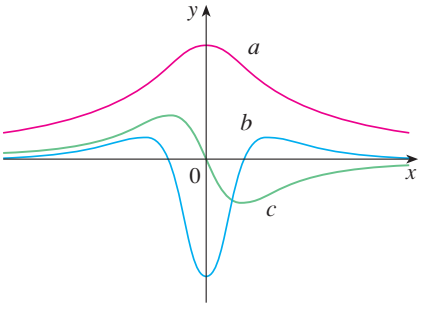
45. a) Si $f(x) = \sqrt{3 - 5x}$, utilice la definición de derivada para hallar $f'(x)$.
b) Encuentre los dominios de f y f'.
c) Grafique f y f' en una pantalla común. Compare las gráficas para ver si su respuesta al inciso a) es razonable.

46. a) Encuentre las asíntotas de la grafica de $f(x) = \dfrac{4 - x}{3 + x}$ y utilícelas para dibujar la gráfica.
b) Utilice la grafica del inciso a) para graficar f'.
c) Aplique la definición de derivada para hallar $f'(x)$.
d) Utilice un dispositivo graficador para trazar la gráfica de f' y compárela con su dibujo del inciso b).

47. Se muestra la grafica de f. Enuncie, con razones, los números x en que f no es derivable.



48. La figura muestra la grafica de f, f' y f''. Identifique cada curva y explique su elección.



49. Sea $C(t)$ el valor total de certificados bancarios en circulación en el instante t. La tabla de valores de esta función de 1980 a 2000, en miles de millones de dólares. Estime e interprete el valor de $C'(1990)$.

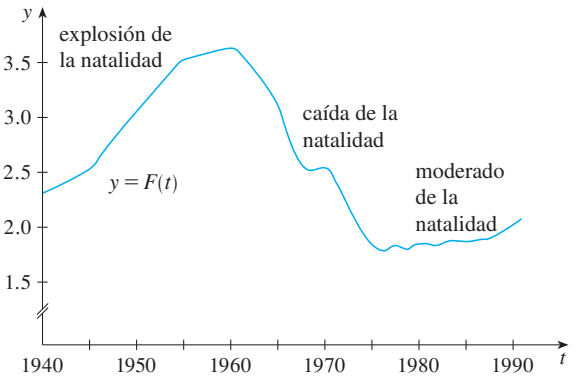
t	1980	1985	1990	1995	2000
$C(t)$	129.9	187.3	271.9	409.3	568.6

50. La *tasa de fertilidad total*, en el tiempo t, denotada con $F(t)$, es una estimación del número promedio de niños nacidos de cada mujer (suponiendo que las tasas de natalidad actuales permanezcan constantes). En la gráfica de la tasa de fertilidad total en EU, se muestran las fluctuaciones desde 1940 hasta 1990.

a) Estime los valores de $F'(1950)$, $F'(1965)$ y $F'(1987)$.

b) ¿Cuáles son los significados de estas derivadas?

c) ¿Puede sugerir razones para los valores de estas derivadas?



51. Suponga que $|f(x)| \leq g(x)$ donde $\lim_{x \to a} g(x) = 0$. Encuentre $\lim_{x \to a} f(x)$.

52. Sea $f(x) = [\![x]\!] + [\![-x]\!]$.

a) ¿Para qué valores de a existe $\lim_{x \to a} f(x)$?

b) ¿En qué números es discontinua la función f?

Problemas adicionales

En el análisis de los principios para la resolución de problemas, se consideró la estrategia para resolver problemas llamada Introduzca algo extra (véase la página 75). En el ejemplo siguiente se muestra cómo este principio resulta útil a veces cuando evalúa límites. La idea es cambiar la variable —introducir una nueva variable relacionada con la original— de tal manera que el problema se haga más sencillo. Más adelante, en la sección 5.5, utilizará más esta idea general.

EJEMPLO 1 Evalúe $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1 + cx} - 1}{x}$, donde $c \neq 0$ es una constante.

SOLUCIÓN Según se ve, este límite parece desafiante. En la sección 2.3 evaluamos varios límites en los que tanto el numerador como el denominador tendieron a 0. Allí, la estrategia fue realizar cierto tipo de manipulación algebraica que condujo a una cancelación simplificadora, pero en este caso no está claro qué clase de álgebra se necesita.

Por tanto, se introduce una nueva variable t mediante la ecuación

$$t = \sqrt[3]{1 + cx}$$

También necesitamos expresar x en términos de t, de modo que resuelva esta ecuación

$$t^3 = 1 + cx \qquad x = \frac{t^3 - 1}{c} \quad (\text{si } c \neq 0)$$

Observe que $x \to 0$ equivalente a $t \to 1$. Esto permite convertir el límite dado en uno que involucra la variable t:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1 + cx} - 1}{x} = \lim_{t \to 1} \frac{t - 1}{(t^3 - 1)/c}$$

$$= \lim_{t \to 1} \frac{c(t - 1)}{t^3 - 1}$$

El cambio de variable permitió reemplazar un límite relativamente complicado con uno más sencillo de un tipo que ya ha visto. Si factoriza el denominador como un diferencia de cubos, obtiene

$$\lim_{t \to 1} \frac{c(t - 1)}{t^3 - 1} = \lim_{t \to 1} \frac{c(t - 1)}{(t - 1)(t^2 + t + 1)}$$

$$= \lim_{t \to 1} \frac{c}{t^2 + t + 1} = \frac{c}{3}$$

Mediante el cambio de variable tuvimos que excluir el caso en que $c = 0$: pero si $c = 5$, la función es 0 para toda $x \neq 0$, así, el límite es 0. En consecuencia, en todos los casos, el límite es $c/3$.

Los problemas siguientes sirven para poner a prueba y desafiar sus habilidades para resolver problemas. Algunos requieren una cantidad considerable de tiempo para pensar, de modo que no se desaliente si no los puede resolver de inmediato. Si tiene alguna dificultad, quizá le sirva consultar en la página 75 el análisis de los principios para la resolución de problemas.

Problemas

1. Evalúe $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$.

2. Encuentre números a y b tales que $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{ax + b} - 2}{x} = 1$.

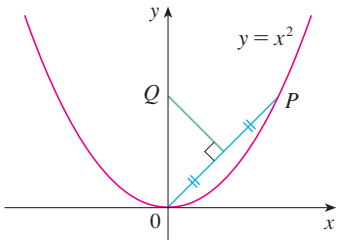


FIGURA PARA EL PROBLEMA 4

3. Evalúe $\lim_{x \to 0} \dfrac{|2x - 1| - |2x + 1|}{x}$.

4. En la figura se muestra un punto P sobre la parábola $y = x^2$ y el punto Q donde la bisectriz de OP interseca al eje y. Conforme P se aproxima al origen, a lo largo de la parábola, ¿qué sucede con Q? ¿Tiene una posición límite? Si es así, encuéntrela.

5. Evalúe los siguientes límites, si éstos existen, donde $[\![x]\!]$ denota la función entero mayor.

a) $\lim_{x \to 0} \dfrac{[\![x]\!]}{x}$ b) $\lim_{x \to 0} x\,[\![1/x]\!]$

6. Dibuje la región en el plano definida por cada una de las ecuaciones siguientes:

a) $[\![x]\!]^2 + [\![y]\!]^2 = 1$ b) $[\![x]\!]^2 - [\![y]\!]^2 = 3$ c) $[\![x + y]\!]^2 = 1$ d) $[\![x]\!] + [\![y]\!] = 1$

7. Encuentre todos los valores de a tales que f sea continua en $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq a \\ x^2 & \text{si } x > a \end{cases}$$

8. Un **punto fijo** de una función f es un número c en su dominio tal que $f(c) = c$. (La función no mueve a c; éste permanece fijo.)

a) Dibuje la gráfica de una función continua con dominio $[0, 1]$ cuyo rango también se encuentre en $[0, 1]$. Localice un punto fijo de f.

b) Intente graficar una función continua con dominio $[0, 1]$ y rango en $[0, 1]$ que *no* tenga un punto fijo. ¿Cuál es el obstáculo?

c) Utilice el teorema de valor intermedio para comprobar que cualquier función continua con dominio $[0, 1]$ y rango en $[0, 1]$ debe tener un punto fijo.

9. Si $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = 2$ y $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = 1$, encuentre $\lim_{x \to a} [f(x)\,g(x)]$.

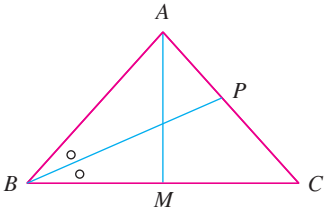


FIGURA PARA EL PROBLEMA 10

10. a) En la figura se muestra un triángulo isósceles ABC con $\angle B = \angle C$. La bisectriz del ángulo B interseca el lado AC en el punto P. Suponga que la base BC permanece fija, pero que la altura $|\,AM\,|$ del triángulo tiende a 0, de modo que A se aproxima al punto medio M de BC. ¿Qué sucede con P durante este proceso? ¿Tiene una posición límite? Si es así, encuéntrela.

b) Intente trazar la trayectoria recorrida por P durante este proceso. A continuación, halle la ecuación de esta curva y úsela para dibujarla.

11. a) Si parte de 0° de latitud y avanza en dirección Oeste, puede denotar con $T(x)$ la temperatura en el punto x en cualquier tiempo dado. Suponga que T es una función continua de x, y demuestre que, en cualquier tiempo fijo, existen por lo menos dos puntos opuestos sobre el ecuador que tienen exactamente la misma temperatura.

b) ¿E1 resultado del inciso a) se cumple para puntos que estén sobre cualquier circunferencia sobre la superficie de la Tierra?

c) ¿El resultado del inciso a) se cumple para la presión barométrica y para la altitud arriba del nivel del mar?

12. Si f es una función derivable y $g(x) = xf(x)$, utilice la definición de derivada para demostrar que $g'(x) = xf'(x) + f(x)$.

13. Suponga que f es una función que satisface

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + x^2y + xy^2$$

para todos los números reales x y y. Suponga también que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$$

a) Encuentre $f(0)$. b) Encuentre $f'(0)$. c) Encuentre $f'(x)$.

14. Suponga que f es una función con la propiedad de que $|\,f(x)\,| \leq x^2$ para toda x. Muestre que $f(0) = 0$. Enseguida, muestre que $f'(0) = 0$.

3 Reglas de derivación



Para que un paseo en montaña rusa sea suave, los tramos rectos de la pista deben estar conectados a los segmentos curvos de manera que no se produzcan cambios bruscos de dirección. En el proyecto de la página 184, veremos la forma de diseñar el primer ascenso y caída de una nueva montaña rusa para lograr esta suavidad en el paseo.

© Brett Mulcahy / Shutterstock

Hasta aquí hemos visto cómo interpretar las derivadas en términos de pendientes y razones de cambio, y hemos estudiado cómo estimar las derivadas de funciones dadas por medio de tablas de valores. También hemos aprendido la manera de graficar las derivadas de funciones que se definen gráficamente y utilizado la definición de derivada para calcular las derivadas de funciones definidas mediante fórmulas. Pero sería tedioso si siempre tuviera que aplicar la definición, de modo que en este capítulo se desarrollan reglas para hallar derivadas sin tener que usar directamente esa definición. Estas reglas de derivación permiten calcular con relativa facilidad derivadas de funciones polinomiales, racionales, algebraicas, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y trigonométricas inversas. A continuación usaremos estas reglas para resolver problemas en que intervienen razones de cambio y la aproximación de funciones.

3.1 Derivadas de funciones polinomiales y exponenciales

En esta sección aprenderá la manera de derivar funciones constantes, potencia, polinomiales y exponenciales.

Empezamos por la más sencilla de todas las funciones: la función constante $f(x) = c$. La gráfica de esta función es la recta horizontal $y = c$, la cual tiene pendiente 0, de modo que debe tener $f'(x) = 0$. (Véase la figura 1.) Una demostración formal, a partir de la definición de derivada, también es fácil:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

En la notación de Leibniz, esta regla se expresa como sigue.

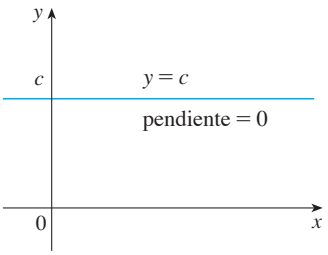


FIGURA 1
La gráfica de $f(x) = c$ es la recta $y = c$; por tanto, $f'(x) = 0$.

Derivada de una función constante

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

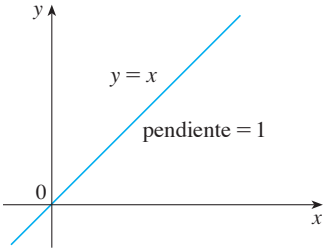


FIGURA 2
La grafica de $f(x) = x$ es la recta $y = x$; por tanto, $f'(x) = 1$.

Función potencia

Enseguida, se consideran las funciones $f(x) = x^n$, donde n es un entero positivo. Si $n = 1$, la gráfica de $f(x) = x$ es la recta $y = x$, la cual tiene pendiente 1 (véase la figura 2). De modo que

$$\boxed{1} \qquad \frac{d}{dx}(x) = 1$$

(También puede demostrar la ecuación 1 a partir de la definición de derivada.) Ya hemos investigado los casos $n = 2$ y $n = 3$. En efecto, en la sección 2.8 (ejercicios 19 y 20) encontramos que

$$\boxed{2} \qquad \frac{d}{dx}(x^2) = 2x \qquad \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$$

Para $n = 4$, encontramos la derivada de $f(x) = x^4$ como sigue:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^4 - x^4}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 - x^4}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3) = 4x^3 \end{aligned}$$

Así,

$$\boxed{3} \qquad \frac{d}{dx}(x^4) = 4x^3$$

Si compara las ecuaciones 1, 2 y 3, se observa un patrón. Parece razonable presuponer que, cuando n es un entero positivo, $(d/dx)(x^n) = nx^{n-1}$. Esto resulta cierto.

Regla de la potencia Si n es un entero positivo, entonces

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

PRIMERA DEMOSTRACIÓN La fórmula

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1})$$

puede verificarse simplemente multiplicando el lado derecho (o mediante la suma del segundo factor como una serie geométrica). Si $f(x) = x^n$, podemos utilizar la ecuación 2.7.5 para $f'(a)$ y la ecuación anterior para escribir

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} \\ &= \lim_{x \to a} (x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1}) \\ &= a^{n-1} + a^{n-2}a + \cdots + aa^{n-2} + a^{n-1} \\ &= na^{n-1} \end{aligned}$$

SEGUNDA DEMOSTRACIÓN

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^n - x^n}{h}$$

El teorema del binomio se da en la página de referencia 1.

Al hallar la derivada de x^4, tuvimos que desarrollar $(x + h)^4$. En este caso, necesitamos desarrollar $(x + h)^n$ y, para hacerlo, utilizamos el teorema del binomio:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{\left[x^n + nx^{n-1}h + \dfrac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n\right] - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{nx^{n-1}h + \dfrac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right] \\ &= nx^{n-1} \end{aligned}$$

porque todos los términos, excepto el primero, tienen h como factor, y, por tanto, tienden a 0.

En el ejemplo 1 se ilustra la regla de la potencia usando varias notaciones.

EJEMPLO 1

a) Si $f(x) = x^6$, entonces $f'(x) = 6x^5$. b) Si $y = x^{1000}$, entonces $y' = 1000x^{999}$.

c) Si $y = t^4$, entonces $\dfrac{dy}{dt} = 4t^3$. d) Si $\dfrac{d}{dr}(r^3) = 3r^2$

¿Qué puede decirse acerca de las funciones potencia con exponentes enteros negativos? En el ejercicio 61 se pide al lector que verifique, a partir de la definición de derivada, que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$$

Por lo que podemos escribir de nuevo esta ecuación como

$$\frac{d}{dx}(x^{-1}) = (-1)x^{-2}$$

y, por consiguiente, la regla de la potencia se cumple cuando $n = -1$. De hecho, en la sección siguiente [ejercicio 62c)] se demuestra que se cumple para todos los enteros negativos.

¿Qué sucede si el exponente es una fracción? En el ejemplo 3 de la sección 2.8 encontramos que

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

lo cual puede escribirse como

$$\frac{d}{dx}(x^{1/2}) = \tfrac{1}{2}x^{-1/2}$$

Esto hace ver que la regla de la potencia es verdadera incluso cuando $n = \frac{1}{2}$. De hecho, en la sección 3.6 se demuestra que es verdadera para todos los números reales n.

Regla de la potencia (versión general) Si n es cualquier número real, entonces

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

En la figura 3 se muestra la función y el ejemplo 2b) y su derivada y'. Advierta que y no es derivable en 0 (y' no está definida allí). Observe que y' es positiva cuando y crece, y negativa cuando y decrece.

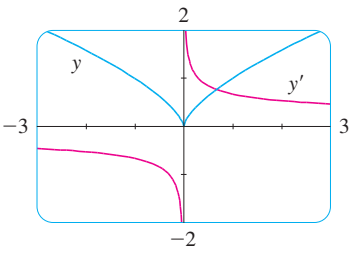


FIGURA 3
$y = \sqrt[3]{x^2}$

EJEMPLO 2 Derive:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ b) $y = \sqrt[3]{x^2}$

SOLUCIÓN En cada caso, reescriba la función como una potencia de x.

a) Dado que $f(x) = x^{-2}$, utilizamos la regla de la potencia con $n = -2$:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^{-2}) = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

b)
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x^2}\right) = \frac{d}{dx}(x^{2/3}) = \tfrac{2}{3}x^{(2/3)-1} = \tfrac{2}{3}x^{-1/3}$$

La regla de la potencia permite hallar las rectas tangentes sin hacer uso de la definición de derivada. Además, permite encontrar *rectas normales*. La **recta normal** a una curva C en un punto P es la recta a través de P que es perpendicular a la recta tangente en P. (En el estudio de la óptica, necesita considerar el ángulo entre un rayo de luz y la recta normal a un lente.)

V EJEMPLO 3 Halle la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la curva $y = x\sqrt{x}$ en el punto (1, 1). Ilustre dibujando la curva y estas rectas.

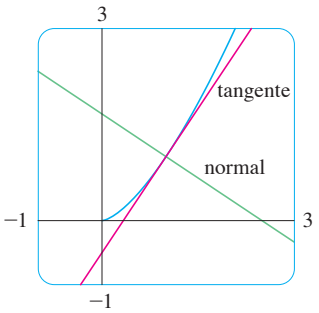


FIGURA 4
$y = x\sqrt{x}$

SOLUCIÓN La derivada de $f(x) = x\sqrt{x} = xx^{1/2} = x^{3/2}$ es

$$f'(x) = \tfrac{3}{2}x^{(3/2)-1} = \tfrac{3}{2}x^{1/2} = \tfrac{3}{2}\sqrt{x}$$

De este modo, la pendiente de la recta tangente en (1, 1) es $f'(1) = \frac{3}{2}$. Por consiguiente, la ecuación de la recta tangente es

$$y - 1 = \tfrac{3}{2}(x - 1) \quad \text{o bien} \quad y = \tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{2}$$

La recta normal es perpendicular a la recta tangente de tal manera que su pendiente es el recíproco negativo de $\frac{3}{2}$, es decir, $-\frac{2}{3}$. En estos términos, una ecuación de la recta normal es

$$y - 1 = -\tfrac{2}{3}(x - 1) \quad \text{o bien} \quad y = -\tfrac{2}{3}x + \tfrac{5}{3}$$

En la figura 4 se traza la gráfica de la curva y las rectas tangente y normal.

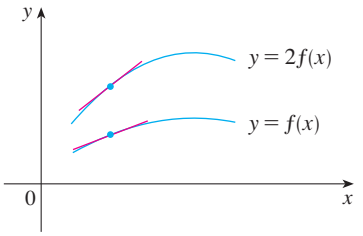
Nuevas derivadas a partir de anteriores

Cuando se forman nuevas funciones a partir de funciones anteriores por adición, sustracción o multiplicación por una constante, sus derivadas pueden calcularse en términos de la derivada de sus funciones anteriores. En particular, en la formula siguiente se afirma que la *derivada de una constante multiplicada por una función es la constante multiplicada por la derivada de la función*.

Regla del múltiplo constante Si c es una constante y f es una función derivable, entonces

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}f(x)$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA REGLA DEL MÚLTIPLO CONSTANTE



La multiplicación por $c = 2$ estira la gráfica verticalmente en un factor de 2. Todas las elevaciones se han duplicado, pero los avances permanecen iguales. Las pendientes también se duplican.

DEMOSTRACIÓN Sea $g(x) = cf(x)$. Entonces

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} c\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] \\ &= c\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{(por la ley 3 de los límites)} \\ &= cf'(x) \end{aligned}$$

EJEMPLO 4

a) $\dfrac{d}{dx}(3x^4) = 3\dfrac{d}{dx}(x^4) = 3(4x^3) = 12x^3$

b) $\dfrac{d}{dx}(-x) = \dfrac{d}{dx}[(-1)x] = (-1)\dfrac{d}{dx}(x) = -1(1) = -1$

La siguiente regla señala que *la derivada de una suma de funciones es la suma de las derivadas*.

Regla de la suma Si f y g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$

Si se utiliza la notación con apóstrofos, puede escribir la regla de la suma como

$$(f + g)' = f' + g'$$

DEMOSTRACIÓN Sea $F(x) = f(x) + g(x)$. Entonces

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \qquad \text{(por la ley 1)} \\ &= f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

La regla de la suma puede extenderse a la suma de cualquier número de funciones. Por ejemplo, si se aplica este teorema dos veces, se obtiene

$$(f + g + h)' = [(f + g) + h]' = (f + g)' + h' = f' + g' + h'$$

Al escribir $f - g$ como $f + (-1)g$ y aplicando la regla de la suma y la del múltiplo constante, se obtiene la siguiente fórmula.

Regla de la diferencia Si tanto f como g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = \frac{d}{dx} f(x) - \frac{d}{dx} g(x)$$

Las reglas de múltiplo constante, la suma y la diferencia pueden combinarse con la regla de la potencia para derivar cualquier función polinomial, como se muestra en los ejemplos que siguen.

EJEMPLO 5

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}(x^8 + 12x^5 - 4x^4 + 10x^3 - 6x + 5) \\ &\quad = \frac{d}{dx}(x^8) + 12\frac{d}{dx}(x^5) - 4\frac{d}{dx}(x^4) + 10\frac{d}{dx}(x^3) - 6\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(5) \\ &\quad = 8x^7 + 12(5x^4) - 4(4x^3) + 10(3x^2) - 6(1) + 0 \\ &\quad = 8x^7 + 60x^4 - 16x^3 + 30x^2 - 6 \end{aligned}$$

V EJEMPLO 6 Encuentre los puntos sobre la curva $y = x^4 - 6x^2 + 4$ donde la recta tangente es horizontal.

SOLUCIÓN Se tienen tangentes horizontales donde la derivada es cero. Observe que,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^4) - 6\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(4) \\ &= 4x^3 - 12x + 0 = 4x(x^2 - 3) \end{aligned}$$

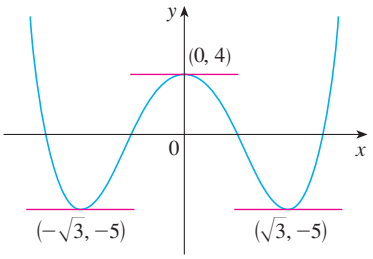


FIGURA 5
La curva $y = x^4 - 6x^2 + 4$ y sus rectas tangentes horizontales

Así, $dy/dx = 0$ si $x = 0$ o $x^2 - 3 = 0$, es decir, $x = \pm\sqrt{3}$. Por tanto, la curva dada tiene rectas tangentes horizontales cuando $\sqrt{3}$ y $-\sqrt{3}$. Los puntos correspondientes son (0, 4), $(\sqrt{3}, -5)$ y $(-\sqrt{3}, -5)$. (Véase la figura 5.)

EJEMPLO 7 La ecuación de movimiento de una partícula es $s = 2t^3 - 5t^2 + 3t + 4$, donde s se mide en centímetros y t en segundos. Hallar la aceleración como una función del tiempo. ¿Cuál es la aceleración después de 2 segundos?

SOLUCIÓN La velocidad y la aceleración son

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 6t^2 - 10t + 3$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 12t - 10$$

La aceleración después de 2 s es $a(2) = 14\,\text{cm/s}^2$.

Funciones exponenciales

Intente calcular la derivada de la función exponencial $f(x) = a^x$, aplicando la definición de derivada:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h}$$

El factor a^x no depende de h, de modo que puede llevarlo delante del límite:

$$f'(x) = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

Observe que el límite es el valor de la derivada de f en 0; esto es,

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = f'(0)$$

En consecuencia, ha demostrado que, si la función exponencial $f(x) = a^x$ es derivable en 0, entonces es derivable para cualquier x; así que

$$f'(x) = f'(0)a^x \qquad (4)$$

En esta ecuación se afirma que *la razón de cambio de cualquier función exponencial es proporcional a la función misma*. (La pendiente es proporcional a la altura.)

En la tabla que aparece a la izquierda, se da una evidencia numérica de la existencia de $f'(0)$ en los casos $a = 2$ y $a = 3$. (Los valores tienen una aproximación correcta a cuatro posiciones decimales.) Parece que los límites existen y

h	$\frac{2^h - 1}{h}$	$\frac{3^h - 1}{h}$
0.1	0.7177	1.1612
0.01	0.6956	1.1047
0.001	0.6934	1.0992
0.0001	0.6932	1.0987

$$\text{para } a = 2, \quad f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{2^h - 1}{h} \approx 0.69$$

$$\text{para } a = 3, \quad f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{3^h - 1}{h} \approx 1.10$$

De hecho, puede demostrarse que estos límites existen y que son correctos hasta seis cifras decimales, los valores son

$$\frac{d}{dx}(2^x)\Big|_{x=0} \approx 0.693147 \qquad \frac{d}{dx}(3^x)\Big|_{x=0} \approx 1.098612$$

Por esto, de la ecuación 4

5
$$\frac{d}{dx}(2^x) \approx (0.69)2^x \qquad \frac{d}{dx}(3^x) \approx (1.10)3^x$$

De todas las elecciones posibles para la base a de la ecuación 4, se tiene la formula más sencilla de derivación cuando $f'(0) = 1$. En vista de las estimaciones de $f'(0)$ para $a = 2$ y $a = 3$, parece razonable que exista un número a entre 2 y 3 para el que $f'(0) = 1$. Es costumbre denotar este valor con la letra e. (De hecho, así se presento e en la sección 1.5.) Apoyado en esto, se tiene la siguiente definición

En el ejercicio 1 verá que e se encuentra entre 2.7 y 2.8. Más adelante podremos demostrar que e con cinco dígitos (o posiciones) decimales es

$$e \approx 2.71828$$

Definición del número e

e es el número tal que $\lim_{h \to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$

Geométricamente, esto significa que, de todas las funciones exponenciales posibles $y = a^x$, la función $f(x) = e^x$ es aquella cuya recta tangente en (0, 1) tiene pendiente $f'(0)$ que es exactamente 1. (Véanse las figuras 6 y 7.)

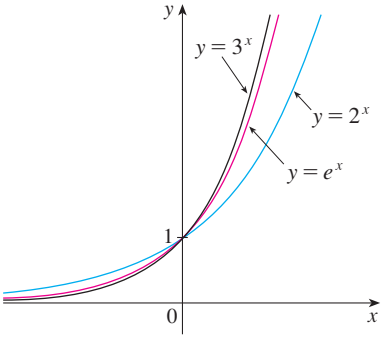


FIGURA 6

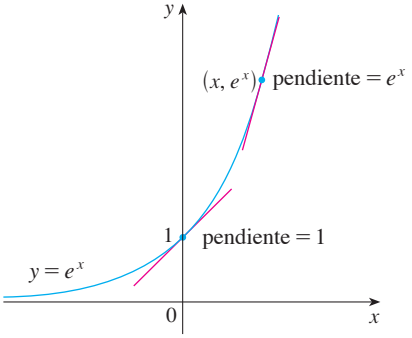


FIGURA 7

Si hacemos $a = e$ y, por tanto, $f'(0) = 1$ en la ecuación 4, se convierte en la importante fórmula de derivación que se proporciona a continuación.

Derivada de la función exponencial natural

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

TEC Visual 3.1 utiliza el comportamiento de una pendiente para ilustrar esta fórmula.

De aquí se ve que la función exponencial $f(x) = e^x$ tiene la propiedad de que es su propia derivada. El significado geométrico de esto es que la pendiente de una recta tangente a la curva $y = e^x$ es igual a la coordenada y del punto (véase la figura 7).

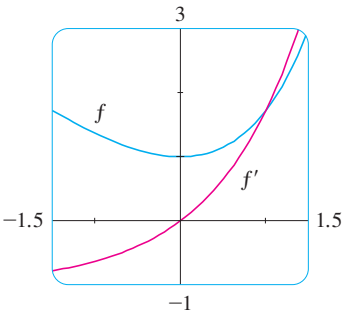


FIGURA 8

V EJEMPLO 8 Si $f(x) = e^x - x$, encuentre f' y f''. Compare las gráficas de f y f'.

SOLUCIÓN Si se aplica la regla de la diferencia, se tiene

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(e^x - x) = \frac{d}{dx}(e^x) - \frac{d}{dx}(x) = e^x - 1$$

En la sección 2.8 se define la segunda derivada como la derivada de f', así que

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(e^x - 1) = \frac{d}{dx}(e^x) - \frac{d}{dx}(1) = e^x$$

La función f y su derivada f' se grafican en la figura 8. Observe que f tiene una recta tangente horizontal cuando $x = 0$; esto corresponde al hecho de que $f'(0) = 0$. Asimismo, observe que para $x > 0$, $f'(x)$ es positiva y f es creciente. Cuando $x < 0$, $f'(x)$ es negativa y f es decreciente.

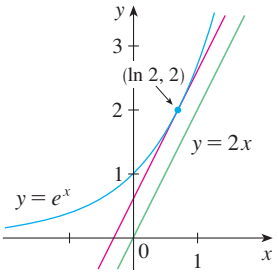


FIGURA 9

EJEMPLO 9 ¿En qué punto de la curva $y = e^x$ la recta tangente es paralela a la recta $y = 2x$?

SOLUCIÓN Puesto que $y = e^x$, tenemos $y' = e^x$. Sea a la coordenada x del punto en cuestión. Entonces, la pendiente de la recta tangente en ese punto es e^a. Esta recta tangente será paralela a la recta $y = 2x$ si tiene la misma pendiente; es decir, 2. Si se igualan las pendientes, se tiene

$$e^a = 2 \qquad a = \ln 2$$

Por tanto, el punto requerido es $(a, e^a) = (\ln 2, 2)$. (Véase la figura 9.)

3.1 Ejercicios

1. a) ¿Cómo se define el número e?
b) Use una calculadora para estimar los valores de los límites

$$\lim_{h\to 0} \frac{2.7^h - 1}{h} \quad \text{y} \quad \lim_{h\to 0} \frac{2.8^h - 1}{h}$$

correctos hasta dos dígitos decimales. ¿Qué puede concluir acerca del valor de e?

2. a) Dibuje a mano la función $f(x) = e^x$, poniendo particular atención a la forma en que la gráfica cruza el eje y. ¿Qué hecho le permite hacer esto?
b) ¿Qué tipos de funciones son $f(x) = e^x$ y $g(x) = x^e$? Compare las fórmulas de derivación para f y g.
c) ¿Cuál de las dos funciones en el inciso b) crece más rápidamente cuando x es muy grande?

3-32 Derive cada una de las siguientes funciones.

3. $f(x) = 2^{40}$

4. $f(x) = e^5$

5. $f(t) = 2 - \frac{2}{3}t$

6. $F(x) = \frac{3}{4}x^8$

7. $f(x) = x^3 - 4x + 6$

8. $f(t) = 1.4t^5 - 2.5t^2 + 6.7$

9. $g(x) = x^2(1 - 2x)$

10. $h(x) = (x - 2)(2x + 3)$

11. $g(t) = 2t^{-3/4}$

12. $B(y) = cy^{-6}$

13. $A(s) = -\dfrac{12}{s^5}$

14. $y = x^{5/3} - x^{2/3}$

15. $R(a) = (3a + 1)^2$

16. $h(t) = \sqrt[4]{t} - 4e^t$

17. $S(p) = \sqrt{p} - p$

18. $y = \sqrt{x}\,(x - 1)$

19. $y = 3e^x + \dfrac{4}{\sqrt[3]{x}}$

20. $S(R) = 4\pi R^2$

21. $h(u) = Au^3 + Bu^2 + Cu$

22. $y = \dfrac{\sqrt{x} + x}{x^2}$

23. $y = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{\sqrt{x}}$

24. $g(u) = \sqrt{2}\,u + \sqrt{3u}$

25. $j(x) = x^{2.4} + e^{2.4}$

26. $k(r) = e^r + r^e$

27. $H(x) = (x + x^{-1})^3$

28. $y = ae^v + \dfrac{b}{v} + \dfrac{c}{v^2}$

29. $u = \sqrt[5]{t} + 4\sqrt{t^5}$

30. $v = \left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$

31. $z = \dfrac{A}{y^{10}} + Be^{y}$

32. $y = e^{x+1} + 1$

33-34 Encuentre la ecuación de la recta tangente a cada una de las siguientes curvas en el punto dado.

33. $y = \sqrt[4]{x}, \quad (1, 1)$

34. $y = x^4 + 2x^2 - x, \quad (1, 2)$

35-36 Encuentre las ecuaciones de las rectas tangente y normal a cada una de las siguientes curvas en el punto dado.

35. $y = x^4 + 2e^x, \quad (0, 2)$

36. $y = x^2 - x^4, \quad (1, 0)$

37-38 Encuentre la ecuación de la recta tangente en el punto dado, a cada una de las siguientes curvas. Ilustre graficando la curva y la recta tangente, en la misma pantalla.

37. $y = 3x^2 - x^3, \quad (1, 2)$

38. $y = x - \sqrt{x}, \quad (1, 0)$

39-40 Encuentre $f'(x)$. Compare las gráficas de f y f' y utilícelas para explicar por qué su respuesta es razonable.

39. $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$

40. $f(x) = x^5 - 2x^3 + x - 1$

---

41. a) Utilice una calculadora graficadora o una computadora para graficar la función $f(x) = x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 7x + 30$ y $g(x) = x^e$ en el rectángulo de vista $[-3, 5]$ por $[-10, 50]$.
b) Con la misma gráfica del inciso a) estime las pendientes y elabore un esbozo a mano de la gráfica de f'. (Véase el ejemplo 1 de la sección 2.8.)
c) Calcule $f'(x)$ y utilice esta expresión para graficar f' con una calculadora graficadora. Compare con su esbozo del inciso b).

42. a) Utilice una calculadora graficadora o una computadora para graficar la función $g(x) = e^x - 3x^2$ en el rectángulo de vista $[-1, 4]$ por $[-8, 8]$.
b) Utilizando la gráfica del inciso a) para estimar pendientes, haga a mano un boceto aproximado de la grafica de g'. (Véase el ejemplo 1 de la sección 2.8.)
c) Calcule $g'(x)$ y utilice esta expresión, con un dispositivo graficador, para dibujar g'. Compare con su boceto del inciso b).

43-44 Encuentre la primera y segunda derivada de cada una de las siguientes funciones.

43. $f(x) = 10x^{10} + 5x^5 - x$

44. $G(r) = \sqrt{r} + \sqrt[3]{r}$

45-46 Encuentre la primera y segunda derivadas de cada una de las siguientes funciones. Verifique para ver si sus respuestas son razonables, comparando la gráficas de f, f' y f''.

45. $f(x) = 2x - 5x^{3/4}$

46. $f(x) = e^x - x^3$

---

47. La ecuación de movimiento de una partícula es $s = t^3 - 3t$, donde s está en metros y t en segundos. Encuentre
a) la velocidad y la aceleración como funciones de t,
b) la aceleración después de 2 s y
c) la aceleración cuando la velocidad es cero.

48. La ecuación de movimiento de una partícula es $s = t^4 - 2t^3 + t^2 - t$, donde s está en metros y t en segundos.
a) Encuentre la velocidad y la aceleración como funciones de t.
b) Encuentre la aceleración después de 1 s.
c) Grafique las funciones posición, velocidad y aceleración, en la misma pantalla.

49. La ley de Boyle establece que cuando una muestra de gas se comprime a temperatura constante, la presión P del gas es inversamente proporcional al volumen del gas.
a) Suponga que la presión de una muestra de aire que ocupa 0.106 m^3 a 25 °C es 50 kPa. Exprese V como una función de P.
b) Calcule dV/dP cuando $P = 50$ kPa. ¿Cuál es el significado de la derivada? ¿Cuáles son sus unidades?

50. Los neumáticos de automóvil deban ser inflados correctamente porque un alto inflado o un bajo inflado puede causar desgaste prematuro. Los datos de la tabla muestran la vida L (en miles de millas) para un determinado tipo de neumático a diversas presiones P (en lb/pulg^2).

P	26	28	31	35	38	42	45
L	50	66	78	81	74	70	59

a) Utilice una calculadora graficadora o una computadora para modelar la vida del neumático con una función cuadrática de la presión.
b) Utilice el modelo para estimar dL/dP cuando $P = 30$ y cuando $P = 40$. ¿Cuál es el significado de la derivada? ¿Cuáles son sus unidades? ¿Cuál es el significado de los signos de las derivadas?

51. Encuentre los puntos sobre la curva $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ donde la recta tangente es horizontal.

52. ¿Para qué valores de x la gráfica de $f(x) = e^x - 2x$ tiene una recta tangente horizontal?

53. Demuestre que la curva $y = 2e^x + 3x + 5x^3$ no tiene una recta tangente cuya pendiente es 2.

54. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x\sqrt{x}$ que es paralela a la recta $y = 1 + 3x$.

55. Encuentre las ecuaciones de ambas rectas tangentes a la curva $y = 1 + x^3$ y paralela a la recta $12x - y = 1$.

56. ¿En qué punto sobre la curva $y = 1 + 2e^x - 3x$ es la recta tangente paralela a la recta $3x - y = 5$? Ilustre graficando la curva de ambas rectas.

57. Encuentre la ecuación de la recta normal a la parábola $y = x^2 - 5x + 4$ que es paralela a la recta $x - 3y = 5$.

58. ¿Dónde la recta normal a la parábola $y = x - x^2$ en el punto $(1, 0)$ interseca la parábola por segunda vez? Ilustre con un esbozo la gráfica.

59. Dibuje un diagrama que muestre que hay dos rectas tangentes a la parábola $y = x^2$ que pasan por el punto $(0, -4)$. Encuentre las coordenadas de los puntos donde estas rectas tangentes intersectan la parábola.

60. a) Encuentre ecuaciones de ambas rectas que pasan por el punto $(2, -3)$ que son tangentes a la parábola $y = x^2 + x$.
b) Demuestre que no hay una recta que pasa por el punto $(2, 7)$ que es tangente a la parábola. A continuación, dibuje un diagrama para ver por qué.

61. Utilice la definición de derivada para demostrar que si $f(x) = 1/x$, entonces $f'(x) = -1/x^2$. (Esto demuestra la regla de la potencia para el caso $n = -1$.)

62. Encuentre la n-ésima derivada de cada una de las siguientes funciones calculando algunas derivadas y observando el patrón de recurrencia.
a) $f(x) = x^n$ b) $f(x) = 1/x$

63. Encuentre una polinomial P de segundo grado tal que $P(2) = 5$, $P'(2) = 3$ y $P''(2) = 2$.

64. La ecuación $y'' + y' - 2y = x^2$ es una **ecuación diferencial** porque involucra una función desconocida y y sus derivadas representadas por y' y y''. Encuentre constantes A, B y C tales que la función $y = Ax^2 + Bx + C$ satisface esta ecuación diferencial. (Las ecuaciones diferenciales serán estudiadas en detalle en el capítulo 9.)

65. Encuentre una ecuación cúbica $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cuya gráfica tiene rectas tangentes horizontales en los puntos $(-2, 6)$ y $(2, 0)$.

66. Encuentre una parábola con ecuación $y = ax^2 + bx + c$ que tiene pendiente 4 en $x = 1$, pendiente -8 en $x = -1$ y que pasa por el punto $(2, 15)$.

67. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 1 \\ x + 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

¿Es f derivable en $x = 1$? Trace las gráficas de f y f'.

68. ¿En qué números es derivable la siguiente función g?

$$g(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leqslant 0 \\ 2x - x^2 & \text{si } 0 < x < 2 \\ 2 - x & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$$

Proporcione una fórmula para g' y trace las gráficas de g y g'.

69. a) ¿Para qué valores de x la función $f(x) = |x^2 - 9|$ es derivable? Encuentre una fórmula para f'.
b) Esboce las gráficas de f y f'.

70. ¿Dónde es derivable la función $h(x) = |x - 1| + |x + 2|$? Proporcione la función para h' y trace las gráficas de h y h'.

71. Encuentre la parábola con ecuación $y = ax^2 + bx$ cuya recta tangente en $(1, 1)$ tiene por ecuación $y = 3x - 2$.

72. Supongamos que la curva $y = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ tiene una recta tangente cuando $x = 0$ con ecuación $y = 2x + 1$ y una recta tangente cuando $x = 1$ con ecuación $y = 2 - 3x$. Encuentre los valores de a, b, c y d.

73. ¿Para qué valores de a y b la recta $2x + y = b$ es tangente a la parábola $y = ax^2$ cuando $x = 2$?

74. Encuentre el valor de c tal que la recta $y = \frac{3}{2}x + 6$ es tangente a la curva $y = c\sqrt{x}$

75. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leqslant 2 \\ mx + b & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Encuentre los valores de m y b que hacen que f sea derivable para toda x.

76. Se dibuja una recta tangente a la hipérbola $xy = c$ en un punto p.
a) Demuestre que el punto medio del segmento de recta cortado de esta recta tangente por los ejes de coordenadas es P.
b) Demuestre que el triángulo formado por la recta tangente y los ejes de coordenadas siempre tiene la misma área, no importa dónde se encuentre P sobre la hipérbola.

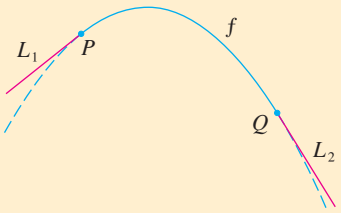
77. Evalúe $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^{1000} - 1}{x - 1}$.

78. Dibuje un diagrama que muestre dos rectas perpendiculares que se intersecan en el eje y y que son ambas tangentes a la parábola $y = x^2$. ¿Donde se intersecan estas rectas?

79. Si $c > \frac{1}{2}$, ¿cuántas rectas que pasan por el punto $(0, c)$ son rectas normales a la parábola $y = x^2$? ¿Qué pasa si $c \leqslant \frac{1}{2}$?

80. Trace las parábolas $y = x^2$ y $y = x^2 - 2x + 2$. ¿Piensa que existe una recta que es tangente a ambas curvas? Si es así, encuentre su ecuación. Si no es así, ¿por qué no?

PROYECTO DE APLICACIÓN CONSTRUCCIÓN DE UNA MONTAÑA RUSA





© Flashon Studio / Shutterstock

Suponga que se le solicita que diseñe el primer ascenso y descenso de una nueva montaña rusa. Después de estudiar fotografías de sus montañas rusas predilectas, decide hacer la pendiente de ascenso 0.8 y la de descenso -1.6. Opta por conectar estos dos tramos rectos $y = L_1(x)$ y $y = L_2(x)$ mediante parte de una parábola $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, donde x y $f(x)$ se miden en pies. Para que el trayecto sea uniforme, no pueden existir cambios abruptos de dirección, por lo que desea que los segmentos de recta L_1 y L_2 sean tangentes a la parábola en los puntos de transición P y Q. (Véase la figura.) Para simplificar las ecuaciones, decide situar el origen en P.

1. a) Suponga que la distancia horizontal entre P y Q es 100 pies. Escriba ecuaciones en a, b y c que aseguren que el trayecto sea suave en los puntos de transición.

b) Resuelva las ecuaciones del inciso a) para a, b y c para hallar una fórmula para $f(x)$.

c) Dibuje L_1, f y L_2 para verificar gráficamente que las transiciones sean suaves.

d) Encuentre la diferencia en elevación entre P y Q.

2. La solución del problema 1 puede *parecer* suave, pero es posible que no *sienta* lo suave debido a que la pieza definida como función [consistente en $L_1(x)$ para $x < 0$, $f(x)$ para $0 \leq x \leq 100$; y $L_2(x)$ para $x > 100$] no tiene una segunda derivada continua. Por consiguiente, usted decide mejorar su diseño utilizando una función cuadrática $q(x) = ax^2 + bx + c$ únicamente en el intervalo $10 \leq x \leq 90$ y conectarlo con las funciones lineales por medio de dos funciones cúbicas:

$$g(x) = kx^3 + lx^2 + mx + n \qquad 0 \leq x < 10$$
$$h(x) = px^3 + qx^2 + rx + s \qquad 90 < x \leq 100$$

a) Escriba un sistema de ecuaciones con 11 incógnitas que aseguren que las funciones y sus dos primeras derivadas coincidan en los puntos de transición.

SAC b) Resuelva las ecuaciones del inciso a) con un sistema algebraico computarizado para encontrar las fórmulas para $q(x)$, $g(x)$ y $h(x)$.

c) Dibuje L_1, g, q, h y L_2 y compárelos con las gráficas del problema 1 inciso c).

Se requiere calculadora graficadora o computadora

SAC Se requiere un sistema algebraico computarizado

3.2 Reglas del producto y el cociente

Las fórmulas de esta sección permiten derivar nuevas funciones formadas a partir de anteriores, por multiplicación o división.

Regla del producto

Por analogía con las reglas de la suma y la diferencia, podría tener la tentación de suponer —como Leibniz lo hizo hace tres siglos— que la derivada de un producto es el producto de las derivadas. Sin embargo, puede ver que esta suposición es errónea al considerar un ejemplo particular. Sea $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$. Por tanto, la regla de la potencia da $f'(x) = 1$ y $g'(x) = 2x$. Pero $(fg)(x) = x^3$, de modo que $(fg)'(x) = 3x^2$. Así que, $(fg)' \neq f'g'$. La formula correcta fue descubierta por Leibniz (poco tiempo después de su falso inicio) y se llama regla del producto.

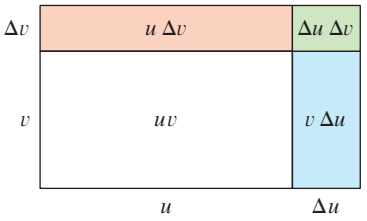


FIGURA 1
Geometría de la regla del producto

Antes de enunciar la regla del producto, vea como podría descubrirla. Empezamos suponiendo que $u = f(x)$ y $v = g(x)$ son funciones positivas derivables. Entonces puede interpretarse el producto uv como el área de un rectángulo (véase la figura 1). Si x cambia una cantidad Δx, entonces los cambios correspondientes en u y v son

$$\Delta u = f(x + \Delta x) - f(x) \qquad \Delta v = g(x + \Delta x) - g(x)$$

y el nuevo valor del producto, $(u + \Delta u)(v + \Delta v)$, puede interpretarse como el área del rectángulo grande en la figura 1 (siempre que Δu y Δv sean positivos).

El cambio en el área del rectángulo es

$$\boxed{1} \qquad \Delta(uv) = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = u\,\Delta v + v\,\Delta u + \Delta u\,\Delta v$$
$$= \text{la suma de las tres áreas sombreadas}$$

Si dividimos entre Δx, se obtiene

$$\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Recuerde que en la notación de Leibniz la definición de derivada puede escribirse como

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Si ahora hacemos que $\Delta x \to 0$, obtenemos la derivada de uv:

$$\frac{d}{dx}(uv) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x} \right)$$
$$= u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \left(\lim_{\Delta x \to 0} \Delta u \right) \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \right)$$
$$= u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + 0 \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$\boxed{2} \qquad \frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

(Observe que $\Delta u \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$ puesto que f es derivable y, por tanto, continua.)

Aun cuando se partió de la hipótesis (para la interpretación geométrica) que todas las cantidades son positivas, observe que la ecuación 1 siempre es verdadera. (El álgebra es válida si u, v, Δu y Δv son positivas o negativas.) De modo que ha probado la ecuación 2, conocida como regla del producto, para todas las funciones derivables u y v.

Regla del producto Si f y g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]$$

En notación con apóstrofos:

$$(fg)' = fg' + gf'$$

En palabras, la regla del producto expresa que *la derivada de un producto de dos funciones es la primera función multiplicada por la derivada de la segunda función, más la segunda función multiplicada por la derivada de la primera función.*

EJEMPLO 1

a) Si $f(x) = xe^x$, encuentre $f'(x)$.

b) Halle la n-ésima derivada, $f^{(n)}(x)$.

SOLUCIÓN

a) Por la regla del producto se tiene que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(xe^x) \\ &= x\frac{d}{dx}(e^x) + e^x\frac{d}{dx}(x) \\ &= xe^x + e^x \cdot 1 = (x+1)e^x \end{aligned}$$

En la figura 2 se muestran las gráficas de la función f del ejemplo 1 y su derivada f'. Advierta que $f'(x)$ es positiva cuando f es creciente y negativa cuando f es decreciente.

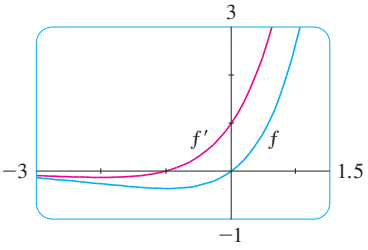


FIGURA 2

b) Aplicando a regla del producto una segunda vez, se obtiene

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d}{dx}[(x+1)e^x] \\ &= (x+1)\frac{d}{dx}(e^x) + e^x\frac{d}{dx}(x+1) \\ &= (x+1)e^x + e^x \cdot 1 = (x+2)e^x \end{aligned}$$

Las siguientes aplicaciones de la regla del producto dan

$$f'''(x) = (x+3)e^x \qquad f^{(4)}(x) = (x+4)e^x$$

De hecho, cada derivada sucesiva agrega otro término e^x, así que

$$f^{(n)}(x) = (x+n)e^x$$

EJEMPLO 2 Derive la función $f(t) = \sqrt{t}\,(a + bt)$

En el ejemplo 2, a y b son constantes. Es habitual en matemáticas el uso de las primeras letras del alfabeto, para representar las constantes y las últimas para representar variables.

SOLUCIÓN 1 Utilizando la regla del producto, tenemos que

$$\begin{aligned} f'(t) &= \sqrt{t}\,\frac{d}{dt}(a+bt) + (a+bt)\frac{d}{dt}\left(\sqrt{t}\right) \\ &= \sqrt{t}\cdot b + (a+bt)\cdot \tfrac{1}{2}t^{-1/2} \\ &= b\sqrt{t} + \frac{a+bt}{2\sqrt{t}} = \frac{a+3bt}{2\sqrt{t}} \end{aligned}$$

SOLUCIÓN 2 Si primero utilizamos las leyes de los exponentes para reescribir $f(t)$, entonces podemos proceder directamente sin utilizar la regla del producto.

$$\begin{aligned} f(t) &= a\sqrt{t} + bt\sqrt{t} = at^{1/2} + bt^{3/2} \\ f'(t) &= \tfrac{1}{2}at^{-1/2} + \tfrac{3}{2}bt^{1/2} \end{aligned}$$

lo cual es equivalente a la respuesta dada en la solución 1.

El ejemplo 2 muestra que a veces es más fácil simplificar un producto de funciones antes de derivar que utilizar directamente la regla del producto. En el ejemplo 1, sin embargo, la regla del producto es sólo un posible método.

EJEMPLO 3 Si $f(x) = \sqrt{x}\, g(x)$, donde $g(4) = 2$ y $g'(4) = 3$, encuentre $f'(4)$.

SOLUCIÓN Aplicando la regla del producto, tenemos que

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[\sqrt{x}\, g(x)\right] = \sqrt{x}\, \frac{d}{dx}\left[g(x)\right] + g(x)\, \frac{d}{dx}\left[\sqrt{x}\right]$$

$$= \sqrt{x}\, g'(x) + g(x) \cdot \tfrac{1}{2} x^{-1/2}$$

$$= \sqrt{x}\, g'(x) + \frac{g(x)}{2\sqrt{x}}$$

Así que $$f'(4) = \sqrt{4}\, g'(4) + \frac{g(4)}{2\sqrt{4}} = 2 \cdot 3 + \frac{2}{2 \cdot 2} = 6.5$$

Regla del cociente

Encontramos una regla para derivar el cociente de dos funciones derivables $u = f(x)$ y $v = g(x)$ en gran parte de la misma manera que hemos encontrado la regla del producto. Si x, u y v se incrementan por cantidades Δx, Δu y Δv, entonces el cambio correspondiente en el cociente u/v es

$$\Delta\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{(u + \Delta u)v - u(v + \Delta v)}{v(v + \Delta v)}$$

$$= \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

por tanto,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(u/v)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}$$

Cuando $\Delta x \to 0$, también $\Delta v \to 0$, porque $v = g(x)$ es derivable y, por consiguiente, continua. Así, al aplicar las leyes de los límites, se obtiene

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v \lim\limits_{\Delta x \to 0} (v + \Delta v)} = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

Regla del cociente Si f y g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\, \dfrac{d}{dx}\left[f(x)\right] - f(x)\, \dfrac{d}{dx}\left[g(x)\right]}{\left[g(x)\right]^2}$$

En notación con apóstrofos:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$$

En palabras: en la regla del cociente se expresa que la *derivada de un cociente es el denominador multiplicado por la derivada del numerador, menos el numerador multiplicado por la derivada del denominador, todo dividido entre el cuadrado del denominador.*

La regla del cociente y las otras formulas de derivación permiten calcular la derivada de cualquier función racional, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

Podemos utilizar un dispositivo de graficación para verificar que la respuesta al ejemplo 4 es verosímil. En la figura 3 se muestran las gráficas de la función del ejemplo 4 y su derivada. Note que cuando y crece con rapidez (cerca de -2), y' es grande. Y cuando y crece con lentitud, y' está cercana a 0.

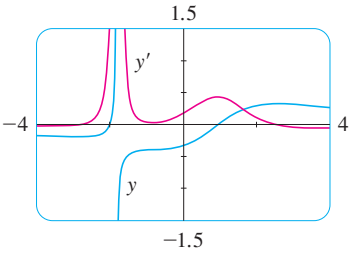


FIGURA 3

V EJEMPLO 4 Sea $y = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^3 + 6}$. Entonces

$$y' = \frac{(x^3 + 6)\dfrac{d}{dx}(x^2 + x - 2) - (x^2 + x - 2)\dfrac{d}{dx}(x^3 + 6)}{(x^3 + 6)^2}$$

$$= \frac{(x^3 + 6)(2x + 1) - (x^2 + x - 2)(3x^2)}{(x^3 + 6)^2}$$

$$= \frac{(2x^4 + x^3 + 12x + 6) - (3x^4 + 3x^3 - 6x^2)}{(x^3 + 6)^2}$$

$$= \frac{-x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 12x + 6}{(x^3 + 6)^2}$$

V EJEMPLO 5 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = e^x/(1 + x^2)$ en el punto $\left(1, \frac{1}{2}e\right)$.

SOLUCIÓN De acuerdo con la regla del cociente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1 + x^2)\dfrac{d}{dx}(e^x) - e^x\dfrac{d}{dx}(1 + x^2)}{(1 + x^2)^2}$$

$$= \frac{(1 + x^2)e^x - e^x(2x)}{(1 + x^2)^2}$$

$$= \frac{e^x(1 - x)^2}{(1 + x^2)^2}$$

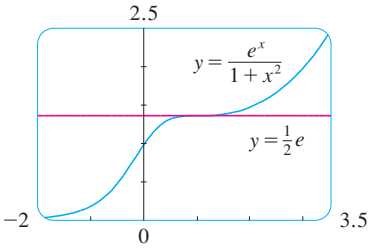


FIGURA 4

De modo que la pendiente de la recta tangente en $\left(1, \frac{1}{2}e\right)$ es

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = 0$$

Esto significa que la recta tangente en $\left(1, \frac{1}{2}e\right)$ es horizontal, y su ecuación es $y = \frac{1}{2}e$. [Véase la figura 4. Advierta que la función es creciente y cruza su recta tangente en $\left(1, \frac{1}{2}e\right)$.]

NOTA No use la regla del cociente *cada* vez que vea un cociente. A veces es más fácil reescribir un cociente en una forma que sea más sencilla para los fines de derivación. Por ejemplo, aun cuando es posible derivar la función

$$F(x) = \frac{3x^2 + 2\sqrt{x}}{x}$$

aplicando la regla del cociente, es más fácil dividir primero y escribir la función como

$$F(x) = 3x + 2x^{-1/2}$$

antes de derivar.

A continuación se resumen las fórmulas de derivación que ha aprendido hasta el momento.

Tabla de fórmulas de derivación

$$\frac{d}{dx}(c) = 0 \qquad \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1} \qquad \frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

$$(cf)' = cf' \qquad (f+g)' = f' + g' \qquad (f-g)' = f' - g'$$

$$(fg)' = fg' + gf' \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$$

3.2 Ejercicios

1. Encuentre la derivada de $f(x) = (1 + 2x^2)(x - x^2)$ de dos maneras: aplicando la regla del producto y efectuando primero la multiplicación. ¿Sus respuestas son equivalentes?

2. Encuentre la derivada de la función

$$F(x) = \frac{x^4 - 5x^3 + \sqrt{x}}{x^2}$$

en dos maneras diferentes: utilizando la regla del cociente y simplificando primero. Demuestre que sus respuestas son equivalentes. ¿Cuál método prefiere?

3-26 Derive cada una de las siguientes funciones.

3. $f(x) = (x^3 + 2x)e^x$

4. $g(x) = \sqrt{x}\, e^x$

5. $y = \dfrac{x}{e^x}$

6. $y = \dfrac{e^x}{1 - e^x}$

7. $g(x) = \dfrac{1 + 2x}{3 - 4x}$

8. $G(x) = \dfrac{x^2 - 2}{2x + 1}$

9. $H(u) = \left(u - \sqrt{u}\right)\left(u + \sqrt{u}\right)$

10. $J(v) = (v^3 - 2v)(v^{-4} + v^{-2})$

11. $F(y) = \left(\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{3}{y^4}\right)(y + 5y^3)$

12. $f(z) = (1 - e^z)(z + e^z)$

13. $y = \dfrac{x^3}{1 - x^2}$

14. $y = \dfrac{x + 1}{x^3 + x - 2}$

15. $y = \dfrac{t^2 + 2}{t^4 - 3t^2 + 1}$

16. $y = \dfrac{t}{(t - 1)^2}$

17. $y = e^p\left(p + p\sqrt{p}\right)$

18. $y = \dfrac{1}{s + ke^s}$

19. $y = \dfrac{v^3 - 2v\sqrt{v}}{v}$

20. $z = w^{3/2}(w + ce^w)$

21. $f(t) = \dfrac{2t}{2 + \sqrt{t}}$

22. $g(t) = \dfrac{t - \sqrt{t}}{t^{1/3}}$

23. $f(x) = \dfrac{A}{B + Ce^x}$

24. $f(x) = \dfrac{1 - xe^x}{x + e^x}$

25. $f(x) = \dfrac{x}{x + \dfrac{c}{x}}$

26. $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$

27-30 Halle $f'(x)$ y $f''(x)$ de cada una de las siguientes funciones.

27. $f(x) = x^4 e^x$

28. $f(x) = x^{5/2}e^x$

29. $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + 2x}$

30. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

31-32 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva dada en el punto especificado.

31. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + x + 1}, \quad (1, 0)$

32. $y = \dfrac{e^x}{x}, \quad (1, e)$

33-34 Halle las ecuaciones de las rectas tangentes y de las rectas normales a cada una de las curvas dadas en el punto que se especifica.

33. $y = 2xe^x, \quad (0, 0)$

34. $y = \dfrac{2x}{x^2 + 1}, \quad (1, 1)$

35. a) La curva $y = 1/(1 + x^2)$ se llama **bruja de María Agnesi**. Encuentre la ecuación de la recta tangente a esta curva en el punto $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$.

b) Ilustre el inciso a) trazando las gráficas de la curva y la recta tangente en la misma pantalla.

36. a) La curva $y = x/(1 + x^2)$ se llama **serpentina**. Encuentre la ecuación de la recta tangente a esta curva en el punto $(3, 0.3)$.

b) Ilustre el inciso a) graficando la curva y la recta tangente, en la misma pantalla.

37. a) Si $f(x) = (x^3 - x)e^x$, encuentre $f'(x)$.

b) Compruebe que su respuesta al inciso a) es razonable comparando las gráficas de f y f'.

38. a) Si $f(x) = e^x/(2x^2 + x + 1)$, halle $f'(x)$.

b) Compruebe que su respuesta al inciso a) es razonable comparando las graficas de f y f'.

39. a) Si $f(x) = (x^2 - 1)/(x^2 + 1)$, halle $f'(x)$ y $f''(x)$.
b) Verifique si sus respuestas en el inciso a) son razonables al comparar las gráficas de f, f' y f''.

40. a) Si $f(x) = (x^2 - 1)e^x$, halle $f'(x)$ y $f''(x)$.
b) Verifique para comprobar que sus respuestas en el inciso a) son admisibles al comparar las gráficas de f, f' y f''.

41. Si $f(x) = x^2/(1 + x)$, halle $f''(1)$.

42. Si $g(x) = x/e^x$, halle $g^{(n)}(x)$.

43. Suponga que $f(5) = 1$, $f'(5) = 6$, $g(5) = -3$ y $g'(5) = 2$. Encuentre los valores siguientes

a) $(fg)'(5)$ b) $(f/g)'(5)$ c) $(g/f)'(5)$

44. Suponga que $f(2) = -3$, $g(2) = 4$, $f'(2) = -2$ y $g'(2) = 7$, encuentre $h'(2)$.

a) $h(x) = 5f(x) - 4g(x)$ b) $h(x) = f(x)g(x)$

c) $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ d) $h(x) = \dfrac{g(x)}{1 + f(x)}$

45. Si $f(x) = e^x g(x)$, donde $g(0) = 2$ y $g'(0) = 5$, halle $f'(0)$.

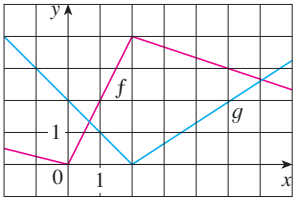
46. Si $h(2) = 4$ y $h'(2) = -3$, encuentre

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{h(x)}{x}\right)\bigg|_{x=2}$$

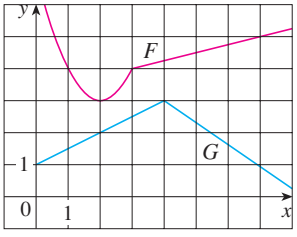
47. Si $g(x) = xf(x)$, donde $f(3) = 4$ y $f'(3) = -2$, encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $g(x)$ en el punto donde $x = 3$.

48. Si $f(2) = 10$ y $f'(x) = x^2 f(x)$ para toda x, encuentre $f''(2)$.

49. Si f y g son las funciones cuyas gráficas se ilustran, sean $u(x) = f(x)g(x)$ y $v(x) = f(x)/g(x)$.
a) Encuentre $u'(1)$. b) Encuentre $v'(5)$.



50. Sea $P(x) = F(x)G(x)$ y $Q(x) = F(x)/G(x)$, donde F y G son las funciones cuyas gráficas se muestran
a) Encuentre $P'(2)$. b) Encuentre $Q'(7)$.



51. Si g es una función derivable, encuentre una expresión para la derivada de cada una de las funciones siguientes.

a) $y = xg(x)$ b) $y = \dfrac{x}{g(x)}$ c) $y = \dfrac{g(x)}{x}$

52. Si f es una función derivable, encuentre una expresión para la derivada de cada una de las funciones siguientes.

a) $y = x^2 f(x)$ b) $y = \dfrac{f(x)}{x^2}$

c) $y = \dfrac{x^2}{f(x)}$ d) $y = \dfrac{1 + xf(x)}{\sqrt{x}}$

53. ¿Cuántas rectas tangentes a la curva $y = x/(x + 1)$ pasan por el punto $(1, 2)$? ¿En qué puntos toca la curva estas rectas tangentes?

54. Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva

$$y = \frac{x - 1}{x + 1}$$

que sean paralelas a la recta $x - 2y = 2$.

55. Encuentre $R'(0)$, donde

$$R(x) = \frac{x - 3x^3 + 5x^5}{1 + 3x^3 + 6x^6 + 9x^9}$$

Sugerencia: en vez de encontrar primero $R'(x)$, sea $f(x)$ el numerador y $g(x)$ el denominador de $R(x)$ y calcule $R'(0)$ de $f(0)$, $f'(0)$, $g(0)$ y $g'(0)$.

56. Utilice el método del ejercicio 55 para calcular $Q'(0)$, donde

$$Q(x) = \frac{1 + x + x^2 + xe^x}{1 - x + x^2 - xe^x}$$

57. En este ejercicio, estime la proporción a la que se está creciendo el ingreso personal total en el área metropolitana de Richmond-Petersburg, Virginia. En 1999, la población de esta área era 961 400 y la población aumentaba en alrededor de 9 200 personas al año. El ingreso anual promedio era \$30 593 per cápita, y este promedio se incrementaba en cerca de \$1400 al año (ligeramente por arriba del promedio nacional de alrededor de \$1225 al año). Use la regla del producto y estas cifras para estimar la proporción en la que estaba aumentando el ingreso personal total en el área de Richmond-Petersburg en 1999. Explique el significado de cada término en la regla del producto.

58. Un fabricante produce rollos de una tela con un ancho fijo. La cantidad q de esta tela (medida en yardas) que se vende es función del precio de venta p (en dólares por yarda), de modo que $q = f(p)$. Entonces, el ingreso total que se percibe con el precio de venta p es $R(p) = pf(p)$.
a) ¿Qué significa afirmar que $f(20) = 10\,000$ y $f'(20) = -350$?
b) Suponiendo los valores del inciso a), encuentre $R'(20)$ e interprete su respuesta.

59. a) Utilice la regla del producto dos veces para probar que si f, g y h son derivables, entonces $(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$.
b) Tomando $f = g = h$ en el inciso a), demuestre que

$$\frac{d}{dx}[f(x)]^3 = 3[f(x)]^2 f'(x)$$

c) Utilice el resultado del inciso b) para derivar $y = e^{3x}$.

60. a) Si $F(x) = f(x)g(x)$, donde f y g son derivables en todos los órdenes, demuestre que $F'' = f''g + 2f'g' + fg''$.
b) Halle fórmulas similares para F''' y $F^{(4)}$.
c) Intente una fórmula para $F^{(n)}$.

61. Halle expresiones para las primeras cinco derivadas de $f(x) = x^2e^x$. ¿Observa algún patrón en estas expresiones? Intente una fórmula para $f^{(n)}(x)$ y demuéstrela por medio de inducción matemática.

62. a) Si g es derivable la **regla del recíproco** indica que

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{g(x)}\right] = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Utilice la regla del cociente para demostrar la regla del recíproco.
b) Utilice la regla del recíproco para derivar la función del ejercicio 18.
c) Utilice la regla del recíproco para comprobar que la regla de la potencia es válida para números enteros negativos; es decir,

$$\frac{d}{dx}(x^{-n}) = -nx^{-n-1}$$

para todos los números enteros positivos n.

3.3 Derivadas de funciones trigonométricas

En el apéndice D se da un repaso de las funciones trigonométricas.

Antes de iniciar esta sección, quizá necesite repasar las funciones trigonométricas. En particular, es importante que recuerde que cuando habla de la función f definida para todos los números reales x, mediante

$$f(x) = \operatorname{sen} x$$

se entiende que sen x significa el seno del ángulo cuya medida en *radianes* es x. Para las demás funciones trigonométricas: cos, tan, csc, sec y cot se cumple con una convención similar. Recuerde de la sección 2.5 que todas las funciones trigonométricas son continuas en cada número en sus dominios.

Si traza la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ y utiliza la interpretación de $f'(x)$ como la pendiente de la recta tangente a la curva seno para trazar la grafica de f' (véase el ejercicio 14 de la sección 2.8), parece que la gráfica de esta última es la misma que la curva coseno (véase la figura 1).

TEC Visual 3.3 muestra una animación de la figura 1.

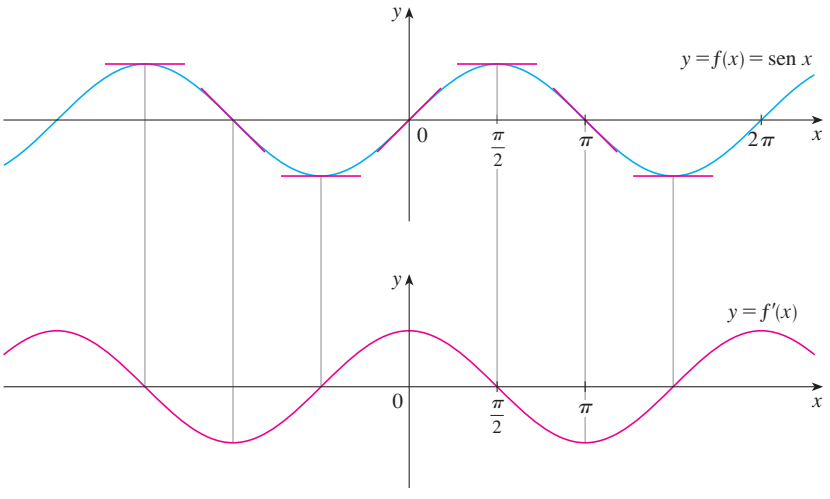


FIGURA 1

Intente confirmar la conjetura de que si $f(x) = \operatorname{sen} x$, entonces $f'(x) = \cos x$. A partir de la definición de derivada, tenemos

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x + h) - \operatorname{sen} x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x}{h}$$

Hemos utilizado la fórmula de adición para el seno. Véase el apéndice D.

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{\operatorname{sen} x \cos h - \operatorname{sen} x}{h} + \frac{\cos x \operatorname{sen} h}{h} \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\operatorname{sen} x \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) + \cos x \left(\frac{\operatorname{sen} h}{h} \right) \right]$$

$$\boxed{1} \qquad = \lim_{h \to 0} \operatorname{sen} x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \lim_{h \to 0} \cos x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}$$

Dos de estos cuatro límites son fáciles de evaluar. Puesto que se considera a x como constante al calcular un límite cuando $h \to 0$, se tiene

$$\lim_{h \to 0} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x \qquad \text{y} \qquad \lim_{h \to 0} \cos x = \cos x$$

El límite de $(\operatorname{sen} h)/h$ no es tan obvio. Con base en la evidencia numérica y gráfica, en el ejemplo 3 de la sección 2.2 se infiere que

$$\boxed{2} \qquad \boxed{\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = 1}$$

Ahora utilizaremos un argumento geométrico para demostrar la ecuación 2. Suponga primero que θ se encuentra entre 0 y $\pi/2$. En la figura 2a) se muestra un sector de circunferencia con centro en 0, ángulo central θ y radio 1. BC se traza perpendicular a OA. Por la definición de radián, tenemos que arco $AB = \theta$. Asimismo, $|BC| = |OB| \operatorname{sen} \theta = \operatorname{sen} \theta$. Con base en el diagrama, se observa que

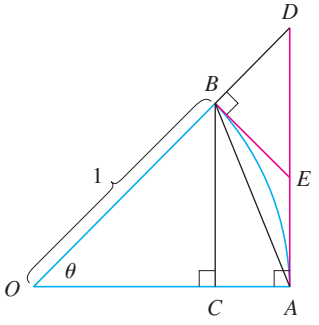
$$|BC| < |AB| < \text{arc } AB$$

En consecuencia $\operatorname{sen} \theta < \theta$ de manera que $\dfrac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} < 1$

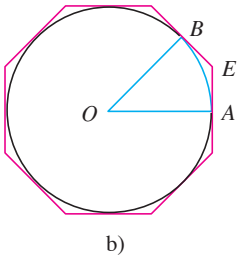
Suponga que las tangentes en A y B se intersecan en E. Puede verse, con base en la figura 2b), que la circunferencia es menor que la longitud del polígono circunscrito, de modo que arc $AB < |AE| + |EB|$. Así,

$$\begin{aligned} \theta = \text{arc } AB &< |AE| + |EB| \\ &< |AE| + |ED| \\ &= |AD| = |OA| \tan \theta \\ &= \tan \theta \end{aligned}$$

(En el apéndice F se demuestra directamente la desigualdad $\theta \leq \tan \theta$ a partir de la definición de la longitud de arco, sin recurrir a la intuición geométrica, como se hizo aquí.)



a)



b)

FIGURA 2

Por tanto, tenemos que

$$\theta < \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

de modo que

$$\cos\theta < \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} < 1$$

Sabemos que $\lim_{\theta\to 0} 1 = 1$ y $\lim_{\theta\to 0} \cos\theta = 1$, así que, por el teorema de la compresión

$$\lim_{\theta\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$$

Pero la función $(\operatorname{sen}\theta)/\theta$ es una función par, de modo que sus límites por la derecha y por la izquierda deben ser iguales y, por tanto,

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$$

así que se ha demostrado la ecuación 2.

Podemos deducir el valor del límite restante en [1] como sigue:

Multiplique el numerador y el denominador por $\cos\theta + 1$ para poner la función de manera que pueda usar los límites que conoce.

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\cos\theta - 1}{\theta} = \lim_{\theta\to 0} \left(\frac{\cos\theta - 1}{\theta} \cdot \frac{\cos\theta + 1}{\cos\theta + 1} \right) = \lim_{\theta\to 0} \frac{\cos^2\theta - 1}{\theta(\cos\theta + 1)}$$

$$= \lim_{\theta\to 0} \frac{-\operatorname{sen}^2\theta}{\theta(\cos\theta + 1)} = -\lim_{\theta\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \cdot \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta + 1} \right)$$

$$= -\lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \cdot \lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta + 1}$$

$$= -1 \cdot \left(\frac{0}{1 + 1} \right) = 0 \qquad \text{(por la ecuación 2)}$$

3

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\cos\theta - 1}{\theta} = 0$$

Si ahora ponemos los límites [2] y [3] en [1], obtenemos

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \operatorname{sen} x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \lim_{h\to 0} \cos x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}$$

$$= (\operatorname{sen} x) \cdot 0 + (\cos x) \cdot 1 = \cos x$$

Así que hemos demostrado la fórmula para la derivada de la función seno:

4

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$$

La figura 3 muestra las gráficas de la función del ejemplo 1 y su derivada. Advierta que $y' = 0$ siempre que y tenga una recta tangente horizontal.

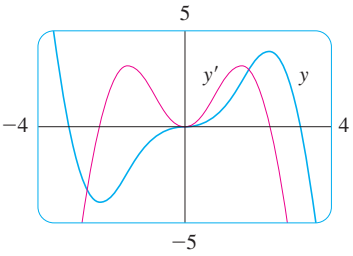


FIGURA 3

V EJEMPLO 1 Derive $y = x^2 \operatorname{sen} x$.

SOLUCIÓN Con la regla del producto y la fórmula 4, tenemos

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) + \operatorname{sen} x \frac{d}{dx}(x^2)$$
$$= x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x$$

Si se aplican los mismos métodos que en la demostración de la fórmula 4, puede demostrarse (véase el ejercicio 20) que

5
$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x$$

También puede derivar la función tangente utilizando la definición de derivada, pero es más fácil usar la regla del cociente con las fórmulas 4 y 5:

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)$$
$$= \frac{\cos x \dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) - \operatorname{sen} x \dfrac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x\,(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

6
$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

También es fácil hallar las derivadas de las funciones trigonométricas restantes, csc, sec y cot, aplicando la regla del cociente (véanse los ejercicios 17-19). En la tabla siguiente aparecen todas las formulas de derivación de las funciones trigonométricas. Recuerde que son válidas sólo cuando x se mide en radianes.

Cuando memorice esta tabla, resulta útil notar que los signos menos van con las derivadas de las "cofunciones"; es decir, coseno, cosecante y cotangente.

Derivadas de las funciones trigonométricas

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x \qquad \frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$
$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x \qquad \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$
$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

EJEMPLO 2 Derive $f(x) = \dfrac{\sec x}{1 + \tan x}$. ¿Para cuáles valores de x la gráfica de f tiene una recta tangente horizontal?

SOLUCIÓN Por la regla del cociente se tiene que

$$f'(x) = \frac{(1 + \tan x)\dfrac{d}{dx}(\sec x) - \sec x \dfrac{d}{dx}(1 + \tan x)}{(1 + \tan x)^2}$$

$$= \frac{(1 + \tan x)\sec x \tan x - \sec x \cdot \sec^2 x}{(1 + \tan x)^2}$$

$$= \frac{\sec x\,(\tan x + \tan^2 x - \sec^2 x)}{(1 + \tan x)^2}$$

$$= \frac{\sec x\,(\tan x - 1)}{(1 + \tan x)^2}$$

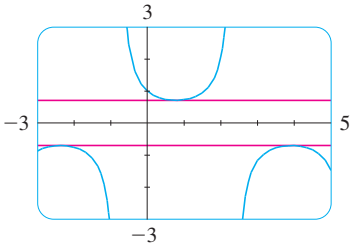


FIGURA 4
Las rectas tangentes horizontales del ejemplo 2

En la simplificación de la respuesta hemos utilizado la identidad $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$.

Ya que $\sec x$ nunca es 0, $f'(x) = 0$ cuando $\tan x = 1$, y esto sucede cuando $x = n\pi + \pi/4$, donde n es un entero (véase la figura 4).

Las funciones trigonométricas se usan con frecuencia en el modelado de fenómenos del mundo real. En particular, las vibraciones, ondas, movimientos elásticos y otras cantidades que varían de manera periódica, pueden describirse por medio de las funciones trigonométricas. En el ejemplo siguiente se analiza un caso de movimiento armónico simple.

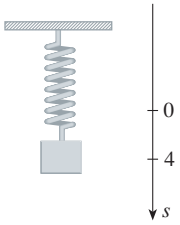


FIGURA 5

V EJEMPLO 3 Un objeto que se encuentra en el extremo de un resorte vertical se desplaza hacia abajo 4 cm mas allá de su posición en reposo, para estirar el resorte, y se deja en libertad en el instante $t = 0$. (Véase la figura 5 y observe que la dirección hacia abajo es positiva.) Su posición en el instante t es

$$s = f(t) = 4 \cos t$$

Encuentre la velocidad y la aceleración en el instante t y úselas para analizar el movimiento del objeto.

SOLUCIÓN La velocidad y la aceleración son

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(4 \cos t) = 4\frac{d}{dt}(\cos t) = -4 \operatorname{sen} t$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(-4 \operatorname{sen} t) = -4\frac{d}{dt}(\operatorname{sen} t) = -4 \cos t$$

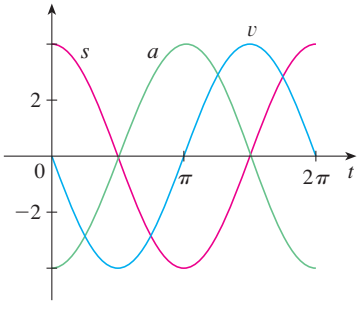


FIGURA 6

El objeto oscila desde el punto más bajo ($s = 4$ cm) hasta el punto más alto ($s = -4$ cm). El periodo de la oscilación es 2π, el periodo de cos t.

La rapidez es $|v| = 4|\operatorname{sen} t|$, la cual es máxima cuando $|\operatorname{sen} t| = 1$; es decir, cuando $\cos t = 0$. De modo que el objeto se mueve con la mayor rapidez cuando pasa por su posición de equilibrio ($s = 0$). Su rapidez es 0 cuando sen $t = 0$; esto es, en los puntos alto y bajo.

La aceleración $a = -4 \cos t = 0$ cuando $s = 0$. Alcanza la magnitud máxima en los puntos alto y bajo. Observe la gráfica en la figura 6.

EJEMPLO 4 Hallar la vigésima séptima derivada de cos x.

SOLUCIÓN Las primeras derivadas de $f(x) = \cos x$ son como sigue:

RP Busque un patrón

$$f'(x) = -\operatorname{sen} x$$
$$f''(x) = -\cos x$$
$$f'''(x) = \operatorname{sen} x$$
$$f^{(4)}(x) = \cos x$$
$$f^{(5)}(x) = -\operatorname{sen} x$$

Observamos que las derivadas sucesivas ocurren en un ciclo de longitud 4 y, en particular, $f^{(n)}(x) = \cos x$ cada vez que n es un múltiplo de 4. En consecuencia,

$$f^{(24)} = \cos x$$

y, derivando tres veces más, se tiene

$$f^{(27)} = \operatorname{sen} x$$

La principal aplicación del límite en la ecuación 2 ha sido comprobar la fórmula de derivación de la función seno. Pero este límite también se aplica en la búsqueda de otros límites trigonométricos, como en los dos ejemplos siguientes.

EJEMPLO 5 Determine $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 7x}{4x}$.

SOLUCIÓN Con objeto de aplicar la ecuación 2, primero vuelva a escribir la función para multiplicarla por 7 y dividirla entre 7:

Observe que $\operatorname{sen} 7x \neq 7 \operatorname{sen} x$

$$\frac{\operatorname{sen} 7x}{4x} = \frac{7}{4}\left(\frac{\operatorname{sen} 7x}{7x}\right)$$

Si considera $\theta = 7x$, entonces $\theta \to 0$, conforme $x \to 0$, de este modo, mediante la ecuación 2

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 7x}{4x} = \frac{7}{4} \lim_{x \to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} 7x}{7x}\right)$$
$$= \frac{7}{4} \lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = \frac{7}{4} \cdot 1 = \frac{7}{4}$$

V **EJEMPLO 6** Calcule $\lim_{x \to 0} x \cot x$.

SOLUCIÓN En este caso se divide tanto el numerador como el denominador entre x:

$$\lim_{x \to 0} x \cot x = \lim_{x \to 0} \frac{x \cos x}{\operatorname{sen} x}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}} = \frac{\lim_{x \to 0} \cos x}{\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}}$$
$$= \frac{\cos 0}{1} \quad \text{(según la continuidad del coseno y la ecuación 2)}$$
$$= 1$$

3.3 Ejercicios

1-16 Encuentre la derivada de cada una de las siguientes funciones:

1. $f(x) = 3x^2 - 2\cos x$

2. $f(x) = \sqrt{x}\,\operatorname{sen} x$

3. $f(x) = \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}\cot x$

4. $y = 2\sec x - \csc x$

5. $y = \sec\theta\,\tan\theta$

6. $g(\theta) = e^{\theta}(\tan\theta - \theta)$

7. $y = c\cos t + t^2 \operatorname{sen} t$

8. $f(t) = \dfrac{\cot t}{e^t}$

9. $y = \dfrac{x}{2 - \tan x}$

10. $y = \operatorname{sen}\theta\cos\theta$

11. $f(\theta) = \dfrac{\sec\theta}{1 + \sec\theta}$

12. $y = \dfrac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x}$

13. $y = \dfrac{t \operatorname{sen} t}{1 + t}$

14. $y = \dfrac{1 - \sec x}{\tan x}$

15. $f(x) = xe^x \csc x$

16. $y = x^2 \operatorname{sen} x \tan x$

17. Demuestre que $\dfrac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$

18. Demuestre que $\dfrac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$

19. Demuestre que $\dfrac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$.

20. Aplique la definición de derivada y demuestre que si $f(x) = \cos x$, entonces $f'(x) = -\operatorname{sen} x$.

21-24 Encuentre la ecuación de la recta tangente a cada una de las siguientes curvas, en el punto especificado.

21. $y = \sec x, \quad (\pi/3, 2)$

22. $y = e^x \cos x, \quad (0, 1)$

23. $y = \cos x - \operatorname{sen} x, \quad (\pi, -1)$

24. $y = x + \tan x, \quad (\pi, \pi)$

25. a) Halle la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2x \operatorname{sen} x$ en el punto $(\pi/2, \pi)$.
b) Ilustre el inciso a) graficando la curva y la recta tangente en la misma pantalla.

26. a) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 3x + 6\cos x$ en el punto $(\pi/3, \pi + 3)$.
b) Ilustre el inciso a) graficando la curva y la recta tangente en la misma pantalla.

27. a) Si $f(x) = \sec x - x$, encuentre $f'(x)$.
b) Compruebe para ver que su respuesta al inciso a) es razonable trazando las graficas de f y f' para $|x| < \pi/2$.

28. a) Si $f(x) = e^x \cos x$, obtenga $f'(x)$ y $f''(x)$.
b) Verifique que su respuesta del inciso a) sea razonable graficando f, f' y f''.

29. Si $H(\theta) = \theta \operatorname{sen}\theta$, halle $H'(\theta)$ y $H''(\theta)$.

30. Si $f(t) = \csc t$, halle $f''(\pi/6)$.

31. a) Utilice la regla del cociente para derivar la función

$$f(x) = \frac{\tan x - 1}{\sec x}$$

b) Simplifique la expresión para $f(x)$ expresándola en términos de sen x y cos x, y enseguida halle $f'(x)$.
c) Demuestre que sus respuestas a los incisos a) y b) son equivalentes.

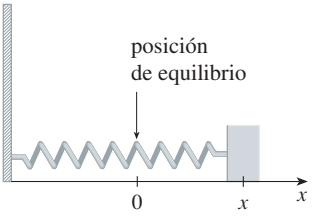
32. Suponga $f(\pi/3) = 4$ y $f'(\pi/3) = -2$, y sea $g(x) = f(x) \operatorname{sen} x$ y $h(x) = (\cos x)/f(x)$. Halle
a) $g'(\pi/3)$ b) $h'(\pi/3)$

33-34 ¿Para qué valores de x la gráfica de cada una de las siguientes funciones tiene una recta tangente horizontal?

33. $f(x) = x + 2\operatorname{sen} x$

34. $f(x) = e^x \cos x$

35. Una masa en un resorte vibra horizontalmente sobre una superficie lisa y nivelada, en un movimiento armónico simple. (Véase la figura.) Su ecuación de movimiento es $x(t) = 8 \operatorname{sen} t$, donde t está en segundos y x en centímetros.
a) Encuentre la velocidad y la aceleración en el instante t.
b) Encuentre la posición, la velocidad y la aceleración de la masa en el instante $t = 2\pi/3$. ¿En qué dirección se desplaza en ese instante?



36. Una banda elástica cuelga de un gancho, con una masa sujeta en su extremo inferior. Cuando se tira de la masa hacia abajo y, luego, se deja en libertad, vibra verticalmente en un movimiento armónico simple. La ecuación del movimiento es $s = 2\cos t + 3 \operatorname{sen} t$, $t \geqslant 0$, donde s se mide en centímetros y t en segundos. (Tome la dirección positiva correspondiente hacia abajo.)
a) Encuentre la velocidad y la aceleración en el instante t.
b) Dibuje las funciones velocidad y aceleración.
c) ¿Cuándo pasa la masa por la posición de equilibrio por primera vez?
d) ¿Cuán lejos de su posición de equilibrio viaja la masa?
e) ¿Cuándo es máxima la magnitud de la velocidad?

37. Una escalera de 10 pies de largo está apoyada sobre una pared vertical. Sea θ el ángulo entre la parte superior de la escalera y la pared, y x la distancia del extremo inferior de aquélla hasta la pared. Si el extremo inferior de la escalera se desliza alejándose de la pared, ¿con qué rapidez cambia x respecto a θ cuando $\theta = \pi/3$?

Se requiere calculadora graficadora o computadora **1.** Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

38. Un objeto con peso W es arrastrado a lo largo de un plano horizontal, por una fuerza que actúa a lo largo de una cuerda sujeta al objeto. Si la cuerda forma un ángulo θ con el plano, entonces la magnitud de la fuerza es

$$F = \frac{\mu W}{\mu \operatorname{sen}\theta + \cos\theta}$$

donde μ es una constante llamada *coeficiente de fricción*.

a) Encuentre la razón de cambio de F respecto a θ.

b) ¿Cuándo es igual a 0 esta razón de cambio?

c) Si $W = 50\,\text{lb}$ y $\mu = 0.6$, dibuje la gráfica de F como función de θ y úsela para localizar el valor de θ para el cual $dF/d\theta = 0$. ¿Resulta coherente el valor con su respuesta al inciso b)?

39-48 Determine cada uno de los siguientes límites.

39. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x}$

40. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 4x}{\operatorname{sen} 6x}$

41. $\lim_{t\to 0} \dfrac{\tan 6t}{\operatorname{sen} 2t}$

42. $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{\cos\theta - 1}{\operatorname{sen}\theta}$

43. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{5x^3 - 4x}$

44. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 5x}{x^2}$

45. $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\theta + \tan\theta}$

46. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{x}$

47. $\lim_{x\to \pi/4} \dfrac{1 - \tan x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$

48. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{x^2 + x - 2}$

49-50 Encuentre la derivada que se muestra, mediante la búsqueda de las primeras derivadas y observando el patrón que aparece.

49. $\dfrac{d^{99}}{dx^{99}}(\operatorname{sen} x)$

50. $\dfrac{d^{35}}{dx^{35}}(x \operatorname{sen} x)$

51. Encuentre constantes A y B tales que la función $y = A \operatorname{sen} x + B \cos x$ satisface la ecuación diferencial $y'' + y' - 2y = \operatorname{sen} x$.

52. a) Evalúe $\lim_{x\to\infty} x \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$.

b) Evalúe $\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$.

c) Ilustre los incisos a) y b) graficando $y = x \operatorname{sen}(1/x)$.

53. Derive cada una de las siguientes identidades trigonométricas para obtener una identidad nueva (o conocida) .

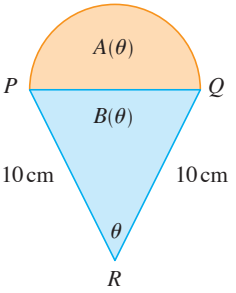
a) $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

b) $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

c) $\operatorname{sen} x + \cos x = \dfrac{1 + \cot x}{\csc x}$

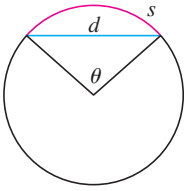
54. Un semicírculo con diámetro PQ descansa sobre un triángulo isósceles PQR para configurar una región en forma de cono para helados como el que se ilustra en la figura. Si $A(\theta)$ es el área del semicírculo y $B(\theta)$ es el área del triangulo, halle

$$\lim_{\theta\to 0^+} \frac{A(\theta)}{B(\theta)}$$



55. En la figura se muestra un arco circular de longitud s y una cuerda de longitud d, los dos están subtendidos por un ángulo central θ. Encuentre

$$\lim_{\theta\to 0^+} \frac{s}{d}$$



56. Sea $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 - \cos 2x}}$.

a) Grafique f. ¿Qué tipo de discontinuidad parece tener en $x = 0$?

b) Calcule los límites por la izquierda y por la derecha en $x = 0$. ¿Confirman estos valores su respuesta al inciso a)?

3.4 Regla de la cadena

Suponga que se le pide derivar la función

$$F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

Las fórmulas de derivación que usted aprendió en las secciones anteriores de este capítulo no le permiten calcular $F'(x)$.

Véase la sección 1.3 para un repaso de funciones compuestas.

Observe que F es una función compuesta. De hecho, si hacemos $y = f(u) = \sqrt{u}$ y $u = g(x) = x^2 + 1$, entonces podemos escribir $y = F(x) = f(g(x))$; es decir, $F = f \circ g$. Sabemos cómo derivar tanto f como g, de modo que sería útil contar con una regla que nos indique cómo hallar la derivada de $F = f \circ g$ en términos de las derivadas de f y g.

Resulta que la derivada de la función compuesta $f \circ g$ es el producto de las derivadas de f y g. Este hecho es uno de los más importantes de las reglas de derivación y se llama *regla de la cadena*. Esto parece verosímil si interpretamos las derivadas como razones de cambio. Consideremos du/dx como la razón de cambio de u respecto a x, dy/du como la razón de cambio de y respecto a u, y dy/dx como la razón de cambio de y respecto a x. Si u cambia al doble de rapidez de x y y varía tres veces más rápido que u, entonces parece razonable que y se modifique seis veces más rápido que x, y, por tanto, esperamos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Regla de la cadena *Si g es derivable en x y f es derivable en $g(x)$*, entonces la función compuesta $F = f \circ g$ definida mediante $F(x) = f(g(x))$ es derivable en x, y F' está dada por el producto

$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

En la notación de Leibniz, si $y = f(u)$ y $u = g(x)$ son funciones derivables, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

James Gregory

El primero en formular la regla de la cadena fue el matemático escocés James Gregory (1638-1675), quien también diseñó el primer telescopio práctico. Gregory descubrió las ideas básicas del Cálculo en la misma época que Newton. Se convirtió en el primer profesor de Matemáticas en la Universidad de St. Andrews y más tarde realizó la misma actividad en la Universidad de Edimburgo. Pero un año después de aceptar ese cargo, falleció a la edad de 36 años.

COMENTARIOS SOBRE LA DEMOSTRACIÓN DE LA REGLA DE LA CADENA Sea Δu el cambio en u correspondiente a un cambio de Δx en x; es decir,

$$\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x)$$

Entonces el cambio correspondiente en y es

$$\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u)$$

Resulta tentador escribir

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\boxed{1} \qquad = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

(Advierta que $\Delta u \to 0$ conforme $\Delta x \to 0$ porque g es continua.)

$$= \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

El único defecto de este razonamiento es que en [1] podría suceder que $\Delta u = 0$ (aun cuando $\Delta x \neq 0$) y, por supuesto, no podemos dividir entre 0. No obstante, este razonamiento *sugiere* por lo menos que la regla de la cadena es verdadera. Al final de esta sección se da una demostración completa de la regla de la cadena.

La regla de la cadena puede escribirse con apóstrofos

2 $$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

o bien, si $y = f(u)$ y $u = g(x)$, en la notación de Leibniz:

3 $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

La ecuación 3 es fácil de recordar porque si dy/du y du/dx fueran cocientes, entonces podría cancelar du. Sin embargo, recuerde que du no se ha definido y no debe concebir du/dx realmente como un cociente.

EJEMPLO 1 Encuentre $F'(x)$ si $F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

SOLUCIÓN 1 (Utilizando la ecuación 2): Al principio de esta sección, expresamos F como $F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ donde $f(u) = \sqrt{u}$ y $g(x) = x^2 + 1$. Dado que

$$f'(u) = \tfrac{1}{2}u^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \qquad \text{y} \qquad g'(x) = 2x$$

tenemos

$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

SOLUCIÓN 2 (Utilizando la ecuación 3): Si hacemos $u = x^2 + 1$ y $y = \sqrt{u}$, entonces

$$F'(x) = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}}(2x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Al utilizar la fórmula 3, debemos tener presente que dy/dx se refiere a la derivada de y cuando ésta se considera como función de x (llamada *derivada de y respecto a x*), en tanto que dy/du se refiere a la derivada de y cuando se considera como función de u (la derivada de y respecto a u). Por tanto, en el ejemplo 1, y puede considerarse como función de x $\left(y = \sqrt{x^2 + 1}\right)$ y también como una función de u $\left(y = \sqrt{u}\right)$. Observe que

$$\frac{dy}{dx} = F'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad \text{mientras que} \quad \frac{dy}{du} = f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

NOTA En la aplicación de la regla de la cadena, trabajamos del exterior hacia el interior. La fórmula 2 expresa que *derivamos la función exterior f* [*en la función interior g*(*x*)] *y, a continuación, multiplicamos por la derivada de la función interior.*

$$\frac{d}{dx}\underbrace{f}_{\substack{\text{función}\\ \text{exterior}}}\underbrace{(g(x))}_{\substack{\text{evaluada en}\\ \text{la función}\\ \text{interior}}} = \underbrace{f'}_{\substack{\text{derivada de}\\ \text{la función}\\ \text{exterior}}}\underbrace{(g(x))}_{\substack{\text{evaluada en}\\ \text{la función}\\ \text{interior}}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\substack{\text{derivada de}\\ \text{la función}\\ \text{interior}}}$$

V EJEMPLO 2 Derive a) $y = \operatorname{sen}(x^2)$ y b) $y = \operatorname{sen}^2 x$.

SOLUCIÓN

a) Si $y = \operatorname{sen}(x^2)$, entonces la función exterior es la función seno, y la interior es la función elevar al cuadrado, de modo que la regla de la cadena da

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\underbrace{\operatorname{sen}}_{\substack{\text{función}\\ \text{exterior}}}\underbrace{(x^2)}_{\substack{\text{evaluada en}\\ \text{la función}\\ \text{interior}}} = \underbrace{\cos}_{\substack{\text{derivada de}\\ \text{la función}\\ \text{exterior}}}\underbrace{(x^2)}_{\substack{\text{evaluada en}\\ \text{la función}\\ \text{interior}}} \cdot \underbrace{2x}_{\substack{\text{derivada de}\\ \text{la función}\\ \text{interior}}}$$
$$= 2x\cos(x^2)$$

b) Observe que $\operatorname{sen}^2 x = (\operatorname{sen} x)^2$. En este caso, la función exterior es la de elevar al cuadrado, y la interior es la función seno. Por tanto,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\underbrace{(\operatorname{sen} x)^2}_{\substack{\text{función}\\ \text{interior}}} = \underbrace{2}_{\substack{\text{derivada de}\\ \text{la función}\\ \text{exterior}}} \cdot \underbrace{(\operatorname{sen} x)}_{\substack{\text{evaluada en}\\ \text{la función}\\ \text{interior}}} \cdot \underbrace{\cos x}_{\substack{\text{derivada de}\\ \text{la función}\\ \text{interior}}}$$

La respuesta puede dejarse como $2 \operatorname{sen} x \cos x$, o bien, escribirse como $\operatorname{sen} 2x$ (por una identidad trigonométrica conocida como fórmula del ángulo doble). ■

Véase la página de referencia 2 o el apéndice D.

En el ejemplo 2a), combinamos la regla de la cadena con la regla para derivar la función seno. En general, si $y = \operatorname{sen} u$, donde u es una función derivable de x, entonces, por la regla de la cadena,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \cos u \frac{du}{dx}$$

Así que

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} u) = \cos u \frac{du}{dx}$$

De modo semejante, todas las fórmulas para derivar funciones trigonométricas pueden combinarse con la regla de la cadena.

Hagamos explícito el caso especial de la regla de la cadena donde la función exterior f es una función potencia. Si $y = [g(x)]^n$, entonces podemos escribir $y = f(u) = u^n$, donde $u = g(x)$. Si aplicamos la regla de la cadena y, a continuación, la regla de la potencia, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx} = n[g(x)]^{n-1}g'(x)$$

4 Regla de la potencia combinada con la regla de la cadena Si n es cualquier número real y $u = g(x)$ es derivable, entonces

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

De modo alternativo,

$$\frac{d}{dx}[g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1} \cdot g'(x)$$

Observe que la derivada en el ejemplo 1 pudimos calcularla tomando $n = \frac{1}{2}$ en la regla 4.

EJEMPLO 3 Derive $y = (x^3 - 1)^{100}$.

SOLUCIÓN Si, en $\boxed{4}$, se toman $u = g(x) = x^3 - 1$ y $n = 100$, tenemos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 - 1)^{100} = 100(x^3 - 1)^{99}\frac{d}{dx}(x^3 - 1)$$
$$= 100(x^3 - 1)^{99} \cdot 3x^2 = 300x^2(x^3 - 1)^{99}$$

V EJEMPLO 4 Encuentre $f'(x)$ si $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2 + x + 1}}$.

SOLUCIÓN En primer lugar, reescribimos f como: $f(x) = (x^2 + x + 1)^{-1/3}$

De este modo
$$f'(x) = -\tfrac{1}{3}(x^2 + x + 1)^{-4/3}\frac{d}{dx}(x^2 + x + 1)$$
$$= -\tfrac{1}{3}(x^2 + x + 1)^{-4/3}(2x + 1)$$

EJEMPLO 5 Encuentre la derivada de la función

$$g(t) = \left(\frac{t - 2}{2t + 1}\right)^9$$

SOLUCIÓN Si se combinan la regla de la potencia, la regla de la cadena y la regla del cociente, obtenemos

$$g'(t) = 9\left(\frac{t - 2}{2t + 1}\right)^8 \frac{d}{dt}\left(\frac{t - 2}{2t + 1}\right)$$
$$= 9\left(\frac{t - 2}{2t + 1}\right)^8 \frac{(2t + 1) \cdot 1 - 2(t - 2)}{(2t + 1)^2} = \frac{45(t - 2)^8}{(2t + 1)^{10}}$$

EJEMPLO 6 Derive $y = (2x + 1)^5(x^3 - x + 1)^4$.

SOLUCIÓN En este ejemplo debemos aplicar la regla del producto antes de aplicar la regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dx} = (2x + 1)^5\frac{d}{dx}(x^3 - x + 1)^4 + (x^3 - x + 1)^4\frac{d}{dx}(2x + 1)^5$$
$$= (2x + 1)^5 \cdot 4(x^3 - x + 1)^3\frac{d}{dx}(x^3 - x + 1)$$
$$+ (x^3 - x + 1)^4 \cdot 5(2x + 1)^4\frac{d}{dx}(2x + 1)$$
$$= 4(2x + 1)^5(x^3 - x + 1)^3(3x^2 - 1) + 5(x^3 - x + 1)^4(2x + 1)^4 \cdot 2$$

Observe que cada término tiene el factor común $2(2x + 1)^4(x^3 - x + 1)^3$, así que podemos factorizarlo y escribir la respuesta como

$$\frac{dy}{dx} = 2(2x + 1)^4(x^3 - x + 1)^3(17x^3 + 6x^2 - 9x + 3)$$

En la figura 1 se muestran las gráficas de las funciones y y y' del ejemplo 6. Observe que y' es grande cuando y crece con rapidez, y $y' = 0$ cuando y tiene una recta tangente horizontal. De modo que la respuesta parece ser razonable.

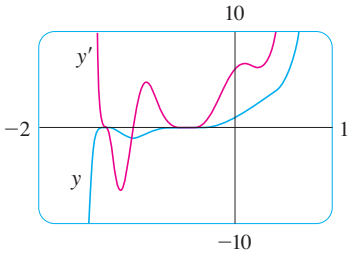


FIGURA 1

EJEMPLO 7 Derive $y = e^{\operatorname{sen} x}$.

SOLUCIÓN En este caso la función interior es $g(x) = \operatorname{sen} x$, y la exterior es la función exponencial $f(x) = e^x$. Por tanto, por la regla de la cadena,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(e^{\operatorname{sen} x}\right) = e^{\operatorname{sen} x}\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = e^{\operatorname{sen} x}\cos x$$

Más generalmente, la regla de la cadena da:

$$\frac{d}{dx}\left(e^u\right) = e^u\frac{du}{dx}$$

Podemos aplicar la regla de la cadena para derivar una función exponencial con cualquier base $a > 0$. Recuerde, por lo visto en la sección 1.6, que $a = e^{\ln a}$. De este modo,

$$a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{(\ln a)x}$$

y la regla de la cadena da

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(a^x\right) &= \frac{d}{dx}\left(e^{(\ln a)x}\right) = e^{(\ln a)x}\frac{d}{dx}(\ln a)x \\ &= e^{(\ln a)x}\cdot \ln a = a^x \ln a\end{aligned}$$

porque $\ln a$ es una constante. En consecuencia, tenemos la fórmula

No confunda la fórmula 5 (donde x es el *exponente*) con la regla de la potencia (donde x es la *base*):

$$\frac{d}{dx}\left(x^n\right) = nx^{n-1}$$

5

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(a^x\right) = a^x \ln a}$$

En particular, si $a = 2$, obtenemos

6

$$\frac{d}{dx}\left(2^x\right) = 2^x \ln 2$$

En la sección 3.1, dimos la estimación

$$\frac{d}{dx}\left(2^x\right) \approx (0.69)2^x$$

Esto resulta coherente con la fórmula exacta 6 porque $\ln 2 \approx 0.693147$.

La razón para el nombre "regla de la cadena" queda clara cuando se ve como analogía de agregar eslabones para alargar una cadena. Supongamos que $y = f(u)$, $u = g(x)$ y $x = h(t)$, donde f, g y h son funciones derivables. Entonces, para calcular la derivada de y respecto a t, utilizamos dos veces la regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}\frac{dx}{dt}$$

V EJEMPLO 8 Si $f(x) = \operatorname{sen}(\cos(\tan x))$, entonces

$$\begin{aligned}f'(x) &= \cos(\cos(\tan x))\frac{d}{dx}\cos(\tan x) \\ &= \cos(\cos(\tan x))[-\operatorname{sen}(\tan x)]\frac{d}{dx}(\tan x) \\ &= -\cos(\cos(\tan x))\operatorname{sen}(\tan x)\sec^2 x\end{aligned}$$

Observe que se ha aplicado dos veces la regla de la cadena.

EJEMPLO 9 Derive $y = e^{\sec 3\theta}$.

SOLUCIÓN La función exterior es la función exponencial, la función media es la función secante y la función interna es el triple de la función. De modo que

$$\begin{aligned}\frac{dy}{d\theta} &= e^{\sec 3\theta}\frac{d}{d\theta}(\sec 3\theta)\\ &= e^{\sec 3\theta}\sec 3\theta\tan 3\theta\frac{d}{d\theta}(3\theta)\\ &= 3e^{\sec 3\theta}\sec 3\theta\tan 3\theta\end{aligned}$$

Cómo demostrar la regla de la cadena

Recuerde que si $y = f(x)$ y x cambia de a a $a + \Delta x$, se define el incremento de y como

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$$

Según la definición de derivada, tenemos que

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a)$$

Por consiguiente, si denotamos por medio de ε el cociente de diferencias y la derivada, obtenemos

$$\lim_{\Delta x \to 0}\varepsilon = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(a)\right) = f'(a) - f'(a) = 0$$

pero $$\varepsilon = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(a) \quad \Rightarrow \quad \Delta y = f'(a)\,\Delta x + \varepsilon\,\Delta x$$

Si definimos ε como 0 cuando $\Delta x = 0$, entonces ε se convierte en función continua de Δx. De esta manera, para una función f derivable, podemos escribir

$$\boxed{7} \qquad \Delta y = f'(a)\,\Delta x + \varepsilon\,\Delta x \quad \text{donde} \quad \varepsilon \to 0 \ \text{cuando} \ \Delta x \to 0$$

y ε es una función continua de Δx. Esta propiedad de las funciones derivables es lo que permite demostrar la regla de la cadena.

DEMOSTRACIÓN DE LA REGLA DE LA CADENA Suponga que $u = g(x)$ es derivable en $x = a$ y $y = f(u)$ es derivable en $b = g(a)$. Si Δx es un incremento en x, y Δu y Δy son los incrementos correspondientes en u y y, entonces podemos aplicar la ecuación 7 para escribir

$$\boxed{8} \qquad \Delta u = g'(a)\,\Delta x + \varepsilon_1\,\Delta x = [g'(a) + \varepsilon_1]\,\Delta x$$

donde $\varepsilon_1 \to 0$ conforme $\Delta x \to 0$. De manera análoga,

$$\boxed{9} \qquad \Delta y = f'(b)\,\Delta u + \varepsilon_2\,\Delta u = [f'(b) + \varepsilon_2]\,\Delta u$$

donde $\varepsilon_2 \to 0$ conforme $\Delta u \to 0$. Si ahora sustituimos la expresión para Δu de la ecuación 8 en la ecuación 9, obtenemos

$$\Delta y = [f'(b) + \varepsilon_2][g'(a) + \varepsilon_1]\,\Delta x$$

así que $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = [f'(b) + \varepsilon_2][g'(a) + \varepsilon_1]$$

A medida que $\Delta x \to 0$, la ecuación 8 muestra que $\Delta u \to 0$. De modo que tanto $\varepsilon_1 \to 0$ y $\varepsilon_2 \to 0$ conforme $\Delta x \to 0$. Debido a eso

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [f'(b) + \varepsilon_2][g'(a) + \varepsilon_1] \\ &= f'(b)\, g'(a) = f'(g(a))\, g'(a)\end{aligned}$$

Esto demuestra la regla de la cadena.

3.4 Ejercicios

1-6 Escriba la función compuesta en la forma $f(g(x))$. [Identifique la función interior $u = g(x)$ y la exterior $y = f(u)$]. Luego, encuentre la derivada dy/dx de cada una de las siguientes funciones.

1. $y = \sqrt[3]{1 + 4x}$

2. $y = (2x^3 + 5)^4$

3. $y = \tan \pi x$

4. $y = \operatorname{sen}(\cot x)$

5. $y = e^{\sqrt{x}}$

6. $y = \sqrt{2 - e^x}$

7-46 Obtenga la derivada de cada una de las siguientes funciones.

7. $F(x) = (x^4 + 3x^2 - 2)^5$

8. $F(x) = (4x - x^2)^{100}$

9. $F(x) = \sqrt{1 - 2x}$

10. $f(x) = \dfrac{1}{(1 + \sec x)^2}$

11. $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 1}$

12. $f(t) = \operatorname{sen}(e^t) + e^{\operatorname{sen} t}$

13. $y = \cos(a^3 + x^3)$

14. $y = a^3 + \cos^3 x$

15. $y = xe^{-kx}$

16. $y = e^{-2t} \cos 4t$

17. $f(x) = (2x - 3)^4(x^2 + x + 1)^5$

18. $g(x) = (x^2 + 1)^3(x^2 + 2)^6$

19. $h(t) = (t + 1)^{2/3}(2t^2 - 1)^3$

20. $F(t) = (3t - 1)^4(2t + 1)^{-3}$

21. $y = \left(\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)^3$

22. $f(s) = \sqrt{\dfrac{s^2 + 1}{s^2 + 4}}$

23. $y = \sqrt{1 + 2e^{3x}}$

24. $y = 10^{1 - x^2}$

25. $y = 5^{-1/x}$

26. $G(y) = \dfrac{(y - 1)^4}{(y^2 + 2y)^5}$

27. $y = \dfrac{r}{\sqrt{r^2 + 1}}$

28. $y = \dfrac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}$

29. $F(t) = e^{t \operatorname{sen} 2t}$

30. $F(v) = \left(\dfrac{v}{v^3 + 1}\right)^6$

31. $y = \operatorname{sen}(\tan 2x)$

32. $y = \sec^2(m\theta)$

33. $y = 2^{\operatorname{sen} \pi x}$

34. $y = x^2 e^{-1/x}$

35. $y = \cos\left(\dfrac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}}\right)$

36. $y = \sqrt{1 + xe^{-2x}}$

37. $y = \cot^2(\operatorname{sen} \theta)$

38. $y = e^{k \tan \sqrt{x}}$

39. $f(t) = \tan(e^t) + e^{\tan t}$

40. $y = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))$

41. $f(t) = \operatorname{sen}^2(e^{\operatorname{sen}^2 t})$

42. $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

43. $g(x) = (2ra^{rx} + n)^p$

44. $y = 2^{3^{x^2}}$

45. $y = \cos\sqrt{\operatorname{sen}(\tan \pi x)}$

46. $y = [x + (x + \operatorname{sen}^2 x)^3]^4$

47-50 Encuentre la primera y segunda derivadas de cada una de las siguientes funciones:

47. $y = \cos(x^2)$

48. $y = \cos^2 x$

49. $y = e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$

50. $y = e^{e^x}$

51-54 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.

51. $y = (1 + 2x)^{10}, \quad (0, 1)$

52. $y = \sqrt{1 + x^3}, \quad (2, 3)$

53. $y = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x), \quad (\pi, 0)$

54. $y = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x, \quad (0, 0)$

55. a) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2/(1 + e^{-x})$ en el punto $(0, 1)$.

b) Ilustre el inciso a) graficando la curva y la recta tangente, en la misma pantalla.

56. a) La curva $y = |x|/\sqrt{2 - x^2}$ se llama *curva nariz de bala*. Encuentre la ecuación de la recta tangente a esta curva en el punto $(1, 1)$.

b) Ilustre el inciso a) graficando la curva y la recta tangente, en la misma pantalla.

57. a) Si $f(x) = x\sqrt{2 - x^2}$, encuentre $f'(x)$.

b) Verifique que su respuesta al inciso a) es razonable comparando las gráficas de f y f'.

58. La función $f(x) = \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} 2x)$, $0 \leq x \leq \pi$, surge en aplicaciones a la sintonía de frecuencia modulada (FM).
a) Utilice una gráfica de f producida por un dispositivo de graficación para trazar un boceto aproximado de la gráfica de f'.
b) Calcule $f'(x)$ y utilice esta expresión, junto con un dispositivo graficador, para graficar f'. Compare con su boceto del inciso a).

59. Encuentre todos los puntos sobre la gráfica de la función $f(x) = 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x$ en los cuales la recta tangente es horizontal.

60. Determine las coordenadas x de todos los puntos de la curva $y = \operatorname{sen} 2x - 2 \operatorname{sen} x$ en los cuales la recta tangente es horizontal.

61. Si $F(x) = f(g(x))$, donde $f(-2) = 8$, $f'(-2) = 4$, $f'(5) = 3$, $g(5) = -2$, y $g'(5) = 6$, halle $F'(5)$.

62. Si $h(x) = \sqrt{4 + 3f(x)}$, donde $f(1) = 7$ y $f'(1) = 4$, halle $h'(1)$.

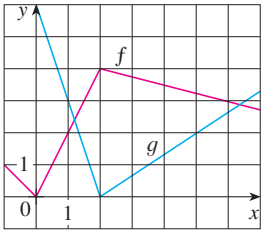
63. Se da una tabla de valores de f, g, f' y g'

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
1	3	2	4	6
2	1	8	5	7
3	7	2	7	9

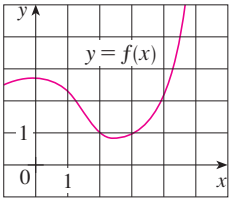
a) Si $h(x) = f(g(x))$, encuentre $h'(1)$.
b) Si $H(x) = g(f(x))$, halle $H'(1)$.

64. Sean f y g las funciones del ejercicio 63.
a) Si $F(x) = f(f(x))$, encuentre $F'(2)$.
b) Si $G(x) = g(g(x))$, encuentre $G'(3)$.

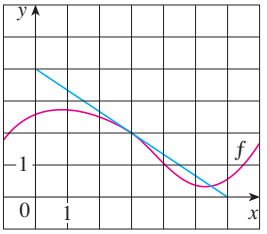
65. Sean f y g las funciones cuyas gráficas se muestran; sea $u(x) = f(g(x))$, $v(x) = g(f(x))$ y $w(x) = g(g(x))$. Encuentre, si existe, cada derivada. Si no existe, explique por qué.
a) $u'(1)$ b) $v'(1)$ c) $w'(1)$



66. Si f es la función cuya gráfica se muestra, sea $h(x) = f(f(x))$ y $g(x) = f(x^2)$. Utilice la gráfica de f para estimar el valor de cada derivada.
a) $h'(2)$ b) $g'(2)$



67. Si $g(x) = \sqrt{f(x)}$, donde f es la gráfica que se muestra, evalúe $g'(3)$.



68. Suponga que f es derivable sobre $\mathbb{R}$ y α es un número real. Sea $F(x) = f(x^\alpha)$ y $G(x) = [f(x)]^\alpha$. Encuentre expresiones para a) $F'(x)$ y b) $G'(x)$.

69. Suponga que f es derivable sobre $\mathbb{R}$. Sea $F(x) = f(e^x)$ y $G(x) = e^{f(x)}$. Encuentre expresiones para a) $F'(x)$ y b) $G'(x)$.

70. Sea $g(x) = e^{cx} + f(x)$ y $h(x) = e^{kx} f(x)$, donde $f(0) = 3$, $f'(0) = 5$, y $f''(0) = -2$.
a) Encuentre $g'(0)$y $g''(0)$ en términos de c.
b) En términos de k, encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de h en el punto donde $x = 0$.

71. Si $r(x) = f(g(h(x)))$, donde $h(1) = 2$, $g(2) = 3$, $h'(1) = 4$, $g'(2) = 5$ y $f'(3) = 6$, encuentre $r'(1)$.

72. Si g es una función dos veces derivable y $f(x) = xg(x^2)$, halle f'' en términos de g, g' y g''.

73. Si $F(x) = f(3f(4f(x)))$, donde $f(0) = 0$ y $f'(0) = 2$, encuentre $F'(0)$.

74. Si $F(x) = f(xf(xf(x)))$, donde $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f'(1) = 4$, $f'(2) = 5$ y $f'(3) = 6$, halle $F'(1)$.

75. Demuestre que la función $y = e^{2x}(A \cos 3x + B \operatorname{sen} 3x)$ satisface la ecuación diferencial $y'' - 4y' + 13y = 0$.

76. ¿Para qué valores de r la función $y = e^{rx}$ satisface la ecuación diferencial $y'' - 4y' + y = 0$?

77. Encuentre la 50a. derivada de $y = \cos 2x$.

78. Encuentre la 1000a. derivada de $f(x) = xe^{-x}$.

79. El desplazamiento de una partícula sobre una cuerda vibrante está dada por la ecuación $s(t) = 10 + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(10\pi t)$, donde s se mide en centímetros y t en segundos. Encuentre la velocidad de la partícula después de t segundos.

80. Si la ecuación del movimiento de una partícula está dada por $s = A\cos(\omega t + \delta)$, se dice que la partícula describe un *movimiento armónico simple*.
a) Encuentre la velocidad de la partícula en el instante t.
b) ¿Cuándo es 0 la velocidad?

81. Cefeida, una estrella variable, tiene una brillantez que aumenta y disminuye de manera alternada. La estrella de ese tipo más visible es Delta Cefeida, para la cual el intervalo entre los momentos de máxima brillantez es de 5.4 días. La brillantez promedio de esta estrella es de 4.0, y cambia en ± 0.35. En vista de estos datos, la brillantez de Delta

Cephei en el tiempo t, medido en días, se ha modelado mediante la función

$$B(t) = 4.0 + 0.35 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{5.4}\right)$$

a) Halle la razón de cambio de la brillantez después de t días.
b) Encuentre, con una aproximación de dos cifras decimales, la razón de aumento después de un día.

82. En el ejemplo 4 de la sección 1.3, obtuvimos un modelo para la duración de la luz diurna (en horas) en Filadelfia en el t-ésimo día del año

$$L(t) = 12 + 2.8 \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right]$$

Utilice este modelo para comparar cómo aumentan las horas de luz diurna en Filadelfia el 21 de marzo y el 21 de mayo.

83. El movimiento de un resorte que se somete a una fuerza de fricción o una fuerza de amortiguamiento (como un amortiguador en un automóvil) se modela a menudo mediante el producto de una función exponencial y una función seno o coseno. Suponga que la ecuación del movimiento de un punto sobre tal resorte es

$$s(t) = 2e^{-1.5t} \operatorname{sen} 2\pi t$$

donde s se mide en centímetros y t en segundos. Encuentre la velocidad después que transcurren t segundos y grafique las funciones de posición y de velocidad para $0 \leq t \leq 2$.

84. En ciertas circunstancias, un rumor se esparce según la ecuación

$$p(t) = \frac{1}{1 + ae^{-kt}}$$

donde $p(t)$ es la proporción de la población que lo conoce en el tiempo t, y a y k son constantes positivas. [En la sección 9.4 veremos que ésta es una ecuación razonable para $p(t)$.]

a) Encuentre $\lim_{t \to \infty} p(t)$.
b) Halle la rapidez de esparcimiento del rumor.
c) Grafique p para el caso en que $a = 10$, $k = 0.5$, con t medido en horas. Utilice la gráfica para estimar cuánto tiempo transcurrirá para que 80% de la población escuche el rumor.

85. Una partícula se mueve a lo largo de una línea recta con desplazamiento $s(t)$, velocidad $v(t)$ y aceleración $a(t)$. Demuestre que

$$a(t) = v(t)\frac{dv}{ds}$$

Explique la diferencia entre los significados de las derivadas dv/dt y dv/ds.

86. Se bombea aire dentro de un globo esférico para el clima. En cualquier tiempo t, el volumen del globo es $V(t)$, y su radio es $r(t)$.

a) ¿Qué representan las derivadas dV/dr y dV/dt?
b) Exprese dV/dt en términos de dr/dt.

87. El flash (unidad de destello) de una cámara funciona mediante el almacenamiento de carga en un capacitor y su liberación repentina cuando se activa el obturador. Los datos siguientes describen la carga que queda en el capacitor (en microcoulombs, μC) en el instante t (en segundos).

t	0.00	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10
Q	100.00	81.87	67.03	54.88	44.93	36.76

a) Halle, usando una calculadora graficadora o una computadora, un modelo exponencial para la carga.
b) La derivada $Q'(t)$ representa la corriente eléctrica (en microamperes, μA) que fluye del capacitor hacia el bulbo de la lámpara de destello. Con el resultado del inciso a), estime la corriente cuando $t = 0.04$ s. Compare la respuesta con el resultado del ejemplo 2 de la sección 2.1.

88. En la tabla se da la población de estadounidenses, desde 1790 hasta 1860.

Año	Población	Año	Población
1790	3 929 000	1830	12 861 000
1800	5 308 000	1840	17 063 000
1810	7 240 000	1850	23 192 000
1820	9 639 000	1860	31 443 000

a) Use una calculadora graficadora o una computadora para ubicar los datos con una función exponencial. Dibuje los puntos correspondientes a los datos y el modelo exponencial. ¿Qué tan bien ajustan?
b) Estime las tasas de crecimiento de la población en 1800 y 1850 promediando las pendientes de las rectas secantes.
c) Use el modelo exponencial del inciso a) para estimar las tasas de crecimiento en 1800 y 1850. Compare estas estimaciones con las del inciso b).
d) Utilice el modelo exponencial para predecir la población en 1870. Compare con la población real de 38 558 000. ¿Puede explicar la discrepancia?

89. Los sistemas algebraicos computarizados (SAC) tienen comandos que derivan funciones, pero la forma de la respuesta quizá no convenga; en consecuencia, pueden ser necesarios otros comandos para simplificarla.

a) Use un SAC para hallar la derivada del ejemplo 5 y compárela con la respuesta en ese ejemplo. Después, use el comando de simplificación y vuelva a comparar.
b) Utilice un SAC para derivar la función del ejemplo 6. ¿Qué sucede si usa el comando de simplificación? ¿Qué ocurre si emplea el comando de factorización? ¿Cuál forma de la respuesta sería la mejor para localizar las rectas tangentes horizontales?

90. a) Use un SAC para derivar la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^4 - x + 1}{x^4 + x + 1}}$$

y simplificar el resultado.
b) ¿En dónde tiene la gráfica de f rectas tangentes horizontales?
c) Trace las gráficas de f y f' en la misma pantalla. ¿Son coherentes las gráficas con su respuesta al inciso b)?

91. Mediante la regla de la cadena demuestre lo siguiente.
a) La derivada de una función par es una función impar.
b) La derivada de una función impar es una función par.

92. Utilice la regla de la cadena y la regla del producto para obtener una demostración alternativa de la regla del cociente. [*Sugerencia:* escriba $f(x)/g(x) = f(x)[g(x)]^{-1}$.]

93. a) Si n es un entero positivo, demuestre que

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^n x \cos nx) = n \operatorname{sen}^{n-1} x \cos(n+1)x$$

b) Plantee una fórmula para la derivada de $y = \cos^n x \cos nx$ que es similar a la del inciso a).

94. Suponga que $y = f(x)$ es una curva que siempre queda arriba del eje x y nunca tiene una recta tangente horizontal, donde f es derivable para toda x. ¿Para qué valor de y la razón de cambio de y^5 respecto a x es 80 veces la razón de cambio de y respecto a x?

95. Use la regla de la cadena para demostrar que si θ se mide en grados, entonces

$$\frac{d}{d\theta}(\operatorname{sen}\theta) = \frac{\pi}{180}\cos\theta$$

(Esto da un argumento para justificar la convención de que siempre se use el radián cuando se manejen funciones trigonométricas en Cálculo: las fórmulas de derivación no serían tan sencillas si usara el grado como medida.)

96. a) Escriba $|x| = \sqrt{x^2}$ y utilice la regla de la cadena para demostrar que

$$\frac{d}{dx}|x| = \frac{x}{|x|}$$

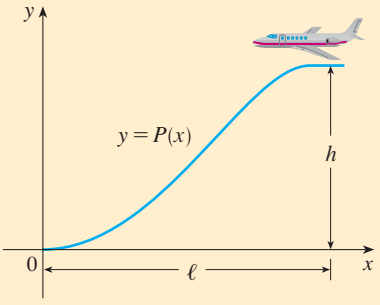
b) Si $f(x) = |\operatorname{sen} x|$, encuentre $f'(x)$ y trace las gráficas de f y f'. ¿En dónde f no es derivable?
c) Si $g(x) = \operatorname{sen}|x|$, halle $g'(x)$ y dibuje las gráficas de g y g'. ¿En dónde g no es derivable?

97. Si $y = f(u)$ y $u = g(x)$, donde f y g son funciones dos veces derivables, demuestre que

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{du^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{du}\frac{d^2u}{dx^2}$$

98. Si $y = f(u)$ y $u = g(x)$, donde f y g tienen tercera derivada, obtenga una fórmula para d^3y/dx^3 parecida a la que se proporciona en el ejercicio 97.

PROYECTO DE APLICACIÓN ¿DÓNDE DEBERÍA UN PILOTO INICIAR EL ATERRIZAJE?



En la figura se muestra una trayectoria de aproximación para el aterrizaje de un avión, que satisface las condiciones siguientes:

i) La altura de crucero es h cuando se inicia el descenso a una distancia ℓ del punto de contacto con la pista en el origen.

ii) El piloto debe mantener una rapidez horizontal constante v a todo lo largo del descenso.

iii) El valor absoluto de la aceleración vertical no debe sobrepasar una constante k (la cual es mucho menor que la aceleración debida a la gravedad).

1. Encuentre un polinomio cúbico $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ que satisfaga la condición i), imponiendo condiciones adecuadas sobre $P(x)$ y $P'(x)$ en el inicio del descenso y el contacto con la pista.

2. Use las condiciones ii) y iii) para demostrar que

$$\frac{6hv^2}{\ell^2} \leqslant k$$

3. Suponga que una aerolínea comercial decide no permitir que la aceleración vertical de un avión sea mayor que $k = 860\,\text{mi/h}^2$. Si la altitud de crucero de un avión es de 35 000 pies y la rapidez de 300 mi/h, ¿a qué distancia del aeropuerto debe el piloto iniciar el descenso?

4. Trace la grafica de la trayectoria de aproximación si se satisfacen las condiciones que se enuncian en el problema 3.

Se requiere calculadora graficadora o computadora

3.5 Derivación implícita

La mayor parte de las funciones que hemos visto hasta ahora pueden describirse expresando una variable explícitamente en términos de otra variable; por ejemplo,

$$y = \sqrt{x^3 + 1} \qquad \text{o bien} \qquad y = x \operatorname{sen} x$$

o, en general, $y = f(x)$. Sin embargo, algunas funciones se definen implícitamente por medio de una relación entre x y y como

$$x^2 + y^2 = 25 \tag{1}$$

o bien

$$x^3 + y^3 = 6xy \tag{2}$$

En algunos casos, es posible resolver una ecuación de ese tipo para y como una función explícita (o varias funciones) de x. Por ejemplo, si resolvemos la ecuación 1 para y, obtenemos $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$, de modo que dos de las funciones determinadas por la ecuación implícita 1 son $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ y $g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$. Las gráficas de f y g son las semicircunferencias superior e inferior de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$. (Véase la figura 1.)

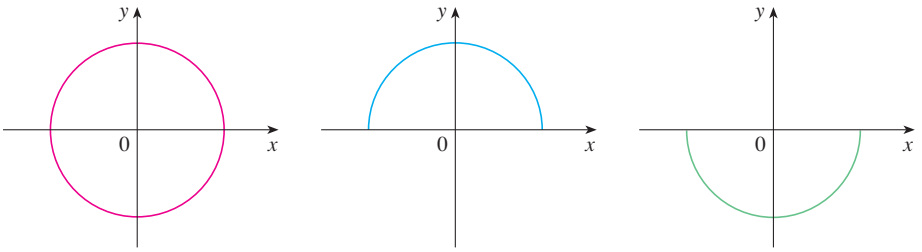


FIGURA 1 a) $x^2 + y^2 = 25$ b) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ c) $g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$

No es fácil resolver explícitamente la ecuación 2 para y como función x. (Con un sistema algebraico para computadora no hay dificultad, pero las expresiones que se obtienen son muy complicadas). Sin embargo, 2 es la ecuación de una curva llamada **folium de Descartes**, ilustrada en la figura 2 y, que de manera implícita define a y como varias funciones de x. En la figura 3 se muestran las gráficas de esas tres funciones. Cuando se dice que f es una función definida implícitamente por la ecuación 2, se da a entender que la ecuación

$$x^3 + [f(x)]^3 = 6xf(x)$$

es verdadera para todos los valores de x en el dominio de f.

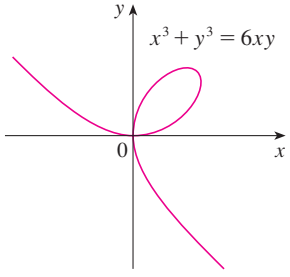


FIGURA 2 Folium de Descartes

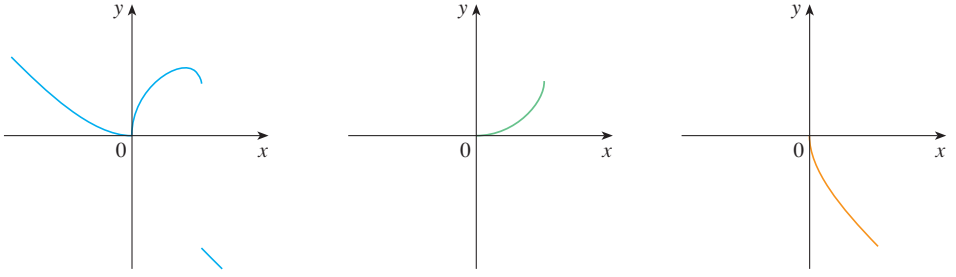


FIGURA 3 Gráficas de tres funciones definidas por el folium de Descartes

Por fortuna, no es necesario resolver una ecuación para y en términos de x a fin de hallar la derivada de y. En lugar de ello, aplicaremos el método de **derivación implícita**. Este método consiste en derivar ambos miembros de la ecuación respecto a x y después resolver la ecuación resultante para y'. En los ejemplos y ejercicios de esta sección, siempre se supone que la ecuación dada determina y implícitamente como una función derivable de x, de modo que puede aplicarse el método de derivación implícita.

V EJEMPLO 1

a) Si $x^2 + y^2 = 25$, encuentre $\dfrac{dy}{dx}$.

b) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$, en el punto $(3, 4)$.

SOLUCIÓN 1

a) Derive ambos miembros de la ecuación $x^2 + y^2 = 25$:

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(25)$$

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

Recuerde que y es una función de x, así que hay que utilizar la regla de la cadena para obtener

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dy}(y^2)\frac{dy}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}$$

Por tanto,

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

Ahora resolvemos esta ecuación para dy/dx:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

b) En el punto $(3, 4)$ se tiene que $x = 3$ y $y = 4$, de modo que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}$$

Por tanto, la ecuación de la tangente a la circunferencia, en $(3, 4)$, es

$$y - 4 = -\tfrac{3}{4}(x - 3) \qquad \text{o bien} \qquad 3x + 4y = 25$$

SOLUCIÓN 2

b) Al resolver $x^2 + y^2 = 25$, obtenemos $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$. El punto $(3, 4)$ se encuentra en la semicircunferencia superior $y = \sqrt{25 - x^2}$ y, por consiguiente, considere la función $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$. Al aplicar la regla de la cadena a la función f, se tiene

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}(25 - x^2)^{-1/2}\frac{d}{dx}(25 - x^2)$$

$$= \tfrac{1}{2}(25 - x^2)^{-1/2}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

En el ejemplo 1 se ilustra que aun cuando es posible resolver una ecuación explícita para y en términos de x puede ser más fácil aplicar la derivación implícita.

De modo que $$f'(3) = -\frac{3}{\sqrt{25 - 3^2}} = -\frac{3}{4}$$

y, como en la solución 1, la ecuación de la recta tangente es $3x + 4y = 25$.

NOTA 1 La expresión $dy/dx = -x/y$ en la solución 1 da la derivada en términos tanto de x como de y. Esto es correcto sin importar cuál función y queda determinada por la ecuación dada. Por ejemplo, para $y = f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ tenemos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

en tanto que para $y = g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$ tenemos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{-\sqrt{25 - x^2}} = \frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

V EJEMPLO 2

a) Encuentre y' si $x^3 + y^3 = 6xy$.
b) Halle la recta tangente al folium de Descartes $x^3 + y^3 = 6xy$, en el punto (3, 3).
c) ¿En cuál punto en el primer cuadrante es horizontal la recta tangente?

SOLUCIÓN

a) Si se derivan ambos miembros de $x^3 + y^3 = 6xy$ respecto a x, considerando a y como función de x, y usando la regla de la cadena en el término y^3, y la regla del producto en el término $6xy$, obtenemos

$$3x^2 + 3y^2y' = 6xy' + 6y$$

o bien $$x^2 + y^2y' = 2xy' + 2y$$

Ahora resolvemos para y': $$y^2y' - 2xy' = 2y - x^2$$

$$(y^2 - 2x)y' = 2y - x^2$$

$$y' = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}$$

b) Cuando $x = y = 3$,

$$y' = \frac{2 \cdot 3 - 3^2}{3^2 - 2 \cdot 3} = -1$$

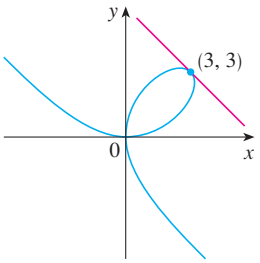


FIGURA 4

un vistazo a la figura 4 confirma que éste es un valor razonable para la pendiente en (3, 3). De este modo, la ecuación de la recta tangente al folium en (3, 3) es

$$y - 3 = -1(x - 3) \quad \text{o bien} \quad x + y = 6$$

c) La recta tangente es horizontal si $y' = 0$. Si utilizamos la expresión para y' del inciso a), vemos que $y' = 0$ cuando $2y - x^2 = 0$ (siempre que $y^2 - 2x \neq 0$). Al sustituir $y = \frac{1}{2}x^2$ en la ecuación de la curva, obtenemos

$$x^3 + \left(\tfrac{1}{2}x^2\right)^3 = 6x\left(\tfrac{1}{2}x^2\right)$$

lo cual se simplifica para quedar $x^6 = 16x^3$. Ya que $x \neq 0$ en el primer cuadrante, tenemos $x^3 = 16$. Si $x = 16^{1/3} = 2^{4/3}$, entonces $y = \frac{1}{2}(2^{8/3}) = 2^{5/3}$. Por tanto, la recta tangente es horizontal en $(2^{4/3}, 2^{5/3})$ lo cual es aproximadamente (2.5198, 3.1748). Al estudiar la figura 5, es claro que la respuesta es razonable.

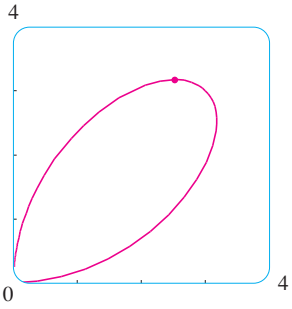


FIGURA 5

NOTA 2 Existe una fórmula para obtener las tres raíces de una ecuación cúbica, que es semejante a la fórmula cuadrática, pero mucho más complicada. Si utilizamos esta fórmula (o un sistema algebraico computarizado) para resolver la ecuación $x^3 + y^3 = 6xy$ para y en términos de x, obtenemos tres funciones determinadas por la ecuación:

$$y = f(x) = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}x^3 + \sqrt{\tfrac{1}{4}x^6 - 8x^3}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}x^3 - \sqrt{\tfrac{1}{4}x^6 - 8x^3}}$$

y

$$y = \tfrac{1}{2}\left[-f(x) \pm \sqrt{-3}\left(\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}x^3 + \sqrt{\tfrac{1}{4}x^6 - 8x^3}} - \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}x^3 - \sqrt{\tfrac{1}{4}x^6 - 8x^3}}\right)\right]$$

(Éstas son las tres funciones cuyas gráficas se muestran en la figura 3.) Usted puede ver que el método de la derivación implícita ahorra una cantidad enorme de trabajo en casos como éste. Más aún, la derivación implícita funciona con igual facilidad para funciones como

$$y^5 + 3x^2y^2 + 5x^4 = 12$$

en las cuales es *imposible* resolver para y en términos de x.

Abel y Galois

En 1824, el matemático noruego Niels Abel demostró que no puede darse una fórmula general para la obtención de las raíces de una ecuación de quinto grado. Tiempo después, el matemático francés Evariste Galois demostró que es imposible hallar una fórmula general para las raíces de una ecuación de n-ésimo grado (en términos de operaciones algebraicas sobre los coeficientes), si n es cualquier entero mayor que 4.

EJEMPLO 3 Encuentre y' si $\operatorname{sen}(x + y) = y^2 \cos x$.

SOLUCIÓN Si derivamos implícitamente respecto a x y consideramos que y es una función de x, obtenemos

$$\cos(x + y) \cdot (1 + y') = y^2(-\operatorname{sen} x) + (\cos x)(2yy')$$

(Note que en el lado izquierdo hemos aplicado la regla de la cadena y, en el derecho, la regla de la cadena y la regla del producto). Si agrupamos los términos que contienen a y', obtenemos

$$\cos(x + y) + y^2 \operatorname{sen} x = (2y \cos x)y' - \cos(x + y) \cdot y'$$

Por lo que

$$y' = \frac{y^2 \operatorname{sen} x + \cos(x + y)}{2y \cos x - \cos(x + y)}$$

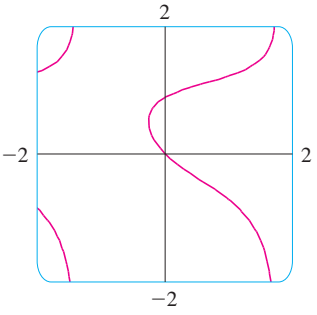


FIGURA 6

En la figura 6, trazada con el comando de construcción de gráficas en forma implícita de un sistema algebraico computarizado, se muestra parte de la curva $\operatorname{sen}(x + y) = y^2 \cos x$. Como comprobación de nuestro cálculo, observe que $y' = -1$, cuando $x = y = 0$ y, al parecer de la gráfica, la pendiente es aproximadamente -1 en el origen.

Las figuras 7, 8 y 9 muestran tres curvas más, producidas por computadora. En los ejercicios 41-42 tendrá usted oportunidad de crear y analizar curvas atípicas de esta naturaleza.

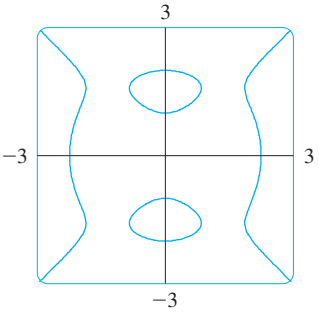


FIGURA 7
$(y^2 - 1)(y^2 - 4) = x^2(x^2 - 4)$

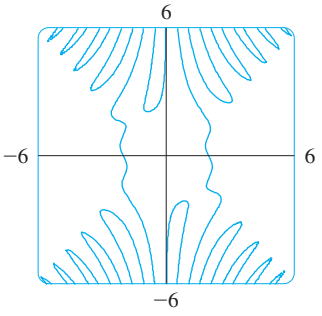


FIGURA 8
$(y^2 - 1)\operatorname{sen}(xy) = x^2 - 4$

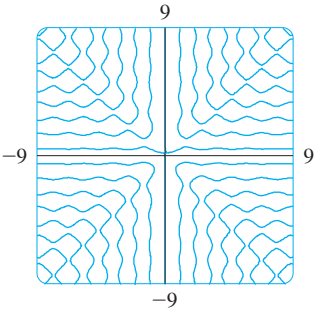


FIGURA 9
$y \operatorname{sen} 3x = x \cos 3y$

En el siguiente ejemplo se muestra cómo encontrar la segunda derivada de una función que está definida implícitamente.

EJEMPLO 4 Hallar y'' si $x^4 + y^4 = 16$.

SOLUCIÓN Derivando la ecuación de manera implícita respecto a x, obtenemos

$$4x^3 + 4y^3y' = 0$$

Resolviendo para y'

$$y' = -\frac{x^3}{y^3} \tag{3}$$

Para hallar y'' derivamos esta expresión para y' aplicando la regla del cociente, considerando que y es una función de x:

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(-\frac{x^3}{y^3}\right) = -\frac{y^3\,(d/dx)(x^3) - x^3\,(d/dx)(y^3)}{(y^3)^2}$$

$$= -\frac{y^3 \cdot 3x^2 - x^3(3y^2y')}{y^6}$$

Si ahora sustituimos la ecuación 3 en esta expresión, obtenemos

$$y'' = -\frac{3x^2y^3 - 3x^3y^2\left(-\dfrac{x^3}{y^3}\right)}{y^6}$$

$$= -\frac{3(x^2y^4 + x^6)}{y^7} = -\frac{3x^2(y^4 + x^4)}{y^7}$$

Pero los valores de x y y deben satisfacer la ecuación original $x^4 + y^4 = 16$, por lo que la respuesta se simplifica a

$$y'' = -\frac{3x^2(16)}{y^7} = -48\,\frac{x^2}{y^7}$$

La figura 10 muestra la gráfica de la curva $x^4 + y^4 = 16$ del ejemplo 4. Observe que es una versión extendida y achatada de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$, por esta razón algunas veces se le llama *circunferencia gruesa*. Empieza muy escarpada a la izquierda, pero rápidamente se hace muy plana. Esto puede verse en la expresión

$$y' = -\frac{x^3}{y^3} = -\left(\frac{x}{y}\right)^3$$

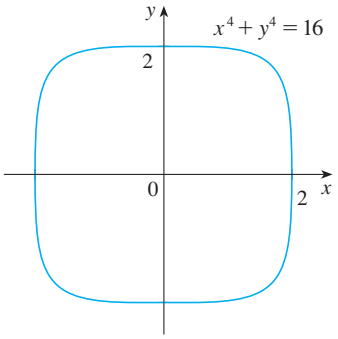


FIGURA 10

Derivadas de las funciones trigonométricas inversas

Las funciones trigonométricas inversas se repasan en la sección 1.6. En la sección 2.5 analizamos su continuidad, y en la sección 2.6, sus asíntotas. Aquí usamos la derivación implícita para hallar las derivadas de las funciones trigonométricas inversas, suponiendo que estas funciones son derivables. [En efecto, si f es una función uno a uno derivable, puede demostrarse que su función inversa f también es derivable, excepto donde sus rectas tangentes son verticales. Esto es posible porque la gráfica de una función derivable no tiene vértices ni bucles y, por esta razón, si la reflejamos respecto a $y = x$, la gráfica de su función inversa tampoco tiene vértices ni bucles.]

Recuerde la definición de la función arco seno:

$$y = \operatorname{sen}^{-1}x \quad \text{significa} \quad \operatorname{sen} y = x \quad \text{y} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$$

Al derivar implícitamente $\operatorname{sen} y = x$ respecto a x, obtenemos

$$\cos y\,\frac{dy}{dx} = 1 \qquad \text{o bien} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$$

Ahora $\cos y \geqslant 0$, debido a que $-\pi/2 \leqslant y \leqslant \pi/2$, de modo que

$$\cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

El mismo método puede utilizarse para hallar una fórmula para la derivada de *cualquier* función inversa. Véase el ejercicio 77.

De manera que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

En la figura 11 se muestra la gráfica de $f(x) = \tan^{-1} x$ y su derivada $f'(x) = 1/(1 + x^2)$. Observe que f es creciente y $f'(x)$ es siempre positiva. El hecho de que $\tan^{-1} x \to \pm\pi/2$ conforme $x \to \pm\infty$ se refleja en el hecho de que $f'(x) \to 0$ a medida que $x \to \pm\infty$.

La fórmula para la derivada de la función arco tangente se obtiene de manera semejante. Si $y = \tan^{-1} x$, entonces $\tan y = x$. Si derivamos esta última ecuación implícitamente respecto a x, tenemos

$$\sec^2 y \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1 + x^2}}$$

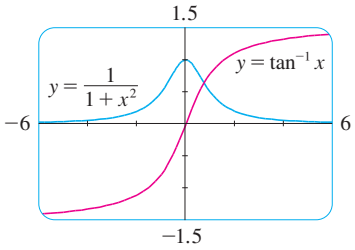


FIGURA 11

V EJEMPLO 5 Derive a) $y = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^{-1} x}$ y b) $f(x) = x \arctan\sqrt{x}$.

SOLUCIÓN

a)
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1} x)^{-1} = -(\operatorname{sen}^{-1} x)^{-2} \frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1} x)$$
$$= -\frac{1}{(\operatorname{sen}^{-1} x)^2 \sqrt{1 - x^2}}$$

Recuerde que $\arctan x$ es una notación alternativa para $\tan^{-1} x$.

b)
$$f'(x) = x \frac{1}{1 + (\sqrt{x})^2}\left(\tfrac{1}{2} x^{-1/2}\right) + \arctan\sqrt{x}$$
$$= \frac{\sqrt{x}}{2(1 + x)} + \arctan\sqrt{x}$$

Las funciones trigonométricas inversas que se presentan con mayor frecuencia son las que acabamos de analizar. Las derivadas de las cuatro restantes se presentan en la tabla siguiente. Las demostraciones de las fórmulas se dejan como ejercicios.

Derivadas de las funciones trigonométricas inversas

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\csc^{-1} x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1 + x^2} \qquad \frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = -\frac{1}{1 + x^2}$$

Las fórmulas para las derivadas de $\csc^{-1} x$ y $\sec^{-1} x$ dependen de las definiciones que se apliquen para estas funciones. Véase el ejercicio 64.

3.5 Ejercicios

1-4 a) Encuentre y' por derivación implícita.
b) Resuelva la ecuación explícita para y y derive para obtener y' en términos de x.
c) Compruebe la coherencia de sus soluciones en los incisos a) y b) sustituyendo la expresión para y en su solución del inciso a).

1. $9x^2 - y^2 = 1$

2. $2x^2 + x + xy = 1$

3. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1$

4. $\cos x + \sqrt{y} = 5$

5-20 Encuentre dy/dx por derivación implícita.

5. $x^3 + y^3 = 1$

6. $2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$

7. $x^2 + xy - y^2 = 4$

8. $2x^3 + x^2y - xy^3 = 2$

9. $x^4(x + y) = y^2(3x - y)$

10. $xe^y = x - y$

11. $y \cos x = x^2 + y^2$

12. $\cos(xy) = 1 + \operatorname{sen} y$

13. $4 \cos x \operatorname{sen} y = 1$

14. $e^y \operatorname{sen} x = x + xy$

15. $e^{x/y} = x - y$

16. $\sqrt{x + y} = 1 + x^2y^2$

17. $\tan^{-1}(x^2y) = x + xy^2$

18. $x \operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} x = 1$

19. $e^y \cos x = 1 + \operatorname{sen}(xy)$

20. $\tan(x - y) = \dfrac{y}{1 + x^2}$

21. Si $f(x) + x^2[f(x)]^3 = 10$ y $f(1) = 2$, encuentre $f'(1)$.

22. Si $g(x) + x \operatorname{sen} g(x) = x^2$, determine $g'(0)$.

23-24 Considere a y como la variable independiente y a x como la variable dependiente y utilice la derivación implícita para calcular dx/dy.

23. $x^4y^2 - x^3y + 2xy^3 = 0$

24. $y \sec x = x \tan y$

25-32 Utilice la derivación implícita para encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.

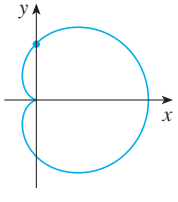
25. $y \operatorname{sen} 2x = x \cos 2y, \quad (\pi/2, \pi/4)$

26. $\operatorname{sen}(x + y) = 2x - 2y, \quad (\pi, \pi)$

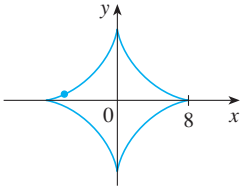
27. $x^2 + xy + y^2 = 3, \quad (1, 1)$ (elipse)

28. $x^2 + 2xy - y^2 + x = 2, \quad (1, 2)$ (hipérbola)

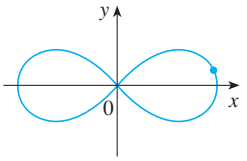
29. $x^2 + y^2 = (2x^2 + 2y^2 - x)^2$
$\left(0, \frac{1}{2}\right)$
(cardioide)



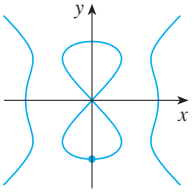
30. $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$
$\left(-3\sqrt{3}, 1\right)$
(astroide)



31. $2(x^2 + y^2)^2 = 25(x^2 - y^2)$
$(3, 1)$
(lemniscata)



32. $y^2(y^2 - 4) = x^2(x^2 - 5)$
$(0, -2)$
(curva del diablo)



33. a) La curva con ecuación $y^2 = 5x^4 - x^2$ se llama **kampila de Eudoxo**. Encuentre la ecuación de la recta tangente a esta curva en el punto $(1, 2)$.
b) Ilustre el inciso a) graficando la curva y la recta tangente, en una pantalla común. (Si su dispositivo graficador puede trazar gráficas de curvas definidas implícitamente, entonces utilice esa capacidad. Si no es así, puede dibujar esta curva trazando sus mitades superior e inferior por separado.)

34. a) La curva con ecuación $y^2 = x^3 + 3x^2$ se llama **cúbica de Tschirnhausen**. Encuentre la ecuación de la recta tangente a esta curva, en el punto $(1, -2)$.
b) ¿En cuáles puntos esta curva tiene rectas tangentes horizontales?
c) Ilustre los incisos a) y b) graficando la curva y las rectas tangentes, en una pantalla común.

35-38 Halle y'' por derivación implícita.

35. $9x^2 + y^2 = 9$

36. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

37. $x^3 + y^3 = 1$

38. $x^4 + y^4 = a^4$

39. Si $xy + e^y = e$, encuentre el valor de y'' en el punto donde $x = 0$.

40. Si $x^2 + xy + y^3 = 1$, encuentre el valor de y''' en el punto donde $x = 1$.

41. Es posible crear formas caprichosas con las capacidades de los sistemas algebraicos computarizados, a fin de construir gráficas en forma implícita.
a) Trace la gráfica de la curva con ecuación

$$y(y^2 - 1)(y - 2) = x(x - 1)(x - 2)$$

¿En cuántos puntos esta curva tiene rectas tangentes horizontales? Estime las coordenadas x de estos puntos.
b) Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes en los puntos $(0, 1)$ y $(0, 2)$.
c) Halle las coordenadas x exactas de los puntos mencionados en el inciso a).
d) Diseñe curvas incluso más caprichosas modificando la ecuación del inciso a).

SAC **42.** a) La curva con ecuación

$$2y^3 + y^2 - y^5 = x^4 - 2x^3 + x^2$$

se ha relacionado a un carretón que rebota. Utilice un sistema algebraico computarizado para la curva y descubra por qué.

b) ¿En cuántos puntos esta curva tiene rectas tangentes horizontales? Encuentre las coordenadas x de estos puntos.

43. Halle los puntos de la lemniscata del ejercicio 31 donde la recta tangente sea horizontal.

44. Demuestre por derivación implícita que la recta tangente a la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

en el punto (x_0, y_0) es

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

45. Formule una ecuación para la recta tangente a la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

en el punto (x_0, y_0).

46. Demuestre que la suma de las intersecciones en x y y de cualquier recta tangente a la curva $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}$ es igual a c.

47. Mediante la derivación implícita demuestre que cualquier recta tangente en un punto P a una circunferencia con centro O es perpendicular al radio OP.

48. La regla de la potencia puede demostrarse por medio de la derivación implícita para el caso donde n es un número racional, $n = p/q$, y $y = f(x) = x^n$ es una función derivable. Si $y = x^{p/q}$, entonces $y^q = x^p$. Mediante la derivación implícita demuestre que

$$y' = \frac{p}{q} x^{(p/q)-1}$$

49–60 Halle la derivada de cada una de las siguientes funciones. Simplifique donde sea posible.

49. $y = (\tan^{-1}x)^2$

50. $y = \tan^{-1}(x^2)$

51. $y = \operatorname{sen}^{-1}(2x + 1)$

52. $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}\,\sec^{-1}x$

53. $G(x) = \sqrt{1 - x^2}\,\arccos x$

54. $y = \tan^{-1}\left(x - \sqrt{1 + x^2}\right)$

55. $h(t) = \cot^{-1}(t) + \cot^{-1}(1/t)$

56. $F(\theta) = \operatorname{arcsen}\sqrt{\operatorname{sen}\theta}$

57. $y = x\,\operatorname{sen}^{-1}x + \sqrt{1 - x^2}$

58. $y = \cos^{-1}(\operatorname{sen}^{-1}t)$

59. $y = \arccos\left(\dfrac{b + a\cos x}{a + b\cos x}\right), \quad 0 \leq x \leq \pi, \ a > b > 0$

60. $y = \arctan\sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}}$

61–62 Encuentre $f'(x)$. Compruebe si su respuesta es razonable comparando las gráficas de f y f'.

61. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}\,\arcsen x$

62. $f(x) = \arctan(x^2 - x)$

63. Demuestre la fórmula para $(d/dx)(\cos^{-1}x)$ por el mismo método utilizado para demostrar $(d/dx)(\operatorname{sen}^{-1}x)$.

64. a) Una manera de definir $\sec^{-1}x$ es decir que $y = \sec^{-1}x \iff \sec y = x$ y $0 \leq y < \pi/2$, o bien, $\pi \leq y < 3\pi/2$. Demuestre que, con esta definición

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

b) Otro modo de definir $\sec^{-1}x$ que se utiliza a veces es decir que $y = \sec^{-1}x \iff \sec y = x$ y $0 \leq y \leq \pi$, $y \neq 0$. Demuestre que, con esta definición

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$$

65–68 Dos curvas son **ortogonales** si sus rectas tangentes son perpendiculares en cada punto de intersección. Demuestre que las familias dadas de curvas son **trayectorias ortogonales** entre sí; es decir, cualquier curva en una familia es ortogonal a cualquier curva en la otra familia. Dibuje ambas familias de curvas usando los mismos ejes de coordenadas.

65. $x^2 + y^2 = r^2, \quad ax + by = 0$

66. $x^2 + y^2 = ax, \quad x^2 + y^2 = by$

67. $y = cx^2, \quad x^2 + 2y^2 = k$

68. $y = ax^3, \quad x^2 + 3y^2 = b$

69. Demuestre que la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ y la hipérbola $x^2/A^2 - y^2/B^2 = 1$ son trayectorias ortogonales si $A^2 < a^2$ y $a^2 - b^2 = A^2 + B^2$ (la elipse y la hipérbola tienen los mismos focos).

70. Encuentre el valor del número a tal que las familias de curvas $y = (x + c)^{-1}$ y $y = a(x + k)^{1/3}$ son trayectorias ortogonales.

71. a) La *ecuación de van der Waals* para n moles de un gas es

$$\left(P + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

donde P es la presión, V es el volumen y T es la temperatura del gas. La constante R es la constante universal de los gases, y a y b son constantes positivas que son características de un gas particular. Si T permanece constante, utilice derivación implícita para obtener dV/dP.

b) Encuentre la razón de cambio del volumen respecto a la presión de 1 mol de dióxido de carbono a un volumen

de $V = 10\,\text{L}$ y una presión de $P = 2.5\,\text{atm}$. Utilice $a = 3.592$ $\text{L}^2\text{-atm/mol}^2$ y $b = 0.04267\,\text{L/mol}$.

72. a) Utilice derivación implícita para encontrar y' si $x^2 + xy + y^2 + 1 = 0$.

SAC b) Grafique la curva del inciso a). ¿Qué observa? Demuestre que lo que ve es correcto.

c) Tomando en cuenta el inciso b), ¿qué puede decir acerca de la expresión para y' que encontró en el inciso a)?

73. La ecuación $x^2 - xy + y^2 = 3$ representa una "elipse girada"; es decir, una elipse cuyos ejes no son paralelos a los ejes de coordenadas. Encuentre los puntos en que esta elipse cruza el eje x y demuestre que las rectas tangentes en estos puntos son paralelas.

74. a) ¿Dónde la recta normal a la elipse $x^2 - xy + y^2 = 3$, en el punto $(-1, 1)$, interseca la elipse por segunda vez?

b) Ilustre el inciso a) graficando la elipse y la recta normal.

75. Encuentre todos los puntos de la curva $x^2y^2 + xy = 2$ donde la pendiente de la recta tangente es -1.

76. Halle las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la elipse $x^2 + 4y^2 = 36$ que pasan por el punto $(12, 3)$.

77. a) Suponga que f es una función uno a uno derivable y que su función inversa f también es derivable. Utilice la derivación implícita para demostrar que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

siempre que el denominador no sea 0.

b) Si $f(4) = 5$ y $f'(4) = \frac{2}{3}$, encuentre $(f^{-1})'(5)$.

78. a) Demuestre que $f(x) = x + e^x$ es uno a uno.

b) ¿Cuál es el valor de $f^{-1}(1)$?

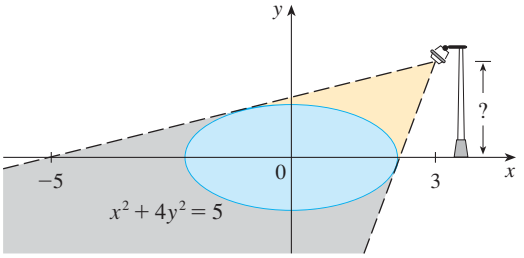
c) Utilice la fórmula del ejercicio 77a) para hallar $(f^{-1})'(1)$.

79. La **función de Bessel** de orden 0, $y = J(x)$, satisface la ecuación diferencial $xy'' + y' + xy = 0$ para todos los valores de x, y su valor en 0 es $J(0) = 1$.

a) Encuentre $J'(0)$.

b) Utilice la derivación implícita para encontrar $J''(0)$.

80. En la figura se muestra una lámpara colocada tres unidades hacia la derecha del eje y y una sombra creada por la región elíptica $x^2 + 4y^2 \leq 5$. Si el punto $(-5, 0)$ está en el borde de la sombra, ¿qué tan arriba del eje x está colocada la lámpara?



PROYECTO DE LABORATORIO SAC FAMILIA DE CURVAS IMPLÍCITAS

En este proyecto exploraremos las formas cambiantes de curvas implícitamente definidas cuando varían las constantes en una familia y determinaremos las funciones comunes a todos los miembros de la familia.

1. Consideremos la familia de curvas

$$y^2 - 2x^2(x + 8) = c[(y + 1)^2(y + 9) - x^2]$$

a) Graficando las curvas con $c = 0$ y $c = 2$, determine cuántos puntos de intersección hay. (Puede usted hacer acercamientos con el *zoom* para encontrarlos.)

b) Ahora agregue las curvas con $c = 5$ y $c = 10$ a sus gráficas del inciso a). ¿Qué observa? ¿Qué pasa con otros valores de c?

2. a) Grafique varios miembros de la familia de curvas

$$x^2 + y^2 + cx^2y^2 = 1$$

Describa cómo cambia la gráfica cuando cambia el valor de c.

b) ¿Qué sucede con la curva cuando $c = -1$? Describa lo que aparece en la pantalla. ¿Puede probarlo algebraicamente?

c) Encuentre y' por derivación implícita. Para el caso $c = -1$, ¿es coherente la expresión y' con lo que descubrió en el inciso b)?

SAC Se requiere sistema algebraico computarizado

3.6 Derivadas de funciones logarítmicas

En esta sección utilizaremos la derivación implícita para hallar las derivadas de las funciones logarítmicas $y = \log_a x$ y, en particular, de la función logaritmo natural $y = \ln x$. [A partir de sus gráficas, es posible probar que las funciones logarítmicas son derivables (véase la figura 12 de la sección 1.6).]

1
$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}$$

DEMOSTRACIÓN Sea $y = \log_a x$. Entonces

$$a^y = x$$

La fórmula 3.4.5 establece que

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$$

Si mediante la fórmula (3.4.5) derivamos esta ecuación de manera implícita respecto a x, obtenemos

$$a^y(\ln a)\frac{dy}{dx} = 1$$

y, por consiguiente,
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}$$

Si en la fórmula 1 ponemos $a = e$, entonces el factor $\ln a$ en el lado derecho se convierte en $\ln e = 1$ y se obtiene la fórmula para la derivada de la función logarítmica natural $\log_e x = \ln x$:

2
$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

Si se comparan las fórmulas 1 y 2, se evidencia una de las razones principales por la que se usan los logaritmos naturales (logaritmos con base e) en el Cálculo. La fórmula de derivación es más sencilla cuando $a = e$, porque $\ln e = 1$.

V EJEMPLO 1 Derive $y = \ln(x^3 + 1)$.

SOLUCIÓN Para utilizar la regla de la cadena, hacemos $u = x^3 + 1$. Entonces $y = \ln u$, de modo que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$
$$= \frac{1}{x^3 + 1}(3x^2) = \frac{3x^2}{x^3 + 1}$$

En general, si combinamos la fórmula 2 con la regla de la cadena como en el ejemplo 1, obtenemos

3
$$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} \quad \text{o bien} \quad \frac{d}{dx}[\ln g(x)] = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

EJEMPLO 2 Encuentre $\dfrac{d}{dx}\ln(\operatorname{sen} x)$.

SOLUCIÓN Utilizando 3, se tiene que

$$\frac{d}{dx}\ln(\operatorname{sen} x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x}\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x}\cos x = \cot x$$

EJEMPLO 3 Derive $f(x) = \sqrt{\ln x}$.

SOLUCIÓN En esta ocasión el logaritmo es la función interior, de modo que la regla de la cadena da

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}(\ln x)^{-1/2}\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$$

EJEMPLO 4 Derive $f(x) = \log_{10}(2 + \operatorname{sen} x)$.

SOLUCIÓN Si usamos la fórmula 1 con $a = 10$, obtenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\log_{10}(2 + \operatorname{sen} x) \\ &= \frac{1}{(2 + \operatorname{sen} x)\ln 10}\frac{d}{dx}(2 + \operatorname{sen} x) \\ &= \frac{\cos x}{(2 + \operatorname{sen} x)\ln 10} \end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Encuentre $\dfrac{d}{dx}\ln\dfrac{x+1}{\sqrt{x-2}}$.

SOLUCIÓN 1

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\ln\frac{x+1}{\sqrt{x-2}} &= \frac{1}{\dfrac{x+1}{\sqrt{x-2}}}\frac{d}{dx}\frac{x+1}{\sqrt{x-2}} \\ &= \frac{\sqrt{x-2}}{x+1}\,\frac{\sqrt{x-2}\cdot 1 - (x+1)\left(\frac{1}{2}\right)(x-2)^{-1/2}}{x-2} \\ &= \frac{x-2-\frac{1}{2}(x+1)}{(x+1)(x-2)} \\ &= \frac{x-5}{2(x+1)(x-2)} \end{aligned}$$

En la figura 1 se muestra la gráfica de la función f del ejemplo 5, junto con la gráfica de su derivada. Proporciona una comprobación visual de nuestro cálculo. Note que $f'(x)$ es grande negativa cuando f está decreciendo con rapidez.

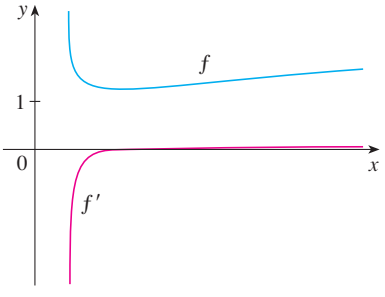


FIGURA 1

SOLUCIÓN 2 Si primero simplificamos la función dada aplicando las leyes de los logaritmos, entonces la derivación se vuelve más fácil:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\ln\frac{x+1}{\sqrt{x-2}} &= \frac{d}{dx}\left[\ln(x+1) - \tfrac{1}{2}\ln(x-2)\right] \\ &= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-2}\right) \end{aligned}$$

(Esta respuesta puede dejarse como está, pero si usara un denominador común, vería que da la misma respuesta en la solución 1).

En la figura 2 se muestra la gráfica de la función $f(x) = \ln|x|$ del ejemplo 6 y la de su derivada $f'(x) = 1/x$. Note que cuando x es pequeño, la gráfica de $y = \ln|x|$ está inclinada y, por consiguiente, $f'(x)$ es grande (positiva o negativa).

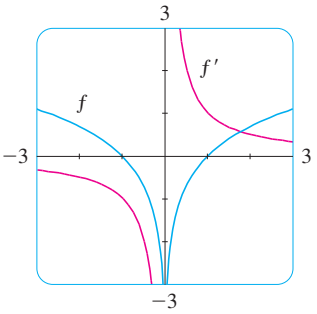


FIGURA 2

V EJEMPLO 6 Encuentre $f'(x)$ si $f(x) = \ln|x|$:

SOLUCIÓN Puesto que

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

se sigue que

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{1}{-x}(-1) = \dfrac{1}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Así, $f'(x) = 1/x$ para todo $x \neq 0$.

Vale la pena recordar el resultado del ejemplo 6:

4

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}$$

Derivación logarítmica

Con frecuencia, el cálculo de derivadas de funciones complicadas que comprenden productos, cocientes o potencias puede simplificarse tomando logaritmos. El método que se aplica en el ejemplo siguiente se llama **derivación logarítmica**.

EJEMPLO 7 Derive $y = \dfrac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$.

SOLUCIÓN Tome logaritmos de ambos miembros de la ecuación y aplique las leyes de los logaritmos, para simplificar:

$$\ln y = \tfrac{3}{4}\ln x + \tfrac{1}{2}\ln(x^2+1) - 5\ln(3x+2)$$

Al derivar implícitamente respecto a x, resulta que

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1} - 5\cdot\frac{3}{3x+2}$$

Al resolver para dy/dx, obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2}\right)$$

Puesto que tenemos una expresión explícita para y, podemos sustituir y escribir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}\left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2}\right)$$

Si no hubiéramos utilizado la derivación logarítmica en el ejemplo 7, habríamos tenido que aplicar tanto la regla del cociente como la regla del producto. El proceso de cálculo habría sido horrendo.

Pasos en la derivación logarítmica

1. Tomar logaritmos naturales de ambos lados de una ecuación $y = f(x)$ y utilizar las leyes de los logaritmos para simplificar.
2. Derivar implícitamente respecto a x.
3. Resolver la ecuación resultante para y'.

Si $f(x) < 0$ para algunos valores de x, entonces $\ln f(x)$ no está definida, pero podemos escribir $|y| = |f(x)|$ y utilizar la ecuación 4. Este procedimiento se ilustra demostrando la versión general de la regla de la potencia, como se prometió en la sección 3.1.

Regla de la potencia Si n es cualquier número real y $f(x) = x^n$, entonces

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

DEMOSTRACIÓN Sea $y = x^n$. Utilizando la derivación logarítmica:

$$\ln|y| = \ln|x|^n = n \ln|x| \qquad x \neq 0$$

Si $x = 0$, podemos demostrar directamente que $f'(0) = 0$ para $n > 1$ a partir de la definición de derivada.

Por tanto,

$$\frac{y'}{y} = \frac{n}{x}$$

así que,

$$y' = n\frac{y}{x} = n\frac{x^n}{x} = nx^{n-1}$$

Debe distinguir con cuidado la regla de la potencia $[(x^n)' = nx^{n-1}]$, donde la base es variable y el exponente constante, de la regla para derivar funciones exponenciales $[(a^x)' = a^x \ln a]$, donde la base es constante y el exponente es variable.

En general, se tienen cuatro casos para exponentes y bases:

Base constante, exponente constante 1

1. $\dfrac{d}{dx}(a^b) = 0$ (a y b son constantes)

Base variable, exponente constante 2

2. $\dfrac{d}{dx}[f(x)]^b = b[f(x)]^{b-1}f'(x)$

Base constante, exponente variable 3

3. $\dfrac{d}{dx}[a^{g(x)}] = a^{g(x)}(\ln a)g'(x)$

Base variable, exponente variable 4

4. Para hallar $(d/dx)[f(x)]^{g(x)}$, podemos aplicar la derivación logarítmica, como en el ejemplo que sigue.

V EJEMPLO 8 Derive $y = x^{\sqrt{x}}$.

SOLUCIÓN 1 Dado que la base y el exponente son variables, utilizamos la derivación logarítmica:

$$\ln y = \ln x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x} \ln x$$

$$\frac{y'}{y} = \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} + (\ln x)\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y' = y\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right) = x^{\sqrt{x}}\left(\frac{2 + \ln x}{2\sqrt{x}}\right)$$

La figura 3 ilustra el ejemplo 8 mostrando las gráficas de $f(x) = x^{\sqrt{x}}$ y su derivada.

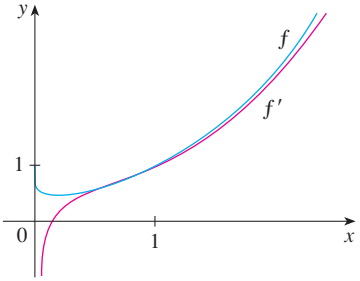


FIGURA 3

SOLUCIÓN 2 Otro método es escribir $x^{\sqrt{x}} = (e^{\ln x})^{\sqrt{x}}$:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\sqrt{x}}\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{\sqrt{x}\ln x}\right) = e^{\sqrt{x}\ln x}\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\ln x\right)$$

$$= x^{\sqrt{x}}\left(\frac{2 + \ln x}{2\sqrt{x}}\right) \qquad \text{(como en la solución 1)}$$

El número e como un límite

Hemos demostrado que si $f(x) = \ln x$, entonces $f'(x) = 1/x$. Debido a esto, $f'(1) = 1$. Utilizaremos este hecho para expresar el número e como un límite.

A partir de la definición de derivada como un límite, tenemos que

$$f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{x\to 0}\frac{f(1+x) - f(1)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)$$

$$= \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x}$$

Ya que $f'(1) = 1$, tenemos

$$\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x} = 1$$

Luego, por el teorema 2.5.8 y la continuidad de la función exponencial, tenemos que

$$e = e^1 = e^{\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x}} = \lim_{x\to 0} e^{\ln(1+x)^{1/x}} = \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$$

5 $$e = \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$$

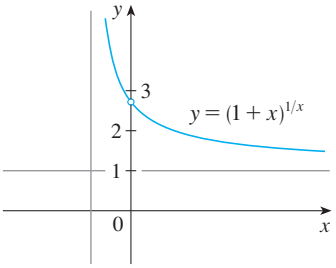


FIGURA 4

x	$(1+x)^{1/x}$
0.1	2.59374246
0.01	2.70481383
0.001	2.71692393
0.0001	2.71814593
0.00001	2.71826824
0.000001	2.71828047
0.0000001	2.71828169
0.00000001	2.71828181

En la figura 4 se ilustra la fórmula 5 mediante la gráfica de la función $y = (1+x)^{1/x}$ y una tabla para valores pequeños de x. Con esto se ilustra una aproximación correcta hasta siete dígitos decimales

$$e \approx 2.7182818$$

Si hacemos $n = 1/x$ en la fórmula 5, entonces $n \to \infty$ cuando $x \to 0^+$ y, por consiguiente, una expresión alternativa para e es

6 $$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

3.6 Ejercicios

1. Explique por qué en Cálculo se usa con mucha más frecuencia la función logarítmica natural $y = \ln x$, que las otras funciones logarítmicas, $y = \log_a x$.

2-22 Derive cada una de las siguientes funciones.

2. $f(x) = x \ln x - x$

3. $f(x) = \operatorname{sen}(\ln x)$

4. $f(x) = \ln(\operatorname{sen}^2 x)$

5. $f(x) = \ln \dfrac{1}{x}$

6. $y = \dfrac{1}{\ln x}$

7. $f(x) = \log_{10}(x^3 + 1)$

8. $f(x) = \log_5(xe^x)$

9. $f(x) = \operatorname{sen} x \ln(5x)$

10. $f(u) = \dfrac{u}{1 + \ln u}$

11. $g(x) = \ln\left(x\sqrt{x^2 - 1}\right)$

12. $h(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$

13. $G(y) = \ln \dfrac{(2y + 1)^5}{\sqrt{y^2 + 1}}$

14. $g(r) = r^2 \ln(2r + 1)$

15. $F(s) = \ln \ln s$

16. $y = \ln \left|1 + t - t^3\right|$

17. $y = \tan[\ln(ax + b)]$

18. $y = \ln \left|\cos(\ln x)\right|$

19. $y = \ln(e^{-x} + xe^{-x})$

20. $H(z) = \ln \sqrt{\dfrac{a^2 - z^2}{a^2 + z^2}}$

21. $y = 2x \log_{10}\sqrt{x}$

22. $y = \log_2(e^{-x} \cos \pi x)$

23-26 Encuentre y' y y'' en cada una de las siguientes funciones.

23. $y = x^2 \ln(2x)$

24. $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$

25. $y = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$

26. $y = \ln(\sec x + \tan x)$

27-30 Derive f y encuentre el dominio de cada una de las siguientes funciones.

27. $f(x) = \dfrac{x}{1 - \ln(x - 1)}$

28. $f(x) = \sqrt{2 + \ln x}$

29. $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$

30. $f(x) = \ln \ln \ln x$

31. Si $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$, determine $f'(1)$.

32. Si $f(x) = \ln(1 + e^{2x})$, determine $f'(0)$.

33-34 Determine la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.

33. $y = \ln(x^2 - 3x + 1)$, $(3, 0)$

34. $y = x^2 \ln x$, $(1, 0)$

35. Si $f(x) = \operatorname{sen} x + \ln x$, encuentre $f'(x)$. Compruebe si su respuesta es razonable comparando las gráficas de f y f'.

36. Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = (\ln x)/x$, en los puntos $(1, 0)$ y $(e, 1/e)$. Ilustre lo anterior dibujando la curva y sus rectas tangentes.

37. Sea $f(x) = cx + \ln(\cos x)$. ¿Para qué valores de c se cumple que $f'(\pi/4) = 6$?

38. Sea $f(x) = \log_a(3x^2 - 2)$. ¿Para qué valor de a se cumple que $f'(1) = 3$?

39-50 Utilice la derivación logarítmica para hallar la derivada de cada una de las siguientes funciones.

39. $y = (x^2 + 2)^2(x^4 + 4)^4$

40. $y = \dfrac{e^{-x} \cos^2 x}{x^2 + x + 1}$

41. $y = \sqrt{\dfrac{x - 1}{x^4 + 1}}$

42. $y = \sqrt{x}\, e^{x^2 - x}(x + 1)^{2/3}$

43. $y = x^x$

44. $y = x^{\cos x}$

45. $y = x^{\operatorname{sen} x}$

46. $y = \sqrt{x}^{\,x}$

47. $y = (\cos x)^x$

48. $y = (\operatorname{sen} x)^{\ln x}$

49. $y = (\tan x)^{1/x}$

50. $y = (\ln x)^{\cos x}$

51. Encuentre y' si $y = \ln(x^2 + y^2)$.

52. Halle y' si $x^y = y^x$.

53. Encuentre una fórmula para $f^{(n)}(x)$ si $f(x) = \ln(x - 1)$.

54. Encuentre $\dfrac{d^9}{dx^9}(x^8 \ln x)$.

55. Use la definición de derivada para demostrar que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

56. Demuestre que $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n = e^x$ para cualquier $x > 0$.

Se requiere calculadora graficadora o computadora

1. Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

3.7 Razones de cambio en las ciencias naturales y sociales

Sabemos que si $y = f(x)$, entonces la derivada dy/dx puede interpretarse como la razón de cambio de y respecto a x. En esta sección se analizan algunas de las aplicaciones de esta idea a la física, la química, la biología, la economía y otras ciencias.

Con base en la sección 2.7, recuerde la idea básica que se encuentra detrás de las razones de cambio. Si x varía de x_1 a x_2, entonces el cambio en x es

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

y el cambio correspondiente en y es

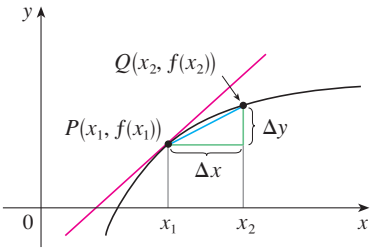
$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

El cociente de diferencias

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

es la **razón de cambio promedio de y respecto a x** en el intervalo $[x_1, x_2]$ y puede interpretarse como la pendiente de la recta secante PQ en la figura 1. Su límite, cuando $\Delta x \to 0$ es la derivada $f'(x_1)$, la cual puede interpretarse como la **razón de cambio instantánea de y respecto a x**, o sea, la pendiente de la recta tangente en $P(x_1, f(x_1))$. Si se usa la notación de Leibniz, escribimos el proceso en la forma

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



m_{PQ} = razón de cambio promedio
$m = f'(x_1)$ = razón de cambio instantánea

FIGURA 1

Siempre que la función $y = f(x)$ tenga una interpretación específica en una de las ciencias, su derivada tendrá una interpretación específica como razón de cambio. (Como se analizó en la sección 2.7, las unidades de dy/dx son las unidades correspondientes a y divididas por las de x.) Veamos ahora algunas de estas interpretaciones en las ciencias naturales y en las sociales.

Física

Si $s = (t)$ es la función posición de una partícula que se mueve en una línea recta, entonces $\Delta s/\Delta t$ representa el promedio de la velocidad en un periodo Δt, y $v = ds/dt$ representa la **velocidad** instantánea (la razón de cambio del desplazamiento respecto al tiempo). La razón de cambio instantáneo de la velocidad respecto al tiempo es la **aceleración**: $a(t) = v'(t) = s''(t)$. Esto se discutió en las secciones 2.7 y 2.8, pero ahora que conocemos las formulas de derivación, podemos resolver con más facilidad problemas que involucran el movimiento de objetos.

V EJEMPLO 1 La posición de una partícula está dada por la siguiente función

$$s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$$

donde t se mide en segundos y s en metros.

a) Encuentre la velocidad en el instante t.
b) ¿Cuál es la velocidad después de 2 y 4 s?
c) ¿Cuándo está en reposo la partícula?
d) ¿Cuándo se mueve la partícula hacia adelante (es decir, en dirección positiva)?
e) Dibuje un diagrama que represente el movimiento de la partícula.
f) Encuentre la distancia total recorrida por la partícula durante los primeros cinco segundos.
g) Halle la aceleración en el tiempo t y después de 4 s.

h) Grafique las funciones posición, velocidad y aceleración para $0 \leqslant t \leqslant 5$.
i) ¿Cuándo aumenta su rapidez la partícula? ¿Cuándo la disminuye?

SOLUCIÓN

a) La función velocidad es la derivada de la función posición.

$$s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$$

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 12t + 9$$

b) La velocidad después de 2 s significa la velocidad instantánea cuando $t = 2$; es decir,

$$v(2) = \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=2} = 3(2)^2 - 12(2) + 9 = -3 \text{ m/s}$$

La velocidad después de 4 s es

$$v(4) = 3(4)^2 - 12(4) + 9 = 9 \text{ m/s}$$

c) La partícula está en reposo cuando $v(t) = 0$; esto es,

$$3t^2 - 12t + 9 = 3(t^2 - 4t + 3) = 3(t - 1)(t - 3) = 0$$

y esto se cumple cuando $t = 1$ o $t = 3$. Por tanto, la partícula está en reposo después de 1 s y después de 3 s.

d) La partícula se mueve en dirección positiva cuando $v(t) > 0$; es decir,

$$3t^2 - 12t + 9 = 3(t - 1)(t - 3) > 0$$

Esta desigualdad se cumple cuando ambos factores son positivos ($t > 3$) o cuando los dos son negativos ($t < 1$). Así, la partícula se mueve en dirección positiva en los intervalos de tiempo $t < 1$ y $t > 3$. Se mueve hacia atrás (en la dirección negativa) cuando $1 < t < 3$.

e) En la figura 2 se esquematiza el movimiento de la partícula hacia atrás y hacia adelante a lo largo de una recta (el eje s), aplicando la información del inciso d).

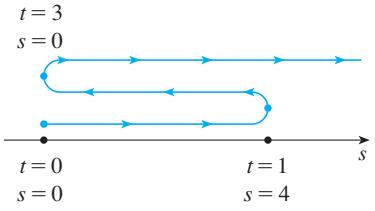


FIGURA 2

f) A partir de los incisos d) y e), necesitamos calcular las distancias recorridas durante los intervalos de tiempo [0, 1], [1, 3] y [3, 5], por separado.

La distancia recorrida en el primer segundo es

$$|f(1) - f(0)| = |4 - 0| = 4 \text{ m}$$

De $t = 1$ a $t = 3$, la distancia recorrida es

$$|f(3) - f(1)| = |0 - 4| = 4 \text{ m}$$

De $t = 3$ a $t = 5$, la distancia recorrida es

$$|f(5) - f(3)| = |20 - 0| = 20 \text{ m}$$

La distancia total es $4 + 4 + 20 = 28$ m.

g) La aceleración es la derivada de la función velocidad:

$$a(t) = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = 6t - 12$$

$$a(4) = 6(4) - 12 = 12 \text{ m/s}^2$$

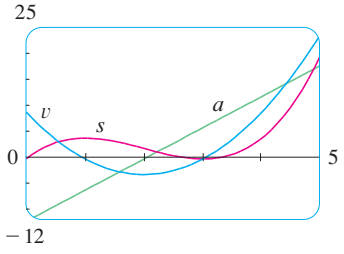


FIGURA 3

h) La figura 3 muestra las gráficas de s, v y a.

i) La rapidez de la partícula aumenta cuando la velocidad es positiva y creciente (v y a son positivas) y también cuando la velocidad es negativa y decreciente (v y a son negativas). En otras palabras, la rapidez de la partícula aumenta cuando la velocidad y la aceleración tienen el mismo signo. (La partícula es empujada en la misma dirección en que se está moviendo.) De la figura 3 se ve que esto sucede cuando $1 < t < 2$ y cuando $t > 3$. La partícula disminuye su rapidez cuando v y a tienen signos opuestos; es decir, cuando $0 \leqslant t < 1$ y cuando $2 < t < 3$. La figura 4 resume el movimiento de la partícula.

TEC En Module 3.7 puede ver una animación de la figura 4 con una expresión para s que puede elegir usted mismo.

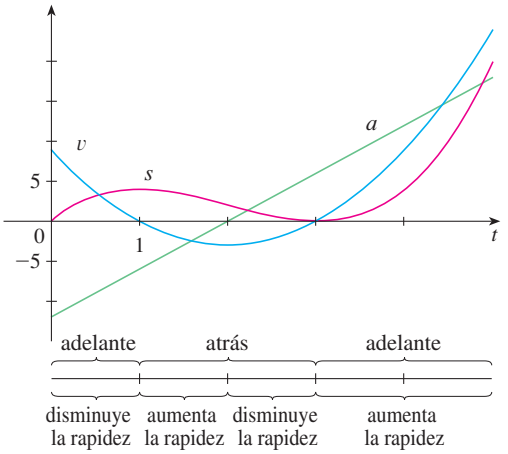


FIGURA 4

EJEMPLO 2 Si una varilla o un trozo de alambre son homogéneos, entonces su densidad lineal es uniforme y se define como la masa por unidad de longitud ($\rho = m/l$) y se mide en kilogramos por metro. Pero suponga que la varilla no es homogénea, sino que su masa medida desde su extremo izquierdo hasta un punto x es $m = f(x)$, como se muestra en la figura 5.



Esta parte de la varilla tiene masa $f(x)$.

FIGURA 5

La masa de la parte de la varilla que se encuentra entre $x = x_1$ y $x = x_2$ está dada por $\Delta m = f(x_2) - f(x_1)$, de modo que la densidad promedio de esa sección de la varilla es

$$\text{densidad promedio} = \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Si ahora hacemos que $\Delta x \to 0$ (es decir, $x_2 \to x_1$), calculamos la densidad promedio sobre un intervalo cada vez más pequeño. La **densidad lineal** ρ en x_1 es el límite de estas densidades promedio cuando $\Delta x \to 0$; es decir, la densidad lineal es la razón de cambio de masa respecto a la longitud. En forma simbólica,

$$\rho = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{dm}{dx}$$

De este modo, la densidad lineal de la varilla es la derivada de la masa respecto a la longitud.

Por ejemplo, si $m = f(x) = \sqrt{x}$, donde x se mide en metros y m en kilogramos, entonces la densidad promedio de la parte de la varilla dada por $1 \leqslant x \leqslant 1.2$ es

$$\frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{f(1.2) - f(1)}{1.2 - 1} = \frac{\sqrt{1.2} - 1}{0.2} \approx 0.48\,\text{kg/m}$$

en tanto que la densidad en $x = 1$ es

$$\rho = \left.\frac{dm}{dx}\right|_{x=1} = \left.\frac{1}{2\sqrt{x}}\right|_{x=1} = 0.50\,\text{kg/m}$$

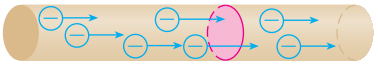


FIGURA 6

V EJEMPLO 3 Siempre que las cargas eléctricas se mueven, hay corriente. En la figura 6 se muestra parte de un alambre con electrones que se mueven a través de una superficie plana, sombreada en rojo. Si ΔQ es la carga neta que pasa por esta superficie durante un periodo Δt, entonces la corriente promedio durante este intervalo de tiempo se define como

$$\text{corriente promedio} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{Q_2 - Q_1}{t_2 - t_1}$$

Si tomamos el límite de esta corriente promedio sobre lapsos de tiempo más y más pequeños, obtenemos lo que se llama **corriente** I en un instante dado t_1:

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}$$

Así, la corriente es la rapidez con que la carga fluye por una superficie; se mide en unidades de carga por unidad de tiempo (a menudo coulombs por segundo, llamados amperes).

La velocidad, la densidad y la corriente no son las únicas razones de cambio de importancia para la física. Otras incluyen la potencia (la rapidez a la cual se realiza trabajo), la relación de flujo de calor, el gradiente de temperatura (la razón de cambio de la temperatura respecto a la posición) y la razón de decaimiento de una sustancia radiactiva en la física nuclear.

Química

EJEMPLO 4 El resultado de una reacción química en la formación de una o más sustancias (llamadas *productos*) a partir de uno o más materiales (*reactivos*). Por ejemplo, la "ecuación"

$$2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$$

indica que dos moléculas de hidrógeno y una de oxígeno forman dos moléculas de agua. Consideremos la reacción

$$A + B \rightarrow C$$

donde A y B son los reactivos y C es el producto. La **concentración** de un reactivo A es el número de moles (1 mol $= 6.022 \times 10^{23}$ moléculas) por litro y se denota con [A]. La concentración varía durante una reacción, de modo que [A], [B] y [C] son funciones del

tiempo (t). La rapidez promedio de reacción del producto C en un intervalo de tiempo $t_1 \leq t \leq t_2$ es

$$\frac{\Delta[\mathrm{C}]}{\Delta t} = \frac{[\mathrm{C}](t_2) - [\mathrm{C}](t_1)}{t_2 - t_1}$$

Pero los químicos tienen más interés en la **rapidez de reacción instantánea**, la cual se obtiene tomando el límite de la rapidez promedio de reacción cuando el intervalo Δt tiende a 0:

$$\text{rapidez de reacción} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta[\mathrm{C}]}{\Delta t} = \frac{d[\mathrm{C}]}{dt}$$

Dado que la concentración del producto aumenta a medida que la reacción avanza, la derivada $d[\mathrm{C}]/dt$ será positiva, y así la rapidez de reacción de C es positiva. Sin embargo, las concentraciones de los reactivos disminuyen durante la reacción; por eso, para que la rapidez de reacción de A y B sean números positivos, ponemos signos negativos delante de las derivadas $d[\mathrm{A}]/dt$ y $d[\mathrm{B}]/dt$. Dado que [A] y [B] disminuyen con la misma rapidez que [C] crece, tenemos que

$$\text{rapidez de reacción} = \frac{d[\mathrm{C}]}{dt} = -\frac{d[\mathrm{A}]}{dt} = -\frac{d[\mathrm{B}]}{dt}$$

De modo más general, resulta que para una reacción de la forma

$$a\mathrm{A} + b\mathrm{B} \longrightarrow c\mathrm{C} + d\mathrm{D}$$

tenemos que

$$-\frac{1}{a}\frac{d[\mathrm{A}]}{dt} = -\frac{1}{b}\frac{d[\mathrm{B}]}{dt} = \frac{1}{c}\frac{d[\mathrm{C}]}{dt} = \frac{1}{d}\frac{d[\mathrm{D}]}{dt}$$

La rapidez de reacción puede determinarse a partir de datos y con métodos gráficos. En algunos casos existen fórmulas explícitas para las concentraciones como funciones del tiempo, que permiten calcular la rapidez de reacción (véase el ejercicio 22).

EJEMPLO 5 Una de las cantidades de interés en termodinámica es la compresibilidad. Si una sustancia dada se mantiene a una temperatura constante, entonces su volumen V depende de su presión P. Podemos considerar la razón de cambio del volumen respecto a la presión: a saber, la derivada dV/dP. Conforme P crece, V decrece, de modo que $dV/dP < 0$. La **compresibilidad** se define al introducir un signo menos y dividir esta derivada entre el volumen V:

$$\text{compresibilidad isotérmica} = \beta = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dP}$$

En estos términos, β mide qué tan rápido, por unidad de volumen, decrece el volumen de una sustancia a medida que la presión aumenta, a temperatura constante.

Por ejemplo, se encontró que el volumen V (en metros cúbicos) de una muestra de aire a 25 °C está relacionado con la presión P (en kilopascales) mediante la ecuación

$$V = \frac{5.3}{P}$$

La razón de cambio de V respecto a P cuando $P = 50\,\text{kPa}$, es

$$\left.\frac{dV}{dP}\right|_{P=50} = \left.-\frac{5.3}{P^2}\right|_{P=50}$$

$$= -\frac{5.3}{2\,500} = -0.00212\,\text{m}^3/\text{kPa}$$

La compresibilidad a esa presión es

$$\beta = -\frac{1}{V}\left.\frac{dV}{dP}\right|_{P=50} = \frac{0.00212}{\frac{5.3}{50}} = 0.02\,(\text{m}^3/\text{kPa})/\text{m}^3$$

Biología

EJEMPLO 6 Sea $n = f(t)$ el número de individuos de una población de animales o plantas en el tiempo t. El cambio del tamaño de la población entre los tiempos $t = t_1$ y $t = t_2$ es $\Delta n = f(t_2) - f(t_1)$, así que la razón de crecimiento promedio durante el periodo $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ es

$$\text{razón de crecimiento promedio} = \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

La **razón de crecimiento instantánea** se obtiene a partir de esta razón de crecimiento promedio al hacer que el periodo Δt tienda a 0:

$$\text{razón de crecimiento promedio} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{dn}{dt}$$

En términos estrictos, esto no es muy exacto porque la gráfica real de una función de población $n = f(t)$ sería una función escalón que es discontinua siempre que ocurre un nacimiento o una muerte y, por tanto, no es derivable. Sin embargo, para una población grande de animales o plantas, es posible reemplazar la gráfica con una curva de aproximación uniforme como en la figura 7.

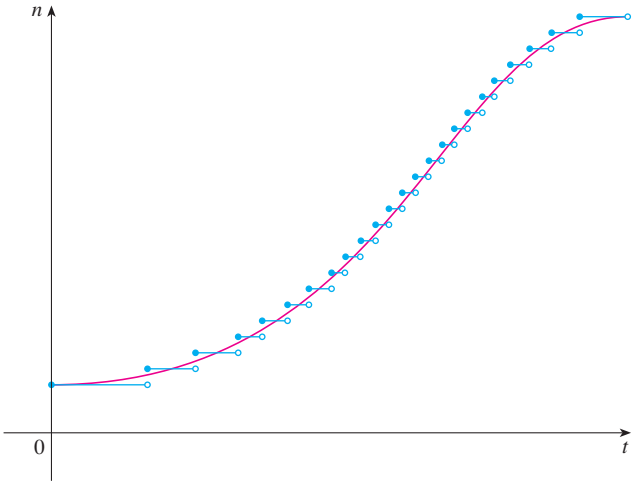
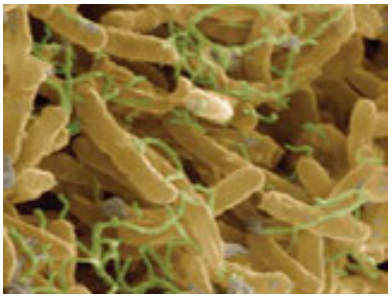


FIGURA 7
Una curva suave que se aproxima a una función de crecimiento



© Eye of Science / Photo Researchers, Inc.

Las bacterias *E.coli* tienen aproximadamente dos micrómetros (μm) de longitud y 0.75 μm de ancho. La imagen fue obtenida con un microscopio electrónico de barrido.

Para ser más específicos, considere una población de bacterias en un medio nutritivo homogéneo. Suponga que, por medio de la toma de muestras de la población a ciertos intervalos, se determina que esa población se duplica cada hora. Si la población inicial es n_0 y el tiempo t se mide en horas, entonces

$$f(1) = 2f(0) = 2n_0$$

$$f(2) = 2f(1) = 2^2 n_0$$

$$f(3) = 2f(2) = 2^3 n_0$$

y, en general,

$$f(t) = 2^t n_0$$

La función de población es $n = n_0 2^t$.

En la sección 3.4 se demostró que

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$$

Así que la razón de crecimiento de la población de bacterias en el tiempo t, es

$$\frac{dn}{dt} = \frac{d}{dt}(n_0 2^t) = n_0 2^t \ln 2$$

Por ejemplo, suponga que inicia con una población inicial de $n_0 = 100$ bacterias. Entonces, la razón de crecimiento después de 4 horas es

$$\left.\frac{dn}{dt}\right|_{t=4} = 100 \cdot 2^4 \ln 2 = 1600 \ln 2 \approx 1109$$

Esto significa que, después de 4 horas, la población de bacterias crece en una cantidad de casi 1109 bacterias por hora.

EJEMPLO 7 Cuando consideramos el flujo de sangre por un vaso sanguíneo, como una vena o una arteria, este vaso puede tomar la forma de un tubo cilíndrico con radio R y longitud l como se ilustra en la figura 8.

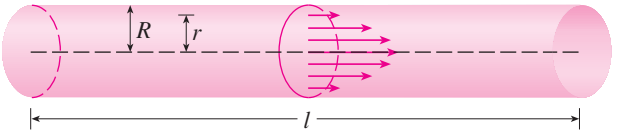


FIGURA 8
Flujo de sangre dentro de una arteria

Debido a la fricción en las paredes del tubo, la velocidad v de la sangre es máxima a lo largo del eje central del propio tubo y decrece conforme aumenta la distancia r al eje, hasta que v se vuelve 0 en la pared. La relación entre v y r está dada por la ley del **flujo laminar** descubierta por el físico francés Jean-Louis-Marie Poiseuille en 1840. En ésta se afirma que

$$v = \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2) \quad \boxed{1}$$

donde η es la viscosidad de la sangre y P es la diferencia en la presión entre los extremos del tubo. Si P y l son constantes, entonces v es función de r, con dominio $[0, R]$.

Para información más detallada, véase W. Nichols y M. O'Rourke (eds.), *McDonald's Blood Flow in Arteries: Theoretic, Experimental, and Clinical Principles*, 5a. ed. (Nueva York, 2005).

La razón de cambio promedio de la velocidad, al moverse desde $r = r_1$ hacia afuera hasta $r = r_2$, está dada por

$$\frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{v(r_2) - v(r_1)}{r_2 - r_1}$$

y si hacemos que $\Delta r \to 0$, obtenemos el **gradiente de velocidad**; es decir, la razón de cambio instantánea de la velocidad respecto a r:

$$\text{gradiente de velocidad} = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{dv}{dr}$$

Utilizando la ecuación 1, obtenemos

$$\frac{dv}{dr} = \frac{P}{4\eta l}(0 - 2r) = -\frac{Pr}{2\eta l}$$

Para una de las arterias humanas más pequeñas, puede tomar $\eta = 0.027$, $R = 0.008\,\text{cm}$, $l = 2\,\text{cm}$ y $P = 4\,000\,\text{dinas/cm}^2$, lo cual da

$$\begin{aligned} v &= \frac{4\,000}{4(0.027)2}(0.000064 - r^2) \\ &\approx 1.85 \times 10^4 (6.4 \times 10^{-5} - r^2) \end{aligned}$$

En $r = 0.002\,\text{cm}$ la sangre fluye a una rapidez de

$$\begin{aligned} v(0.002) &\approx 1.85 \times 10^4 (64 \times 10^{-6} - 4 \times 10^{-6}) \\ &= 1.11\,\text{cm/s} \end{aligned}$$

y el gradiente de velocidad en ese punto es

$$\left.\frac{dv}{dr}\right|_{r=0.002} = -\frac{4\,000(0.002)}{2(0.027)2} \approx -74\,(\text{cm/s})/\text{cm}$$

Para tener una idea de lo que esto significa, cambie las unidades de centímetros a micrómetros ($1\,\text{cm} = 10\,000\ \mu\text{m}$). Entonces el radio de la arteria es de $80\,\mu\text{m}$. La velocidad en el eje central es de $11\,850\ \mu\text{m/s}$, la cual disminuye hasta $11\,110\,\mu\text{m/s}$ a una distancia de $r = 20\,\mu\text{m}$. El hecho de que $dv/dr = -74\,(\mu\text{m/s})/\mu\text{m}$ significa que cuando $r = 20\,\mu\text{m}$, la velocidad disminuye en una cantidad de casi $74\,\mu\text{m/s}$ por cada micrómetro que se aleja del centro.

Economía

V EJEMPLO 8 Suponga que $C(x)$ es el costo total en que una compañía incurre al producir x unidades de cierto artículo. La función C se llama **función de costo**. Si el número de artículos producidos se incrementa desde x_1 hasta x_2, entonces el costo adicional es $\Delta C = C(x_2) - C(x_1)$, y la razón de cambio promedio del costo es

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C(x_2) - C(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{C(x_1 + \Delta x) - C(x_1)}{\Delta x}$$

El límite de esta cantidad conforme $\Delta x \to 0$, es decir, la razón de cambio instantánea del costo los economistas le llaman **costo marginal** respecto al número de artículos producidos:

$$\text{costo marginal} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{dC}{dx}$$

[Dado que x suele tomar solo valores enteros, quizá no tenga sentido hacer que Δx tienda a 0, pero siempre podrá remplazar $C(x)$ con una función suave de aproximación uniforme, como en el ejemplo 6.]

Si tomamos $\Delta x = 1$ y n grande (de modo que Δx sea pequeño en comparación con n), tenemos que

$$C'(n) \approx C(n + 1) - C(n)$$

Así, el costo marginal de producir n unidades es aproximadamente igual al costo de elaborar una unidad más [la $(n + 1)$-ésima unidad].

A menudo resulta apropiado representar con un polinomio una función de costo total

$$C(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

donde a representa el costo de los gastos generales (alquiler, calefacción, mantenimiento) y los demás términos representan el costo de las materias primas, la mano de obra y demás. (El costo de las materias primas puede ser proporcional a x, pero los costos de la mano de obra podrían depender en parte de potencias mayores de x, debido a los costos del tiempo extra y a las faltas de eficiencia relacionadas con las operaciones a gran escala.)

Por ejemplo, suponga que una compañía ha estimado que el costo (en dólares) de producir x artículos es

$$C(x) = 10\,000 + 5x + 0.01x^2$$

Entonces, la función de costo marginal es

$$C'(x) = 5 + 0.02x$$

El costo marginal en el nivel de producción de 500 artículos es

$$C'(500) = 5 + 0.02(500) = \$15/\text{artículo}$$

Esto da la cantidad a la cual se incrementan los costos respecto al nivel de producción cuando $x = 500$ y predice el costo del artículo 501.

El costo real de producir el artículo 501 es

$$\begin{aligned} C(501) - C(500) &= [10\,000 + 5(501) + 0.01(501)^2] \\ &\quad - [10\,000 + 5(500) + 0.01(500)^2] \\ &= \$15.01 \end{aligned}$$

Note que $C'(500) \approx C(501) - C(500)$.

Los economistas también estudian la demanda, el ingreso y la utilidad marginales, que son las derivadas de las funciones de demanda, ingreso y utilidad. Éstas se consideran en el capítulo 4, después de desarrollar las técnicas para hallar los valores máximos y mínimos de funciones.

Otras ciencias

Las razones de cambio se presentan en todas las ciencias. Un geólogo se interesa en conocer la razón a la cual una masa incrustada de roca fundida se enfría por conducción del calor hacia las rocas que la rodean. Un ingeniero desea conocer la proporción a la cual el

agua fluye hacia dentro o hacia fuera de una represa. Un geógrafo urbano se interesa en la razón de cambio de la densidad de población en una ciudad, al aumentar la distancia al centro de la propia ciudad. Un meteorólogo tiene interés por la razón de cambio de la presión atmosférica respecto a la altura. (Véase el ejercicio 17 de la sección 3.8.)

En psicología, quienes se interesan en la teoría del aprendizaje estudian la curva del aprendizaje, la cual presenta en forma de gráfica el rendimiento $P(t)$ de alguien que aprende una habilidad, como función del tiempo de capacitación t. Tiene un interés particular la razón a la cual mejora el rendimiento a medida que pasa el tiempo; es decir, dP/dt.

En sociología, el cálculo diferencial se aplica al análisis de la divulgación de rumores (o de innovaciones, novedades o moda). Si $p(t)$ denota la proporción de una población que conoce un rumor en el momento t, entonces la derivada dp/dt denota la razón de divulgación de ese rumor. (Véase el ejercicio 84 de la sección 3.4.)

Una sola idea, varias interpretaciones

La velocidad, la densidad, la corriente, la potencia y el gradiente de temperatura, en física; la velocidad de reacción y la compresibilidad, en química; la rapidez de crecimiento y el gradiente de velocidad de la sangre, en biología; el costo marginal y la utilidad marginal, en economía; la rapidez de flujo del calor, en geología; la rapidez de mejora del rendimiento, en psicología, y la rapidez de divulgación de un rumor, en sociología, son casos especiales de un concepto matemático: la derivada.

Esta es una ilustración del hecho de que parte del poder de las matemáticas descansa en su abstracción. Un solo concepto matemático abstracto (como la derivada) puede tener interpretaciones diferentes en cada ciencia. Cuando desarrollemos las propiedades del concepto matemático, de una vez y por todas, podrá dar la vuelta y aplicar estos resultados a todas las ciencias. Esto es mucho más eficiente que desarrollar propiedades de conceptos especiales en cada una por separado. El matemático francés Joseph Fourier (1768-1830) lo expresó de manera sucinta: "Las matemáticas comparan los fenómenos más diversos y descubren las analogías secretas que los vinculan".

3.7 Ejercicios

1-4 Una partícula se mueve según una ley del movimiento $s = f(t)$, $t \geq 0$, donde t se mide en segundos y s en pies.

a) Encuentre la velocidad en el instante t.
b) ¿Cuál es la velocidad después de 3 s?
c) ¿Cuándo está la partícula en reposo?
d) ¿Cuándo se mueve hacia la dirección positiva?
e) Encuentre la distancia total recorrida durante los primeros 8 s.
f) Dibuje un diagrama, como el de la figura 2, a fin de ilustrar el movimiento de la partícula.
g) Halle la aceleración en el tiempo t y después de 3 s.
h) Grafique las funciones posición, velocidad y aceleración para $0 \leq t \leq 8$.
i) ¿Cuándo la partícula aumenta su rapidez? ¿Cuándo disminuye?

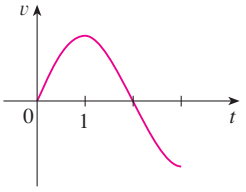
1. $f(t) = t^3 - 12t^2 + 36t$

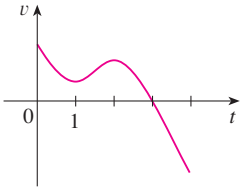
2. $f(t) = 0.01t^4 - 0.04t^3$

3. $f(t) = \cos(\pi t/4), \quad t \leq 10$

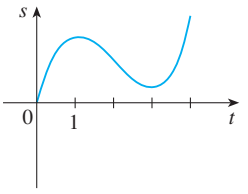
4. $f(t) = te^{-t/2}$

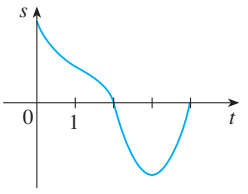
5. Se muestran las graficas de los funciones *velocidad* de dos partículas, donde t se mide en segundos. ¿Cuándo incrementa su rapidez cada partícula? ¿Cuándo disminuyen su rapidez? Explique:

a)


b)


6. Se muestran las funciones *posición* de dos partículas, donde t se mide en segundos. ¿Cuándo incrementa su rapidez cada una de las partículas? ¿Cuándo la disminuyen? Explique.

a)


b)


7. La altura (en metros) de un proyectil disparado verticalmente hacia arriba, desde un punto 2 m por encima del nivel del suelo con una velocidad inicial de 24.5 m/s es $h = 2 + 24.5t - 4.9t^2$ después de t segundos.
a) Encuentre la velocidad después de 2 segundos y después de 4 segundos.
b) ¿Cuándo alcanza el proyectil su altura máxima?
c) ¿Cuál es su altura máxima?
d) ¿En qué momento cae al suelo?
e) ¿Con qué velocidad cae al suelo?

8. Si un balón es lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad de 80 pies/s, entonces su altura después de t segundos es $s = 80t - 16t^2$.
a) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por el balón?
b) ¿Cuál es la velocidad del balón cuando está 96 pies por encima del suelo en su camino ascendente? ¿En su camino en descenso?

9. Si se lanza una roca verticalmente hacia arriba desde la superficie de Marte, con una velocidad de 15 m/s, su altura después de t segundos es $h = 15t - 1.86t^2$.
a) ¿Cuál es la velocidad de la roca después de que transcurren 2 s?
b) ¿Cual es la velocidad de la roca una vez que ha alcanzado 25 m durante el ascenso? ¿Y en su descenso?

10. Una partícula se mueve de acuerdo con la función posición

$$S = t^4 - 4t^3 - 20t^2 + 20t \qquad t \geqslant 0$$

a) ¿En qué momento la partícula tiene una velocidad de 20 m/s?
b) ¿En qué momento su aceleración es 0? ¿Cuál es el significado de este valor de t?

11. a) Una compañía fabrica *chips* para computadora a partir de placas cuadradas de silicio. Se desea conservar la longitud del lado de esas placas muy próxima a 15 mm y, asimismo, saber cómo cambia el área $A(x)$ de ellas cuando varía la longitud x del lado. Encuentre $A'(15)$ y explique su significado en esta situación.
b) Demuestre que la rapidez de cambio del área de uno de los cuadrados respecto a la longitud de su lado es la mitad de su perímetro. Trate de explicar geométricamente por qué esto es cierto, dibujando un cuadrado cuya longitud x del lado se incrementa en una cantidad Δx. ¿Cómo puede obtener una aproximación del cambio resultante en el área, ΔA, si Δx es pequeño?

12. a) Es fácil hacer crecer cristales de clorato de sodio en forma de cubos dejando que una solución de esta sal en agua se evapore con lentitud. Si V es el volumen de uno de esos cubos, con longitud x por lado, calcule dV/dx cuando $x = 3$ mm y explique su significado.
b) Demuestre que la razón de cambio del volumen de un cubo respecto a la longitud de su arista es igual a la mitad del área superficial de ese cubo. Explique geométricamente por qué este resultado es cierto; básese en el ejercicio 11b) para establecer una analogía.

13. a) Encuentre la razón de cambio promedio del área de un círculo respecto a su radio r cuando éste cambia de
i) 2 a 3 ii) 2 a 2.5 iii) 2 a 2.1
b) Encuentre la razón de cambio instantánea cuando $r = 2$.
c) Demuestre que la razón de cambio del área de un círculo respecto a su radio (a cualquier r) es igual a la circunferencia del círculo. Intente explicar geométricamente por qué esto es cierto dibujando un círculo cuyo radio se incrementa en una cantidad Δr. ¿Cómo puede obtener una aproximación del cambio resultante en el área ΔA si Δr es pequeño?

14. Se deja caer una piedra en un lago, lo que crea una onda circular que viaja hacia afuera con una rapidez de 60 cm/s. Encuentre la razón a la cual aumenta el área dentro del círculo después de a) 1 s, b) 3 s y c) 5 s. ¿Qué puede concluir?

15. Se está inflando un globo esférico. Encuentre la razón de aumento del área superficial ($S = 4\pi r^2$) respecto al radio r, cuando éste es de a) 1 pie, b) 2 pies y c) 3 pies. ¿A qué conclusiones llega?

16. a) El volumen de una célula esférica en crecimiento es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, donde el radio r se mide en micrómetros ($1\ \mu\text{m} = 10^{-6}$ m). Encuentre la razón de cambio promedio de V respecto a r, cuando éste cambia de
i) 5 a 8 μm ii) 5 a 6 μm iii) 5 a 5.1 μm
b) Halle la razón de cambio instantánea de V respecto a r, cuando $r = 5\ \mu$m.
c) Demuestre que la razón de cambio del volumen de una esfera respecto a su radio es igual a su área superficial. Explique geométricamente por qué esto es cierto. Argumente por analogía con el ejercicio 13c).

17. La masa de parte de una varilla metálica que se encuentra entre su extremo izquierdo y un punto x metros a la derecha es $3x^2$ kg. Encuentre la densidad lineal (véase el ejemplo 2) cuando x es a) 1 m, b) 2 m y c) 3 m. ¿En dónde es más alta la densidad y dónde es más baja?

18. Si un tanque contiene 5 000 galones de agua, la cual se drena desde el fondo del tanque en 40 min, entonces la ley de Torricelli da el volumen V de agua que queda en el tanque después de t minutos como

$$V = 5\,000\left(1 - \tfrac{1}{40}t\right)^2 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 40$$

Encuentre la rapidez de drenado de agua después de a) 5 min, b) 10 min, c) 20 min y d) 40 min. ¿En qué momento fluye el agua más rápido hacia afuera? ¿Con mayor lentitud? Resuma sus hallazgos.

19. La cantidad de carga, Q, en coulombs c) que ha pasado por un punto de un alambre hasta el tiempo t (medido en segundos) se expresa con $Q(t) = t^3 - 2t^2 + 6t + 2$. Encuentre la corriente cuando a) $t = 0.5$ s y b) $t = 1$ s. [Véase el ejemplo 3. La unidad de corriente es el ampere (1 A = 1 C/s).] ¿En qué momento la corriente es la más baja?

20. La ley de Newton de la gravitación afirma que la magnitud F de la fuerza ejercida por un cuerpo de masa m sobre otro de masa M es

$$F = \frac{GmM}{r^2}$$

donde G es la constante gravitacional y r es la distancia entre los cuerpos.
a) Encuentre dF/dr y explique su significado. ¿Qué indica el signo menos?
b) Suponga que se sabe que la Tierra atrae un objeto con una fuerza que disminuye a razón de 2 N/km, cuando $r = 20\,000$ km. ¿Con qué rapidez cambia esta fuerza cuando $r = 10\,000$ km?

21. La fuerza F que actúa sobre un cuerpo con masa m y velocidad v es igual a la razón de cambio del momentum o cantidad de movimiento: $F = (d/dt)(mv)$. Si m es constante, esto se convierte en $F = ma$, donde $a = dv/dt$ es la aceleración. Pero en la teoría de la relatividad, la masa de una partícula varía con v como sigue: $m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, donde m_0 es la masa de la partícula en reposo y c es la velocidad de la luz. Demuestre que

$$F = \frac{m_0 a}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}$$

22. Algunas de las mareas más altas en el mundo se producen en la Bahía de Fundy en la costa atlántica de Canadá. En el cabo de Hopewell, la profundidad del agua durante la marea baja es aproximadamente dos metros y durante la marea alta es cerca de doce metros. El periodo natural de oscilación es un poco más de doce horas, y el 30 de junio de 2009, la marea alta se produjo a las 6:45. Esto ayuda a explicar el siguiente modelo para la profundidad del agua D (en metros) en función del tiempo t (en horas después de la medianoche) ese día:

$$D(t) = 7 + = \cos[0.503(t - 6.75)]$$

¿Con qué rapidez fue subiendo la marea (o cayendo) en los siguientes momentos?

a) 15:00 b) 6:00
c) 9:00 d) mediodía

23. La ley de Boyle establece que, cuando se comprime una muestra de gas a una temperatura constante, el producto de la presión y el volumen se mantiene constante: $PV = C$.

a) Encuentre la razón de cambio del volumen respecto a la presión.
b) Una muestra de gas está en un recipiente a baja presión y se le comprime paulatinamente a temperatura constante durante 10 minutos. ¿El volumen disminuye con mayor rapidez al principio o al final de los 10 minutos? Explique.
c) Demuestre que la compresibilidad isotérmica (véase el ejemplo 5) se expresa mediante $\beta = 1/P$.

24. Si en el ejemplo 4 una molécula del producto C está formada por una molécula del reactivo A y una molécula del reactivo B y la concentración inicial de A y B tienen un valor común $[A] = [B] = a$ moles/L, entonces

$$[C] = a^2kt/(akt + 1)$$

donde k es una constante.

a) Encuentre la rapidez de reacción en el tiempo t.
b) Demuestre que si $x = [C]$, entonces

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)^2$$

c) ¿Qué pasa con la concentración conforme $t \to \infty$?
d) ¿Qué sucede con la velocidad de reacción conforme $t \to \infty$?
e) ¿Qué significan los resultados de los incisos c) y d) en términos prácticos?

25. En el ejemplo 6 consideramos una población de bacterias que se duplica cada hora. Supongamos que otra población de bacterias se triplica cada hora y comienza con 400 bacterias. Encuentre una expresión para el número n de bacterias después de t horas y utilícela para estimar la tasa de crecimiento de la población de bacterias después de 2.5 horas.

26. El número de células de levadura en un cultivo de laboratorio aumenta rápidamente al principio, pero finalmente se nivela. La población es modelada por la función

$$n = f(t) = \frac{a}{1 + be^{-0.7t}}$$

donde t es medido en horas. En el tiempo $t = 0$ la población es de 20 celdas y está aumentando a un ritmo de 12 células/hora. Encuentre los valores de a y b. De acuerdo con este modelo, ¿qué sucede con la población de levadura a largo plazo?

27. La tabla da la población del mundo en el siglo XX.

Año	Población (en millones)	Año	Población (en millones)
1900	1 650	1960	3 040
1910	1 750	1970	3 710
1920	1 860	1980	4 450
1930	2 070	1990	5 280
1940	2 300	2000	6 080
1950	2 560		

a) Estime la tasa de crecimiento poblacional en 1920 y en 1980 mediante el promedio de las pendientes de dos rectas secantes.
b) Utilice una calculadora graficadora o computadora para encontrar una función cúbica (una polinomial de tercer grado) que modele los datos.
c) Utilice el modelo del inciso b) para encontrar un modelo para la tasa de crecimiento de la población en el siglo XX.
d) Utilice el inciso c) para estimar las tasas de crecimiento en 1920 y 1980. Compare con sus estimaciones del inciso a).
e) Estime la tasa de crecimiento en 1985.

28. La tabla muestra cómo varía la edad promedio del primer matrimonio de la mujer japonesa en la última mitad del siglo XX.

t	$A(t)$	t	$A(t)$
1950	23.0	1980	25.2
1955	23.8	1985	25.5
1960	24.4	1990	25.9
1965	24.5	1995	26.3
1970	24.2	2000	27.0
1975	24.7		

a) Utilice una calculadora graficadora o una computadora para modelar estos datos con una función polinomial de cuarto grado.
b) Utilice el inciso a) para encontrar un modelo para $A'(t)$.
c) Estime la tasa de cambio de la edad de matrimonio de la mujer en 1990.
d) Grafique los puntos de datos y los modelos para A y A'.

29. Considere la ley de flujo laminar del ejemplo 7. Considere también un vaso sanguíneo con radio 0.01 cm, longitud 3 cm, diferencia de presión de 3 000 Dinas/cm^2 y una viscosidad de $\eta = 0.027$.

a) Encuentre la velocidad de la sangre a lo largo de la línea central $r = 0$, en un radio $r = 0.005$ cm y en la pared $r = R = 0.01$ cm.

b) Encuentre el gradiente de velocidad en $r = 0$, $r = 0.005$ y $r = 0.01$.
c) ¿Donde es más mayor la velocidad? ¿Dónde está el mayor cambio de velocidad?

30. La frecuencia de vibración de una cuerda de violín está dada por

$$f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

donde L es la longitud de la cuerda, T es su tensión y ρ es su densidad lineal. [Véase el capítulo 11 en D. E. Hall, Musical Acoustic, 3a. ed. (Pacific Grove, California, 2002).]
a) Encuentre la rapidez de cambio de la frecuencia respecto a
   i) la longitud (cuando T y ρ son constantes),
   ii) la tensión (cuando L y ρ son constantes) y
   iii) la densidad lineal (cuando L y T son constantes).
b) El tono de una nota (qué tan altas o bajas son las notas) está determinado por la frecuencia f. (Cuanto mayor sea la frecuencia, mayor será el tono.) Utilice los signos de los derivadas en el inciso a) para determinar lo que sucede con el tono de una nota
   i) cuando se reduce la longitud efectiva colocando un dedo sobre la cuerda, haciendo que vibre sólo una porción menor que la cuerda,
   ii) cuando se incrementa la tensión girando la llave de ajuste,
   iii) cuando aumenta la densidad lineal por cambiar la cuerda.

31. El costo en dólares de producir x yardas de un determinado tejido es

$$C(x) = 1\,200 + 12x - 0.1x^2 + 0.0005x^3$$

a) Encuentre la función de costo marginal.
b) Obtenga $C'(200)$ y explique su significado. ¿Qué predice?
c) Compare $C'(200)$ con el costo de fabricar la yarda 201 de tela.

32. La función de costo de producción de una mercancía es

$$C(x) = 339 + 25x - 0.09x^2 + 0.0004x^3$$

a) Obtenga e interprete $C'(100)$.
b) Compare $C'(100)$ con el costo de producir el artículo 101.

33. Si $p(x)$ es el valor total de la producción cuando hay x trabajadores en una planta, entonces la *productividad promedio* de la fuerza de trabajo en la planta es

$$A(x) = \frac{p(x)}{x}$$

a) Obtenga $A'(x)$. ¿Por qué quiere la empresa contratar a más trabajadores si $A'(x) > 0$?
b) Demuestre que $A'(x) > 0$ si $p'(x)$ es mayor que la productividad promedio.

34. Si R denota la reacción del cuerpo a cierto estímulo de esfuerzo x, la *sensibilidad* S se define como la rapidez de cambio de la reacción respecto a x. Un ejemplo concreto es que cuando el brillo x de una fuente de luz aumenta, el ojo reacciona disminuyendo la zona R de la pupila. La fórmula experimental

$$R = \frac{40 + 24x^{0.4}}{1 + 4x^{0.4}}$$

ha sido utilizada para modelar la dependencia de R sobre x cuando R se mide en milímetros cuadrados y x se mide en unidades apropiadas de brillo.
a) Encuentre la sensibilidad.
b) Ilustre el inciso a) graficando R y S como funciones de x. Haga comentarios relacionados con los valores de R y S en bajos niveles de brillo. ¿Esto es lo que esperaría?

35. La ley de los gases para un gas ideal a la temperatura absoluta T (en kelvin), la presión P (en atmósferas) y el volumen V (en litros) es $PV = nRT$, donde n es el número de moles del gas y $R = 0.0821$ es la constante del gas. Suponga que, en cierto instante, $P = 8.0$ atm y está aumentando a razón de 0.10 atm/min y $V = 10$ L y está disminuyendo a razón de 0.15 L/min. Encuentre la razón de cambio de T respecto al tiempo en ese instante si $n = 10$ mol.

36. En una granja piscícola se introduce una población de peces en un estanque y se cosechan con regularidad. Un modelo para la razón de cambio de la población se expresa con la ecuación

$$\frac{dP}{dt} = r_0\left(1 - \frac{P(t)}{P_c}\right)P(t) - \beta P(t)$$

donde r_0 es la tasa de nacimientos de peces, P_c es la población máxima que el estanque puede contener (llamada *capacidad de contención*) y β es el porcentaje de la población que se cosecha.
a) ¿Cuál valor de dP/dt correspondiente a una población estable?
b) Si el estanque puede sostener 10 000 peces, la tasa de nacimiento es del 5% y la cantidad de cosecha es de 4%, encuentre el nivel estable de la población.
c) Si β se eleva hasta 5%, ¿qué sucede?

37. En el estudio de los ecosistemas, a menudo se usan los modelos *depredador-presa* para estudiar la interacción entre las especies. Considere una población de lobos de la tundra, dada por $W(t)$, y de caribúes, dada por $C(t)$, en el norte de Canadá. La interacción se ha modelado mediante las ecuaciones

$$\frac{dC}{dt} = aC - bCW \quad \text{y} \quad \frac{dW}{dt} = -cW + dCW$$

a) ¿Cuáles valores de dC/dt y dW/dt corresponden a poblaciones estables?
b) ¿Cómo se representaría matemáticamente la afirmación "Los caribúes van hacia la extinción"?
c) Suponga que $a = 0.05$, $b = 0.001$, $c = 0.05$ y $d = 0.0001$. Encuentre todas las parejas de poblaciones (C, W) que conducen a poblaciones estables. De acuerdo con este modelo, ¿es posible que las especies vivan en armonía o una de ellas, o ambas, se extinguirán?

3.8 Crecimiento y decaimiento exponenciales

En muchos fenómenos naturales, las cantidades crecen o decrecen en una cantidad proporcional a su tamaño. Por ejemplo, si $y = f(t)$ es el número de individuos en una población de animales o bacterias en el tiempo t, entonces parece razonable esperar que la razón de crecimiento $f'(t)$ sea proporcional a la población $f(t)$; es decir, $f'(t) = kf(t)$ para alguna constante k. A propósito, bajo condiciones ideales (ambientes sin límites, nutrición adecuada, inmunidad a las enfermedades) el modelo matemático conocido por la ecuación $f'(t) = kf(t)$ predice, sin duda, con precisión lo que realmente sucede. Otro ejemplo sucede en física nuclear donde la masa de una sustancia radiactiva decae en una cantidad proporcional a su masa. En química la velocidad de una reacción de primer orden unimolecular es proporcional a la concentración de la sustancia. En finanzas, el valor de una cuenta de ahorros con interés compuesto se incrementa de manera continua en una cantidad proporcional a ese valor.

En general, si $y(t)$ es el valor de una cantidad y en el tiempo t y si la razón de cambio de y respecto a t es proporcional a su tamaño $y(t)$ en cualquier tiempo, entonces

$$\boxed{1} \qquad \boxed{\frac{dy}{dt} = ky}$$

donde k es una constante. Algunas veces la ecuación 1 se llama **ley de crecimiento natural** (*si* $k > 0$) o **ley de decaimiento natural** (*si* $k < 0$). También, a la expresión 1 se le denomina **ecuación diferencial** porque involucra una función desconocida, y y su derivada dy/dt.

No es difícil intuir una solución de la ecuación 1. Esta ecuación pide hallar una función cuya derivada es un múltiplo constante de sí misma. En este capítulo encontraremos tales funciones. Cualquier función exponencial en la forma $y(t) = Ce^{kt}$, donde C es una constante, satisface

$$y'(t) = C(ke^{kt}) = k(Ce^{kt}) = ky(t)$$

Veremos en la sección 9.4 que *cualquier* función que satisface $dy/dt = ky$ debe ser en la forma $y = Ce^{kt}$. Para ver el significado de la constante C, observe que

$$y(0) = Ce^{k\cdot 0} = C$$

En consecuencia, C es el valor inicial de la función:

2 Teorema Las únicas soluciones de la ecuación diferencial $dy/dt = ky$ son las funciones exponenciales

$$y(t) = y(0)e^{kt}$$

Crecimiento de población

¿Cuál es el significado de la constante de proporcionalidad k? En el panorama del crecimiento de la población, cuando $P(t)$ es el tamaño de una población en el tiempo t, escribimos

$$\boxed{3} \qquad \frac{dP}{dt} = kP \qquad \text{o} \qquad \frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = k$$

La cantidad

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt}$$

es la rapidez de crecimiento dividida entre el tamaño de la población; a aquélla se le denomina la **rapidez** o **tasa de crecimiento relativa**. De acuerdo con 3, en lugar de decir "la

rapidez o tasa de crecimiento es proporcional al tamaño de la población" podríamos decir "la razón o tasa de crecimiento relativo es constante". Por tanto, 2 indica que una población con crecimiento relativo constante debe crecer en forma exponencial. Note que la tasa de crecimiento relativa k aparece como el coeficiente de t en la función exponencial Ce^{kt}. Por ejemplo, si

$$\frac{dP}{dt} = 0.02P$$

donde t se mide en años, entonces la rapidez de crecimiento relativo es $k = 0.02$ y el crecimiento de población a una rapidez relativa es de 2% por cada año. Si la población en el tiempo 0 es P_0, entonces la expresión para la población es

$$P(t) = P_0 e^{0.02t}$$

V EJEMPLO 1 Utilice el hecho de que la población mundial fue 2 560 millones en 1950 y 3 040 millones en 1960, para modelar la población del mundo en la segunda mitad del siglo XX. (Suponga que la tasa de crecimiento es proporcional al tamaño de la población). ¿Cuál es la rapidez de crecimiento relativa? Utilice el modelo para estimar la población mundial en 1993 y, del mismo modo, predecir la población en el año 2020.

SOLUCIÓN Mida el tiempo t en años y haga $t = 0$ en el año 1950. Medimos la población $P(t)$ en millones de personas. Entonces, $P(0) = 2\,560$ y $P(10) = 3\,040$. Ya que estamos suponiendo que $dP/dt = kP$, el teorema 2 proporciona

$$P(t) = P(0)e^{kt} = 2\,560e^{kt}$$

$$P(10) = 2\,560e^{10k} = 3\,040$$

$$k = \frac{1}{10}\ln\frac{3\,040}{2\,560} \approx 0.017185$$

La rapidez de crecimiento relativo es casi 1.7% por cada año, y el modelo es

$$P(t) = 2\,560e^{0.017185t}$$

Se estima que en 1993 la población mundial fue

$$P(43) = 2\,560e^{0.017185(43)} \approx 5\,360 \text{ millones}$$

El modelo predice que en 2020 la población será

$$P(70) = 2\,560e^{0.017185(70)} \approx 8\,524 \text{ millones}$$

La gráfica en la figura 1 muestra que el modelo ya es bastante exacto para finales del siglo XX (los puntos representan la población actual); de esta manera, la estimación para 1993 es completamente confiable, pero la predicción para el 2020 es aventurada.

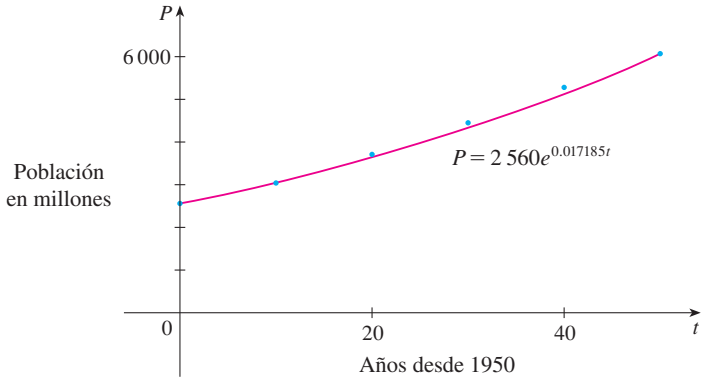


FIGURA 1
Un modelo para el crecimiento de la población mundial en la segunda mitad del siglo XX

Decaimiento radiactivo

Una sustancia radiactiva decae emitiendo radiación de manera espontanea. Si $m(t)$ es la masa que queda a partir de una masa inicial m_0 de la sustancia después del tiempo t, entonces la rapidez de decaimiento relativo

$$-\frac{1}{m}\frac{dm}{dt}$$

es constante. (Ya que dm/dt es negativa, la rapidez de desintegración relativa es positiva.) Se sigue que

$$\frac{dm}{dt} = km$$

donde k es una constante negativa. En otras palabras, las sustancias radiactivas decaen en una cantidad proporcional a la masa restante. Esto significa que podemos utilizar [4] para demostrar que la masa decae de manera exponencial:

$$m(t) = m_0 e^{tk}$$

Los físicos expresan la rapidez de decaimiento en términos del **tiempo de vida media**: el tiempo que se requiere para que la mitad de cualquier cantidad conocida se desintegre.

V EJEMPLO 2 El tiempo de vida media del radio-226 es 1590 años.

a) Una muestra de radio-226 tiene una masa de 100 mg. Halle una fórmula para la masa de la muestra que permanece después de t años.

b) Halle la masa exacta en miligramos, después de 1000 años.

c) ¿Cuándo se reducirá la masa a 30 mg?

SOLUCIÓN

a) Sea $m(t)$ la masa de radio-226 (en miligramos) que permanece después de t años. Entonces $dm/dt = km$ y $y(0) = 100$, así que [2] da

$$m(t) = m(0)e^{kt} = 100e^{kt}$$

A fin de determinar el valor de k, utilizamos el hecho de que $y(1590) = \frac{1}{2}(100)$. Así,

$$100e^{1590k} = 50 \qquad e^{1590k} = \tfrac{1}{2}$$

y

$$1590k = \ln \tfrac{1}{2} = -\ln 2$$

$$k = -\frac{\ln 2}{1590}$$

En consecuencia

$$m(t) = 100e^{-(\ln 2)t/1590}$$

Podemos utilizar el hecho de que $e^{\ln 2} = 2$ para escribir la expresión para $m(t)$ en la forma alternativa

$$m(t) = 100 \times 2^{-t/1590}$$

b) La masa después de 1000 años es

$$m(1000) = 100e^{-(\ln 2)1000/1590} \approx 65\,\text{mg}$$

c) Queremos encontrar el valor de t tal que $m(t) = 30$, es decir,

$$100e^{-(\ln 2)t/1590} = 30 \text{ o bien } e^{-(\ln 2)t/1590} = 0.3$$

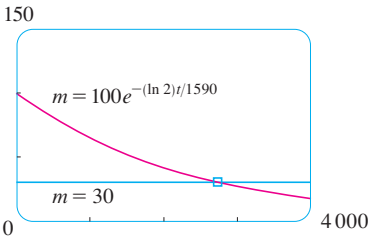


FIGURA 2

Resolviendo esta ecuación para t tomando el logaritmo natural de ambos lados:

$$-\frac{\ln 2}{1590}\,t = \ln 0.3$$

Por tanto,
$$t = -1590\,\frac{\ln 0.3}{\ln 2} \approx 2\,762 \text{ años}$$

Para una verificación del ejemplo 2, utilice un dispositivo de graficación para dibujar la gráfica de $m(t)$ de la figura 2 junto con la recta horizontal $m = 30$. Estas curvas se intersecan cuando $t \approx 2\,800$, y ello está de acuerdo con la respuesta del inciso c).

Ley de enfriamiento de Newton

La ley de enfriamiento de Newton establece que la rapidez de enfriamiento de un objeto es proporcional a la diferencia de temperatura entre el objeto y su ambiente, siempre que esta diferencia no sea muy grande. (Esta ley también se aplica al calentamiento.) Si se hace $T(t)$ la temperatura del objeto en el tiempo t y T_s la temperatura del ambiente, entonces podemos formular la ley de enfriamiento de Newton como una ecuación diferencial:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_s)$$

donde k es una constante. Esta ecuación no es completamente la misma que la ecuación 1, así que hacemos el cambio de variable $y(t) = T(t) - T_s$. Ya que T_s es constante, tenemos que $y'(t) = T'(t)$, así que la ecuación se convierte en

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

Por tanto, podemos utilizar 2 para hallar una expresión para y en la que podemos encontrar T.

EJEMPLO 3 Una botella con una bebida gasificada a temperatura ambiente (72 °F) se coloca dentro de un refrigerador donde la temperatura es 44 °F. Después de media hora la bebida se ha enfriado hasta 61 °F.

a) ¿Cuál es la temperatura de la bebida después de otra media hora?

b) ¿Cuánto tardará la bebida en enfriarse a 50 °F?

SOLUCIÓN

a) Sea $T(t)$ la temperatura de la bebida después de t minutos. La temperatura ambiente es $T_s = 44$ °F, por consiguiente, la ley de enfriamiento de Newton establece que

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 44)$$

Si hacemos $y = T - 44$, entonces $y(0) = T(0) - 44 = 72 - 44 = 28$, así que y satisface

$$\frac{dy}{dt} = ky \qquad y(0) = 28$$

y mediante 2 tenemos que

$$y(t) = y(0)e^{kt} = 28e^{kt}$$

Tenemos que $T(30) = 61$, así que $y(30) = 61 - 44 = 17$ y

$$28e^{30k} = 17 \qquad e^{30k} = \tfrac{17}{28}$$

Tomando logaritmos, tenemos que

$$k = \frac{\ln\left(\frac{17}{28}\right)}{30} \approx -0.01663$$

Así que

$$y(t) = 28e^{-0.01663t}$$

$$T(t) = 44 + 28e^{-0.01663t}$$

$$T(60) = 44 + 28e^{-0.01663(60)} \approx 54.3$$

Por tanto, después de la otra mitad de la hora, la bebida se ha enfriado a casi 54 °F.

b) Tenemos $T(t) = 50$ cuando

$$44 + 28e^{-0.01663t} = 50$$

$$e^{-0.01663t} = \frac{6}{28}$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{6}{28}\right)}{-0.01663} \approx 92.6$$

La bebida se enfría a 50 °F después de casi 1 hora 33 minutos.

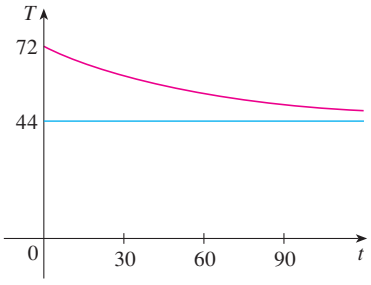


FIGURA 3

Observe que en el ejemplo 3, tenemos que

$$\lim_{t\to\infty} T(t) = \lim_{t\to\infty} (44 + 28e^{-0.01663t}) = 44 + 28 \cdot 0 = 44$$

lo cual se esperaba. La gráfica de la función temperatura se muestra en la figura 3.

Interés compuesto continuamente

EJEMPLO 4 Si se invierten 1000 dólares a 6% de interés compuesto anualmente, entonces, después de 1 año la inversión es valorada en $1000(1.06) = 1060$ dólares, después de 2 años su valor es $[1000(1.06)]1.06 = 1123.60$ dólares y después de t años su valor es $1000(1.06)^t$ dólares. En general, si se invierte una cantidad A_0 a una tasa de interés r ($r = 0.06$, en este ejemplo), entonces, después de t años su valor es de $A_0(1 + r)^t$. No obstante, por lo general el interés es compuesto con más frecuencia; es decir, n veces al año. Por tanto, en cada periodo de capitalización, la tasa de interés es r/n y hay nt periodos en t años, así que el valor de la inversión es

$$A_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Por ejemplo, una inversión de 1 000 dólares después de 3 años a 6% de interés estarán valorados en

$$\$1000(1.06)^3 = \$1191.02 \quad \text{compuesto al año}$$

$$\$1000(1.03)^6 = \$1194.05 \quad \text{compuesto cada seis meses}$$

$$\$1000(1.015)^{12} = \$1195.62 \quad \text{compuesto cada tres meses}$$

$$\$1000(1.005)^{36} = \$1196.68 \quad \text{compuesto cada mes}$$

$$\$1000\left(1 + \frac{0.06}{365}\right)^{365\cdot 3} = \$1197.20 \quad \text{compuesto diario}$$

Podemos ver que el pago del interés se incrementa cuando el número de periodos compuesto (n) se incrementa. Si hacemos que $n \to \infty$, entonces estará componiendo el interés **continuamente**, y el valor de la inversión será

$$\begin{aligned} A(t) &= \lim_{n\to\infty} A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} \\ &= \lim_{n\to\infty} A_0\left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n/r}\right]^{rt} \\ &= A_0\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n/r}\right]^{rt} \\ &= A_0\left[\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{rt} \qquad (\text{donde } m = n/r) \end{aligned}$$

Pero el límite en esta expresión es igual al número e (véase la ecuación 3.6.6). Así que, componiendo en forma continua con una tasa de interés r, la cantidad después de t años es

$$A(t) = A_0 e^{rt}$$

Si derivamos esta función, obtenemos

$$\frac{dA}{dt} = rA_0 e^{rt} = rA(t)$$

la cual dice que, componiendo continuamente el interés, la tasa de incremento de una inversión es proporcional a su tamaño.

Regresando al ejemplo de 1000 dólares invertidos por 3 años a 6% de interés anual, el valor de la inversión será

$$A(3) = \$1000e^{(0.06)3} = \$1197.22$$

Observe cómo se acerca esto a la cantidad calculada por componer diariamente 1197.20 dólares, pero es más fácil calcular la cantidad si aplicamos la composición continua.

3.8 Ejercicios

1. Una población de protozoarios se desarrolla con una tasa de crecimiento relativo constante de 0.7944 por miembro por cada día. En el día cero la población consiste de dos miembros. Encuentre el tamaño de la población después de 6 días.
2. Un habitante común del intestino humano es la bacteria *Escherichia coli*. Una célula de esta bacteria en un caldo nutriente se divide en dos células cada 20 minutos. La población inicial de un cultivo es de 60 células
   a) Halle la tasa de crecimiento relativo.
   b) Encuentre una expresión para el número de células después de t horas.
   c) Calcule el número de células después de 8 horas.
   d) Establezca la tasa de crecimiento después de 8 horas.
   e) ¿Cuándo alcanzará la población 20 000 células?
3. Un cultivo de bacterias al inicio contiene 100 células y crece en una cantidad proporcional a su tamaño. Después de 1 hora la población se ha incrementado a 420.
   a) Establezca una expresión para el número de bacterias después de t horas.
   b) Calcule el número de bacterias después de 3 horas.
   c) Encuentre la tasa de crecimiento después de 3 horas.
   d) ¿Cuándo alcanza la población 10 000?

4. Un cultivo de bacterias crece con una tasa de crecimiento relativo constante. Después de 2 horas existen 400 bacterias y después de 6 horas la cuenta es de 25 600.
a) ¿Cuál es la tasa de crecimiento relativo? Exprese su respuesta en porcentaje.
b) ¿Cuál fue el tamaño inicial del cultivo?
c) Encuentre una expresión para el número de bacterias después de t horas.
d) Encuentre el número de células después de 4.5 horas.
e) Encuentre la tasa de crecimiento después de 4.5 horas.
f) ¿Cuándo alcanzará la población 50 000?

5. La tabla proporciona estimados de la población mundial, en millones, desde 1750 hasta el 2000.
a) Aplique el modelo exponencial y las cifras de población para 1750 y 1800 para predecir la población mundial en 1900 y en 1950. Compare con las cifras actuales.
b) Utilice el modelo exponencial y las cifras de población para 1850 y 1900 para predecir la población mundial en 1950. Compare con la población actual.
c) Emplee el modelo exponencial y las cifras de población en 1900 y 1950 para predecir la población mundial en el 2000. Compare con la población actual e intente explicar la discrepancia.

Año	Población	Año	Población
1750	790	1900	1 650
1800	980	1950	2 560
1850	1 260	2000	6 080

6. La tabla proporciona la población de India, en millones, para la segunda mitad del siglo XX.

Año	Población
1951	361
1961	439
1971	548
1981	683
1991	846
2001	1 029

a) Aplique el modelo exponencial y las cifras de censo para 1951 y 1961 para predecir la población en el 2001. Compare con las cifras actuales.
b) Utilice el modelo exponencial y las cifras del censo para 1961 y 1981 para predecir la población en el 2001. Compare con la población actual. Después utilice este modelo para predecir la población en los años 2010 y 2020.
c) Grafique ambas funciones exponenciales de los incisos a) y b) junto con una gráfica de la población actual. ¿Alguno de estos modelos es razonable?

7. Los experimentos muestran que si la reacción química

$$N_2O_5 \rightarrow 2NO_2 + \tfrac{1}{2}O_2$$

se realiza a 45 °C, la velocidad de reacción del pentóxido de dinitrógeno es proporcional a su concentración como sigue:

$$-\frac{d[N_2O_5]}{dt} = 0.0005[N_2O_5]$$

(Véase el ejemplo 4 en la sección 3.7.)
a) Halle una expresión para la concentración $[N_2O_5]$ después de t segundos si la concentración inicial es C.
b) ¿Cuánto tiempo le toma a la reacción para reducir la concentración de N_2O_5 a 90% de su valor original?

8. El estroncio-90 tiene un tiempo de vida media de 28 días.
a) Una muestra tiene originalmente una masa de 50 mg. Establezca una fórmula para la masa que queda después de t días.
b) Calcule la masa restante después de 40 días.
c) ¿Cuánto tiempo le toma a la muestra reducir su masa a 2 mg?
d) Bosqueje la gráfica de la función masa.

9. El tiempo de vida media del cesio-137 es de 30 años. Suponga que tenemos una muestra de 100 mg.
a) Establezca la masa que permanece después de t años.
b) ¿Cuánto de la muestra permanece después de 100 años?
c) ¿Después de cuánto tiempo permanece únicamente 1 mg?

10. Una muestra de tritio-3 se desintegró a 94.5% de su cantidad original después de 1 año.
a) ¿Cuál es el tiempo de vida media del tritio-3?
b) ¿Cuánto tardaría en decaer a 20% de su cantidad original?

11. Los científicos pueden establecer la edad de objetos antiguos mediante el método de *datación por radiocarbono*. El bombardeo de la atmósfera superior por los rayos cósmicos convierte al nitrógeno en un isótopo radioactivo de carbono, ^{14}C, con un tiempo de vida media aproximado de 5 730 años. La vegetación absorbe dióxido de carbono a través de la atmósfera, y la vida animal asimila ^{14}C a través de la cadena alimenticia. Cuando una planta o un animal mueren, se detiene la sustitución de su carbono, y la cantidad de ^{14}C inicia su disminución a través de la desintegración radiactiva. En consecuencia el nivel de radiactividad también decae de manera exponencial.

En un fragmento de pergamino se descubrió que había aproximadamente setenta y cuatro por ciento tanta radioactividad ^{14}C como en el material con el que se hace el pergamino que hay sobre la Tierra hoy en día. Estime la edad del pergamino.

12. Una curva pasa a través del punto (0, 5) y tiene la propiedad de que la pendiente de la curva en cualquier punto P es dos veces la coordenada y de P. ¿Cuál es la ecuación de la curva?

13. De un horno se toma un pavo rostizado cuando su temperatura ha alcanzado 185 °F y se coloca sobre una mesa en un espacio donde la temperatura es 75 °F.
a) Si la temperatura del pavo es 150 °F después de media hora, ¿cuál es la temperatura 45 minutos después?
b) ¿Cuándo se enfriará el pavo a 100 °F?

14. En una investigación de asesinato, la temperatura del cadáver fue de 32.5 °C a las 13:30 y de 30.3 °C una hora más tarde. La temperatura corporal normal es 37.0 °C y la temperatura del ambiente era de 20.0 °C. ¿Cuándo tuvo lugar el asesinato?

15. Cuando se saca una bebida fría del refrigerador, su temperatura es 5 °C. Después de 25 minutos dentro de una habitación a 20 °C su temperatura se incrementa a 10 °C.
a) ¿Cuál es la temperatura de la bebida 50 minutos después?
b) ¿Cuándo estará su temperatura a 15 °C?

16. Una taza de café recién preparado tiene 95 °C de temperatura en una habitación a 20 °C. Cuando la temperatura es de 70 °C, se enfría con una rapidez de 1 °C por cada minuto. ¿Cuándo sucede esto?

17. La rapidez de cambio de la presión atmosférica P respecto a la altitud h es proporcional a P, siempre que la temperatura sea constante. A 15 °C la presión es 101.3 kPa al nivel del mar y 87.14 kPa en $h = 1000$ m.
a) ¿Cuál es la presión a una altitud de 3 000 m?
b) ¿Cuál es la presión en la cima del monte McKinly, a una altitud de 6 187 m?

18. a) Si se prestan 1000 dólares a 8% de interés, calcule la cantidad que se debe al final de 3 años si el interés es compuesto: i) anual, ii) trimestral, iii) mensual, iv) semanal, v) diario, vi) por hora y vii) de manera continua.

b) Suponga que se prestan 1000 dólares y el interés es compuesto de manera continua. Si $A(t)$ es la cantidad que se debe después de t años, donde $0 \leq t \leq 3$, grafique $A(t)$ en una pantalla común, para cada una de las tasas de interés 6, 8 y 10 por ciento.

19. a) Si invierten 3 000 dólares a 5% de interés, calcule el valor de la inversión al final de 5 años si el interés es compuesto i) anual, ii) semestral, iii) mensual, iv) semanal, v) por día y vi) de manera continua.
b) Si $A(t)$ es la cantidad de la inversión al tiempo t para el caso de composición continua, establezca una ecuación diferencial y una condición inicial que satisfaga $A(t)$.

20. a) ¿Cuánto transcurrirá para que una inversión se duplique en valor si la tasa de interés anual es de 6% compuesto de manera continua?
b) ¿Cuál es la tasa de interés anual equivalente?

3.9 Razones relacionadas

Si estamos inflando un globo, tanto su volumen como su radio se incrementan, y sus razones de incremento están relacionadas entre sí. Pero es mucho más fácil medir de modo directo la rapidez de aumento de volumen que la rapidez de crecimiento del radio.

En un problema de razones de cambio relacionadas, la idea es calcular la razón de cambio de una cantidad en términos de la razón de cambio de otra cantidad (la cual podría medirse con más facilidad). El procedimiento es determinar una ecuación que relacione las dos cantidades y aplicar la regla de la cadena para derivar ambos miembros respecto al tiempo.

V EJEMPLO 1 Se infla un globo esférico y su volumen crece a razón de $100\,\text{cm}^3/\text{s}$. ¿Qué tan rápido aumenta el radio del globo cuando el diámetro es de 50 cm?

RP De acuerdo con los principios de la resolución de problemas estudiados en la página 75, el primer paso es entender el problema. Ahí está incluida la lectura cuidadosa del problema, la identificación de los datos con que se conoce y lo que se desconoce y la introducción de una notación conveniente.

SOLUCIÓN Empezamos por identificar dos aspectos:

la *información dada:*

la razón de incremento del volumen del globo es $100\,\text{cm}^3/\text{s}$

y *lo que se desconoce:*

la rapidez de incremento del radio cuando el diámetro es 50 cm

Con objeto de expresar estas cantidades en forma matemática, introduzca una *notación* sugerente:

sea V el volumen del globo y r su radio.

La clave que se debe tener presente es que las razones de cambio son derivadas. En este problema, tanto el volumen como el radio son funciones del tiempo t. La rapidez de incremento del volumen respecto al tiempo es la derivada dV/dt, y la rapidez del incremento del radio es dr/dt. Por tanto, replantee lo que conoce y lo que desconoce de la manera siguiente:

$$\textit{Conocido:} \quad \frac{dV}{dt} = 100\,\text{cm}^3/\text{s}$$

$$\textit{Desconocido:} \quad \frac{dr}{dt} \quad \text{cuando } r = 25\,\text{cm}$$

RP La segunda etapa de la resolución de problemas es concebir un plan para relacionar la información conocida con la desconocida.

Con objeto de relacionar dV/dt y dr/dt, primero relacionamos V y r mediante la fórmula del volumen de una esfera:

$$V = \tfrac{4}{3}\pi r^3$$

A fin de utilizar la información dada, derive respecto a t a ambos miembros de la ecuación. Para derivar el lado derecho necesita aplicar la regla de la cadena:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

Ahora resuelva para la cantidad desconocida:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{dV}{dt}$$

Observe que, aunque dV/dt es constante, dr/dt no lo es.

Si sustituimos $r = 25$ y $dV/dt = 100$ en esta ecuación, obtenemos

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi(25)^2}100 = \frac{1}{25\pi}$$

El radio del globo se incrementa a razón de $1/(25\pi) \approx 0.0127$ cm/s.

EJEMPLO 2 Una escalera de 10 pies de largo está apoyada contra un muro vertical. Si la parte inferior de la escalera se desliza alejándose de la pared a razón de 1 pie/s, ¿qué tan rápido la parte superior de la escalera resbala hacia abajo por la pared cuando la parte inferior de la escalera está a 6 pies del muro?

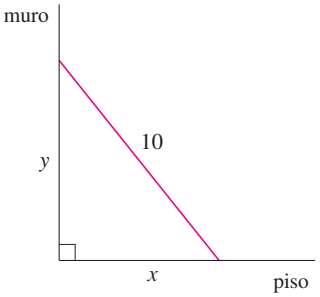


FIGURA 1

SOLUCIÓN Primero dibuje un esquema y ponga los datos como se muestra en la figura 1. Sea x pies la distancia desde la parte inferior de la escalera al muro y y pies la distancia desde la parte superior de la escalera al piso. Observe que x y y son funciones del tiempo t (medido en segundos).

Sabemos que $dx/dt = 1$ pie/s, y se pide determinar dy/dt cuando $x = 6$ pies (véase figura 2). En este problema, la relación entre x y y la define el teorema de pitágoras:

$$x^2 + y^2 = 100$$

Al derivar con respecto a t ambos miembros aplicando la regla de la cadena tenemos

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

y al resolver esta ecuación para determinar la rapidez deseada, obtenemos

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$$

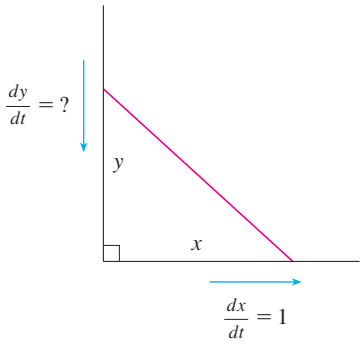


FIGURA 2

Cuando $x = 6$, el teorema de Pitágoras da $y = 8$ y al sustituir estos valores y $dx/dt = 1$, llegamos a

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{6}{8}(1) = -\frac{3}{4}\ \text{pies/s}$$

El hecho de que dy/dt sea negativa quiere decir que la distancia desde la parte superior de la escalera al suelo está *decreciendo* a razón de $\frac{3}{4}$ pies/s. En otras palabras, la parte superior de la escalera se resbala hacia abajo de la pared a razón de $\frac{3}{4}$ pies/s.

EJEMPLO 3 Un depósito para agua tiene la forma de un cono circular invertido; el radio de la base es de 2 m, y la altura es de 4 m. Si el agua se bombea hacia el depósito a razón de $2\,\text{m}^3/\text{min}$, determine la rapidez a la cual el nivel del agua sube cuando el agua tiene 3 m de profundidad.

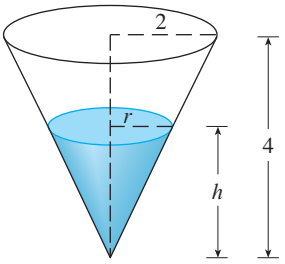


FIGURA 3

SOLUCIÓN Primero elabore un diagrama del cono y denote la información como en la figura 3. Sean V, r y h el volumen del agua, el radio de la superficie circular y la altura en el tiempo t, respectivamente, donde t se mide en minutos.

Sabemos que $dV/dt = 2\,\text{m}^3/\text{min}$, y se nos pide determinar dh/dt cuando h es 3 m. Las cantidades V y h se relacionan mediante la ecuación

$$V = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h$$

pero es muy útil expresar V sólo en función de h. Con objeto de eliminar r, recurra a los triángulos semejantes en la figura 3 para escribir

$$\frac{r}{h} = \frac{2}{4} \qquad r = \frac{h}{2}$$

y la expresión para V se vuelve

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{\pi}{12}h^3$$

Ahora podemos derivar cada miembro respecto a t:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{4}h^2\frac{dh}{dt}$$

de modo que

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi h^2}\frac{dV}{dt}$$

Al sustituir $h = 3\,\text{m}$ y $dV/dt = 2\,\text{m}^3/\text{min}$ tenemos que

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi(3)^2}\cdot 2 = \frac{8}{9\pi}$$

El nivel del agua está subiendo a razón de $8/(9\pi) \approx 0.28\,\text{m/min}$. ■

RP Reflexione: ¿qué ha aprendido de los ejemplos 1 a 3 que lo ayude a resolver problemas futuros?

Estrategia de resolución de problemas Es útil recordar algunos de los principios para resolver problemas que se encuentran en la página 75 y adaptarlos a las razones de cambio relacionadas, luego de lo que aprendió en los ejemplos 1 a 3:

1. Lea con cuidado el problema.
2. Si es posible, dibuje un diagrama.
3. Introduzca la notación. Asigne símbolos a todas las cantidades que están en función del tiempo.
4. Exprese la información dada y la razón requerida en términos de derivadas.
5. Escriba una ecuación que relacione las diferentes cantidades del problema. Si es necesario, utilice las propiedades geométricas de la situación para eliminar una de las variables por sustitución, como en el ejemplo 3.
6. Utilice la regla de la cadena para derivar respecto a t ambos miembros de la ecuación.
7. Sustituya la información dada en la ecuación resultante y resuelva para la razón de cambio desconocida.

ADVERTENCIA: un error común es la sustitución de la información numérica conocida (por cantidades que varían con el tiempo) muy pronto. La sustitución se efectúa sólo *después* de la derivación. (El paso 7 va después del paso 6.) Es decir, en el ejemplo 3 se tratan valores generales de h hasta que finalmente sustituye $h \neq 3$ en la última etapa. (Si hubiera sustituido $h \neq 3$ desde antes, habría obtenido $dV/dt = 0$, lo cual es evidentemente erróneo.)

Los ejemplos siguientes son ilustraciones adicionales de la estrategia.

V EJEMPLO 4 El automóvil A se dirige hacia el oeste a 50 millas/h y el automóvil B viaja hacia el norte a 60 millas/h. Ambos se dirigen hacia la intersección de los dos caminos. ¿Con qué rapidez se aproximan los vehículos entre sí cuando el automóvil A está a 0.3 millas y el automóvil B está a 0.4 millas de la intersección?

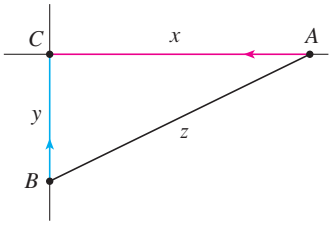


FIGURA 4

SOLUCIÓN Dibuje la figura 4, donde C es la intersección de los caminos. En un tiempo dado t, sea x la distancia entre el automóvil A y C, sea y la distancia del automóvil B a C y sea z la distancia entre los vehículos, donde x, y y z se miden en millas.

Sabemos que $dx/dt = -50$ millas/h y $dy/dt = -60$ millas/h. Las derivadas son negativas porque x y y son decrecientes. Se pide calcular dz/dt. La ecuación que relaciona x, y y z la proporciona el teorema de Pitágoras:

$$z^2 = x^2 + y^2$$

Al derivar ambos lados respecto a t obtenemos

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{z}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right)$$

Cuando $x = 0.3$ millas y $y = 0.4$ millas, el teorema de Pitágoras da $z = 0.5$ millas, de modo que

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{0.5}[0.3(-50) + 0.4(-60)]$$

$$= -78 \text{ mi/h}$$

Los vehículos se aproximan entre sí a razón de 78 millas/h.

V EJEMPLO 5 Un hombre camina a lo largo de una trayectoria recta a una rapidez de 4 pies/s. Un faro está situado sobre el nivel de la tierra a 20 pies de la trayectoria y se mantiene enfocado hacia el hombre. ¿Con qué rapidez el faro gira cuando el hombre está a 15 pies del punto sobre la trayectoria más cercana a la fuente de luz?

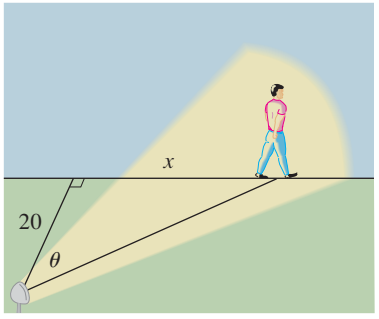


FIGURA 5

SOLUCIÓN Trace la figura 5 y haga que x sea la distancia desde el hombre hasta el punto sobre la trayectoria que esté más cercana al faro. Sea θ el ángulo entre el rayo desde el faro y la perpendicular a la trayectoria.

Sabemos que $dx/dt = 4$ pies/s, y se pide calcular $d\theta/dt$ cuando $x = 15$. La ecuación que relaciona x y θ puede escribirse a partir de la figura 5:

$$\frac{x}{20} = \tan\theta \qquad x = 20\tan\theta$$

Al derivar respecto a t ambos miembros, obtenemos

$$\frac{dx}{dt} = 20\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt},$$

por lo que

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{20}\cos^2\theta\frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{1}{20}\cos^2\theta\,(4) = \frac{1}{5}\cos^2\theta$$

Cuando $x = 15$, la longitud del rayo es 25, así que $\cos\theta = \frac{4}{5}$ y

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{125} = 0.128$$

El faro gira con una rapidez de 0.128 rad/s.

3.9 Ejercicios

1. Si V es el volumen de un cubo con arista x, y el cubo se expande a medida que transcurre el tiempo, exprese dV/dt en términos de dx/dt.

2. a) Si A es el área de un círculo cuyo radio es r, y el círculo se expande a medida que pasa el tiempo, exprese dA/dt en términos de dr/dt.
   b) Suponga que se derrama aceite de un depósito agrietado y que se extiende siguiendo una circular. Si el radio del derrame de aceite se incrementa con una rapidez constante de 1 m/s, ¿qué tan rápido se incrementa el área del derrame cuando el radio es de 30 m?

3. Cada lado de un cuadrado se incrementa a razón de 6 cm/s. ¿Con qué rapidez se incrementa el área del cuadrado cuando su área es de 16 cm^2?

4. El largo de un rectángulo se incrementa a razón de 8 cm/s y el ancho a razón de 3 cm/s. Cuando el largo es 20 cm y el ancho es 10 cm, ¿qué tan rápido se incrementa el área del rectángulo?

5. Un tanque cilíndrico con 5 m de radio se está llenando con agua a razón de 3 cm^3/min. ¿Qué tan rápido se incrementa la altura de agua?

6. El radio de una esfera se incrementa a razón de 4 mm/s. ¿Qué tan rápido se incrementa el volumen cuando el diámetro es de 80 mm?

7. Suponga que $y = \sqrt{2x + 1}$, donde x y y son funciones de t.
   a) Si $dx/dt = 3$, encuentre dy/dt cuando $x = 4$.
   b) Si $dy/dt = 5$, encuentre dx/dt cuando $x = 12$.

8. Suponga que $4x^2 + 9y^2 = 36$, donde x y y son funciones de t.
   a) Si $dy/dt = \frac{1}{3}$, encuentre dx/dt cuando $x = 2$ y $y = \frac{2}{3}\sqrt{5}$.
   b) Si $dx/dt = 3$, encuentre dy/dt cuando $x = -2$ y $y = \frac{2}{3}\sqrt{5}$.

9. Si $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $dx/dt = 5$ y $dy/dt = 4$, encuentre dz/dt cuando $(x, y, z) = (2, 2, 1)$.

10. Una partícula se desplaza a lo largo de la hipérbola $xy = 8$. Cuando alcanza el punto (4, 2), la coordenada y se incrementa con una rapidez de 3 cm/s. ¿Qué tan rápido cambia la coordenada x del punto en movimiento en ese instante?

11-14

a) ¿Qué cantidades se conocen en el problema?
b) ¿Qué cantidades se desconocen?
c) Trace un diagrama de la situación para cualquier tiempo t.
d) Plantee una ecuación que relacione las cantidades.
e) Termine de resolver el problema.

11. Un avión que vuela horizontalmente a una altitud de 1 milla y a una rapidez de 500 millas/h pasa directamente sobre una estación de radar. Calcule la rapidez con la que se incrementa la distancia desde el avión a la estación cuando éste se encuentra a 2 millas de la estación.

12. Si una bola de nieve se derrite de tal modo que el área superficial disminuye a razón de 1 cm^2/min, calcule la rapidez con la que disminuye el diámetro cuando éste es 10 cm.

13. Una lámpara está instalada en lo alto de un poste de 15 pies de altura. Un hombre de 6 pies de estatura se aleja caminando desde el poste con una rapidez de 5 pies/s a lo largo de una trayectoria rectilínea. ¿Qué tan rápido se desplaza la punta de su sombra cuando el hombre está a 40 pies del poste?

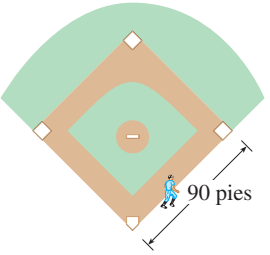
14. A mediodía, un barco A está a 150 km al oeste del barco B. El barco A navega hacia el este a 35 km/h y el barco B navega hacia el norte a 25 km/h. ¿Qué tan rápido cambia la distancia entre los barcos a las 16:00?

15. Dos automóviles parten desde el mismo punto. Uno se dirige hacia el sur a 60 millas/h y el otro hacia el oeste a 25 millas/h. ¿Con qué rapidez se incrementa la distancia entre los automóviles dos horas después?

16. Una foco sobre el piso ilumina una pared a 12 m de distancia. Si un hombre de 2 m de estatura camina desde el foco hacia el edificio a una rapidez de 1.6 m/s, ¿qué tan rápido disminuye la longitud de su sombra sobre la pared cuando está a 4 m del edificio?

17. Un hombre empieza a caminar hacia el norte a 4 pies/s desde un punto P. Cinco minutos más tarde, una mujer empieza a caminar hacia el sur a 5 pies/s desde un punto a 500 pies directo al este de P. ¿Con qué rapidez se están separando las personas 15 min después de que la mujer empezó a caminar?

18. Un diamante de béisbol es un cuadrado de 90 pies por lado. Un bateador golpea la pelota y corre hacia la primera base con una rapidez de 24 pies/s.
   a) ¿Con qué rapidez decrece su distancia desde la segunda base cuando está a medio camino de la primera base?
   b) ¿Con qué rapidez se incrementa su distancia desde la tercera base en el mismo momento?



19. La altura de un triángulo se incrementa a razón de 1 cm/min, mientras que el área del triángulo aumenta a razón de

$2\,\text{cm}^2/\text{min}$. ¿Con qué rapidez cambia la base del triángulo cuando la altura es de 10 cm y el área es de $100\,\text{cm}^2$?

20. Un bote se jala hacia un muelle mediante una soga unida a la proa y que pasa por una polea que se encuentra instalada en el muelle a 1 m más arriba que la proa del bote. Si la soga se jala a una rapidez de 1 m/s, ¿qué tan rápido se aproxima el bote al muelle cuando éste se encuentra a 8 m de éste?



21. A mediodía, el barco A está a 100 km al oeste del barco B. El barco A se dirige hacia el sur a 35 km/h, y el barco B va hacia el norte a 25 km/h. ¿Qué tan rápido cambia la distancia entre los barcos a las 16:00?

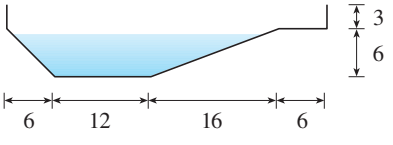
22. Una partícula se desplaza a lo largo de la curva $y = 2\,\text{sen}(\pi x/2)$. Cuando la partícula pasa por el punto $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$, su coordenada x se incrementa a razón de $\sqrt{10}$ cm/s. ¿Qué tan rápido cambia la distancia desde la partícula al origen en este instante?

23. El agua sale de un depósito en forma de cono invertido a razón de $10\,000\,\text{cm}^3/\text{min}$ al mismo tiempo que se bombea agua al depósito a razón constante. El depósito mide 6 m de altura, y el diámetro en la parte superior es de 4 m. Si el nivel del agua se eleva a razón de 20 cm/min cuando la altura del agua es de 2 m, calcule la razón a la cual el agua está siendo bombeada hacia el tanque.

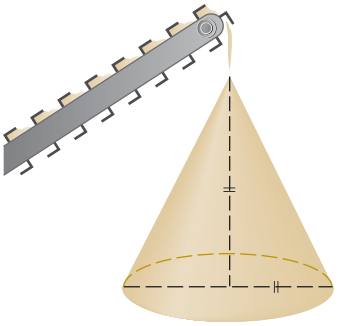
24. Se tiene un canal de 10 pies de largo con extremos en forma de triángulos isósceles con 3 pies de ancho en la parte superior y con una altura de 1 pie. Si el canal se está llenando de agua a razón de $12\,\text{pies}^3/\text{min}$, ¿qué tan rápido está aumentando el nivel del agua cuando ésta se encuentra a 6 pulgadas de profundidad?

25. Un canal de agua tiene 10 m de longitud y una sección transversal en forma de un trapecio isósceles con 30 cm de ancho en la parte inferior, 80 cm de ancho en la parte superior, y una altura de 50 cm. Si el canal se llena con agua a razón de $0.2\,\text{m}^3/\text{min}$, ¿qué tan rápido está aumentando el nivel del agua cuando ésta se encuentra a 30 cm de profundidad?

26. Una piscina mide 20 pies de ancho, 40 pies de largo, 3 pies de profundidad en el extremo de poco fondo y 9 pies de profundidad en la parte más honda. En la figura se muestra una sección transversal de la piscina. Si ésta se está llenando a razón de 0.8 pies^3/min, ¿qué tan rápido sube el nivel del agua cuando tiene 5 pies en el punto más hondo?



27. Se descarga grava por medio de una banda transportadora a razón de 30 pies^3/min, y el grosor de granos es tal que forma una pila en forma de cono cuyo diámetro y altura son siempre iguales. ¿Qué tan rápido se incrementa la altura de la pila cuando ésta mide 10 pies de alto?



28. Un papalote que está a 100 pies por arriba de la superficie de la tierra se desplaza en forma horizontal a una rapidez de 8 pies/s. ¿Con qué rapidez disminuye el ángulo entre la cuerda y la horizontal cuando se han soltado 200 pies de cuerda?

29. Dos lados de un triángulo miden 4 m y 5 m, y el ángulo entre ellos se incrementa a razón de 0.06 rad/s. Calcule la razón a la cual el área del triángulo se incrementa cuando el ángulo entre los lados de longitud constante es $\pi/3$.

30. ¿Con qué rapidez cambia el ángulo entre el muro y la escalera en el ejemplo 2, cuando la parte inferior de la escalera está a 6 pies del muro?

31. La parte superior de una escalera se desliza por una pared a una rapidez vertical de 0.15 m/s. En el momento en que la parte inferior de la escalera está a 3 m de la pared, se desliza alejándose de ésta con una rapidez de 0.2 m/s. ¿Cuál es la longitud de la escalera?

32. Un grifo está llenando un recipiente hemisférico de 60 cm de diámetro, con agua a razón de 2 L/min. Encuentre la rapidez a la que está aumentando el agua en el recipiente cuando está medio lleno. [Utilice los siguientes hechos: $1\,\text{L} = 1000\,\text{cm}^3$. El volumen de la parte de una esfera con radio r desde la parte inferior a una altura h es $V = \pi\left(rh^2 - \frac{1}{3}h^3\right)$, como lo demostraremos en el capítulo 6].

33. La ley de Boyle establece que, cuando una muestra de gas se comprime a temperatura constante, la presión P y el volumen V satisfacen la ecuación $PV = C$, donde C es una constante. Suponga que en un cierto instante el volumen es de $600\,\text{cm}^3$, la presión es de 150 kPa y que la presión se incrementa a razón de 20 kPa/min ¿Con qué rapidez disminuye el volumen en ese instante?

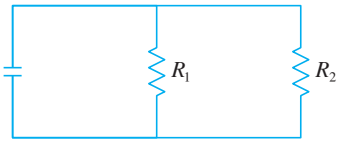
34. Cuando el aire se expande en forma adiabática, (no gana ni pierde calor), su presión P y su volumen V se relacionan mediante la ecuación $PV^{1.4} = C$, donde C es una constante. Suponga que en un cierto instante el volumen es $400\,\text{cm}^3$ y que la presión es 80 kPa y está disminuyendo a razón de 10 kPa/min. ¿Con qué rapidez se incrementa el volumen en este instante?

35. Si se conectan dos resistencias R_1 y R_2 en paralelo, como se muestra en la figura, entonces la resistencia total R, medida en ohms (Ω) está dada por

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Si R_1 y R_2 se incrementan a razón de $0.3\,\Omega/\text{s}$ y $0.2\,\Omega/\text{s}$,

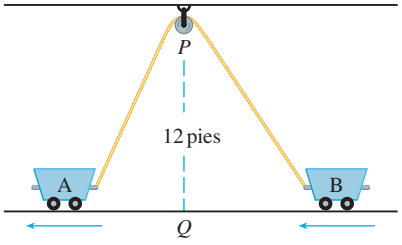
respectivamente, ¿qué tan rápido cambia R cuando $R_1 = 80\,\Omega$ y $R_2 = 100\,\Omega$?



36. El peso B del cerebro en función del peso del cuerpo W en los peces ha sido modelado mediante la función potencia $B = 0.007\,W^{2/3}$, donde B y W se dan en gramos. Un modelo para el peso corporal en función de la longitud del cuerpo L (medido en centímetros), es $W = 0.12\,L^{2.53}$. Si en 10 millones de años la longitud promedio de ciertas especies de peces evolucionaron de 15 a 20 cm a rapidez constante, ¿qué tan rápido creció el cerebro de estas especies cuando la longitud promedio era de 18 cm?

37. Los lados de un triángulo tienen longitudes de 12 y 15 m. El ángulo entre ellos se incrementa a razón de 2°/min. ¿Qué tan rápido se incrementa la longitud del tercer lado cuando el ángulo entre los lados de longitud fija es de 60°?

38. Dos carros A y B están conectados por medio de una soga de 39 pies de longitud que pasa por una polea P (véase la figura). El punto Q está en el suelo a 12 pies directamente abajo de P y entre los carros. El carro A es jalado a partir de Q a una rapidez de 2 pies/s. ¿Qué tan rápido se mueve el carro B hacia Q en el instante en que el carro A está a 5 pies de Q?



39. Una cámara de televisión se instala a 4 000 pies de la base de una plataforma de lanzamiento de cohetes. El ángulo de elevación de la cámara tiene que cambiar con la rapidez correcta con el objeto de tener siempre a la vista al cohete. Asimismo, el mecanismo de enfoque de la cámara tiene que tomar en cuenta la distancia creciente de la cámara al cohete que se eleva. Suponga que el cohete se eleva verticalmente y que su rapidez es 600 pies/s cuando se ha elevado 3 000 pies.

a) ¿Qué tan rápido cambia la distancia de la cámara de televisión al cohete en ese momento?

b) Si la cámara de televisión se mantiene dirigida hacia el cohete, ¿qué tan rápido cambia el ángulo de elevación de la cámara en ese momento?

40. Un faro se localiza en una pequeña isla a 3 km de distancia del punto P más cercano que se encuentra en una playa recta, y su luz da cuatro revoluciones por minuto. ¿Qué tan rápido se mueve el haz de luz a lo largo de la playa cuando está a 1 km de P?

41. Un avión vuela horizontalmente a una altitud de 5 km y pasa directamente sobre un telescopio de seguimiento en la superficie de la Tierra. Cuando el ángulo de elevación es $\pi/3$, este ángulo está disminuyendo a razón de $\pi/6$ rad/min. ¿Con qué rapidez está viajando el avión en ese instante?

42. Una rueda de la fortuna de 10 m de radio está girando a razón de una revolución cada 2 min. ¿Qué tan rápido se está elevando un pasajero cuando su silla está a 16 m del nivel del suelo?

43. Un avión que vuela con rapidez constante de 300 km/h pasa sobre una estación terrestre de radar a una altitud de 1 km y se eleva con un ángulo de 30°. ¿Con qué rapidez se incrementa la distancia del avión a la estación de radar un minuto más tarde?

44. Dos personas parten del mismo punto. Una camina hacia el este a 3 mi/h, y la otra camina hacia el noreste a 2 mi/h. ¿Qué tan rápido cambia la distancia entre las personas después de 15 minutos?

45. Un individuo corre por una pista circular de 100 m de radio a una rapidez constante de 7 m/s. Un amigo del corredor está parado a una distancia de 200 m del centro de la pista. ¿Qué tan rápido cambia la distancia entre los amigos cuando la distancia entre ellos es de 200 m?

46. La manecilla de los minutos de un reloj mide 8 mm de largo y la manecilla de las horas mide 4 mm de largo. ¿Qué tan rápido cambia la distancia entre las puntas de las manecillas cuando es 13:00?

3.10 Aproximaciones lineales y diferenciales

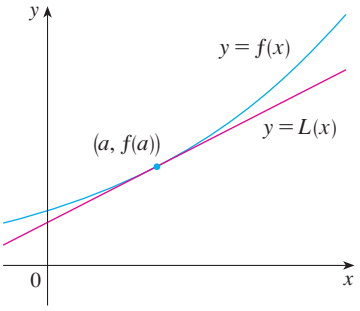


FIGURA 1

Hemos visto que una curva se encuentra muy cerca de su recta tangente cerca del punto de tangencia. De hecho, al realizar un acercamiento hacia el punto en la gráfica de una función derivable, observamos que la gráfica se parece cada vez más a su recta tangente. (Véase la figura 2 en la sección 2.7.) Esta observación es la base de un método para hallar valores aproximados de funciones.

La idea es que puede resultar fácil calcular un valor $f(a)$ de una función, pero difícil (si no es que imposible) calcular valores cercanos de f. Por tanto, recurrimos a los valores calculados fácilmente de la función lineal L cuya gráfica es la recta tangente de f en $(a, f(a))$. (Véase la figura 1.)

En otras palabras, utilizamos la recta tangente en $(a, f(a))$ como una aproximación a la curva $y = f(x)$ cuando x está cerca de a. Una ecuación para la recta tangente es

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

y la aproximación

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) \quad \boxed{1}$$

se conoce con el nombre de **aproximación lineal** o **aproximación de la recta tangente** de f en a. A la función lineal cuya gráfica es esta recta tangente, es decir,

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a) \quad \boxed{2}$$

se le llama **linealización** de f en a.

V EJEMPLO 1 Encuentre la linealización de la función $f(x) = \sqrt{x + 3}$ en $a = 1$ y úsela para obtener una aproximación de los números $\sqrt{3.98}$ y $\sqrt{4.05}$. ¿Estas aproximaciones son sobreestimaciones o subestimaciones?

SOLUCIÓN La derivada de $f(x) = (x + 3)^{1/2}$ es

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}(x + 3)^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x + 3}}$$

y tenemos que $f(1) = 2$ y $f'(1) = \frac{1}{4}$. Si ponemos estos valores en la ecuación 2, la linealización es

$$L(x) = f(1) + f'(1)(x - 1) = 2 + \tfrac{1}{4}(x - 1) = \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$$

La aproximación lineal correspondiente $\boxed{1}$ es

$$\sqrt{x + 3} \approx \frac{7}{4} + \frac{x}{4} \qquad \text{(cuando } x \text{ está cerca de 1)}$$

En particular, tenemos que

$$\sqrt{3.98} \approx \tfrac{7}{4} + \tfrac{0.98}{4} = 1.995 \qquad \text{y} \qquad \sqrt{4.05} \approx \tfrac{7}{4} + \tfrac{1.05}{4} = 2.0125$$

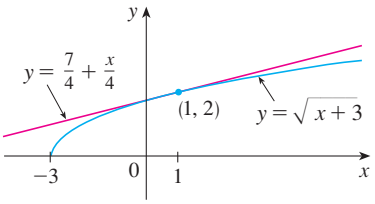


FIGURA 2

En la figura 2 se ilustra la aproximación lineal. En efecto, la recta tangente es una buena aproximación a la función dada cuando x esta cerca de 1. También vemos que las aproximaciones son sobreestimaciones porque la recta tangente se encuentra por arriba de la curva.

Por supuesto, una calculadora podría dar aproximaciones para $\sqrt{3.98}$ y $\sqrt{4.05}$, pero la aproximación lineal da una aproximación *sobre todo un intervalo*.

En la tabla siguiente se comparan las estimaciones de la aproximación lineal del ejemplo 1 con los valores reales. Observe en esta tabla, y también en la figura 2, que la aproximación con la recta tangente da buenas estimaciones cuando x está cerca de 1, pero la precisión de la aproximación disminuye cuando x está más lejos de 1.

	x	De $L(x)$	Valor real
$\sqrt{3.9}$	0.9	1.975	1.97484176 . . .
$\sqrt{3.98}$	0.98	1.995	1.99499373 . . .
$\sqrt{4}$	1	2	2.00000000 . . .
$\sqrt{4.05}$	1.05	2.0125	2.01246117 . . .
$\sqrt{4.1}$	1.1	2.025	2.02484567 . . .
$\sqrt{5}$	2	2.25	2.23606797 . . .
$\sqrt{6}$	3	2.5	2.44948974 . . .

¿Qué tan buena es la aproximación obtenida en el ejemplo 1? El ejemplo siguiente muestra que usando una calculadora graficadora o una computadora es posible determinar un intervalo a lo largo del cual una aproximación lineal proporciona una precisión específica.

EJEMPLO 2 ¿Para cuáles valores de x la aproximación lineal

$$\sqrt{x+3} \approx \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$$

es exacta con una diferencia menor que 0.5? ¿Qué puede decir de una exactitud con una diferencia menor que 0.1?

SOLUCIÓN Una exactitud con una diferencia menor que 0.5 significa que las funciones deben diferir en menos de 0.5:

$$\left| \sqrt{x+3} - \left(\frac{7}{4} + \frac{x}{4} \right) \right| < 0.5$$

De modo equivalente, podríamos escribir

$$\sqrt{x+3} - 0.5 < \frac{7}{4} + \frac{x}{4} < \sqrt{x+3} + 0.5$$

Esto expresa que la aproximación lineal debe encontrarse entre las curvas que se obtienen al desplazar la curva $y = \sqrt{x+3}$ hacia arriba y hacia abajo en una cantidad de 0.5. En la figura 3 se muestra la recta tangente $y = (7 + x)/4$ que interseca la curva superior $y = \sqrt{x+3} + 0.5$ en P y en Q. Al hacer un acercamiento y usar el cursor, en la computadora estimamos que la coordenada x de P se aproxima a -2.66, y la coordenada x de Q es más o menos 8.66. Así, con base en la gráfica, la aproximación

$$\sqrt{x+3} \approx \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$$

es exacta con una diferencia menor que 0.5 cuando $-2.6 < x < 8.6$. (Se ha redondeado para quedar dentro del margen de seguridad).

De manera análoga, en la figura 4 vemos que la aproximación es exacta con una diferencia menor que 0.1 cuando $-1.1 < x < 3.9$.

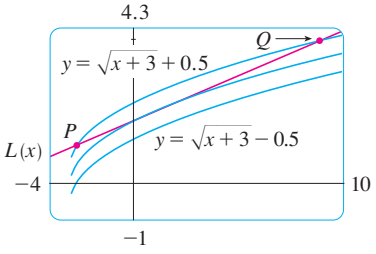


FIGURA 3

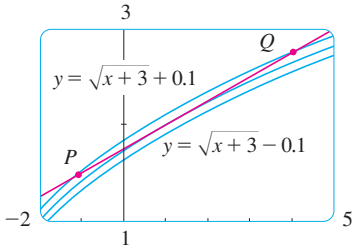


FIGURA 4

Aplicaciones en la física

Las aproximaciones lineales se usan con frecuencia en la física. Al analizar las consecuencias de una ecuación, a veces un físico necesita simplificar una función sustituyéndola con una aproximación lineal. Por ejemplo, al derivar una fórmula para el periodo de un péndulo, los libros de texto de física obtienen la expresión $a_T = -g \operatorname{sen} \theta$ para la aceleración tangencial, y luego sustituyen $\operatorname{sen} \theta$ por θ haciendo la observación de que $\operatorname{sen} \theta$ está muy cerca de θ si éste no es demasiado grande. [Véase, por ejemplo, *Physics: Calculus*, 2a. edición, por Eugene Hecht (Pacific Grove, CA: Brooks/Cole, 2000), p. 431.] Podemos comprobar que la linealización de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $a = 0$ es $L(x) = x$, de manera que la aproximación lineal en 0 es

$$\operatorname{sen} x \approx x$$

(véase el ejercicio 42). Así que, en efecto, la derivación de la fórmula para el periodo de un péndulo utiliza la aproximación a la recta tangente para la función seno.

Otro ejemplo se presenta en la teoría de la óptica, donde los rayos de luz que llegan con ángulos bajos en relación con el eje óptico se llaman *rayos paraxiales*. En la óptica paraxial (o gaussiana) tanto $\operatorname{sen} \theta$ como $\cos \theta$ se sustituyen con sus linealizaciones. En otras palabras, las aproximaciones lineales

$$\operatorname{sen} \theta \approx \theta \qquad \text{y} \qquad \cos \theta \approx 1$$

se utilizan porque θ está cerca de 0. Los resultados de los cálculos que se efectúan con estas aproximaciones se convierten en la herramienta teórica básica que se utiliza para diseñar lentes. [Véase *Optics*, 4a. edición, por Eugene Hecht (San Francisco: Addison Wesley, 2002), p. 154.]

En la sección 11.11 aparecen varias aplicaciones de la idea de aproximación lineal a la física.

Diferenciales

Las ideas detrás de las aproximaciones lineales se formulan en ocasiones en la terminología y la notación de *diferenciales*. Si $y = f(x)$, donde f es una función derivable, entonces la **diferencial** dx es una variable independiente; esto es, dx es cualquier número real. La **diferencial** dy es entonces definida en términos de dx mediante la ecuación

$$dy = f'(x)dx \tag{3}$$

Así que dy es una variable dependiente: depende de los valores de x y dx. Si a dx se le da un valor específico, y x se considera como algún número específico en el dominio de f, entonces se determina el valor numérico de dy.

Si $dx \neq 0$, podemos dividir ambos lados de la ecuación 3 entre dx para obtener

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Antes hemos visto ecuaciones similares, pero ahora el lado izquierdo puede interpretarse en forma genuina como una razón de diferenciales.

En la figura 5 se muestra el significado geométrico de los diferenciales. Sean $P(x, f(x))$ y $Q(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ puntos sobre la gráfica de f, y sea $dx = \Delta x$. El cambio correspondiente en y es

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

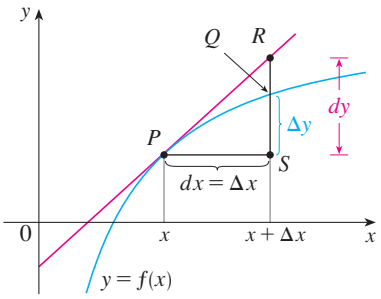


FIGURA 5

La pendiente de la recta tangente PR es la derivada $f'(x)$. Por consiguiente, la distancia dirigida de S a R es $f'(x)dx = dy$. Por tanto, dy representa la cantidad que la recta tangente se levanta o cae (el cambio en la linealización), mientras que Δy representa la cantidad que la curva $y = f(x)$ se levanta o cae cuando x cambia en una cantidad dx.

EJEMPLO 3 Compare los valores de Δy y dy si $y = f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 1$ y x cambia a) de 2 a 2.05 y b) de 2 a 2.01.

SOLUCIÓN

a) Tenemos que

$$f(2) = 2^3 + 2^2 - 2(2) + 1 = 9$$

$$f(2.05) = (2.05)^3 + (2.05)^2 - 2(2.05) + 1 = 9.717625$$

$$\Delta y = f(2.05) - f(2) = 0.717625$$

En general,
$$dy = f'(x)\,dx = (3x^2 + 2x - 2)\,dx$$

Cuando $x = 2$ y $dx = \Delta x = 0.05$, esto se transforma en

$$dy = [3(2)^2 + 2(2) - 2]0.05 = 0.7$$

b)
$$f(2.01) = (2.01)^3 + (2.01)^2 - 2(2.01) + 1 = 9.140701$$

$$\Delta y = f(2.01) - f(2) = 0.140701$$

Cuando $dx = \Delta x = 0.01$,

$$dy = [3(2)^2 + 2(2) - 2]\,0.01 = 0.14$$

La figura 6 muestra la función del ejemplo 3 y una comparación de dy y Δy cuando $a = 2$. El rectángulo de vista es $[1.8, 2.5]$ por $[6, 18]$.

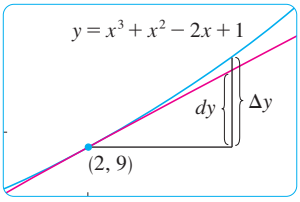


FIGURA 6

Observe que, en el ejemplo 3, la aproximación $\Delta y \approx dy$ mejora a medida que Δx se hace más pequeña. Observe también que es más fácil calcular dy que Δy. En el caso de funciones más complicadas, sería imposible calcular exactamente Δy. En estos casos, la aproximación mediante diferenciales es especialmente útil.

En la notación de diferenciales, la aproximación lineal 1 puede escribirse como

$$f(a + dx) \approx f(a) + dy$$

Por ejemplo, para la función $f(x) = \sqrt{x + 3}$ del ejemplo 1, tenemos que

$$dy = f'(x)\,dx = \frac{dx}{2\sqrt{x + 3}}$$

Si $a = 1$ y $dx = \Delta x = 0.05$, entonces

$$dy = \frac{0.05}{2\sqrt{1 + 3}} = 0.0125$$

y

$$\sqrt{4.05} = f(1.05) \approx f(1) + dy = 2.0125$$

igual a lo que halló en el ejemplo 1.

Nuestro ejemplo final ilustra el uso de diferenciales al estimar los errores que ocurren debido a mediciones aproximadas.

V EJEMPLO 4 Se midió el radio de una esfera y se encontró que es 21 cm con un posible error en la medición de cuanto mucho 0.05 cm. ¿Cuál es el error máximo al usar este valor del radio para calcular el volumen de la esfera?

SOLUCIÓN Si el radio de la esfera es r, entonces el volumen es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Si el error en el valor medido de r se denota por medio de $dr = \Delta r$, entonces el error correspondiente en el valor calculado de V es ΔV, el cual puede aproximarse mediante el diferencial

$$dV = 4\pi r^2\,dr$$

Cuando $r = 21$ y $dr = 0.05$, esto se convierte en

$$dV = 4\pi(21)^2\,0.05 \approx 277$$

El error máximo en el volumen calculado es de alrededor de $277\,\text{cm}^3$.

NOTA Si bien el posible error en el ejemplo 4 puede parecer bastante grande, el **error relativo** ofrece un mejor panorama del error; se calcula dividiendo el error entre el volumen total:

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} = \frac{4\pi r^2\,dr}{\frac{4}{3}\pi r^3} = 3\,\frac{dr}{r}$$

Por esto, el error relativo en el volumen es aproximadamente tres veces el error relativo en el radio. En el ejemplo 4, el error relativo en el radio es $dr/r = 0.05/21 \approx 0.0024$ y produce un error relativo de alrededor de 0.007 en el volumen. Los errores pueden expresarse asimismo como **errores de porcentaje** de 0.24% en el radio y 0.7% en el volumen.

3.10 Ejercicios

1-4 Encuentre la linealización $L(x)$ de cada una de las siguientes funciones en $x = a$.

1. $f(x) = x^4 + 3x^2, \quad a = -1$

2. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad a = \pi/6$

3. $f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 4$

4. $f(x) = x^{3/4}, \quad a = 16$

5. Encuentre la aproximación lineal a la función $f(x) = \sqrt{1 - x}$ en $a = 0$ y úsela para hacer una aproximación a los números $\sqrt{0.9}$ y $\sqrt{0.99}$. Ilustre graficando f y la recta tangente.

6. Encuentre la aproximación lineal de la función $g(x) = \sqrt[3]{1 + x}$ en $a = 0$ y utilícela para hacer una aproximación a los números $\sqrt[3]{0.95}$ y $\sqrt[3]{1.1}$. Ilustre graficando g y la recta tangente.

7-10 Compruebe la aproximación lineal dada en $a = 0$. A continuación determine los valores de x para los cuales la aproximación lineal es exacta hasta un valor menor que 0.1.

7. $\ln(1 + x) \approx x$

8. $(1 + x)^{-3} \approx 1 - 3x$

9. $\sqrt[4]{1 + 2x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$

10. $e^x \cos x \approx 1 + x$

11-14 Obtenga la derivada de cada una de las siguientes funciones.

11. a) $y = x^2 \operatorname{sen} 2x$ b) $y = \ln\sqrt{1 + t^2}$

12. a) $y = s/(1 + 2s)$ b) $y = e^{-u}\cos u$

13. a) $y = \tan\sqrt{t}$ b) $y = \dfrac{1 - v^2}{1 + v^2}$

14. a) $y = e^{\tan \pi t}$ b) $y = \sqrt{1 + \ln z}$

15-18 a) Encuentre la diferencial dy y b) evalúe dy para los valores dados de x y dx en cada una de las siguientes funciones.

15. $y = e^{x/10}, \quad x = 0, \quad dx = 0.1$

16. $y = \cos \pi x, \quad x = \frac{1}{3}, \quad dx = -0.02$

17. $y = \sqrt{3 + x^2}, \quad x = 1, \quad dx = -0.1$

18. $y = \dfrac{x + 1}{x - 1}, \quad x = 2, \quad dx = 0.05$

19-22 Calcule Δy y dy para los valores dados de x y $dx = \Delta x$. Luego elabore un diagrama como el de la figura 5 en el que se muestren los segmentos de recta con longitudes dx, dy y Δy.

19. $y = 2x - x^2, \quad x = 2, \quad \Delta x = -0.4$

20. $y = \sqrt{x}, \quad x = 1, \quad \Delta x = 1$

21. $y = 2/x, \quad x = 4, \quad \Delta x = 1$

22. $y = e^x, \quad x = 0, \quad \Delta x = 0.5$

23-28 Utilice la aproximación lineal (o diferenciales) para estimar cada uno de los siguientes números dados.

23. $(1.999)^4$

24. $e^{-0.015}$

25. $\sqrt[3]{1\,001}$

26. $1/4.002$

27. $\tan 44°$

28. $\sqrt{99.8}$

29-31 Explique, en términos de aproximaciones lineales o diferenciales, por qué es razonable la aproximación de cada uno de los siguientes números.

29. $\sec 0.08 \approx 1$

30. $(1.01)^6 \approx 1.06$

31. $\ln 1.05 \approx 0.05$

32. Sean $f(x) = (x - 1)^2$ $g(x) = e^{-2x}$ y $h(x) = 1 + \ln(1 - 2x)$

a) Encuentre la linealización de f, g y h en $a = 0$. ¿Qué observa? ¿Cómo explica lo que sucedió?

b) Grafique f, g y h y su aproximación lineal. ¿Para cuál función es mejor la aproximación lineal? ¿Para cuál es peor? Explique.

33. Se encontró que la arista de un cubo es 30 cm, con un posible error en la medición de 0.1 cm. Utilice diferenciales para estimar el error máximo posible, el error relativo y el porcentaje de error al calcular a) el volumen del cubo y b) el área superficial del cubo.

34. Se da el radio de un disco circular como de 24 cm, con un error máximo en la medición de 0.2 cm.

a) Utilice diferenciales para estimar el error máximo en el área calculada del disco.

b) ¿Cuál es el error relativo? ¿Cuál es el porcentaje de error?

35. La circunferencia de una esfera se midió como 84 cm, con un posible error de 0.5 cm.

a) Use diferenciales para estimar el error máximo en el área superficial calculada. ¿Cuál es el error relativo?

b) Utilice diferenciales para estimar el error máximo en el volumen calculado. ¿Cuál es el error relativo?

36. Utilice diferenciales para estimar la cantidad de pintura necesaria para aplicar una mano de 0.05 cm de espesor a un domo hemisférico que tiene un diámetro de 50 m.

37. a) Utilice diferenciales para determinar una fórmula para el volumen aproximado de un cascarón cilíndrico de altura h, radio interno r y espesor Δr.

b) ¿Cuál es el error que hay al utilizar la fórmula del inciso a)?

38. Se sabe que un lado de un triángulo rectángulo es de 20 cm de longitud, y se mide el ángulo opuesto como 30°, con un posible error de $\pm 1°$.

a) Utilice diferenciales para estimar el error al calcular la longitud de la hipotenusa.

b) ¿Cuál es el porcentaje de error?

39. Si una corriente I pasa a través de un resistor con resistencia R, la ley de Ohm establece que la caída de voltaje es $V = RI$. Si V es constante y R se mide con un cierto error, utilice diferenciales para demostrar que el cálculo de I es aproximadamente el mismo (en magnitud) que el error relativo en R.

40. Cuando la sangre fluye por un vaso sanguíneo, el flujo F (el volumen de sangre por unidad de tiempo que corre por un punto dado) es proporcional a la cuarta potencia del radio R de ese vaso:

$$F = kR^4$$

(Ésta se conoce como ley de Poiseuille; en la sección 8.4 se muestra el porqué es verdadera.) Una arteria parcialmente obstruida puede expandirse por medio de una operación llamada angioplastia, en la cual un catéter provisto de un globo en la punta se infla dentro del vaso a fin de ensancharlo y restituir el flujo sanguíneo normal.

Demuestre que el cambio relativo en F es alrededor de cuatro veces el cambio relativo en R. ¿Cómo afectará un aumento de 5% en el radio al flujo de sangre?

41. Establezca las reglas siguientes para trabajar con diferenciales (donde c es una constante y u y v son funciones de x).

a) $dc = 0$ b) $d(cu) = c\,du$

c) $d(u + v) = du + dv$ d) $d(uv) = u\,dv + v\,du$

e) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}$ f) $d(x^n) = nx^{n-1}\,dx$

42. En la página 431 de *Physics: Calculus*, 2a. edición, por Eugene Hecht (Pacific Grove, CA: Brooks/Cole, 2000), al derivar la fórmula $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ para el periodo de un péndulo de longitud L, el autor obtiene la ecuación $a_T = -g \operatorname{sen}\theta$ para la aceleración tangencial del breve movimiento del péndulo. Luego dice "para ángulos pequeños, el valor de θ en radianes está muy cerca del valor de sen θ; difieren menos que 2% hasta alrededor de 20°".

a) Compruebe la aproximación lineal en θ para la función seno:

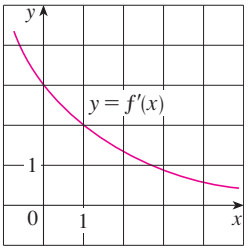
$$\operatorname{sen} x \approx x$$

b) Utilice un dispositivo graficador para determinar los valores de x para los cuales sen x y x difieren menos de 2%. Enseguida compruebe la afirmación de Hecht convirtiendo de radianes a grados.

43. Suponga que la única información acerca de una función f es que $f(1) = 5$ y la gráfica de su *derivada* es como se muestra.

a) Use una aproximación lineal para estimar $f(0.9)$ y $f(1.1)$.

b) ¿Sus estimaciones para el inciso a) son demasiado grandes o demasiado pequeñas? Explique.



44. Suponga que no tiene una fórmula para $g(x)$, pero sabe que $g(2) = -4$ y $g'(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ para toda x.

a) Use una aproximación lineal para estimar $g(1.95)$ y $g(2.05)$.

b) ¿Sus estimaciones para el inciso a) son demasiado grandes o demasiado pequeñas? Explique.

PROYECTO DE LABORATORIO POLINOMIOS DE TAYLOR

La aproximación por medio de una recta tangente de $L(x)$ es la mejor aproximación de primer grado (lineal) a $f(x)$ cerca de $x = a$ porque $f(x)$ y $L(x)$ tienen la misma razón de cambio (derivada) en $x = a$. Para tener una mejor aproximación que una lineal, intentemos una aproximación de segundo grado (cuadrática) $P(x)$. En otras palabras, aproximemos una curva mediante una parábola, en lugar de utilizar una recta. Para tener la seguridad de que la aproximación es buena, establecemos lo siguiente:

i) $P(a) = f(a)$ (P y f deben tener el mismo valor en $x = a$.)

ii) $P'(a) = f'(a)$ (P y f deben tener la misma razón de cambio en $x = a$.)

iii) $P''(a) = f''(a)$ (Las pendientes de P y f deben tener la misma razón de cambio en $x = a$.)

1. Encuentre la aproximación cuadrática $P(x) = A + Bx + Cx^2$ para la función $f(x) = \cos x$, que satisfaga las condiciones i), ii) y iii), con $a = 0$. Grafique P, f y la aproximación lineal $L(x) = 1$ en una pantalla común. Comente qué tan bien las funciones P y L se aproximan a f.

2. Determine los valores de x para los que la aproximación cuadrática $f(x) \approx P(x)$ del problema 1 es exacta con una diferencia menor que 0.1. [*Sugerencia:* grafique $y = P(x)$, $y = \cos x - 0.1$ y $y = \cos x + 0.1$ en una pantalla común.]

Se requiere calculadora graficadora o computadora

3. Para obtener una aproximación de una función f mediante una función cuadrática P cerca de un número $x = a$, lo mejor es escribir P en la forma

$$P(x) = A + B(x - a) + C(x - a)^2$$

Demuestre que la función cuadrática que satisface las condiciones i), ii) y iii) es

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \tfrac{1}{2}f''(a)(x - a)^2$$

4. Encuentre la aproximación para $f(x) = \sqrt{x + 3}$ cerca de $a = 1$. Trace las gráficas de f, la aproximación cuadrática y la aproximación lineal del ejemplo 2 de la sección 3.10 en una pantalla común. ¿Qué podría concluir?

5. En lugar de quedar conforme con una aproximación lineal o con una cuadrática para $f(x)$, cerca de $x = a$, intente hallar mejores aproximaciones con polinomios de grado más alto. Busque un polinomio de n-ésimo grado

$$T_n(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + \cdots + c_n(x - a)^n$$

tal que T_n y sus n primeras derivadas tengan los mismos valores en $x = a$ como f y sus n primeras derivadas. Derive repetidas veces y haga $x = a$ para demostrar que estas condiciones se satisfacen si $c_0 = f(a)$, $c_1 = f'(a)$, $c_2 = \frac{1}{2}f''(a)$ y, en general,

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

donde $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot k$. El polinomio resultante

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

Se llama **polinomio de Taylor de n-ésimo grado de f centrado en $x = a$**.

6. Encuentre el polinomio de Taylor de octavo grado, centrado en $a = 0$, para la función $f(x) = \cos x$. Grafique f junto con los polinomios de Taylor T_2, T_4, T_6 y T_8, en rectángulos de vista $[-5, 5]$ por $[-1.4, 1.4]$ y comente qué tan bien se aproximan a f.

3.11 Funciones hiperbólicas

Ciertas combinaciones pares e impares de las funciones exponenciales e^x y e^{-x} surgen tan a menudo en las matemáticas y sus aplicaciones que merecen recibir un nombre especial. En muchos aspectos son similares a las funciones trigonométricas y tienen la misma relación con la hipérbola que las funciones trigonométricas tienen con la circunferencia. Por esta razón, se les llama en forma colectiva **funciones hiperbólicas**, y de manera individual se les conoce como **seno hiperbólico**, **coseno hiperbólico**, y así sucesivamente

Definición de las funciones hiperbólicas

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$$

$$\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}$$

Las gráficas del seno hiperbólico y del coseno hiperbólico pueden trazarse mediante la suma gráfica como en las figuras 1 y 2.

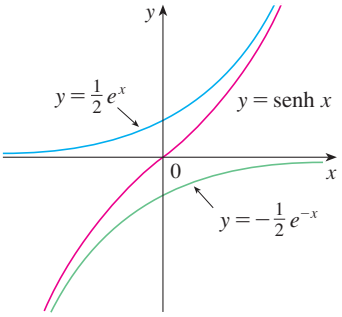


FIGURA 1
$y = \operatorname{senh} x = \frac{1}{2}e^{x} - \frac{1}{2}e^{-x}$

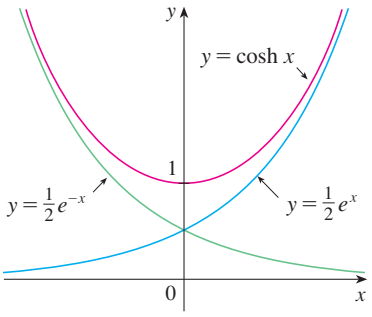


FIGURA 2
$y = \cosh x = \frac{1}{2}e^{x} + \frac{1}{2}e^{-x}$

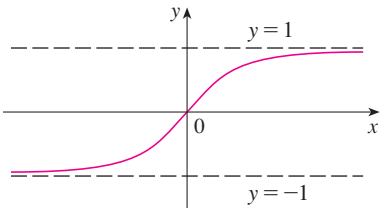


FIGURA 3
$y = \tanh x$

Observe que el dominio de senh es $\mathbb{R}$, y el rango es $\mathbb{R}$, pero que cosh tiene por dominio $\mathbb{R}$ y rango $[1, \infty)$. En la figura 3 se muestra la gráfica de tanh, con sus asíntotas horizontales $y = \pm 1$. (Véase el ejercicio 23.)

Algunos de los usos matemáticos de las funciones hiperbólicas se tratan en el capítulo 7. Las aplicaciones en la ciencia y la ingeniería se tienen siempre que una entidad física como la luz, velocidad, electricidad o la radiactividad, se absorbe o se extingue en forma gradual, puesto que el decaimiento puede representarse mediante funciones hiperbólicas. La aplicación más famosa es el uso del coseno hiperbólico para describir la forma de un cable colgante. Puede demostrarse que si un cable pesado y flexible (como los que se usan para las líneas telefónicas o eléctricas) se tiende entre dos puntos a la misma altura, entonces el cable toma la forma de una curva con ecuación $y = c + a\cosh(x/a)$ que se denomina *catenaria* (véase la figura 4). (Esta palabra proviene de la palabra latina *catena* que significa "cadena".)

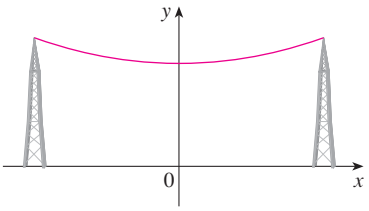


FIGURA 4
Catenaria $y = c + a\cosh(x/a)$

Otras aplicaciones de las funciones hiperbólicas aparecen en la descripción de las olas del mar: la velocidad de una ola con longitud L que se mueve a través de un cuerpo de agua con profundidad d se modela por la función

$$v = \sqrt{\frac{gL}{2\pi}\tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)}$$

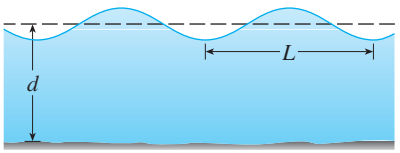


FIGURA 5
Ola oceánica idealizada

donde g es la aceleración debida a la gravedad (véanse la figura 5 y el ejercicio 49).

Las funciones hiperbólicas satisfacen un número de identidades que son similares a las muy bien conocidas identidades trigonométricas. A continuación se enlistan algunas de ellas, y la mayoría de las demostraciones se deja para los ejercicios.

Identidades hiperbólicas

$$\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x \qquad \cosh(-x) = \cosh x$$

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1 \qquad 1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$$

$$\operatorname{senh}(x + y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$$

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$$



© 2006 Getty Images

El arco Gateway en St. Louis se diseñó utilizando una función coseno hiperbólico (ejercicio 48).

V EJEMPLO 1 Demuestre que a) $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$ y b) $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$.

SOLUCIÓN

a) $$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

b) Empecemos con la identidad demostrada en el inciso (a):

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$$

Si dividimos los dos lados por $\cosh^2 x$, obtenemos

$$1 - \frac{\operatorname{senh}^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

o bien $$1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$$

La identidad demostrada en el ejemplo 1a) proporciona una pista sobre el nombre de funciones "hiperbólicas".

Si t es cualquier número real, entonces el punto $P(\cos t, \operatorname{sen} t)$ queda sobre la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$ porque $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$. De hecho, t puede interpretarse como la medida en radianes de $\angle POQ$ de la figura 6. Ésta es la razón por la que las funciones trigonométricas se denominan algunas veces funciones *circulares*.

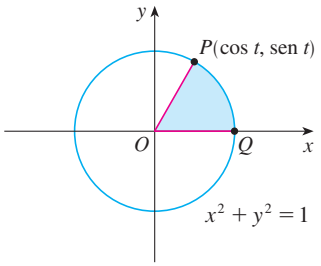


FIGURA 6

De manera similar, si t es cualquier número real, entonces el punto $P(\cosh t, \operatorname{senh} t)$ queda en la rama derecha de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ porque $\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1$ y $\cosh t \geqslant 1$. Pero ahora t no representa la medida de un ángulo. Resulta que t representa el doble del área del sector hiperbólico sombreado de la figura 7, de la misma manera que en el caso trigonométrico t representa el doble del área del sector circular sombreado en la figura 6.

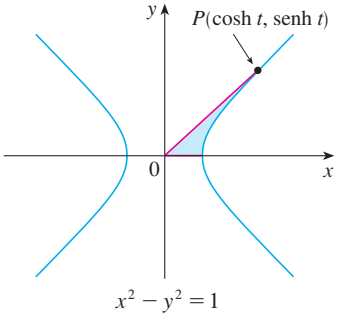


FIGURA 7

Las derivadas de las funciones hiperbólicas son fáciles de calcular. Por ejemplo,

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

En la tabla 1 siguiente se da una lista de las fórmulas de derivación de las funciones hiperbólicas. El resto de las demostraciones se dejan como ejercicios. Observe la similitud con las fórmulas de derivación de las funciones trigonométricas, pero advierta que los signos son diferentes en algunos casos.

1 Derivadas de las funciones hiperbólicas

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \cosh x \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{csch} x) = -\operatorname{csch} x \coth x$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh x) = \operatorname{senh} x \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \tanh x$$

$$\frac{d}{dx}(\tanh x) = \operatorname{sech}^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\coth x) = -\operatorname{csch}^2 x$$

EJEMPLO 2 Cualquiera de estas reglas de derivación puede combinarse con la regla de la cadena. Por ejemplo,

$$\frac{d}{dx}\left(\cosh\sqrt{x}\right) = \operatorname{senh}\sqrt{x}\cdot\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{\operatorname{senh}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

Funciones hiperbólicas inversas

De acuerdo con las figuras 1 y 3, senh x y tanh x son funciones uno a uno por lo que tienen funciones inversas denotadas por $\operatorname{senh}^{-1}x$ y $\tanh^{-1}x$. En la figura 2 se observa que cosh x no es uno a uno, pero que cuando queda restringida al dominio $[0, \infty)$ se transforma en uno a uno. La función coseno hiperbólico inversa se define como la inversa de esta función restringida.

2

$$\begin{aligned} y = \operatorname{senh}^{-1}x &\iff \operatorname{senh} y = x \\ y = \cosh^{-1}x &\iff \cosh y = x \quad \text{y} \quad y \geqslant 0 \\ y = \tanh^{-1}x &\iff \tanh y = x \end{aligned}$$

Las funciones hiperbólicas inversas que faltan se definen de manera similar (véase el ejercicio 28).

Las funciones $\operatorname{senh}^{-1}x$, $\cosh^{-1}x$ y $\tanh^{-1}x$ se grafican en las figuras 8, 9 y 10 con ayuda de las figuras 1, 2 y 3.

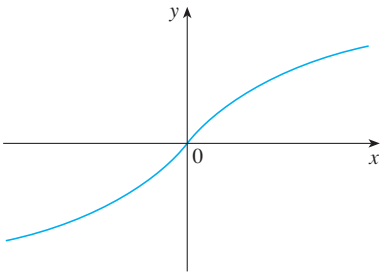


FIGURA 8 $y = \operatorname{senh}^{-1}x$
dominio $= \mathbb{R}$ rango $= \mathbb{R}$

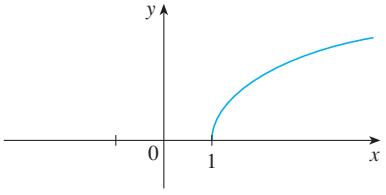


FIGURA 9 $y = \cosh^{-1}x$
dominio $= [1, \infty)$ rango $= [0, \infty)$

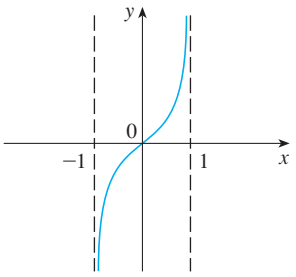


FIGURA 10 $y = \tanh^{-1}x$
dominio $= (-1, 1)$ rango $= \mathbb{R}$

Puesto que las funciones hiperbólicas se definen en términos de las funciones exponenciales, no sorprende que las funciones hiperbólicas inversas pueden expresarse en términos de logaritmos. En particular, se tiene que:

La fórmula 3 se demuestra en el ejemplo 3. En los ejercicios 26 y 27 se piden las demostraciones de las fórmulas 4 y 5.

3 $$\operatorname{senh}^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \qquad x \in \mathbb{R}$$

4 $$\cosh^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \qquad x \geqslant 1$$

5 $$\tanh^{-1}x = \tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) \qquad -1 < x < 1$$

EJEMPLO 3 Demuestre que $\operatorname{senh}^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$.

SOLUCIÓN Sea $y = \operatorname{senh}^{-1}x$. En tal caso

$$x = \operatorname{senh} y = \frac{e^{y} - e^{-y}}{2}$$

por lo que $$e^y - 2x - e^{-y} = 0$$

o bien, si multiplicamos por e^y,

$$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$$

Esto es ni más ni menos que una ecuación cuadrática en e^y:

$$(e^y)^2 - 2x(e^y) - 1 = 0$$

Al resolver la ecuación cuadrática, obtenemos

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

Observe que $e^y > 0$, pero $x - \sqrt{x^2 + 1} < 0$ (porque $x < \sqrt{x^2 + 1}$). Así que el signo menos es inadmisible, por lo que tenemos que

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

Por tanto, $$y = \ln(e^y) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

(Véase el ejercicio 25, donde se ilustra otro método.)

6 Derivadas de las funciones hiperbólicas inversas

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh}^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{csch}^{-1}x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{sech}^{-1}x) = -\frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\tanh^{-1}x) = \frac{1}{1 - x^2} \qquad \frac{d}{dx}(\coth^{-1}x) = \frac{1}{1 - x^2}$$

Observe que, al parecer, las fórmulas para las derivadas de $\tanh^{-1}x$ y $\coth^{-1}x$ son idénticas, pero los dominios de estas funciones no tienen números comunes: $\tanh^{-1}x$ se define para $|x| < 1$, mientras que $\coth^{-1}x$ se define para $|x| > 1$.

Las funciones hiperbólicas inversas son derivables porque las funciones hiperbólicas también lo son. Las fórmulas de la tabla 6 pueden demostrarse por el método de las funciones inversas o mediante la derivación de las fórmulas 3, 4 y 5.

V EJEMPLO 4 Demuestre que $\frac{d}{dx}(\operatorname{senh}^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$.

SOLUCIÓN 1 Sea $y = \operatorname{senh}^{-1}x$. Entonces $\operatorname{senh} y = x$. Si se deriva esta ecuación en forma implícita respecto a x, obtenemos

$$\cosh y \frac{dy}{dx} = 1$$

Puesto que $\cosh^2 y - \operatorname{senh}^2 y = 1$ y $\cosh y \geqslant 0$, se tiene $\cosh y = \sqrt{1 + \operatorname{senh}^2 y}$, de modo que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{senh}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

SOLUCIÓN 2 De acuerdo con la ecuación 3 (demostrada en el ejemplo 3) se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\operatorname{senh}^{-1}x) &= \frac{d}{dx}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\frac{d}{dx}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\\ &= \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\sqrt{x^2+1}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\end{aligned}$$

V EJEMPLO 5 Determine $\dfrac{d}{dx}\left[\tanh^{-1}(\operatorname{sen} x)\right]$.

SOLUCIÓN Con la ayuda de la tabla 6 y de la regla de la cadena, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[\tanh^{-1}(\operatorname{sen} x)\right] &= \frac{1}{1-(\operatorname{sen} x)^2}\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x)\\ &= \frac{1}{1-\operatorname{sen}^2 x}\cos x = \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \sec x\end{aligned}$$

3.11 Ejercicios

1-6 Calcule el valor numérico de las siguientes expresiones.

1. a) senh 0 b) cosh 0

2. a) tanh 0 b) tanh 1

3. a) senh(ln 2) b) senh 2

4. a) cosh 3 b) cosh(ln 3)

5. a) sech 0 b) $\cosh^{-1} 1$

6. a) senh 1 b) $\operatorname{senh}^{-1} 1$

7-19 Demuestre las siguientes identidades.

7. $\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x$
(Esto demuestra que senh x es una función impar.)

8. $\cosh(-x) = \cosh x$
(Esto demuestra que cosh x es una función par.)

9. $\cosh x + \operatorname{senh} x = e^x$

10. $\cosh x - \operatorname{senh} x = e^{-x}$

11. $\operatorname{senh}(x+y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$

12. $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$

13. $\coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x$

14. $\tanh(x+y) = \dfrac{\tanh x + \tanh y}{1+\tanh x \tanh y}$

15. $\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$

16. $\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$

17. $\tanh(\ln x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

18. $\dfrac{1+\tanh x}{1-\tanh x} = e^{2x}$

19. $(\cosh x + \operatorname{senh} x)^n = \cosh nx + \operatorname{senh} nx$ (para cualquier número real n).

20. Si $\tanh x = \frac{12}{13}$, calcule los valores de las otras funciones hiperbólicas en x.

21. Si $\cosh x = \frac{5}{3}$ y $x > 0$, calcule los valores de las otras funciones hiperbólicas en x.

22. a) Utilice las gráficas de senh x, cosh x y tanh x de las figuras 1 a 3 para dibujar las gráficas de csch x, sech x y coth x.

b) Verifique las gráficas que trazó en el inciso a) mediante una calculadora graficadora o una computadora.

23. Utilice las definiciones de las funciones hiperbólicas para determinar cada uno de los límites siguientes.

a) $\lim_{x\to\infty} \tanh x$ b) $\lim_{x\to-\infty} \tanh x$

c) $\lim_{x\to\infty} \operatorname{senh} x$ d) $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{senh} x$

e) $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sech} x$ f) $\lim_{x\to\infty} \coth x$

g) $\lim_{x\to0^+} \coth x$ h) $\lim_{x\to0^-} \coth x$

i) $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{csch} x$

24. Demuestre las fórmulas dadas en la tabla 1 para las derivadas de las funciones a) $\cosh x$, b) $\tanh x$, c) $\operatorname{csch} x$, d) $\operatorname{sech} x$ e) $\coth x$.

25. Encuentre una solución alternativa para el ejemplo 3 haciendo $y = \operatorname{senh}^{-1}x$ y luego usando el ejercicio 9 y el ejemplo 1a) en donde y reemplaza a x.

26. Demuestre la ecuación 4.

27. Demuestre la ecuación 5 utilizando a) el método del ejemplo 3 y b) el ejercicio 18 en donde y reemplaza a x.

28. Para cada una de las funciones siguientes i) proporcione una definición como la de [2], ii) trace la gráfica y encuentre una fórmula similar a la ecuación 3.

a) $\operatorname{csch}^{-1}x$ b) $\operatorname{sech}^{-1}x$ c) $\coth^{-1}x$

29. Demuestre las fórmulas dadas en la tabla 6 para las derivadas de las funciones siguientes.

a) $\cosh^{-1}x$ b) $\tanh^{-1}x$ c) $\operatorname{csch}^{-1}x$

d) $\operatorname{sech}^{-1}x$ e) $\coth^{-1}x$

30-45 Encuentre la derivada de cada una de las siguientes funciones y simplifique tanto como sea posible.

30. $f(x) = \tanh(1 + e^{2x})$

31. $f(x) = x \operatorname{senh} x - \cosh x$

32. $g(x) = \cosh(\ln x)$

33. $h(x) = \ln(\cosh x)$

34. $y = x \coth(1 + x^2)$

35. $y = e^{\cosh 3x}$

36. $f(t) = \operatorname{csch} t(1 - \ln \operatorname{csch} t)$

37. $f(t) = \operatorname{sech}^2(e^t)$

38. $y = \operatorname{senh}(\cosh x)$

39. $G(x) = \dfrac{1 - \cosh x}{1 + \cosh x}$

40. $y = \operatorname{senh}^{-1}(\tan x)$

41. $y = \cosh^{-1}\sqrt{x}$

42. $y = x \tanh^{-1}x + \ln\sqrt{1 - x^2}$

43. $y = x \operatorname{senh}^{-1}(x/3) - \sqrt{9 + x^2}$

44. $y = \operatorname{sech}^{-1}(e^{-x})$

45. $y = \coth^{-1}(\sec x)$

46. Demuestre que $\dfrac{d}{dx}\sqrt[4]{\dfrac{1 + \tanh x}{1 - \tanh x}} = \frac{1}{2}e^{x/2}$

47. Demuestre que $\dfrac{d}{dx}\arctan(\tanh x) = \operatorname{sech} 2x$.

48. El arco Gateway en St. Louis fue diseñado por Eero Saarinen y construido empleando la ecuación

$$y = 211.49 - 20.96 \cosh 0.03291765x$$

para la curva central del arco, donde x y y se miden en metros y $|x| \leq 91.20$.

a) Grafique la curva central.
b) ¿Cuál es la altura del arco en su centro?
c) ¿En qué punto la altura es de 100 m?
d) ¿Cuál es la pendiente del arco en el punto del inciso c)?

49. Si las olas del mar con longitud L se mueven con velocidad v en un cuerpo de agua con profundidad d, entonces

$$v = \sqrt{\frac{gL}{2\pi}\tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)}$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad (véase la figura 5). Explique por qué la aproximación.

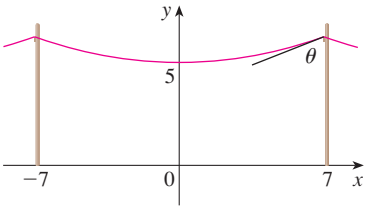
$$v \approx \sqrt{\frac{gL}{2\pi}}$$

es apropiada en aguas profundas.

50. Un cable flexible colgante siempre forma una catenaria $y = c + a\cosh(x/a)$, donde c y a son constantes y $a > 0$ (véase la figura 4 y el ejercicio 52). Grafique varios miembros de la familia de las funciones $y = a\cosh(x/a)$. ¿Cómo cambia la gráfica cuando a varía?

51. Un cable de teléfono cuelga entre dos postes que están separados entre sí 14 m y forma la catenaria $y = 20\cosh(x/20) - 15$, donde x y y se miden en metros.

a) Encuentre la pendiente de esta curva donde se encuentra con el poste derecho.
b) Calcule el ángulo θ entre el cable y el poste.



52. Mediante los principios de la física puede demostrarse que cuando un cable cuelga entre dos postes toma la forma de una curva $y = f(x)$ que satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho g}{T}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

donde ρ es la densidad lineal del cable, g es la aceleración de la gravedad y T es la tensión del cable en su punto más bajo. El sistema coordenado se elige en forma adecuada. Compruebe que la función

$$y = f(x) = \frac{T}{\rho g}\cosh\left(\frac{\rho g x}{T}\right)$$

es una solución de esta ecuación diferencial.

53. Un cable con densidad lineal $\rho = 2\,\text{kg/m}$ se sujeta desde la parte alta de dos postes que están separados 200 m.
   a) Utilice el ejercicio 52 para calcular la tensión T que hay en el cable cuando está en su punto más bajo a 60 m del suelo ¿Qué tan alto son los postes?
   b) Si se duplica la tensión, ¿cuál es el nuevo punto bajo del cable? ¿Qué tan altos son ahora los polos?

54. Evalúe $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\operatorname{senh} x}{e^x}$.

55. a) Demuestre que cualquier función de la forma

$$y = A \operatorname{senh} mx + B \cosh mx$$

satisface la ecuación diferencial $y'' = m^2 y$.
   b) Determine $y = y(x)$ tal que $y'' = 9y$, $y(0) = -4$ y $y'(0) = 6$.

56. Si $x = \ln(\sec\theta + \tan\theta)$, demuestre que $\sec\theta = \cosh x$.

57. ¿En qué punto de la curva $y = \cosh x$ la tangente tiene pendiente 1?

58. Investigue la familia de funciones

$$f_n(x) = \tanh(n \operatorname{sen} x)$$

donde n es un entero positivo. Describa qué pasa con la gráfica de f_n cuando n es muy grande.

59. Demuestre que si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces existen números α y β tales que $ae^x + be^{-x}$ es igual a $\alpha \operatorname{senh}(x + \beta)$ o a $\alpha \cosh(x + \beta)$. En otras palabras, casi toda función de la forma $f(x) = ae^x + be^{-x}$ es una función seno hiperbólico o coseno hiperbólico desplazada o estirada.

3 Repaso

Verificación de conceptos

1. Exprese cada una de las siguientes reglas de derivación, tanto en símbolos como en palabras.
   a) Regla de la potencia
   b) Regla del múltiplo constante
   c) Regla de la suma
   d) Regla de la diferencia
   e) Regla del producto
   f) Regla del cociente
   g) Regla de la cadena

2. Obtenga las derivadas de cada una de las siguientes funciones.

a) $y = x^n$	b) $y = e^x$	c) $y = a^x$
d) $y = \ln x$	e) $y = \log_a x$	f) $y = \operatorname{sen} x$
g) $y = \cos x$	h) $y = \tan x$	i) $y = \csc x$
j) $y = \sec x$	k) $y = \cot x$	l) $y = \operatorname{sen}^{-1} x$
m) $y = \cos^{-1} x$	n) $y = \tan^{-1} x$	o) $y = \operatorname{senh} x$
p) $y = \cosh x$	q) $y = \tanh x$	r) $y = \operatorname{senh}^{-1} x$
s) $y = \cosh^{-1} x$	t) $y = \tanh^{-1} x$	

3. a) ¿Cómo se define el número e?
   b) Exprese e como un límite.
   c) ¿Por qué en Cálculo se usa la función exponencial natural, $y = e^x$, con más frecuencia que las demás funciones exponenciales, $y = a^x$?
   d) ¿Por qué en Cálculo se usa la función logarítmica natural, $y = \ln x$, más que las demás funciones logarítmicas, $y = \log_a x$?

4. a) Explique cómo funciona la derivación implícita.
   b) Explique cómo funciona la derivación logarítmica.

5. Proporcione varios ejemplos de cómo la derivada puede ser interpretada como una razón de cambio en física, química, biología, economía y otras ciencias.

6. a) Escriba una ecuación diferencial que exprese la ley de crecimiento natural.
   b) ¿En qué circunstancias es éste un modelo adecuado para el crecimiento de la población?
   c) ¿Cuáles son las soluciones de esta ecuación?

7. a) Escriba una expresión para la linealización de f en $x = a$.
   b) Si $y = f(x)$, escriba una expresión para la diferencial dy.
   c) Si $dx = \Delta x$, dibuje un esquema para mostrar el significado geométrico de Δy y dy.

Exámen rápido Verdadero-Falso

Determine si la proposición es verdadera o falsa. Si es verdadera, explique por qué. Si es falsa, explique por qué o mencione un ejemplo que refute la proposición.

1. Si f y g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$$

2. Si f y g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g'(x)$$

3. Si f y g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}\big[f(g(x))\big] = f'\big(g(x)\big)g'(x)$$

4. Si f es derivable, entonces $\dfrac{d}{dx}\sqrt{f(x)} = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$.

5. Si f es derivable, entonces $\dfrac{d}{dx} f\big(\sqrt{x}\big) = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{x}}$.

6. Si $y = e^2$, entonces $y' = 2e$.

7. $\dfrac{d}{dx}(10^x) = x10^{x-1}$

8. $\dfrac{d}{dx}(\ln 10) = \dfrac{1}{10}$

9. $\dfrac{d}{dx}(\tan^2 x) = \dfrac{d}{dx}(\sec^2 x)$

10. $\dfrac{d}{dx}|x^2 + x| = |2x + 1|$

11. La derivada de una función polinomial es una función polinomial.

12. Si $f(x) = (x^6 - x^4)^5$, entonces $f^{(31)}(x) = 0$.

13. La derivada de una función racional es una función racional.

14. La ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2$ en $(-2, 4)$ es $y - 4 = 2x(x + 2)$.

15. Si $g(x) = x^5$, entonces $\lim_{x\to 2} \dfrac{g(x) - g(2)}{x - 2} = 80$.

Ejercicios

1-50 Calcule y' en cada una de las siguientes funciones.

1. $y = (x^2 + x^3)^4$

2. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$

3. $y = \dfrac{x^2 - x + 2}{\sqrt{x}}$

4. $y = \dfrac{\tan x}{1 + \cos x}$

5. $y = x^2 \operatorname{sen} \pi x$

6. $y = x \cos^{-1} x$

7. $y = \dfrac{t^4 - 1}{t^4 + 1}$

8. $xe^y = y \operatorname{sen} x$

9. $y = \ln(x \ln x)$

10. $y = e^{mx} \cos nx$

11. $y = \sqrt{x} \cos \sqrt{x}$

12. $y = (\operatorname{arcsen} 2x)^2$

13. $y = \dfrac{e^{1/x}}{x^2}$

14. $y = \ln \sec x$

15. $y + x \cos y = x^2 y$

16. $y = \left(\dfrac{u - 1}{u^2 + u + 1}\right)^4$

17. $y = \sqrt{\arctan x}$

18. $y = \cot(\csc x)$

19. $y = \tan\left(\dfrac{t}{1 + t^2}\right)$

20. $y = e^{x \sec x}$

21. $y = 3^{x \ln x}$

22. $y = \sec(1 + x^2)$

23. $y = (1 - x^{-1})^{-1}$

24. $y = 1/\sqrt[3]{x + \sqrt{x}}$

25. $\operatorname{sen}(xy) = x^2 - y$

26. $y = \sqrt{\operatorname{sen} \sqrt{x}}$

27. $y = \log_5(1 + 2x)$

28. $y = (\cos x)^x$

29. $y = \ln \operatorname{sen} x - \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 x$

30. $y = \dfrac{(x^2 + 1)^4}{(2x + 1)^3(3x - 1)^5}$

31. $y = x \tan^{-1}(4x)$

32. $y = e^{\cos x} + \cos(e^x)$

33. $y = \ln|\sec 5x + \tan 5x|$

34. $y = 10^{\tan \pi\theta}$

35. $y = \cot(3x^2 + 5)$

36. $y = \sqrt{t \ln(t^4)}$

37. $y = \operatorname{sen}(\tan \sqrt{1 + x^3})$

38. $y = \arctan(\operatorname{arcsen} \sqrt{x})$

39. $y = \tan^2(\operatorname{sen} \theta)$

40. $xe^y = y - 1$

41. $y = \dfrac{\sqrt{x + 1}\,(2 - x)^5}{(x + 3)^7}$

42. $y = \dfrac{(x + \lambda)^4}{x^4 + \lambda^4}$

43. $y = x \operatorname{senh}(x^2)$

44. $y = \dfrac{\operatorname{sen} mx}{x}$

45. $y = \ln(\cosh 3x)$

46. $y = \ln\left|\dfrac{x^2 - 4}{2x + 5}\right|$

47. $y = \cosh^{-1}(\operatorname{senh} x)$

48. $y = x \tanh^{-1}\sqrt{x}$

49. $y = \cos(e^{\sqrt{\tan 3x}})$

50. $y = \operatorname{sen}^2(\cos\sqrt{\operatorname{sen} \pi x})$

51. Si $f(t) = \sqrt{4t + 1}$, encuentre $f''(2)$.

52. Si $g(\theta) = \theta \operatorname{sen} \theta$, halle $g''(\pi/6)$.

53. Encuentre y'' si $x^6 + y^6 = 1$.

54. Determine $f^{(n)}(x)$ si $f(x) = 1/(2 - x)$.

55. Utilice inducción matemática (página 76) para demostrar que si $f(x) = xe^x$, entonces $f^{(n)}(x) = (x + n)e^x$.

56. Evalúe $\lim_{t\to 0} \dfrac{t^3}{\tan^3(2t)}$.

57-59 Encuentre la ecuación de la recta tangente a cada una de las siguientes curvas en el punto dado.

57. $y = 4 \operatorname{sen}^2 x, \quad (\pi/6, 1)$

58. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}, \quad (0, -1)$

59. $y = \sqrt{1 + 4 \operatorname{sen} x}, \quad (0, 1)$

60-61 Encuentre las ecuaciones de las rectas tangente y normal a cada una de las siguientes curvas en el punto que se especifica.

60. $x^2 + 4xy + y^2 = 13, \quad (2, 1)$

61. $y = (2 + x)e^{-x}, \quad (0, 2)$

62. Si $f(x) = xe^{\operatorname{sen} x}$, halle $f'(x)$. Grafique f y f' en la misma pantalla y haga comentarios.

63. a) Si $f(x) = x\sqrt{5 - x}$, halle $f'(x)$.
b) Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = x\sqrt{5 - x}$ en los puntos (1, 2) y (4, 4).
c) Ilustre el inciso b) graficando la curva y las rectas tangentes, en la misma pantalla.
d) Verifique si su respuesta al inciso a) es razonable comparando las gráficas de f y f'.

Se requiere calculadora graficadora o computadora

64. a) Si $f(x) = 4x - \tan x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$, encuentre f' y f''.
b) Verifique si su respuesta al inciso a) es razonable comparando las gráficas de f, f' y f''.

65. ¿En qué puntos de la curva $y = \operatorname{sen} x + \cos x$, $0 \leq x \leq 2\pi$, la tangente es una recta horizontal?

66. Encuentre los puntos sobre la elipse $x^2 + 2y^2 = 1$ donde la recta tangente tiene pendiente 1.

67. Si $f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$, demuestre que

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c}$$

68. a) Al derivar la fórmula del coseno dos veces ángulo

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

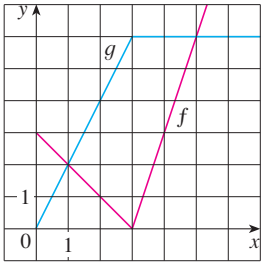
obtenga la fórmula del ángulo doble para la función seno.
b) Al derivar la fórmula de la adición

$$\operatorname{sen}(x + a) = \operatorname{sen} x \cos a + \cos x \operatorname{sen} a$$

obtenga la fórmula de la adición para la función coseno.

69. Suponga que $h(x) = f(x)g(x)$ y $F(x) = f(g(x))$, donde $f(2) = 3$, $g(2) = 5$, $g'(2) = 4$, $f'(2) = -2$ y $f'(5) = 11$. Encuentre a) $h'(2)$ y b) $F'(2)$.

70. Si f y g son las funciones cuyas gráficas se muestran, sea $P(x) = f(x)g(x)$, $Q(x) = f(x)/g(x)$ y $C(x) = f(g(x))$. Encuentre a) $P'(2)$, b) $Q'(2)$ y c) $C'(2)$.



71–78 Encuentre f' en términos de g'.

71. $f(x) = x^2 g(x)$

72. $f(x) = g(x^2)$

73. $f(x) = [g(x)]^2$

74. $f(x) = g(g(x))$

75. $f(x) = g(e^x)$

76. $f(x) = e^{g(x)}$

77. $f(x) = \ln |g(x)|$

78. $f(x) = g(\ln x)$

79–81 Halle h' en términos de f' y g'.

79. $h(x) = \dfrac{f(x)g(x)}{f(x) + g(x)}$

80. $h(x) = \sqrt{\dfrac{f(x)}{g(x)}}$

81. $h(x) = f(g(\operatorname{sen} 4x))$

82. a) Grafique la función $f(x) = x - 2 \operatorname{sen} x$ en el rectángulo de vista $[0, 8]$ por $[-2, 8]$.
b) ¿Sobre qué intervalo es más grande la razón promedio de cambio: $[1, 2]$ o $[2, 3]$?
c) ¿En qué valor de x es más grande la razón de cambio instantánea: $x = 2$ o $x = 5$?
d) Compruebe sus estimaciones visuales del inciso c) calculando $f'(x)$ y comparando los valores numéricos de $f'(2)$ y $f'(5)$.

83. ¿En qué punto sobre la curva $y = [\ln(x + 4)]^2$ es horizontal la recta tangente?

84. a) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = e^x$, que es paralela a la recta $x - 4y = 1$.
b) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = e^x$ que pase por el origen.

85. Halle la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que pasa por el punto $(1, 4)$ y cuyas rectas tangentes en $x = -1$ y $x = 5$ tienen pendientes 6 y -2, respectivamente.

86. La función $C(t) = K(e^{-at} - e^{-bt})$, donde a, b y K son constantes positivas y $b > a$, se usa para modelar la concentración en el instante t de un medicamento que se inyecta en el torrente sanguíneo.
a) Demuestre que $\lim_{t \to \infty} C(t) = 0$.
b) Encuentre $C'(t)$, la rapidez con que el medicamento se disipa durante la circulación.
c) ¿Cuándo esta rapidez es igual a 0?

87. Una ecuación de movimiento en la forma $s = Ae^{-ct}\cos(\omega t + \delta)$ representa la oscilación amortiguada de un objeto. Encuentre la velocidad y la aceleración del objeto.

88. Una partícula se desplaza a lo largo de una recta horizontal de modo que su coordenada en el instante t es $x = \sqrt{b^2 + c^2 t^2}$, $t \geq 0$, donde b y c son constantes positivas.
a) Encuentre las funciones velocidad y aceleración.
b) Demuestre que la partícula siempre se desplaza en dirección positiva.

89. Una partícula se desplaza sobre una recta vertical de manera que su ordenada en el instante t es $y = t^3 - 12t + 3$, $t \geq 0$.
a) Encuentre las funciones velocidad y aceleración.
b) ¿Cuándo se mueve hacia arriba la partícula y cuándo se mueve hacia abajo?
c) Halle la distancia recorrida por la partícula en el intervalo de tiempo $0 \leq t \leq 3$.
d) Grafique las funciones posición, velocidad y aceleración para $0 \leq t \leq 3$.
e) ¿Cuándo la partícula aumenta su rapidez? ¿Cuándo disminuye su rapidez?

90. El volumen de un cono recto circular es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, en donde r es el radio de la base y h es la altura.
a) Halle la razón de cambio del volumen respecto a la altura si el radio es constante.

b) Encuentre la razón de cambio del volumen respecto al radio si la altura es constante.

91. La masa de una parte de un alambre es $x(1 + \sqrt{x})$ kilogramos, donde x se mide en metros desde uno de los extremos del alambre. Encuentre la densidad lineal del alambre cuando $x = 4$ m.

92. El costo, en dólares, de producir x unidades de un cierto artículo es

$$C(x) = 920 + 2x - 0.02x^2 + 0.00007x^3$$

a) Encuentre la función de costo marginal.
b) Halle $C'(100)$ y explique su significado.
c) Compare $C'(100)$ con el costo de producir el artículo 101.

93. Inicialmente, un cultivo de bacterias contiene 200 células y crecen con una razón proporcional a su tamaño. Después de media hora la población se ha incrementado a 360 células.
a) Encuentre el número de bacterias después de t horas.
b) Calcule el número de bacterias después de 4 horas.
c) Encuentre la rapidez de crecimiento después de 4 horas.
d) ¿Cuándo la población alcanza 10 000?

94. El cobalto-60 tiene una vida media de 5.24 años.
a) Halle la masa que queda de una muestra de 100 mg después de 20 años.
b) ¿Cuánto tardaría la masa en decaer a 1 mg?

95. Sea $C(t)$ la concentración de un medicamento en el torrente sanguíneo. Cuando el cuerpo elimina el medicamento, $C(t)$ disminuye con una rapidez que es proporcional a la cantidad de medicamento que está presente en el tiempo t. En estos términos $C'(t) = -kC(t)$, donde k es un número positivo denominado *constante de eliminación* del medicamento.
a) Si C_0 es la concentración en el tiempo $t = 0$, halle la concentración en el tiempo t.
b) Si el cuerpo elimina la mitad del medicamento en 30 horas, ¿cuánto tiempo le toma eliminar 90% del medicamento?

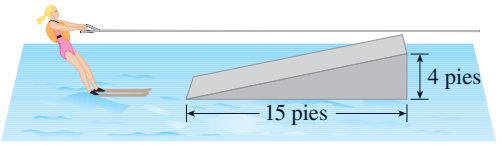
96. Una taza con chocolate caliente tiene una temperatura de 80 °C en una habitación que se mantiene en 20 °C. Después de media hora, el chocolate caliente se enfría a 60 °C.
a) ¿Cuál es la temperatura del chocolate después de otra media hora.
b) ¿Cuando se enfriara el chocolate a 40 °C?

97. El volumen de un cubo se incrementa a razón de 10 cm³/min. ¿Qué tan rápido se incrementa el área superficial cuando la longitud de un lado es de 30 cm?

98. Un vaso de papel tiene la forma de un cono de altura igual a 10 cm y radio de 3 cm (en la parte superior). Si el agua se vierte en el vaso a razón de 2 cm³/s, ¿qué tan rápido sube el nivel del agua cuando ésta tiene 5 cm de profundidad?

99. Un globo asciende con rapidez constante de 5 pies/s. Un niño va en bicicleta por un camino recto a una rapidez de 15 pies/s. Cuando pasa bajo el globo, éste se halla a 45 pies arriba de él. ¿Qué tan rápido se incrementa la distancia entre el niño y el globo 3 s más tarde?

100. Una esquiadora pasa por rampa, como la que se ilustra en la figura, con una rapidez de 30 pies/s. ¿Qué tan rápido se eleva cuando abandona la rampa?



101. El ángulo de elevación del Sol decrece a razón de 0.25 rad/h. ¿Qué tan rápido se incrementa la sombra de un edificio de 400 pies de altura cuando el ángulo de elevación del Sol es $\pi/6$?

102. a) Encuentre la aproximación lineal de $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ cerca de 3.
b) Ilustre el inciso a) graficando f y la aproximación lineal.
c) ¿Para qué valores de x es exacta la aproximación lineal dentro de 0.1?

103. a) Halle la linealización de $f(x) = \sqrt[3]{1 + 3x}$ en $a = 0$. Establezca la aproximación lineal correspondiente y utilícela para proporcionar un valor aproximado para $\sqrt[3]{1.03}$.
b) Determine los valores de x para los que la aproximación lineal dada en el inciso a) sea exacta con una diferencia menor que 0.1.

104. Evalúe dy si $y = x^3 - 2x^2 + 1$, $x = 2$ y $dx = 0.2$.

105. Una ventana tiene la forma de un cuadrado coronado por un semicírculo. La base de la ventana se mide como si tuviera un ancho de 60 cm, con un posible error de 0.1 cm. Utilice diferenciales para estimar el máximo error posible al calcular el área de la ventana.

106-108 Exprese el límite como una derivada en cada una de las siguientes funciones y evalúelo.

106. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^{17} - 1}{x - 1}$

107. $\lim_{h \to 0} \dfrac{\sqrt[4]{16 + h} - 2}{h}$

108. $\lim_{\theta \to \pi/3} \dfrac{\cos \theta - 0.5}{\theta - \pi/3}$

109. Evalúe $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \operatorname{sen} x}}{x^3}$

110. Suponga que f es una función derivable tal que $f(g(x)) = x$ y $f'(x) = 1 + [f(x)]^2$. Demuestre que $g'(x) = 1/(1 + x^2)$.

111. Encuentre $f'(x)$ si se sabe que

$$\frac{d}{dx}[f(2x)] = x^2$$

112. Demuestre que la longitud de la porción de cualquier recta tangente al astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ limitada por los ejes de coordenadas es constante.

Antes de trabajar en el ejemplo, cubra la solución e intente resolverlo primero.

EJEMPLO 1 ¿Cuántas rectas son tangentes a las dos parábolas $y = -1 - x^2$ y $y = 1 + x^2$? Calcule las coordenadas de los puntos en los cuales estas rectas tangentes tocan a las parábolas.

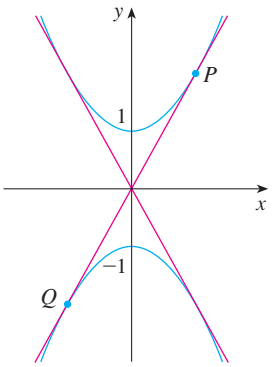


FIGURA 1

SOLUCIÓN Para entender este problema es esencial elaborar un esquema donde estén las parábolas $y = 1 + x^2$ (que es la parábola estándar $y = x^2$ desplazada una unidad hacia arriba) y $y = -1 - x^2$ (la cual se obtiene al reflejar la primera parábola respecto al eje x). Si trata de dibujar una recta tangente para ambas parábolas, pronto descubrirá que sólo hay dos posibilidades, que se ilustran en la figura 1.

Sea P un punto en el cual una de estas rectas tangentes toca la parábola superior y sea a su coordenada x. (Es muy importante elegir la notación para la incógnita. Muy bien podía haber escogido b o c o x_0 o x_1, en lugar de a. Sin embargo, no se recomienda utilizar x en lugar de a porque se podría confundir con la variable x de la ecuación de la parábola). Entonces, puesto que P está en la parábola $y = 1 + x^2$, su coordenada y debe ser $1 + a^2$. Debido a la simetría mostrada en la figura 1, las coordenadas del punto Q donde la recta tangente toca a la parábola inferior deben ser $(-a, -(1 + a^2))$.

Para usar la información de que la recta es una tangente, iguale la pendiente de la recta PQ con la pendiente de la recta tangente en P. Así, tiene que

$$m_{PQ} = \frac{1 + a^2 - (-1 - a^2)}{a - (-a)} = \frac{1 + a^2}{a}$$

Si $f(x) = 1 + x^2$, entonces la pendiente de la recta tangente en P es $f'(a) = 2a$. Por consiguiente, la condición que necesita aplicar es

$$\frac{1 + a^2}{a} = 2a$$

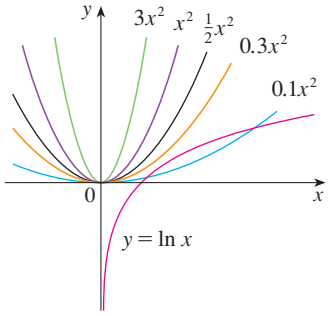


FIGURA 2

Al resolver esta ecuación, tenemos $1 + a^2 = 2a^2$, por lo que $a^2 = 1$ y $a = \pm 1$. Por tanto, los puntos son $(1, 2)$ y $(-1, -2)$. Por simetría, los dos puntos restantes son $(-1, 2)$ y $(1, -2)$.

EJEMPLO 2 ¿Para cuáles valores de c la ecuación $\ln x = cx^2$ tiene exactamente una solución?

SOLUCIÓN Uno de los principios más importantes de la solución de problemas es dibujar un diagrama, incluso si el problema, según se enuncia, no menciona en forma explícita una situación geométrica. Este problema puede formularse de nuevo en términos geométricos como sigue: ¿para cuáles valores de c la curva $y = \ln x$ intersecta la curva $y = cx^2$ exactamente en un punto?

Empiece por trazar las gráficas de $y = \ln x$ y $y = cx^2$ para diversos valores de c. Se sabe que, para $c \neq 0$, $y = cx^2$ es una parábola que se abre hacia arriba si $c > 0$ y, hacia abajo, si $c < 0$. En la figura 2 se muestran las parábolas $y = cx^2$ para varios valores positivos de c. La mayor parte no se cruzan con $y = \ln x$ y una la corta dos veces. Se tiene la sensación de que debe haber un valor de c (en alguna parte entre 0.1 y 0.3) para el cual las curvas se cruzan exactamente una vez, como en la figura 3.

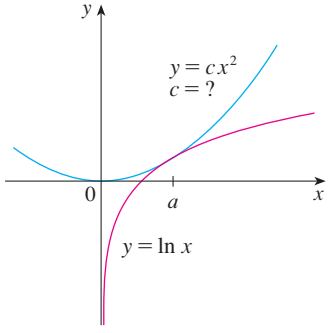


FIGURA 3

Para hallar ese valor de c en particular, denote con a la coordenada x del punto único de intersección. En otras palabras, $\ln a = ca^2$, de modo que a sea la solución única de la ecuación dada. En la figura 2 las curvas sólo se tocan, de modo que tienen una recta tangente común cuando $x = a$. Esto significa que las curvas $y = \ln x$ y $y = cx^2$ tienen la misma pendiente cuando $x = a$. Por tanto,

$$\frac{1}{a} = 2ca$$

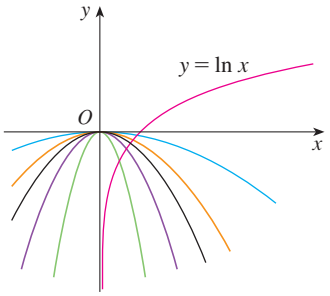


FIGURA 4

Resolviendo las ecuaciones $\ln a = ca^2$ y $1/a = 2ca$, se obtiene

$$\ln a = ca^2 = c \cdot \frac{1}{2c} = \frac{1}{2}$$

De donde, $a = e^{1/2}$ y

$$c = \frac{\ln a}{a^2} = \frac{\ln e^{1/2}}{e} = \frac{1}{2e}$$

Para los valores negativos de c, tenemos la situación que se ilustra en la figura 4: todas las parábolas $y = cx^2$ con valores negativos de c cruzan $y = \ln x$ exactamente una vez. Y no olvide lo referente a $c = 0$. La curva $y = Ox^2 = 0$ es el eje x, el cual cruza $y = \ln x$ exactamente una vez.

Para resumir, los valores requeridos de c son $c = 1/(2e)$ y $c \leq 0$.

Problemas

1. Determine los puntos P y Q sobre la parábola $y = 1 - x^2$ de modo que el triángulo ABC formado por el eje x y las rectas tangentes en P y Q sea un triángulo equilátero. (Véase la figura.)

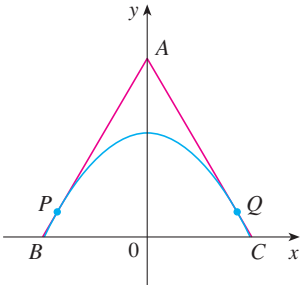


FIGURA PARA EL PROBLEMA 1

2. Determine el punto donde las curvas $y = x^3 - 3x + 4$ y $y = 3(x^2 - x)$ son tangentes entre sí; es decir, tienen una recta tangente común. Ilustre mediante la representación gráfica de ambas curvas y la recta tangente.

3. Demuestre que las rectas tangentes a la parábola $y = ax^3 + bx + c$ en cualesquier dos puntos con coordenadas x iguales a p y q se cruzan en un punto cuya coordenada x está a la mitad entre p y q.

4. Demuestre que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\operatorname{sen}^2 x}{1 + \cot x} + \frac{\cos^2 x}{1 + \tan x}\right) = -\cos 2x$$

5. Si $f(x) = \lim_{t \to x} \dfrac{\sec t - \sec x}{t - x}$, encuentre el valor de $f'(\pi/4)$.

6. Encuentre los valores de las constantes a y b tales que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{ax + b} - 2}{x} = \frac{5}{12}$$

7. Demuestre que $\operatorname{sen}^{-1}(\tanh x) = \tan^{-1}(\operatorname{senh} x)$.

Se requiere calculadora graficadora o computadora

SAC Se requiere sistema algebraico computarizado

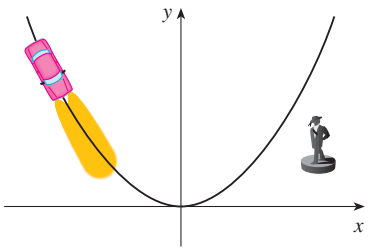


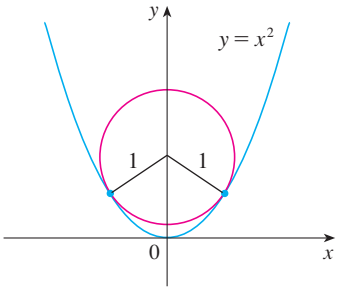
FIGURA PARA EL PROBLEMA 8

8. Un automóvil viaja por la noche por una carretera que tiene forma de parábola con vértice en el origen (véase la figura). El automóvil parte del punto 100 m al oeste y 100 m al norte del origen, y se desplaza en una dirección hacia el este. Hay una estatua localizada 100 m al este y 50 m al norte del origen. ¿En qué punto de la carretera los faros del vehículo iluminarán a la estatua?

9. Demuestre que $\dfrac{d^n}{dx^n}\,(\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x) = 4^{n-1}\cos(4x + n\pi/2)$.

10. Determine la n-ésima derivada de la función $f(x) = x^n/(1 - x)$.

11. En la figura se muestra una circunferencia con radio 1 inscrita en la parábola $y = x^2$. Encuentre el centro de la circunferencia.



12. Si f es derivable en a, donde $a > 0$, evalúe el siguiente límite en términos de $f'(a)$:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$$

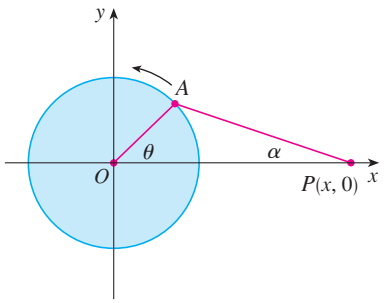


FIGURA PARA EL PROBLEMA 13

13. En la figura se muestra una rueda giratoria con radio de 40 cm y una leva AP de longitud 1.2 m. El pasador P se desliza hacia atrás y hacia adelante, a lo largo del eje x, conforme la rueda gira en sentido contrario a las manecillas del reloj, con una rapidez de 360 revoluciones por minuto.

a) Encuentre la velocidad angular de la leva, $d\alpha/dt$, en radianes por segundo, cuando $\theta = \pi/3$.

b) Exprese la distancia $x = |\,OP\,|$, en términos de θ.

c) Halle una expresión para la velocidad del pasador P, en términos de θ.

14. Se trazan las rectas tangentes T_1 y T_2 en los dos puntos P_1 y P_2 sobre la parábola $y = x^2$ y se cruzan en un punto P. Se traza otra recta tangente T en un punto entre P_1 y P_2; ésta cruza T_1 en Q_1 y T_2 en Q_2. Demuestre que

$$\frac{|PQ_1|}{|PP_1|} + \frac{|PQ_2|}{|PP_2|} = 1$$

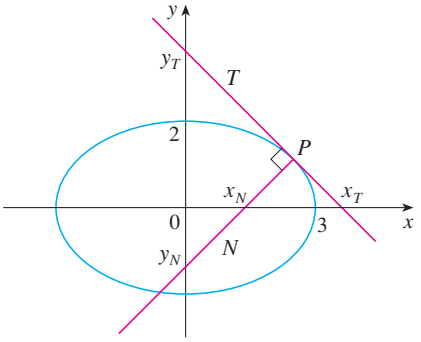
15. Demuestre que

$$\frac{d^n}{dx^n}\,(e^{ax}\operatorname{sen} bx) = r^n e^{ax}\operatorname{sen}(bx + n\theta)$$

donde a y b son números positivos, $r^2 = a^2 + b^2$, y $\theta = \tan^{-1}(b/a)$.

16. Evalúe $\lim_{x \to \pi} \dfrac{e^{\operatorname{sen} x} - 1}{x - \pi}$.

17. Sean T y N las rectas tangente y normal a la elipse $x^2/9 + y^2/4 = 1$ en cualquier punto P de ésta en el primer cuadrante. Sean x_T y y_T las intersecciones de T con los ejes x y y, y x_N y y_N las intersecciones de N. Conforme P se mueve a lo largo de la elipse en el primer cuadrante (pero no sobre los ejes), ¿qué valores pueden adoptar x_T, y_T, x_N y y_N? En primer lugar, intente intuir las respuestas con sólo mirar la figura. A continuación, utilice el Cálculo para resolver el problema y vea qué tan buena es su intuición.



18. Evalúe $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(3 + x)^2 - \operatorname{sen} 9}{x}$

19. a) Use la identidad para $\tan(x - y)$ [véase la ecuación 14b) del apéndice D] para demostrar que si dos rectas L_1 y L_2 se intersecan en un ángulo α, entonces

$$\tan \alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

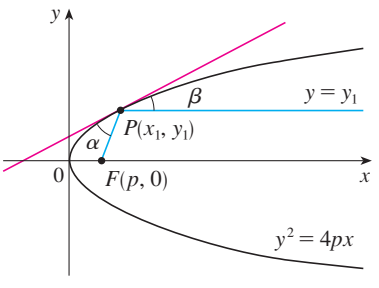
donde m_1 y m_2 son las pendientes de L_1 y L_2, respectivamente.

b) El **ángulo entre las curvas** C_1 y C_2 en un punto de intersección se define como el ángulo entre las rectas tangentes a C_1 y C_2 en P (si estas rectas tangentes existen). Use el inciso a) para hallar, correcto hasta el grado más cercano, el ángulo entre cada par de curvas en cada punto de intersección.

i) $y = x^2$ y $y = (x - 2)^2$

ii) $x^2 - y^2 = 3$ y $x^2 - 4x + y^2 + 3 = 0$

20. Sea $P(x_1, y_1)$ un punto sobre la parábola $y^2 = 4px$ con foco $F(p, 0)$. Sea α el ángulo entre la parábola y el segmento rectilíneo FP, y sea β el ángulo entre la recta horizontal $y = y_1$ y la parábola, como en la figura. Demuestre que $\alpha = \beta$. (De modo que, por un principio de óptica geométrica, la luz proveniente de una fuente colocada en F se reflejará a lo largo de una recta paralela al eje x. Esto explica por qué los *paraboloides*, las superficies que se obtienen al hacer girar las parábolas sobre sus ejes, se emplean como la forma de algunos faros delanteros de automóviles y espejos para telescopios).



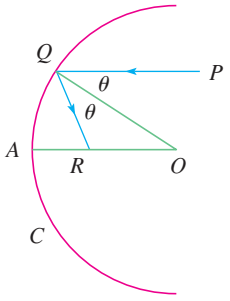


FIGURA PARA EL PROBLEMA 21

21. Suponga que remplaza el espejo parabólico que aparece en el problema 20 con un espejo esférico. Aunque el espejo no tiene foco, puede demostrar la existencia de un foco *aproximado*. En la figura, C es un semicírculo con centro O. Un rayo de luz que llega hacia el espejo paralelo al eje a lo largo de la recta PQ se reflejará hacia el punto R sobre el eje, de modo que $\angle PQO = \angle OQR$ (el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión). ¿Qué sucede con el punto R a medida que P se lleva cada vez más cerca al eje?

22. Si f y g son funciones derivables con $f(0) = g(0) = 0$ y $g'(0) \neq 0$, demuestre que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)}$$

23. Evalúe $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(a + 2x) - 2\operatorname{sen}(a + x) + \operatorname{sen} a}{x^2}$

SAC **24.** a) La función cúbica $f(x) = x(x - 2)(x - 6)$ tiene tres ceros distintos: 0, 2 y 6. Grafique f y sus rectas tangentes en el *promedio* de cada par de ceros. ¿Qué observa?

b) Suponga que la función cúbica $f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$ tiene tres ceros diferentes: a, b y c. Pruebe, con ayuda de un sistema algebraico computarizado, que una recta tangente dibujada en el promedio de los ceros a y b interseca la gráfica de f en el tercer cero.

25. ¿Para qué valor de k la ecuación $e^{2x} = k\sqrt{x}$ tiene exactamente una solución?

26. ¿Para qué números positivos a se cumple que $a^x \geq 1 + x$ para toda x?

27. Si

$$y = \frac{x}{\sqrt{a^2 - 1}} - \frac{2}{\sqrt{a^2 - 1}} \arctan \frac{\operatorname{sen} x}{a + \sqrt{a^2 - 1} + \cos x}$$

demuestre que $y' = \dfrac{1}{a + \cos x}$.

28. Dada una elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, donde $a \neq b$, encuentre la ecuación de todo el conjunto de puntos a partir de los cuales hay dos rectas tangentes a la curva cuyas pendientes son a) recíprocos y b) recíprocos negativos.

29. Encuentre los dos puntos sobre la curva $y = x^4 - 2x^2 - x$ que tienen una recta tangente en común.

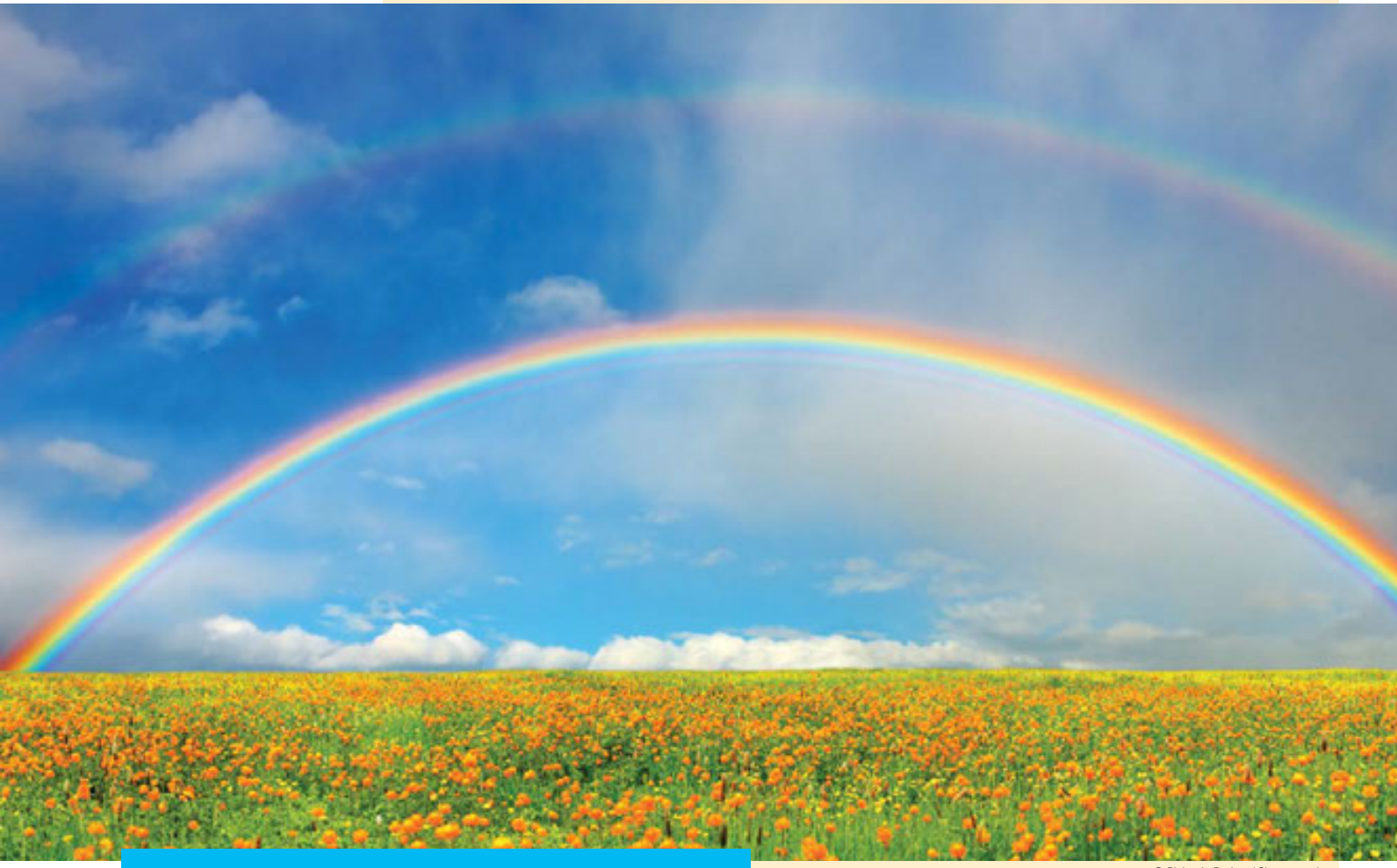
30. Suponga que tres puntos sobre la parábola $y = x^2$ tienen la propiedad de que sus rectas normales se cruzan en un punto común. Demuestre que la suma de sus coordenadas x es cero.

31. Un *punto de reticulado* sobre el plano es un punto con coordenadas enteras. Suponga que se dibujan circunferencias con radio r usando todos los puntos reticulados como centros. Encuentre el valor más pequeño de r tal que cualquier recta con pendiente $\frac{2}{5}$ cruce alguna de estas circunferencias.

32. Un cono de radio r centímetros y altura h centímetros se introduce por la punta con una rapidez de 1 cm/s en un cilindro alto de radio R centímetros que contiene una parte de agua. ¿Qué tan rápido sube el nivel del agua en el instante en que el cono está totalmente sumergido?

33. Un recipiente en forma de cono invertido tiene una altura de 16 cm y su radio mide 5 cm en la parte superior. Está lleno en parte con un líquido que escurre por los lados con una rapidez proporcional al área del recipiente que está en contacto con el líquido. [El área superficial de un cono es πrl, donde r es el radio y l es la altura inclinada.] Si vierte líquido en el recipiente a razón de $2\,\text{cm}^3/\text{min}$, entonces la altura del líquido disminuye a razón de 0.3 cm/min cuando la altura es de 10 cm. Si el objetivo es mantener el líquido a una altura constante de 10 cm, ¿a qué rapidez debe verter líquido al recipiente?

4 Aplicaciones de la derivada



© Pichugin Dmitry / Shutterstock

El cálculo que usted aprenderá en este capítulo le permitirá explicar la posición del arcoíris en el cielo y por qué los colores del arcoíris secundario aparecen en el orden invertido a las del arcoíris primario. (Véase el proyecto de las páginas 282-283.)

Ya hemos investigado algunas de las aplicaciones de la derivada, pero ahora que conocemos las reglas de derivación nos encontramos en mejor posición para continuar con mayor profundidad con las aplicaciones de la derivada. Aquí aprenderemos cómo la derivada afecta la forma de una gráfica de una función y, particularmente, cómo ayuda a localizar valores máximos y mínimos de funciones. En la práctica muchos problemas exigen minimizar un costo o maximizar un área, o bien, encontrar el mejor resultado posible para una situación. En particular, seremos capaces de investigar la forma óptima de una lata y explicar la ubicación de los arcoíris en el cielo.

4.1 Valores máximos y mínimos

Algunas de las aplicaciones más importantes del cálculo diferencial son los *problemas de optimización*, en los cuales se requiere encontrar la manera óptima (la mejor) para hacer algo. Algunos ejemplos de los problemas que resolveremos en este capítulo son.

- ¿Cuál debe ser la forma de una lata que minimice los costos de fabricación?
- ¿Cuá1 es la aceleración máxima de un trasbordador espacial? (Ésta es una importante pregunta para los astronautas que tienen que soportar los efectos de la aceleración.)
- ¿Cuál es el radio de una tráquea contraída que expele aire del modo más rápido al toser?
- ¿Qué ángulo deben formar los vasos sanguíneos al ramificarse, de modo que se minimice la energía consumida por el corazón al bombear la sangre?

Estos problemas pueden reducirse a encontrar los valores máximo o mínimo de una función. Para empezar, primero explicaremos exactamente lo que son estos valores.

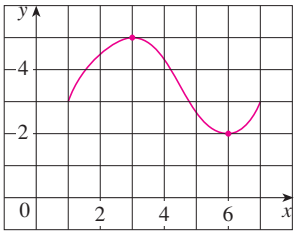


FIGURA 1

En la figura 1, se muestra la gráfica de una función en la que el punto más alto es (3, 5). En otras palabras, el valor más grande de f es $f(3) = 5$. Por otro lado, el valor más pequeño es $f(6) = 2$. Decimos que $f(3) = 5$ es el *máximo absoluto* de f y $f(6) = 2$ es el *mínimo absoluto*. En general, usamos la siguiente definición:

1 Definición Sea c un número en el dominio D de una función f. Entonces $f(c)$ es el

- valor **máximo absoluto** de f sobre D si $f(c) \geqslant f(x)$ para toda x en D.
- valor **mínimo absoluto** de f sobre D si $f(c) \leqslant f(x)$ para toda x en D.

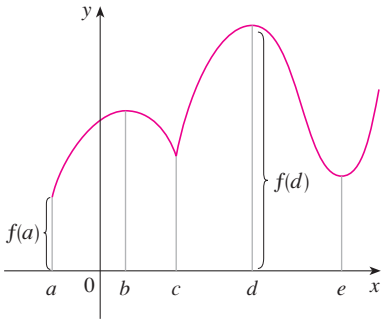


FIGURA 2
Mínimo absoluto $f(a)$, máximo absoluto $f(d)$, mínimos locales $f(c)$, $f(e)$, máximos locales $f(b)$, $f(d)$

Un máximo o mínimo absolutos se les llama a veces máximo o mínimo **global**. Los valores máximo y mínimo de f se llaman **valores extremos** de f.

La figura 2 muestra la gráfica de una función f con máximo absoluto en $x = d$ y mínimo absoluto en $x = a$. Observe que $(d, f(d))$ es el punto más alto sobre la gráfica y $(a, f(a))$ es el punto más bajo. En la figura 2, si consideramos sólo valores de x cercanos a b [p. ej., si restringimos nuestra atención al intervalo (a, c)], entonces $f(b)$ es el más grande de estos valores de $f(x)$ y se llama *valor máximo local* de f. Por otro lado, $f(c)$ se llama valor *mínimo local* de f porque $f(c) \leqslant f(x)$ para x cercana a c [en el intervalo (b, d), por ejemplo]. La función f también tiene un mínimo local en $x = e$. En general, tenemos la siguiente definición.

2 Definición El número $f(c)$ es un

- valor **máximo local** de f si $f(c) \geqslant f(x)$ cuando x está cerca de c.
- valor **mínimo local** de f si $f(c) \leqslant f(x)$ cuando x está cerca de c.

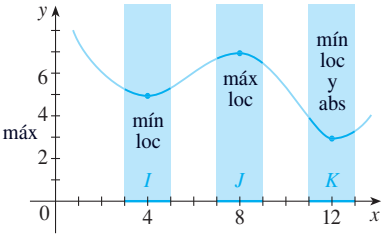


FIGURA 3

En la definición 2 (y en otros lugares), si decimos que algo es cierto **cerca** de c, queremos decir que es cierto en algún intervalo abierto que contiene a c. Por ejemplo, en la figura 3 vemos que $f(4) = 5$ es un mínimo local porque es el menor valor de f en el intervalo I. No es el mínimo absoluto porque $f(x)$ tiene valores menores cuando x está cerca de 12 (en el intervalo de K, por ejemplo). De hecho $f(12) = 3$ es un mínimo local y el mínimo absoluto. De modo similar, $f(8) = 7$ es un máximo local, pero no el máximo absoluto porque f toma valores más grandes cerca de 1.

EJEMPLO 1 La función $f(x) = \cos x$ toma su valor máximo (local y absoluto) igual a 1, infinitas veces, ya que $\cos 2n\pi = 1$ para cualquier entero n y $-1 \leq \cos x \leq 1$ para todo x. Del mismo modo, $\cos(2n + 1)\pi = -1$ es su valor mínimo, donde n es cualquier entero.

EJEMPLO 2 Si $f(x) = x^2$, entonces $f(x) \geq f(0)$ porque $x^2 \geq 0$ para toda x. Por tanto, $f(0) = 0$ es el valor mínimo absoluto (y local) de f. Esto corresponde al hecho de que el origen es el punto más bajo sobre la parábola $y = x^2$. (Véase la figura 4.) Sin embargo, no existe el punto más alto sobre la parábola, por lo que esta función no tiene valor máximo.

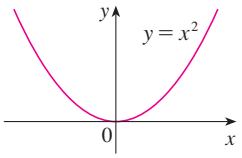


FIGURA 4
Valor mínimo $= 0$. No hay máximo

EJEMPLO 3 En la gráfica de la función $f(x) = x^3$, que se muestra en la figura 5, se ve que no tiene valor máximo absoluto ni valor mínimo absoluto. De hecho, tampoco posee valores extremos locales.

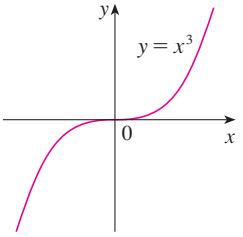


FIGURA 5
No hay mínimo ni máximo

V EJEMPLO 4 La gráfica de la función

$$f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2 \qquad -1 \leq x \leq 4$$

se muestra en la figura 6. Podemos observar que $f(1) = 5$ es un máximo local, en tanto que el máximo absoluto es $f(-1) = 37$. (Este máximo absoluto no es un máximo local porque se presenta en un punto extremo.) Asimismo, $f(0) = 0$ es un mínimo local y $f(3) = -27$ es un mínimo tanto local como absoluto. Observe que f no tiene valor local ni máximo absoluto en $x = 4$.

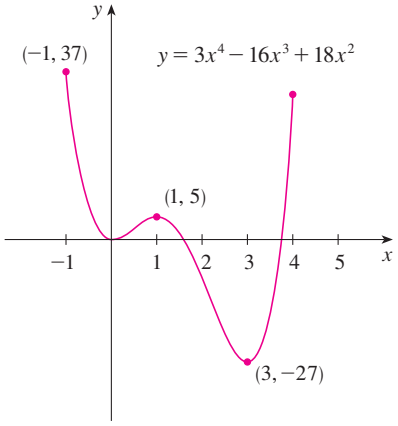


FIGURA 6

Hemos visto que algunas funciones tienen valores extremos, mientras que otras no. En el teorema siguiente se dan las condiciones con que se garantiza que una función posea valores extremos.

3 Teorema del valor extremo Si f es continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f alcanza un valor máximo absoluto $f(c)$ y un valor mínimo absoluto $f(d)$ en algunos números c y d en $[a, b]$.

En la figura 7 se ilustra el teorema del valor extremo. Observe que un valor extremo se puede tomar más de una vez. Aun cuando el teorema del valor extremo es muy aceptable a nivel intuitivo, su demostración es difícil, por consiguiente, se omite.

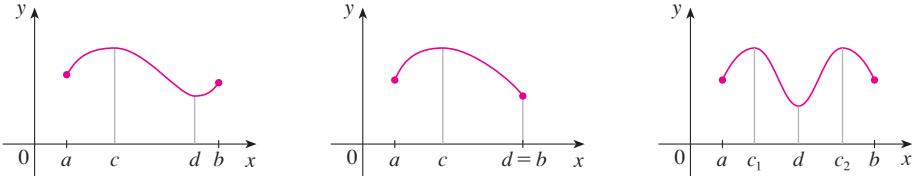


FIGURA 7

En las figuras 8 y 9 se muestra que una función no tiene que poseer valores extremos si no se satisface cualquiera de las dos hipótesis (continuidad o intervalo cerrado) del teorema del valor extremo.

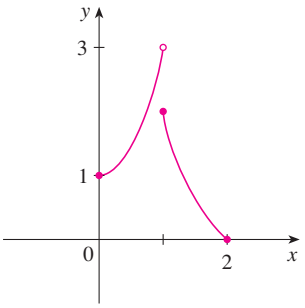


FIGURA 8
Esta función tiene un valor mínimo $f(2) = 0$, pero no tiene valor máximo.

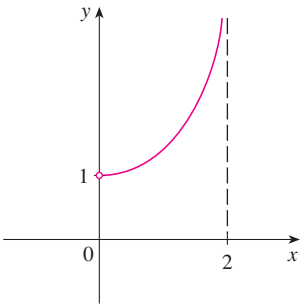


FIGURA 9
Esta función continua g no tiene máximo ni mínimo.

La función f, cuya gráfica se muestra en la figura 8, está definida sobre el intervalo cerrado $[0, 2]$, pero no tiene valor máximo. (Observe que el rango de f es $[0, 3)$. La función toma valores arbitrariamente cercanos a 3, pero nunca alcanza el valor 3.) Esto no contradice el teorema del valor extremo porque f no es continua. [Sin embargo, una función discontinua *pudiera* tener valores máximo y mínimo. Véase el ejercicio 13b.]

La función g que se muestra en la figura 9 es continua sobre el intervalo abierto $(0, 2)$, pero no tiene valor máximo ni mínimo. [El rango de g es $(1, \infty)$. La función toma valores arbitrariamente grandes.] Esto no contradice el teorema del valor extremo porque el intervalo $(0, 2)$ no es cerrado.

El teorema del valor extremo señala que una función continua sobre un intervalo cerrado tiene un valor máximo y uno mínimo, pero no indica cómo hallarlos. Empecemos por buscar valores extremos locales.

En la figura 10 se muestra la gráfica de una función f con un máximo local en $x = c$ y un mínimo local en $x = d$. Parece que en los puntos máximo y mínimo la recta tangente es horizontal y, por consiguiente, tiene pendiente 0. Sabemos que la derivada es la pendiente de la recta tangente, de modo que parece que $f'(c) = 0$ y $f'(d) = 0$. En el teorema siguiente se afirma que esto siempre se cumple para las funciones derivables.

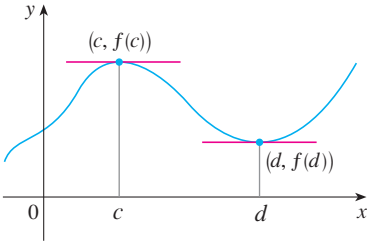


FIGURA 10

Fermat

El teorema de Fermat lleva ese nombre en honor de Pierre Fermat (1601-1665), un abogado francés que tomó a las matemáticas como un pasatiempo. A pesar de su condición de aficionado, Fermat fue uno de los dos inventores de la geometría analítica (Descartes fue el otro). Sus métodos para hallar rectas tangentes a las curvas y valores máximos y mínimos (antes de la invención del límite y de las derivadas) lo hicieron un precursor de Newton en la creación del Cálculo Diferencial.

4 Teorema de Fermat Si f tiene un máximo o un mínimo local en $x = c$, y si $f'(c)$ existe, entonces $f'(c) = 0$

DEMOSTRACIÓN Para la consideración de la conclusión, suponga que f tiene un máximo local en $x = c$. Entonces, según la definición 2, $f(c) \geqslant f(x)$ si x es suficientemente cercana a c. Esto implica que, si h está lo suficiente cerca de 0 y es positiva o negativa, entonces

$$f(c) \geqslant f(c + h)$$

y, por consiguiente,

$$\boxed{5} \qquad f(c + h) - f(c) \leqslant 0$$

Podemos dividir ambos lados de la desigualdad entre un número positivo. Así, si $h > 0$ y h es suficientemente pequeña, tenemos

$$\frac{f(c + h) - f(c)}{h} \leqslant 0$$

Tomando el límite por la derecha de ambos lados de la desigualdad (utilizando el teorema 2.3.2), obtenemos

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \leqslant \lim_{h \to 0^+} 0 = 0$$

Pero, dado que $f'(c)$ existe, tenemos

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$

y con esto se demuestra que $f'(c) \leqslant 0$.

Si $h < 0$, entonces la dirección de la desigualdad 5 se invierte cuando dividimos por h:

$$\frac{f(c + h) - f(c)}{h} \geqslant 0 \qquad h < 0$$

Así que tomando el límite por la izquierda, tenemos

$$f'(c) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \geqslant 0$$

Ya hemos mostrado que $f'(c) \geqslant 0$ y también que $f'(c) \leqslant 0$. Puesto que ambas desigualdades deben ser verdaderas, la única posibilidad es que $f'(c) = 0$.

Ya hemos demostrado el teorema de Fermat para el caso de un máximo local. El caso de un mínimo local puede demostrarse de modo similar, o bien, puede usar el ejercicio 76 para deducirlo del caso que ya ha demostrado (véase el ejercicio 77).

Los ejemplos siguientes advierten contra la interpretación excesiva del teorema de Fermat. No podemos esperar localizar valores extremos haciendo simplemente $f'(x) = 0$ y resolviendo para x.

EJEMPLO 5 Si $f(x) = x^3$, entonces $f'(x) = 3x^2$, de modo que $f'(0) = 0$. Pero f no tiene máximo o mínimo en $x = 0$, como puede ver en la gráfica de la figura 11. (0 bien, observe que $x^3 > 0$ para $x > 0$, pero $x^3 < 0$ para $x < 0$. El hecho de que $f'(0) = 0$ sólo significa que la curva $y = x^3$ tiene una recta tangente horizontal en (0, 0). En lugar de tener un máximo o un mínimo en (0, 0), allí cruza la curva su recta tangente horizontal.

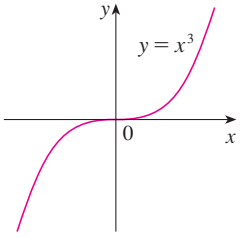


FIGURA 11
Si $f(x) = x^3$, entonces $f'(0) = 0$, pero f no tiene máximo ni mínimo.

EJEMPLO 6 La función $f(x) = |x|$ muestra un valor mínimo (local y absoluto) en $x = 0$, pero ese valor no puede determinarse haciendo $f'(x) = 0$ porque, como ya se demostró en el ejemplo 5 de la sección 2.8, $f'(0)$ no existe (véase la figura 12).

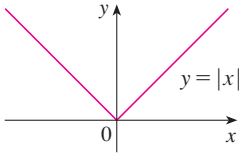


FIGURA 12
Si $f(x) = |x|$, entonces $f(0) = 0$ es un valor mínimo, pero $f'(0)$ no existe.

PRECAUCIÓN Los ejemplos 5 y 6 demuestran que debe ser cuidadoso al aplicar el teorema de Fermat. El ejemplo 5 demuestra que aun cuando $f'(c) = 0$, no necesariamente hay un máximo o un mínimo en $x = c$. (En otras palabras, el inverso del teorema de Fermat es en general falso.) Además, podría haber un valor extremo aun cuando $f'(c)$ no exista, (como en el ejemplo 6).

El teorema de Fermat sugiere en realidad que, por lo menos, debe *empezar* a buscar los valores extremos de f en los números $x = c$, donde $f'(c) = 0$ o donde $f'(c)$ no existe. Estos números reciben un nombre especial.

6 Definición Un **número crítico** de una función f es un número $x = c$ en el dominio de f tal que $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe.

En la figura 13 hay una gráfica de la función f del ejemplo 7, que apoya nuestra respuesta, porque hay una recta tangente horizontal cuando $x = 1.5$ y una recta tangente vertical cuando $x = 0$.

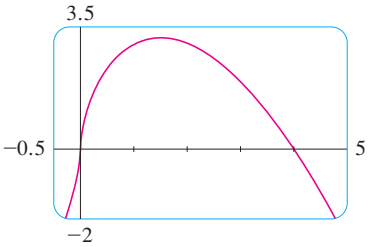


FIGURA 13

V EJEMPLO 7 Encuentre los números críticos de $f(x) = x^{3/5}(4 - x)$.

SOLUCIÓN La regla del producto nos da

$$f'(x) = x^{3/5}(-1) + (4 - x)\left(\tfrac{3}{5}x^{-2/5}\right) = -x^{3/5} + \frac{3(4 - x)}{5x^{2/5}}$$

$$= \frac{-5x + 3(4 - x)}{5x^{2/5}} = \frac{12 - 8x}{5x^{2/5}}$$

[Se obtienen los mismos valores escribiendo primero $f(x) = 4x^{3/5} - x^{8/5}$.] Así que $f'(x) = 0$ si $12 - 8x = 0$; es decir $x = \frac{3}{2}$ y $f'(x)$ no existe cuando $x = 0$. Por tanto, los números críticos son $\frac{3}{2}$ y 0.

En términos de números críticos, el teorema de Fermat puede replantearse como sigue (compare la definición 6 con el teorema 4):

7 Si f tiene un máximo o un mínimo local en $x = c$, entonces c es un número crítico de f.

Para hallar un máximo o un mínimo absolutos de una función continua sobre un intervalo cerrado, observe que o es un extremo local [en cuyo caso, por 7, se presenta en un número crítico] o se presenta en uno de los puntos extremos del intervalo. De este modo, el siguiente procedimiento de tres pasos siempre funciona.

Método del intervalo cerrado Para hallar los valores máximo y mínimo *absolutos* de una función continua f sobre un intervalo cerrado $[a, b]$:

1. Encuentre los valores de f en los números críticos de f en (a, b).
2. Halle los valores de f en los puntos extremos del intervalo.
3. El más grande de los valores de los pasos 1 y 2 es el valor máximo absoluto; el más pequeño, el valor mínimo absoluto.

V EJEMPLO 8 Encuentre los valores absolutos máximo y mínimo de la función

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 \qquad -\tfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 4$$

SOLUCIÓN Dado que f es continua sobre $\left[-\frac{1}{2}, 4\right]$, podemos utilizar el teorema del intervalo cerrado:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

Puesto que $f'(x)$ existe para toda x, los únicos valores críticos de f ocurren cuando $f'(x) = 0$; esto es, en $x = 0$ o $x = 2$. Observe que cada uno de estos números críticos está en el intervalo $\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$. Los valores de f en estos números críticos son

$$f(0) = 1 \qquad f(2) = -3$$

Los valores de f en los puntos extremos del intervalo son

$$f\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{8} \qquad f(4) = 17$$

Comparando estos cuatro números, vemos que el valor máximo absoluto es $f(4) = 17$ y el valor mínimo absoluto es $f(2) = -3$.

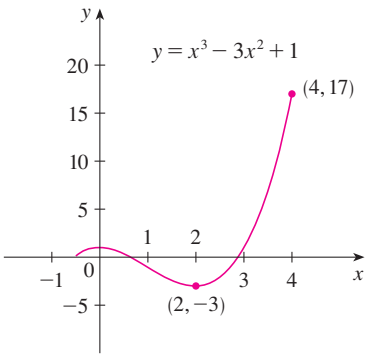


FIGURA 14

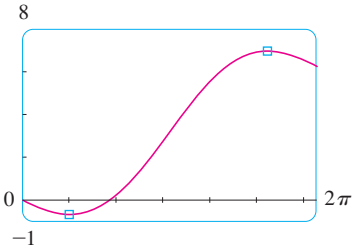


FIGURA 15

Tenga en cuenta que, en este ejemplo, el máximo absoluto ocurre en un extremo del intervalo, mientras que el mínimo absoluto ocurre en un número crítico. La gráfica de f se esboza en la figura 14.

Si tiene una calculadora graficadora o una computadora con software de gráficos, es posible estimar los valores máximos y mínimos muy fácilmente. Pero, como se muestra en el ejemplo siguiente, es necesario el cálculo para encontrar los valores *exactos*.

EJEMPLO 9

a) Utilice un dispositivo de gráficos para estimar los valores mínimo y máximo absolutos de la función $f(x) = x - 2 \operatorname{sen} x$, para $0 \leq x \leq 2\pi$.

b) Utilice el cálculo para encontrar los valores máximo y mínimo exactos.

SOLUCIÓN

a) La figura 15 muestra la gráfica de f en el rectángulo de vista de $[0, 2\pi]$ por $[-1, 8]$. Moviendo el cursor cerca del punto máximo, vemos que las coordenadas y no cambian mucho en las proximidades del máximo. El valor máximo absoluto es aproximadamente 6.97 y ocurre cuando $x \approx 5.2$. Del mismo modo, moviendo el cursor cerca al punto mínimo, vemos que el valor mínimo absoluto es alrededor de -0.68 y se produce cuando $x \approx 1.0$. Es posible obtener estimaciones más precisas al hacer acercamientos hacia los puntos máximos y mínimos; pero, en vez de esto, utilizaremos el cálculo.

b) La función $f(x) = x - 2 \operatorname{sen} x$ es continua en $[0, 2\pi]$. Debido a que $f'(x) = 1 - 2 \cos x$, tenemos que $f'(x) = 0$ cuando $\cos x = \frac{1}{2}$ y esto ocurre cuando $x = \pi/3$ o bien $5\pi/3$. Los valores de f en estos números críticos son

$$f(\pi/3) = \frac{\pi}{3} - 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \approx -0.684853$$

y

$$f(5\pi/3) = \frac{5\pi}{3} - 2 \operatorname{sen} \frac{5\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} + \sqrt{3} \approx 6.968039$$

Los valores de f en los puntos extremos son

$$f(0) = 0 \quad \text{y} \quad f(2\pi) = 2\pi \approx 6.28$$

Comparando estos cuatro números y utilizando el método del intervalo cerrado, vemos que el valor mínimo absoluto es $f(\pi/3) = \pi/3 - \sqrt{3}$ y el máximo valor absoluto es $f(5\pi/3) = 5\pi/3 + \sqrt{3}$. Los valores del inciso a) sirven para verificar nuestro resultado.



NASA

EJEMPLO 10 El telescopio espacial *Hubble* fue puesto en operación el 24 de abril de 1990, por el transbordador espacial *Discovery*. Un modelo para la velocidad del transbordador durante esta misión, desde el lanzamiento en $t = 0$ hasta que los cohetes auxiliares de combustible sólido se desprenden en $t = 126$ s, está dado por

$$v(t) = 0.001302t^3 - 0.09029t^2 + 23.61t - 3.083$$

(en pies por segundo). Con este modelo, estime los valores máximo y mínimo absolutos de la *aceleración* del transbordador entre el despegue y el desprendimiento de los cohetes auxiliares.

SOLUCIÓN No de la función velocidad dada, se nos pide hallar los valores extremos, sino de la función aceleración. Así que primero tenemos que derivar para encontrar la aceleración:

$$a(t) = v'(t) = \frac{d}{dt}(0.001302t^3 - 0.09029t^2 + 23.61t - 3.083)$$

$$= 0.003906t^2 - 0.18058t + 23.61$$

Ahora aplicamos el método del intervalo cerrado a la función continua a en el intervalo $0 \leq t \leq 126$. Su derivada es

$$a'(t) = 0.007812t - 0.18058$$

El único número crítico ocurre cuando $a'(t) = 0$:

$$t_1 = \frac{0.18058}{0.007812} \approx 23.12$$

Evaluando $a(t)$ en el número crítico y en los puntos extremos del intervalo, tenemos

$$a(0) = 23.61 \qquad a(t_1) \approx 21.52 \qquad a(126) \approx 62.87$$

Así que la aceleración máxima es aproximadamente $62.87\,\text{pies/s}^2$, y la aceleración mínima es aproximadamente $21.52\,\text{pies/s}^2$.

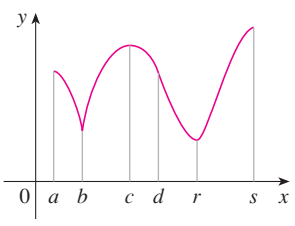
4.1 Ejercicios

1. Explique la diferencia entre un mínimo absoluto y un mínimo local.

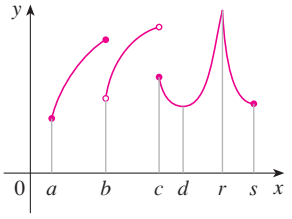
2. Supongamos que f es una función continua definida sobre un intervalo cerrado $[a, b]$.
a) ¿Qué teorema garantiza la existencia de un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto de f?
b) ¿Qué pasos daría para encontrar los valores máximo y mínimo?

3-4 Para cada uno de los números a, b, c, d, r y s, indique si la función cuya gráfica se muestra, tiene un máximo o mínimo absolutos, un máximo o mínimo locales, o ni un máximo ni un mínimo.

3.

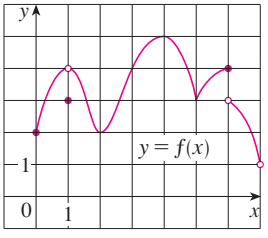


4.

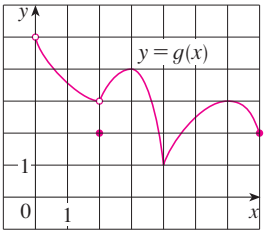


5-6 Utilice la gráfica para establecer los valores máximos y mínimos absolutos y locales de la función.

5.



6.



7-10 Esboce la gráfica de una función f que es continua sobre $[1, 5]$ y tiene las propiedades dadas.

7. Mínimo absoluto en 2, máximo absoluto en 3, mínimo local en 4.

8. Mínimo absoluto en 1, máximo absoluto en 5, máximo local en 2, mínimo local en 4.

9. Máximo absoluto en 5, mínimo absoluto en 2, máximo local en 3, mínimos locales en 2 y 4.

10. f no tiene mínimo ni máximo locales, pero 2 y 4 son números críticos.

11. a) Esboce la gráfica de una función que tiene un máximo local en 2 y es derivable en 2.
b) Esboce la gráfica de una función que tiene un máximo local en 2 y es continua, pero no derivable, en 2.
c) Esboce la gráfica de una función que tiene un máximo local en 2 y no es continua en 2.

12. a) Esboce la gráfica de una función sobre $[-1, 2]$ que tiene un máximo absoluto, pero no máximo local.
b) Esboce la gráfica de una función sobre $[-1, 2]$ que tiene un máximo local, pero no máximo absoluto.

13. a) Esboce la gráfica de una función sobre $[-1, 2]$ que tiene un máximo absoluto, pero no mínimo absoluto.
b) Esboce la gráfica de una función sobre $[-1, 2]$ que es discontinua, pero que no tiene máximo absoluto ni mínimo absoluto.

14. a) Esboce la gráfica de una función que tiene dos máximos locales, un mínimo local y no tiene mínimo absoluto.
b) Esboce la gráfica de una función que tiene tres mínimos locales, dos máximos locales y siete números críticos.

15-28 Trace a mano la gráfica de f y utilícela para encontrar los valores máximos y mínimos, absolutos y locales de f. (Utilice las graficas y transformaciones de las secciones 1.2 y 1.3.)

15. $f(x) = \frac{1}{2}(3x - 1), \quad x \leq 3$

16. $f(x) = 2 - \frac{1}{3}x, \quad x \geq -2$

17. $f(x) = 1/x, \quad x \geq 1$

18. $f(x) = 1/x, \quad 1 < x < 3$

19. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad 0 \leq x < \pi/2$

20. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad 0 < x \leq \pi/2$

21. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad -\pi/2 \leq x \leq \pi/2$

22. $f(t) = \cos t, \quad -3\pi/2 \leq t \leq 3\pi/2$

23. $f(x) = \ln x, \quad 0 < x \leq 2$

24. $f(x) = |x|$

25. $f(x) = 1 - \sqrt{x}$

26. $f(x) = e^x$

27. $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 2x - 4 & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$

28. $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ 2x - 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$

29-44 Encuentre los números críticos de la función.

29. $f(x) = 4 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}x^2$

30. $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x$

31. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x$

32. $f(x) = 2x^3 + x^2 + 2x$

33. $g(t) = t^4 + t^3 + t^2 + 1$

34. $g(t) = |3t - 4|$

35. $g(y) = \dfrac{y - 1}{y^2 - y + 1}$

36. $h(p) = \dfrac{p - 1}{p^2 + 4}$

37. $h(t) = t^{3/4} - 2t^{1/4}$

38. $g(x) = x^{1/3} - x^{-2/3}$

39. $F(x) = x^{4/5}(x - 4)^2$

40. $g(\theta) = 4\theta - \tan\theta$

41. $f(\theta) = 2\cos\theta + \operatorname{sen}^2\theta$

42. $h(t) = 3t - \operatorname{arcsen} t$

43. $f(x) = x^2 e^{-3x}$

44. $f(x) = x^{-2}\ln x$

45-46 Se da la fórmula para la *derivada* de una función f. ¿Cuántos números críticos tiene f?

45. $f'(x) = 5e^{-0.1|x|}\operatorname{sen} x - 1$

46. $f'(x) = \dfrac{100\cos^2 x}{10 + x^2} - 1$

47-62 Encuentre los valores máximo absoluto y mínimo absoluto de f sobre el intervalo dado.

47. $f(x) = 12 + 4x - x^2, \quad [0, 5]$

48. $f(x) = 5 + 54x - 2x^3, \quad [0, 4]$

49. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1, \quad [-2, 3]$

50. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5, \quad [-3, 5]$

51. $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 1, \quad [-2, 3]$

52. $f(x) = (x^2 - 1)^3, \quad [-1, 2]$

53. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}, \quad [0.2, 4]$

54. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x + 1}, \quad [0, 3]$

55. $f(t) = t\sqrt{4 - t^2}, \quad [-1, 2]$

56. $f(t) = \sqrt[3]{t}\,(8 - t), \quad [0, 8]$

57. $f(t) = 2\cos t + \operatorname{sen} 2t, \quad [0, \pi/2]$

58. $f(t) = t + \cot(t/2), \quad [\pi/4, 7\pi/4]$

59. $f(x) = xe^{-x^2/8}, \quad [-1, 4]$

60. $f(x) = x - \ln x, \quad \left[\frac{1}{2}, 2\right]$

61. $f(x) = \ln(x^2 + x + 1), \quad [-1, 1]$

62. $f(x) = x - 2\tan^{-1}x, \quad [0, 4]$

63. Si a y b son números positivos, encuentre el valor máximo de $f(x) = x^a(1 - x)^b$, $0 \leq x \leq 1$.

64. Utilice una gráfica para estimar los números críticos de $f(x) = |x^3 - 3x^2 + 2|$ con una aproximación de un decimal.

65-68

a) Utilice una gráfica para estimar los valores máximo y mínimo absolutos de la función con una aproximación de dos decimales.

b) Por medio del cálculo encuentre los valores máximo y mínimo exactos.

65. $f(x) = x^5 - x^3 + 2, \quad -1 \leq x \leq 1$

66. $f(x) = e^x + e^{-2x}, \quad 0 \leq x \leq 1$

67. $f(x) = x\sqrt{x - x^2}$

68. $f(x) = x - 2\cos x, \quad -2 \leq x \leq 0$

69. Entre 0 °C y 30 °C, el volumen V (en centímetros cúbicos) de 1 kg de agua a una temperatura T, está dado aproximadamente por la fórmula

$$V = 999.87 - 0.06426T + 0.0085043T^2 - 0.0000679T^3$$

Encuentre la temperatura a la cual el agua tiene su densidad máxima.

70. Un objeto con peso W es arrastrado a lo largo de un plano horizontal por una fuerza que actúa a través de una cuerda atada al objeto. Si la cuerda forma un ángulo θ con el plano, entonces la magnitud de la fuerza es

$$F = \frac{\mu W}{\mu \operatorname{sen}\theta + \cos\theta}$$

donde μ es una constante positiva llamada el *coeficiente de fricción* y donde $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Demuestre que F es minimizada cuando $\tan\theta = \mu$.

71. Un modelo para el precio promedio en EU de una libra de azúcar blanca desde 1993 a 2003 está dado por la función

$$A(t) = -0.00003237t^5 + 0.0009037t^4 - 0.008956t^3 + 0.03629t^2 - 0.04458t + 0.4074$$

donde t es medido en años desde agosto de 1993. Estime los tiempos cuando el azúcar era más barata y más cara durante el periodo 1993-2003.

72. El 7 de mayo de 1992 el transbordador espacial *Endeavour* fue lanzado en la misión STS-49, cuya finalidad fue instalar un nuevo motor de impulso en el perigeo de un satélite Intelsat de comunicaciones. En la tabla siguiente se dan los datos de la velocidad del transbordador entre el despegue y el desprendimiento de los cohetes auxiliares de combustible sólido.

Suceso	Tiempo (s)	Velocidad (pies/s)
Lanzamiento	0	0
Inicio de maniobra de giro	10	185
Fin de maniobra de giro	15	319
Válvula de estrangulación a 89%	20	447
Válvula de estrangulación a 67%	32	742
Válvula de estrangulación a 104%	59	1325
Presión dinámica máxima	62	1445
Separación de los cohetes auxiliares de combustible sólido	125	4 151

a) Utilice un dispositivo graficador o una computadora para hallar el polinomio cúbico que modele de la mejor manera la velocidad del transbordador para el intervalo de tiempo $t \in [0, 125]$. A continuación, dibuje esta función polinomial.
b) Encuentre un modelo para la aceleración del transbordador y utilícelo para estimar los valores máximo y mínimo de la aceleración durante los primeros 125 segundos.

73. Cuando un objeto extraño alojado en la tráquea fuerza a una persona a toser, el diafragma empuja hacia arriba y causa un aumento en la presión de los pulmones. Esto viene acompañado por una contracción de la tráquea, con lo que se produce un canal más angosto por el que debe fluir el aire expelido. Para que escape una cantidad dada de aire en un tiempo fijo, éste debe moverse con mayor rapidez por el canal más angosto que por el más ancho. Entre mayor sea la velocidad de la corriente de aire, mayor es la fuerza aplicada sobre el objeto extraño. Los rayos X muestran que el radio del tubo circular de la tráquea se contrae hasta alrededor de dos tercios de su radio normal durante un espasmo de tos. De acuerdo con un modelo matemático de la tos, la velocidad v de la corriente de aire se relaciona con el radio r de la tráquea mediante la ecuación

$$v(r) = k(r_0 - r)r^2 \qquad \tfrac{1}{2}r_0 \leqslant r \leqslant r_0$$

donde k es una constante y r_0 es el radio normal de la tráquea. La restricción sobre r se debe al hecho de que la pared de la tráquea se pone rígida bajo la presión y se impide una contracción mayor que $\frac{1}{2}r_0$ (de lo contrario, la persona se sofocaría).

a) Determine el valor de r en el intervalo $\left[\frac{1}{2}r_0, r_0\right]$ en el cual v tiene un máximo absoluto. ¿Cómo se compara esto con la evidencia experimental?
b) ¿Cuál es el valor máximo absoluto de v sobre el intervalo?
c) Esboce la gráfica de v sobre el intervalo $[0, r_0]$.

74. Demuestre que 5 es un número crítico de la función

$$g(x) = 2 + (x - 5)^3$$

pero g no tiene un valor extremo local en 5.

75. Demuestre que la función

$$f(x) = x^{101} + x^{51} + x + 1$$

no tiene ni máximo local ni mínimo local.

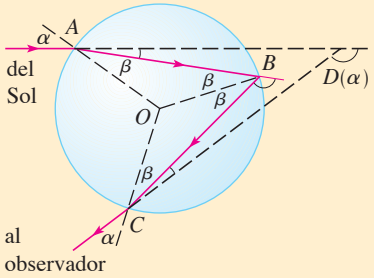
76. Si f tiene un valor mínimo local en c, demuestre que la función $g(x) = -f(x)$ tiene un valor mínimo local en c.

77. Demuestre el teorema de Fermat para el caso en el que f tiene un mínimo local en c.

78. Una función cúbica es una función polinomial de grado 3; esto es, tiene la forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, donde $a \neq 0$.

a) Demuestre que una función cúbica puede tener dos, uno o no tener números críticos. Proporcione ejemplos y dibuje para ilustrar las tres posibilidades.
b) ¿Cuántos valores extremos locales puede tener una función cúbica?

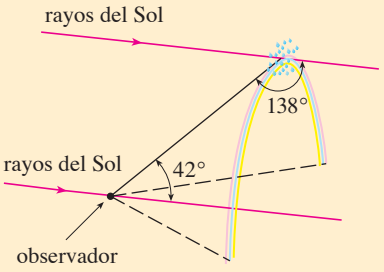
PROYECTO DE APLICACIÓN CÁLCULO DE ARCOÍRIS



Formación del arcoíris primario

Los arcoíris se forman cuando las gotas de lluvia dispersan la luz solar. Han fascinado a la Humanidad desde los tiempos más remotos y han inspirado intentos de explicación científica desde la época de Aristóteles. En este proyecto se siguen las ideas de Descartes y de Newton para explicar la forma, la ubicación y los colores de los arcoíris.

1. En la figura se muestra un rayo de luz solar que atraviesa una gota esférica de lluvia en A. Algo de la luz se refleja, pero la recta AB muestra la trayectoria de la parte que entra a la gota. Observe que la luz se refracta hacia la recta normal AO y, de hecho, la ley de Snell afirma que $\operatorname{sen}\alpha = k \operatorname{sen}\beta$, donde α es el ángulo de incidencia, β es el ángulo de refracción y $k \approx \frac{4}{3}$ es el índice de refracción para el agua. En B algo de la luz pasa por la gota y se refracta hacia el aire, pero la recta BC muestra la parte que se refleja. (El ángulo de incidencia es igual al de reflexión.) Cuando el rayo llega a C, parte de él se refleja; pero, por el momento, hay más



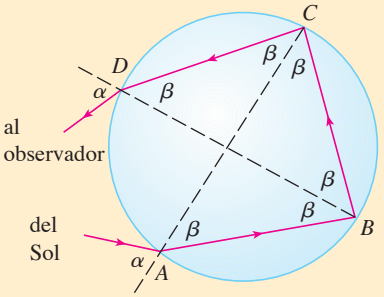
interés en la parte que sale de la gota de lluvia en C. (Observe que se refracta alejándose de la recta normal.) El *ángulo de desviación* $D(\alpha)$ es la magnitud de la rotación en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj que ha descrito el rayo durante este proceso de tres etapas. Por tanto,

$$D(\alpha) = (\alpha - \beta) + (\pi - 2\beta) + (\alpha - \beta) = \pi + 2\alpha - 4\beta$$

Demuestre que el valor mínimo de la desviación es $D(\alpha) \approx 138°$ y ocurre cuando $\alpha \approx 59.4°$.

El significado de la desviación mínima es que cuando $\alpha \approx 59.4°$ tenemos $D'(\alpha) \approx 0$, de modo que $\Delta D/\Delta\alpha \approx 0$. Esto significa que muchos rayos con $\alpha \approx 59.4°$ resultan desviados en más o menos la misma cantidad. La *concentración* de los rayos que vienen de las cercanías de la desviación mínima crea el brillo del arcoíris primario. En la figura a la izquierda se muestra que el ángulo de elevación desde el observador hacia arriba hasta el punto más alto del arcoíris es $180° - 138° = 42°$ (A este ángulo se le llama *ángulo de arcoíris*).

2. En el problema 1 se explica la ubicación del arcoíris primario, pero, ¿cómo explica los colores? La luz solar comprende una gama de longitudes de onda, desde el rojo hasta el naranja, amarillo, verde, azul, índigo y violeta. Como Newton descubrió en sus experimentos con un prisma en 1666, el índice de refracción es diferente para cada color. (El efecto se llama *dispersión*.) Para la luz roja, el índice de refracción es $k \approx 1.3318$, en tanto que para la luz violeta es $k \approx 1.3435$. Al repetir el cálculo del problema 1 para estos valores de k, se demuestra que el ángulo del arcoíris es alrededor de 42.3° para el arco rojo y de 40.6° para el arco violeta. Así pues, el arcoíris consta en realidad de siete arcos separados que corresponden a los siete colores.



Formación del arcoíris secundario

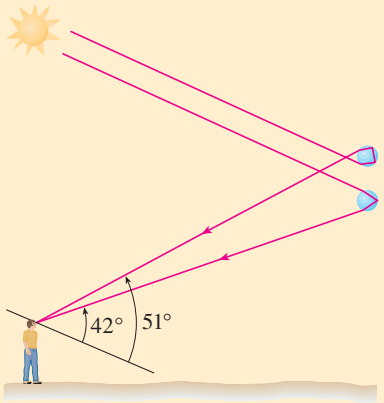
3. Quizás haya visto un arcoíris secundario más tenue, arriba del arco primario. Se produce por la parte de un rayo que entra en una gota de lluvia y se refracta en A, se refleja dos veces (en B y C) y se refracta al salir de la gota en D (véase la figura que aparece a la izquierda). En esta ocasión, el ángulo de desviación $D(\alpha)$ es la magnitud total de rotación en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj que describe el rayo en este proceso de cuatro etapas. Demuestre que

$$D(\alpha) = 2\alpha - 6\beta + 2\pi$$

y $D(\alpha)$ tiene un valor mínimo cuando

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{k^2 - 1}{8}}$$

Tomando $k = \frac{4}{3}$, demuestre que la desviación mínima es aproximadamente 129° y que el ángulo de arcoíris para el arcoíris secundario es de cerca de 51°, como se muestra en la figura a la izquierda.



4. Demuestre que los colores del arcoíris secundario aparecen en orden invertido al del primario.



© Pichugin Dmitry / Shutterstock

4.2 Teorema del valor medio

Vamos a ver que muchos de los resultados de este capítulo dependen de un hecho central, llamado teorema del valor medio. Pero, para llegar a este teorema, veremos primero el siguiente resultado.

Rolle

El teorema de Rolle fue publicado en 1691 por el matemático francés Michel Rolle (1652-1719), en un libro titulado *Méthode pour resoudre les Egalitez*. Fue un crítico de los métodos de su tiempo y calificó al cálculo como una "colección de falacias ingeniosas". Más tarde, sin embargo, se convenció de la esencial exactitud de los métodos del cálculo.

Teorema de Rolle Si f es una función que satisface las siguientes tres hipótesis:

1. f es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$
2. f es derivable sobre el intervalo abierto (a, b)
3. $f(a) = f(b)$

entonces hay un número c en (a, b) tal que $f'(c) = 0$.

Antes de dar la demostración, vamos a echar un vistazo a las gráficas de algunas funciones típicas que satisfacen las tres hipótesis. La figura 1 muestra las gráficas de cuatro de estas funciones. En cada caso parece que hay al menos un punto $(c, f(c))$ en la gráfica donde la recta tangente es horizontal y, por tanto, $f'(c) = 0$. Por consiguiente, el teorema de Rolle es verosímil.

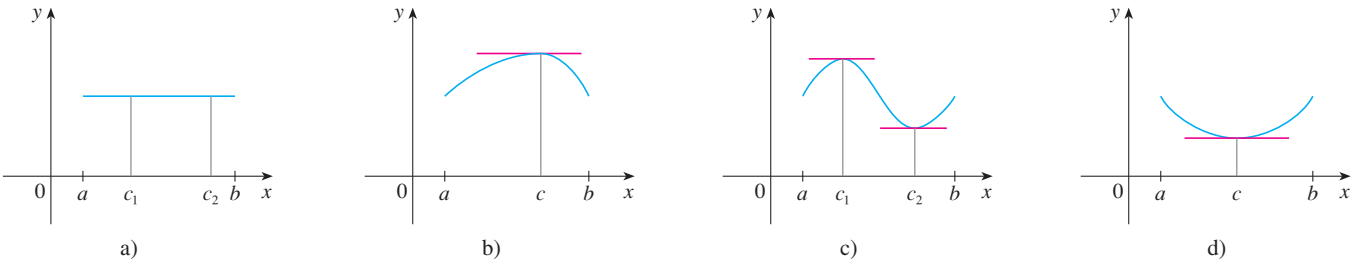


FIGURA 1

RP Presentación de casos

DEMOSTRACIÓN Hay tres casos:

CASO I $f(x) = k$**, una constante**
Entonces $f'(x) = 0$, por lo que el número c puede tomar *cualquier* número en (a, b).

CASO II $f(x) > f(a)$ **para alguna** x **en** (a, b) [como en la figura 1b) o c)]
Por el teorema del valor extremo (que podemos aplicar por la hipótesis 1), f tiene un valor máximo en algún lugar de $[a, b]$. Ya que $f(a) = f(b)$, debe alcanzar este valor máximo en un número c en el intervalo abierto (a, b), entonces f tiene un máximo *local* en c y, por la hipótesis 2, f es derivable en c. Por tanto, $f'(c) = 0$ por el teorema de Fermat.

CASO III $f(x) < f(a)$ **para algún** x **en** (a, b) [como en la figura 1c) o d)]
Por el teorema del valor extremo, f tiene un valor mínimo en $[a, b]$ y, como $f(a) = f(b)$, alcanza este valor mínimo en un número $x = c$ en (a, b). Otra vez, $f'(c) = 0$ por el teorema de Fermat.

EJEMPLO 1 Vamos a aplicar el teorema de Rolle a la función posición $s = f(t)$ de un objeto en movimiento. Si el objeto está en el mismo lugar en dos instantes diferentes $t = a$ y $t = b$, entonces $f(a) = f(b)$. El teorema de Rolle señala que hay algún instante de tiempo $t = c$ entre a y b cuando $f'(c) = 0$; es decir, la velocidad es 0. (En particular, puede verse que esto es cierto cuando se lanza una bola directamente hacia arriba.)

EJEMPLO 2 Demuestre que la ecuación $x^3 + x - 1 = 0$ tiene exactamente una raíz real.

SOLUCIÓN Primero utilizamos el teorema del valor intermedio (2.5.10) para demostrar que existe una raíz. Sea $f(x) = x^3 + x - 1$. Entonces $f(0) = -1 < 0$ y $f(1) = 1 > 0$.

La figura 2 muestra la gráfica de la función $f(x) = x^3 + x - 1$ discutida en el ejemplo 2. El teorema de Rolle muestra que no importa cuánto ampliemos el rectángulo de vista, nunca podremos encontrar una segunda intersección con el eje x.

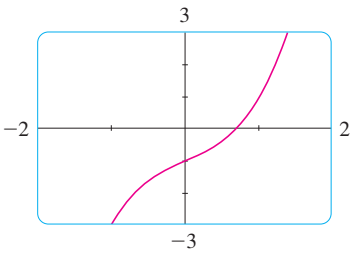


FIGURA 2

El teorema del valor medio es un ejemplo de lo que se llama un teorema de existencia. Como el teorema del valor intermedio, el teorema del valor extremo y el teorema de Rolle aseguran que existe un número con una determinada propiedad, pero no nos dicen cómo encontrar el número.

Dado que f es una función polinomial, es continua, por lo que el teorema del valor intermedio establece que existe un número $x = c$ entre 0 y 1 tal que $f(c) = 0$, de lo que se deduce que la ecuación dada tiene una raíz.

Para demostrar que la ecuación no tiene otras raíces reales, utilizamos el teorema de Rolle y argumentamos por contradicción. Supongamos que tenemos dos raíces a y b. Entonces $f(a) = 0 = f(b)$ y, dado que f es una función polinomial, es derivable en (a, b) y continua sobre $[a, b]$. Por tanto, por el teorema de Rolle, existe un número $x = c$ entre a y b tal que $f'(c) = 0$. Pero

$$f'(x) = 3x^2 + 1 \geqslant 1 \qquad \text{para toda } x$$

(ya que $x^2 \geqslant 0$), por lo que $f'(x)$ nunca puede ser 0. Esto conduce a una contradicción, por tanto, la ecuación no puede tener dos raíces reales.

El principal uso del teorema de Rolle es demostrar el importante teorema siguiente, establecido por primera vez por el matemático francés Joseph Louis Lagrange.

Teorema del valor medio Si f es una función que satisface las siguientes hipótesis

1. f es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$

2. f es derivable sobre el intervalo abierto (a, b)

entonces existe un número $x = c$ en (a, b) tal que

$$\boxed{1} \qquad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

o, equivalentemente,

$$\boxed{2} \qquad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Antes de demostrar este teorema, podemos ver que es razonable desde la interpretación geométrica. Las figuras 3 y 4 muestran los puntos $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$ sobre las gráficas de dos funciones derivables. La pendiente de la recta secante AB es

$$\boxed{3} \qquad m_{AB} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

que es la misma expresión que en el lado derecho de la ecuación 1. Dado que $f'(c)$ es la pendiente de la recta tangente en el punto $(c, f(c))$, el teorema del valor medio, en la forma dada por la ecuación 1, indica que hay al menos un punto $P(c, f(c))$ sobre la gráfica donde la pendiente de la recta tangente es la misma que la pendiente de la recta secante AB. En otras palabras, hay un punto P donde la recta tangente es paralela a la recta secante AB (imagine una recta paralela a AB, moviéndose desde lejos manteniendo el paralelismo hasta que toque la gráfica por primera vez).

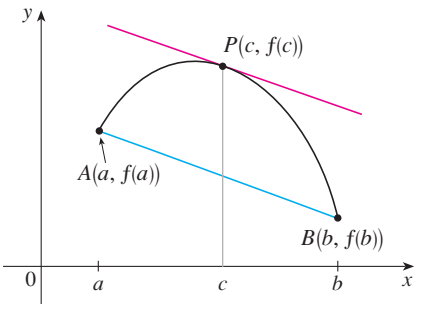


FIGURA 3

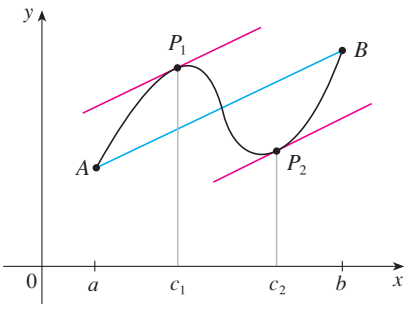


FIGURA 4

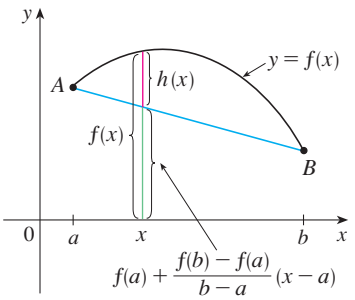


FIGURA 5

Lagrange y el teorema del valor medio

El teorema del valor medio fue formulado primero por Joseph Louis Lagrange (1736-1813), nacido en Italia de padre francés y madre italiana. Fue un niño prodigio y se convirtió en profesor en Turín a la tierna edad de 19 años. Lagrange hizo grandes contribuciones a la teoría de números, teoría de las funciones, teoría de las ecuaciones y a la mecánica celeste y analítica. En particular, aplicó el cálculo en el análisis de la estabilidad del sistema solar. Por invitación de Federico el Grande, sucedió a Euler en la Academia de Berlín y, cuando Federico murió, Lagrange aceptó la invitación a París del rey Luis XVI, donde recibió apartamentos en el Louvre y un cargo de profesor en la Escuela Politécnica. A pesar de todos los lujos y la fama, era un hombre tranquilo, viviendo sólo para la ciencia.

DEMOSTRACIÓN Aplicamos el teorema de Rolle a una nueva función h definida como la diferencia entre f y la función cuya gráfica es la recta secante AB. Mediante la ecuación 3, vemos que la ecuación de la recta AB puede escribirse como

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

o como

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Así, como se muestra en la figura 5,

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \quad \boxed{4}$$

Primero, debemos verificar que h satisface las tres hipótesis del teorema de Rolle.

1. La función h es continua sobre $[a, b]$ porque es la suma de f y una función polinomial de primer grado, ambas continuas.
2. La función h es derivable sobre (a, b) porque f y la función polinomial de primer grado son derivables. De hecho, podemos calcular h' directamente de la ecuación 4:

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

(Note que $f(a)$ y $[f(b) - f(a)]/(b - a)$ son constantes.)

3. $$h(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0$$

$$h(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a)$$

$$= f(b) - f(a) - [f(b) - f(a)] = 0$$

Por tanto, $h(a) = h(b)$.

Dado que h satisface las hipótesis del teorema de Rolle, que señala que existe un número $x = c$ en (a, b) tal que $h'(c) = 0$, entonces se tiene

$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

así que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

V EJEMPLO 3 Para ilustrar el teorema del valor medio con una función específica, consideremos $f(x) = x^3 - x$, $a = 0$, $b = 2$. Puesto que f es una función polinomial, es continua y derivable para toda x, así que es ciertamente continua sobre $[0, 2]$ y derivable sobre $(0, 2)$. Por tanto, por el teorema del valor medio, existe un número $x = c$ en $(0, 2)$ tal que

$$f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0)$$

Ahora, $f(2) = 6, f(0) = 0$ y $f'(x) = 3x^2 - 1$, así que la ecuación resulta

$$6 = (3c^2 - 1)2 = 6c^2 - 2$$

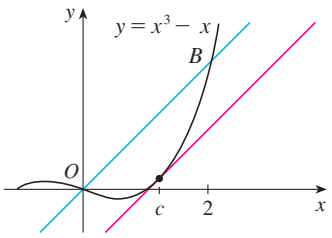


FIGURA 6

que da $c^2 = \frac{4}{3}$, esto es, $c = \pm 2/\sqrt{3}$. Pero $x = c$ debe estar en $(0, 2)$, así que $c = 2/\sqrt{3}$. La figura 6 ilustra este cálculo: la recta tangente en este valor de $x = c$ es paralela a la recta secante OB.

V EJEMPLO 4 Si un objeto se mueve en línea recta de acuerdo con la función posición $s = f(t)$, entonces la velocidad promedio entre $t = a$ y $t = b$ es

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

y la velocidad en $t = c$ es $f'(c)$. Así, el teorema del valor medio (en la forma de la ecuación 1) nos indica que en algún momento $t = c$ entre a y b la velocidad instantánea $f'(c)$ es igual a la velocidad promedio. Por ejemplo, si un automóvil viajaba 180 km en 2 horas, entonces el velocímetro debe tener una lectura de 90 km/h por lo menos una vez.

En general, el teorema del valor medio puede interpretarse diciendo que existe un número en el cual la razón de cambio instantáneo es igual a la razón de cambio promedio a lo largo de un intervalo.

El principal significado del teorema del valor medio es que nos permite obtener información acerca de una función a partir de aquella acerca de su derivada. En el caso siguiente se proporciona un ejemplo de este principio.

V EJEMPLO 5 Suponga que $f(0) = -3$ y $f'(x) \leq 5$ para todos los valores de x. ¿Qué tan grande puede ser $f(2)$?

SOLUCIÓN Partimos del hecho de que f es derivable (y, por tanto, continua) en todo su dominio. En particular, podemos aplicar el teorema del valor medio en el intervalo $[0, 2]$. Existe un número $x = c$ tal que

$$f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0)$$

así que

$$f(2) = f(0) + 2f'(c) = -3 + 2f'(c)$$

Tenemos que $f'(x) \leq 5$ para toda x, así que, en particular, sabemos que $f'(c) \leq 5$. Multiplicando ambos lados de esta desigualdad por 2, tenemos $2f'(c) \leq 10$, así que

$$f(2) = -3 + 2f'(c) \leq -3 + 10 = 7$$

El mayor valor posible para $f(2)$ es 7.

El teorema del valor medio puede utilizarse para establecer algunos de los hechos básicos del Cálculo Diferencial. Uno de estos hechos básicos es el siguiente teorema. Otros se encontrarán en las secciones siguientes.

5 Teorema Si $f'(x) = 0$ para toda x en un intervalo (a, b), entonces f es constante en (a, b).

DEMOSTRACIÓN Sean x_1 y x_2 dos números cualesquier en (a, b), con $x_1 < x_2$. Dado que f es derivable sobre (a, b), debe ser derivable sobre (x_1, x_2) y continua sobre $[x_1, x_2]$. Aplicando el teorema del valor medio a f sobre el intervalo $[x_1, x_2]$, obtenemos un número $x = c$ tal que $x_1 < c < x_2$ y

$$\boxed{6} \qquad f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

Puesto que $f'(x) = 0$ para toda x, tenemos $f'(c) = 0$, así que la ecuación 6 resulta

$$f(x_2) - f(x_1) = 0 \qquad \text{o} \qquad f(x_2) = f(x_1)$$

Por tanto, f tiene el mismo valor que *cualesquiera* dos números x_1 y x_2 en (a, b). Esto significa que f es constante sobre (a, b).

7 Corolario Si $f'(x) = g'(x)$ para toda x en un intervalo (a, b), entonces $f - g$ es constante sobre (a, b); esto es, $f(x) = g(x) + c$ donde c es una constante.

DEMOSTRACIÓN Sea $F(x) = f(x) - g(x)$. Entonces

$$F'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

para toda x en (a, b). Así, por el teorema 5, f es constante; esto es, $f - g$ es constante.

NOTA Cuidado al utilizar el teorema 5. Sea

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

El dominio de f es $D = \{x \mid x \neq 0\}$ y $f'(x) = 0$ para toda x en D. Pero f, evidentemente, no es una función constante. Esto no contradice el teorema 5 porque D no es un intervalo. Observe que f es constante sobre el intervalo $(0, \infty)$ y también sobre el intervalo $(-\infty, 0)$.

EJEMPLO 6 Demuestre la identidad $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \pi/2$.

SOLUCIÓN Aunque no es necesario utilizar el cálculo para demostrar esta identidad, la demostración mediante él es muy sencilla. Si $f(x) = \tan^{-1} x + \cot^{-1} x$, entonces

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} - \frac{1}{1 + x^2} = 0$$

para todos los valores de x. Por tanto, $f(x) = C$, una constante. Para determinar el valor de C, ponemos $x = 1$ [porque podemos evaluar $f(1)$ exactamente]. Entonces

$$C = f(1) = \tan^{-1} 1 + \cot^{-1} 1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Así, $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \pi/2$.

4.2 Ejercicios

1-4 Verifique que la función satisface las tres hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo dado. Después encuentre todos los números c que satisfacen la conclusión del teorema de Rolle.

1. $f(x) = 5 - 12x + 3x^2, \quad [1, 3]$

2. $f(x) = x^3 - x^2 - 6x + 2, \quad [0, 3]$

3. $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{3}x, \quad [0, 9]$

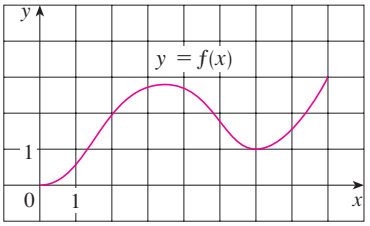
4. $f(x) = \cos 2x, \quad [\pi/8, 7\pi/8]$

5. Sea $f(x) = 1 - x^{2/3}$. Demuestre que $f(-1) = f(1)$, pero no hay ningún número $x = c$ en $(-1, 1)$ tal que $f'(c) = 0$. ¿Por qué no contradice esto el teorema de Rolle?

6. Sea $f(x) = \tan x$. Demuestre que $f(0) = f(\pi)$, pero no hay ningún número $x = c$ en $(0, \pi)$ tal que $f'(c) = 0$. ¿Por qué esto no contradice el teorema de Rolle?

Se requiere calculadora graficadora o computadora **1.** Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

7. Utilice la gráfica de f para estimar el valor de $x = c$ que satisface la conclusión del teorema del valor medio para el intervalo $[0, 8]$.



8. Utilice la gráfica de f dada en el ejercicio 7 para estimar los valores de $x = c$ que satisfacen la conclusión del teorema del valor medio para el intervalo $[1, 7]$.

9-12 Verifique que la función satisface las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo dado. Después encuentre todos los números $x = c$ que satisfacen la conclusión del teorema del valor medio.

9. $f(x) = 2x^2 - 3x + 1, \quad [0, 2]$

10. $f(x) = x^3 - 3x + 2, \quad [-2, 2]$

11. $f(x) = \ln x, \quad [1, 4]$

12. $f(x) = 1/x, \quad [1, 3]$

13-14 Encuentre el número $x = c$ que satisface la conclusión del teorema del valor medio sobre el intervalo dado. Grafique la función, la recta secante a través de los extremos y la recta tangente en $(c, f(c))$. ¿Son paralelas la recta secante y la tangente?

13. $f(x) = \sqrt{x}, \quad [0, 4]$

14. $f(x) = e^{-x}, \quad [0, 2]$

15. Sea $f(x) = (x - 3)^{-2}$. Demuestre que no hay ningún valor de $x = c$ en $(1, 4)$ tal que $f(4) - f(1) = f'(c)(4 - 1)$. ¿Por qué no contradice esto el teorema del valor medio?

16. Sea $f(x) = 2 - |2x - 1|$. Demuestre que no hay valor $x = c$ tal que $f(3) - f(0) = f'(c)(3 - 0)$. ¿Por qué esto no contradice el teorema del valor medio?

17-18 Demuestre que cada una de las siguientes ecuaciones tiene sólo una raíz real.

17. $2x + \cos x = 0$

18. $x^3 + e^x = 0$

19. Demuestre que la ecuación $x^3 - 15x + c = 0$ tiene como máximo una raíz en el intervalo $[-2, 2]$.

20. Pruebe que la ecuación $x^4 + 4x + c = 0$ tiene como máximo dos raíces reales.

21. a) Demuestre que una polinomial de grado 3 tiene a lo sumo tres raíces reales.
b) Demuestre que una polinomial de grado n tiene como máximo n raíces reales.

22. a) Suponga que f es derivable sobre $\mathbb{R}$ y tiene dos raíces. Demuestre que f' tiene al menos una raíz.
b) Suponga que f es dos veces derivable en $\mathbb{R}$ y tiene tres raíces. Demuestre que f'' tiene al menos una raíz real.
c) ¿Puede usted generalizar los incisos a) y b)?

23. Si $f(1) = 10$ y $f'(x) \geqslant 2$ para $1 \leqslant x \leqslant 4$, ¿qué tan pequeño puede posiblemente ser $f(4)$?

24. Suponga que $3 \leqslant f'(x) \leqslant 5$ para todos los valores de x. Demuestre que $18 \leqslant f(8) - f(2) \leqslant 30$.

25. ¿Existe una función f tal que $f(0) = -1$, $f(2) = 4$ y $f'(x) \leqslant 2$ para toda x?

26. Suponga que f y g son continuas sobre $[a, b]$ y derivables sobre (a, b). Suponga también que $f(a) = g(a)$ y $f'(x) < g'(x)$ para $a < x < b$. Demuestre que $f(b) < g(b)$. [*Sugerencia:* utilice el teorema del valor medio para la función $h = f - g$.]

27. Demuestre que $\sqrt{1 + x} < 1 + \frac{1}{2}x$ si $x > 0$.

28. Suponga que f es una función impar y es derivable sobre todo su dominio. Demuestre que para todo número positivo b, existe un número $x = c$ en $(-b, b)$ tal que $f'(c) = f(b)/b$.

29. Utilice el teorema del valor medio para demostrar la desigualdad

$$|\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b| \leqslant |a - b| \qquad \text{para toda } a \text{ y } b$$

30. Si $f'(x) = c$ (c es una constante) para toda x, utilice el corolario 7 para demostrar que $f(x) = cx + d$ para alguna constante d.

31. Sea $f(x) = 1/x$ y

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 + \dfrac{1}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Demuestre que $f'(x) = g'(x)$ para toda x en su dominio. ¿Podemos concluir del corolario 7 que $f - g$ es constante?

32. Utilice el método del ejemplo 6 para demostrar la identidad

$$2 \operatorname{sen}^{-1} x = \cos^{-1}(1 - 2x^2) \qquad x \geqslant 0$$

33. Demuestre la identidad

$$\operatorname{arcsen} \frac{x - 1}{x + 1} = 2 \arctan \sqrt{x} - \frac{\pi}{2}$$

34. A las 14:00 el velocímetro de un automóvil marca 30 mi/h. A las 14:10 marca 50 mi/h. Demuestre que en algún momento entre las 14:00 y 14:10 la aceleración es exactamente 120 mi/h^2.

35. Dos corredores inician una carrera al mismo tiempo y terminan en un empate. Demuestre que en algún momento durante la carrera tienen la misma velocidad. [*Sugerencia:* considere $f(t) = g(t) - h(t)$, donde g y h son las funciones posición de los dos corredores.]

36. Un número a se llama **punto fijo** de una función f si $f(a) = a$. Demuestre que si $f'(x) \neq 1$ para todos los números reales x, entonces f tiene a lo sumo un punto fijo.

4.3 Cómo afecta la derivada la forma de una gráfica

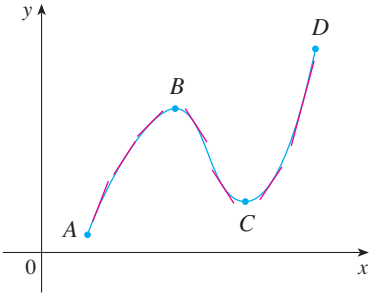


FIGURA 1

Muchas de las aplicaciones del cálculo dependen de nuestra capacidad para deducir hechos acerca de una función f a partir de la información que se obtiene de sus derivadas. Ya que $f'(x)$ representa la pendiente de la curva $y = f(x)$ en el punto $(x, f(x))$, nos indica la dirección de la curva en cada punto. Así, es razonable esperar que la información relacionada con $f'(x)$ nos proporcione información asociada con $f(x)$.

¿Qué indica f' respecto a f?

Para ver cómo la derivada de f puede decirnos dónde una función es creciente o decreciente, miremos la figura 1. (Las funciones crecientes y las decrecientes fueron definidas en la sección 1.1). Entre A y B y entre C y D, las rectas tangentes tienen pendiente positiva, por lo que $f'(x) > 0$. Entre B y C, las rectas tangentes tienen pendiente negativa, así que $f'(x) < 0$. Así, parece que f crece cuando $f'(x)$ es positiva y decrece cuando $f'(x)$ es negativa. Para demostrar que esto siempre es el caso, usamos el teorema del valor medio.

Abreviaremos el nombre de esta prueba como Prueba C/D

Prueba creciente/decreciente

a) Si $f'(x) > 0$ sobre un intervalo, entonces f es creciente sobre ese intervalo.

b) Si $f'(x) < 0$ sobre un intervalo, entonces f es decreciente sobre ese intervalo.

DEMOSTRACIÓN

a) Sean x_1 y x_2 dos números cualesquiera en el intervalo con $x_1 < x_2$. Según la definición de una función creciente (página 19), tenemos que demostrar que $f(x_1) < f(x_2)$.

Sabemos que $f'(x) > 0$ y que f es derivable sobre (x_1, x_2), así que, por el teorema del valor medio, existe un número c entre x_1 y x_2 tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \quad \boxed{1}$$

Ahora $f'(c) > 0$ por el supuesto de que $x_2 - x_1 > 0$ ya que $x_1 < x_2$. Así, el lado derecho de la ecuación 1 es positivo, por lo que

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \quad \text{o} \quad f(x_1) < f(x_1)$$

lo que demuestra que f es creciente.

El inciso b) se demuestra de manera similar.

V EJEMPLO 1 Encuentre dónde la función $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ es creciente y dónde es decreciente.

SOLUCIÓN $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)(x + 1)$

Para utilizar la prueba C/D tenemos que investigar dónde $f'(x) > 0$ y dónde $f'(x) < 0$. Esto depende de los signos de los tres factores de $f'(x)$, es decir, $12x$, $(x - 2)$ y $(x + 1)$. Para esto, dividimos la recta real en intervalos cuyos extremos son los números críticos: -1, 0 y 2, y organizamos nuestro trabajo en una gráfica. Un signo *más* indica que la expresión dada es positiva, y un signo *menos* indica que es negativa. La última columna de la tabla da la conclusión basada en la prueba C/D. Por ejemplo, $f'(x) < 0$ para $0 < x < 2$, por lo que f es decreciente sobre $(0, 2)$. (También sería correcto decir que f es decreciente sobre el intervalo cerrado $[0, 2]$.)

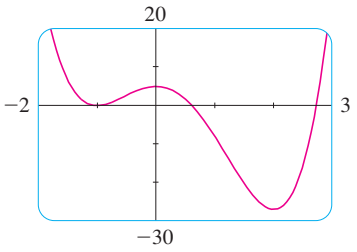


FIGURA 2

Intervalo	$12x$	$x-2$	$x+1$	$f'(x)$	f
$x<-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	Decreciente sobre $(-\infty,-1)$
$-1<x<0$	$-$	$-$	$+$	$+$	Creciente sobre $(-1,0)$
$0<x<2$	$+$	$-$	$+$	$-$	Decreciente sobre $(0,2)$
$x>2$	$+$	$+$	$+$	$+$	Creciente sobre $(2,\infty)$

La gráfica de f que se muestra en la figura 2 confirma la información de la tabla.

Recuerde de la sección 4.1 que si f tiene un máximo o mínimo locales en c, entonces c debe ser un número crítico de f (por el teorema de Fermat), pero no todo número crítico da lugar a un máximo o mínimo. Por tanto, necesitamos una prueba que nos diga si f tiene o no máximos o mínimos locales en un número crítico.

Puede observarse en la figura 2 que $f(0)=5$ es un valor máximo local de f porque crece sobre $(-1,0)$ y disminuye sobre $(0,2)$. O bien, en términos de derivadas, $f'(x)>0$ para $-1<x<0$ y $f'(x)<0$ para $0<x<2$. En otras palabras, el signo de $f'(x)$ cambia de positivo a negativo en $x=0$. Esta observación es la base de la siguiente prueba.

Prueba de la primera derivada Supongamos que $x=c$ es un número crítico de una función continua f.

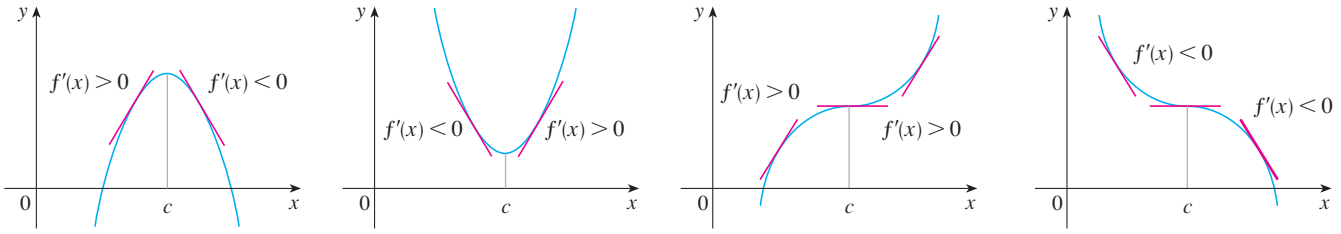
a) Si f' cambia de positiva a negativa en c, entonces f tiene un máximo local en c.

b) Si f' cambia de negativo a positivo en c, entonces f tiene un mínimo local en c.

c) Si f' no cambia de signo en c (p. ej., si f' es positiva por ambos lados de c o negativa por ambos lados), entonces f no tiene ningún máximo o mínimo local en c.

La prueba de la primera derivada es una consecuencia de la prueba C/D. En el inciso a), por ejemplo, puesto que el signo de $f'(x)$ cambia de positivo a negativo en c, f es creciente por la izquierda de c y decreciente por la derecha de c. Se deduce entonces que f tiene un máximo local en c.

Es fácil recordar la prueba de la primera derivada al ver el comportamiento de gráficas como las de la figura 3.



a) Máximo local b) Mínimo local c) Sin máximos ni mínimos d) Sin máximos ni mínimos

FIGURA 3

V EJEMPLO 2 Encuentre los valores mínimos y máximos locales de la función f en el ejemplo 1.

SOLUCIÓN De la tabla en la solución del ejemplo 1 vemos que $f'(x)$ cambia de negativa a positiva en $x=-1$, así que $f(-1)=0$ es un valor mínimo local por la prueba de la primera derivada. Del mismo modo, f' cambia de negativa a positiva en $x=2$, por

lo que $f(2) = -27$ también es un valor mínimo local. Como se ha señalado anteriormente, $f(0) = 5$ es un valor máximo local porque $f'(x)$ cambia de positiva a negativa en $x = 0$.

EJEMPLO 3 Encuentre los valores máximo y mínimo locales de la función

$$g(x) = x + 2 \operatorname{sen} x \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$$

SOLUCIÓN Para encontrar los números críticos de g, derivamos:

$$g'(x) = 1 + 2 \cos x$$

Así que $g'(x) = 0$ cuando $\cos x = -\frac{1}{2}$. Las soluciones de esta ecuación son $2\pi/3$ y $4\pi/3$. Debido a que g es derivable para toda x, los únicos números críticos son $2\pi/3$ y $4\pi/3$, así que podemos analizar a g en la siguiente tabla.

Los signos + en la tabla vienen del hecho de que $g'(x) > 0$ cuando $\cos x > -\frac{1}{2}$. A partir de la gráfica de $y = \cos x$, esto es cierto en los intervalos indicados.

Intervalo	$g'(x) = 1 + 2 \cos x$	g
$0 < x < 2\pi/3$	+	creciente sobre $(0, 2\pi/3)$
$2\pi/3 < x < 4\pi/3$	−	decreciente sobre $(2\pi/3, 4\pi/3)$
$4\pi/3 < x < 2\pi$	+	creciente sobre $(4\pi/3, 2\pi)$

Ya que $g'(x)$ cambia de positivo a negativo en $2\pi/3$, la prueba de la primera derivada nos indica que existe un máximo local en $x = 2\pi/3$ y el máximo valor local es

$$g(2\pi/3) = \frac{2\pi}{3} + 2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3} \approx 3.83$$

Por otro lado, $g'(x)$ cambia de negativa a positiva en $x = 4\pi/3$ y, por tanto,

$$g(4\pi/3) = \frac{4\pi}{3} + 2 \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} \approx 2.46$$

es un valor mínimo local. La gráfica de g en la figura 4 apoya nuestra conclusión.

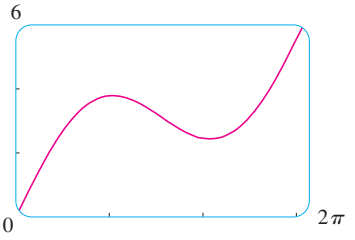


FIGURA 4
$g(x) = x + 2 \operatorname{sen} x$

¿Qué dice f'' respecto a f?

La figura 5 muestra las gráficas de dos funciones crecientes sobre (a, b). Ambas gráficas unen el punto A al punto B, pero parecen diferentes porque se doblan en diferentes direcciones. ¿Cómo podemos distinguir entre estos dos tipos de comportamiento? En la figura 6, las rectas tangentes a estas curvas se han dibujado en varios puntos. En a) sobre la curva queda por arriba de las rectas tangentes y se dice que f es *cóncava hacia arriba* sobre (a, b). En b), la curva se encuentra por debajo de las rectas tangentes y g se llama *cóncava hacia abajo* sobre (a, b).

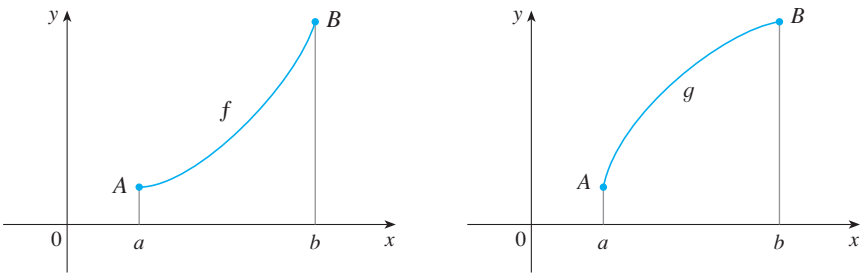


FIGURA 5

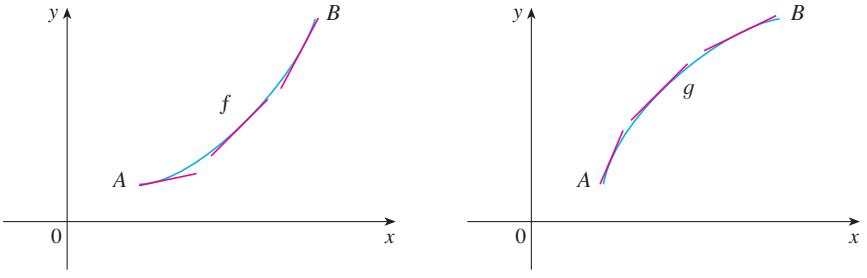


FIGURA 6

Definición Si la gráfica de f queda por arriba de todas sus rectas tangentes sobre un intervalo I, entonces se dice que es **cóncava hacia arriba** sobre I. Si la gráfica de f queda por abajo de todas sus rectas tangentes, se dice que es **cóncava hacia abajo** sobre I.

La figura 7 muestra la gráfica de una función que es cóncava hacia arriba (abreviado CA) sobre los intervalos (b, c), (d, e) y (e, p), y cóncava hacia abajo (CB) sobre los intervalos (a, b), (c, d), y (p, q).

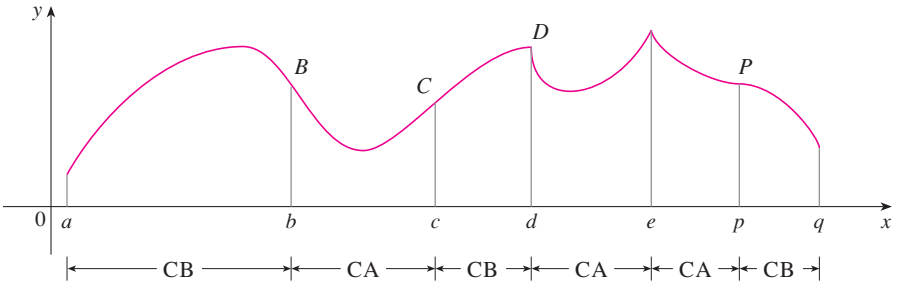


FIGURA 7

Veamos cómo la segunda derivada ayuda a determinar los intervalos de concavidad. Al observar la figura 6a, puede verse que, de izquierda a derecha, la pendiente de la recta tangente es creciente. Esto significa que la derivada f' es una función creciente y, por tanto, su derivada f'' es positiva. Asimismo, en la figura 6b) la pendiente de la recta tangente decrece de izquierda a derecha, así que f' decrece y, por ende, f'' es negativa. Este razonamiento puede invertirse y sugiere que el siguiente teorema es verdadero. En el apéndice F se da una demostración con la ayuda del teorema del valor medio.

Prueba de concavidad

a) Si $f''(x) > 0$ para toda x en I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba sobre I.

b) Si $f''(x) < 0$ para toda x en I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo sobre I.

EJEMPLO 4 La figura 8 muestra una gráfica de la población de abejas de Chipre criadas en un colmenar. ¿Cómo cambia la tasa de crecimiento poblacional con el tiempo? ¿Cuándo esta tasa es más alta? ¿Sobre qué intervalos es P cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo?

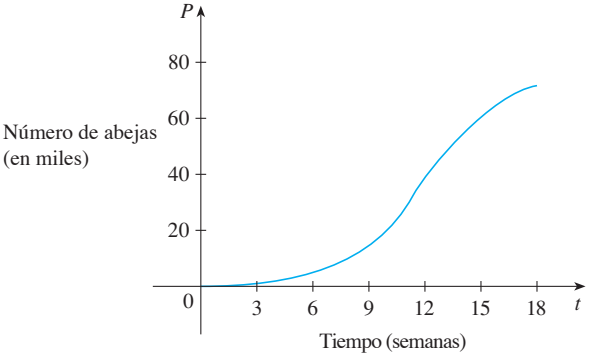


FIGURA 8

SOLUCIÓN Observando la pendiente de la curva cuando t aumenta, vemos que la tasa de crecimiento de la población es inicialmente muy pequeña, después aumenta hasta que llega un máximo aproximadamente a $t = 12$ semanas y disminuye a medida que la población comienza a nivelarse. A medida que la población se acerca a su valor máximo de aproximadamente 75 000 (llamado la *capacidad de acarreo*), la tasa de crecimiento, $P'(t)$, se aproxima a 0. La curva parece ser cóncava hacia arriba en $(0, 12)$ y cóncava hacia abajo en $(12, 18)$.

En el ejemplo 4, la curva de la población ha cambiado de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo en aproximadamente el punto $(12, 38\,000)$. Este punto se denomina *punto de inflexión* de la curva. La importancia de este punto es que la tasa de crecimiento de la población tiene allí su valor máximo. En general, un punto de inflexión es aquel donde una curva cambia de dirección la concavidad.

Definición Un punto P sobre una curva $y = f(x)$ se llama *punto de inflexión* si f es allí continua y la curva cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo o de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba en P.

Por ejemplo, en la figura 7, B, C, D y P son los puntos de inflexión. Observe que si una curva tiene una recta tangente en un punto de inflexión, entonces la curva corta a la recta tangente en ese punto.

De acuerdo con la prueba de concavidad, existe un punto de inflexión en cualquier punto donde la segunda derivada cambia de signo.

V EJEMPLO 5 Esboce una posible gráfica de una función f que cumpla con las condiciones siguientes:

i) $f'(x) > 0$ sobre $(-\infty, 1)$, $f'(x) < 0$ sobre $(1, \infty)$

ii) $f''(x) > 0$ sobre $(-\infty, -2)$ y $(2, \infty)$, $f''(x) < 0$ sobre $(-2, 2)$

iii) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

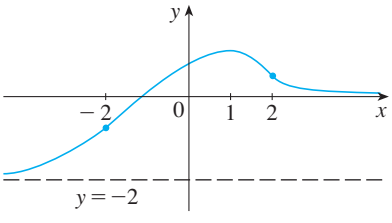


FIGURA 9

SOLUCIÓN La condición i) nos señala que f es creciente sobre $(-\infty, 1)$ y decreciente sobre $(1, \infty)$. La condición ii) dice que f es cóncava hacia arriba sobre $(-\infty, -2)$ y $(2, \infty)$ y cóncava hacia abajo sobre $(-2, 2)$. De la condición iii) sabemos que la gráfica de f tiene dos asíntotas horizontales: $y = -2$ e $y = 0$.

Primero dibujamos la asíntota horizontal $y = -2$ como una recta discontinua (véase la figura 9). Después dibujamos la gráfica de f aproximándose a esta asíntota hacia el extremo izquierdo, creciendo a su punto máximo en $x = 1$ y decreciendo hacia el eje x hacia el

extremo derecho. También nos aseguramos de que la gráfica tiene puntos de inflexión cuando $x = -2$ y $x = 2$. Observe que hicimos que la curva se doble hacia arriba para $x < -2$ y $x > 2$, y se doble hacia abajo cuando x está entre -2 y 2.

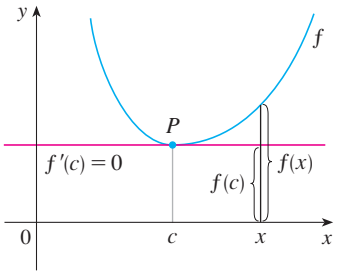


FIGURA 10
$f''(c) > 0$, f es cóncava hacia arriba

Otra aplicación de la segunda derivada es la siguiente prueba para los valores máximos y mínimos, que no es más que una consecuencia de la prueba de concavidad.

Prueba de la segunda derivada Supongamos que f'' es continua cerca de $x = c$.

a) Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en $x = c$.

b) Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, entonces f tiene un máximo local en $x = c$.

Por ejemplo, el inciso a) es cierto porque $f''(x) > 0$ cerca de $x = c$ y, por tanto, f es cóncava hacia arriba cerca de c. Esto significa que la gráfica está *sobre* su recta tangente horizontal en c y, por tanto, f tiene un mínimo local en $x = c$. (Véase la figura 10.)

V EJEMPLO 6 Discuta la curva $y = x^4 - 4x^3$ respecto a la concavidad, puntos de inflexión y máximos y mínimos locales. Utilice esta información para esbozar la curva.

SOLUCIÓN Si $f(x) = x^4 - 4x^3$, entonces

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$$
$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)$$

Para encontrar los números críticos establecemos $f'(x) = 0$ para obtener $x = 0$ y $x = 3$. Para utilizar la prueba de la segunda derivada evaluamos f'' en estos números críticos:

$$f''(0) = 0 \qquad f''(3) = 36 > 0$$

Ya que $f'(3) = 0$ y $f''(3) > 0$, $f(3) = -27$ es un mínimo local. Como $f''(0) = 0$, la prueba de la segunda derivada no aporta información sobre el número crítico $x = 0$. Pero ya que $f'(x) < 0$ para $x < 0$ y también para $0 < x < 3$, la prueba de la primera derivada nos dice que f no tiene un máximo o mínimo local en 0. [De hecho, la expresión para $f'(x)$ muestra que f decrece a la izquierda de 3 y crece a la derecha de 3.]

Puesto que $f''(x) = 0$ cuando $x = 0$ o $x = 2$, dividimos la recta real en intervalos con estos números como extremos y completamos la siguiente tabla.

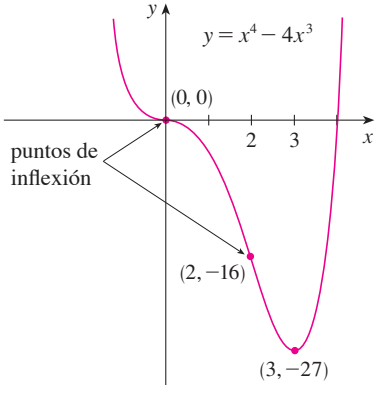


FIGURA 11

Intervalo	$f''(x) = 12x(x - 2)$	Concavidad
$(-\infty, 0)$	+	hacia arriba
$(0, 2)$	−	hacia abajo
$(2, \infty)$	+	hacia arriba

El punto (0, 0) es un punto de inflexión, ya que la curva cambia ahí de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo. También (2, −16) es un punto de inflexión, ya que allí la curva cambia de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba.

Utilizando el mínimo local, los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión, esbozamos la curva de la figura 11.

NOTA La prueba de la segunda derivada es incierta cuando $f''(c) = 0$. En otras palabras, en tal punto puede haber un máximo, puede haber un mínimo, o podría no haber máximo o mínimo (como en el ejemplo 6). Esta prueba también falla cuando $f''(c)$ no existe. En tales casos, debe utilizarse la prueba de la primera derivada. De hecho, aun cuando se aplican ambas pruebas, la prueba de la primera derivada es a menudo más fácil de utilizar.

EJEMPLO 7 Esboce la gráfica de la función $f(x) = x^{2/3}(6 - x)^{1/3}$.

SOLUCIÓN Con las primeras dos derivadas obtenemos

Utilice las reglas de derivación para verificar estos cálculos.

$$f'(x) = \frac{4 - x}{x^{1/3}(6 - x)^{2/3}} \qquad f''(x) = \frac{-8}{x^{4/3}(6 - x)^{5/3}}$$

Dado que $f'(x) = 0$ cuando $x = 4$ y $f'(x)$ no existe cuando $x = 0$ o $x = 6$, los números críticos son 0, 4 y 6.

Intervalo	$4 - x$	$x^{1/3}$	$(6 - x)^{2/3}$	$f'(x)$	f
$x < 0$	+	−	+	−	decreciente sobre $(-\infty, 0)$
$0 < x < 4$	+	+	+	+	creciente sobre $(0, 4)$
$4 < x < 6$	−	+	+	−	decreciente sobre $(4, 6)$
$x > 6$	−	+	+	−	decreciente sobre $(6, \infty)$

Para encontrar los valores extremos locales utilizamos la prueba de la primera derivada. Puesto que f' cambia de negativa a positiva en $x = 0$, $f(0) = 0$ es un mínimo local. Ya que f' cambia de positiva a negativa en $x = 4$, $f(4) = 2^{5/3}$ es un máximo local. El signo de f' no cambia en $x = 6$, por lo que no hay mínimo o máximo. (La prueba de la segunda derivada podría utilizarse en $x = 4$, pero no en $x = 0$ o $x = 6$ porque f'' no existe en ninguno de estos números.)

Observando la expresión para $f''(x)$ y tomando nota de que $x^{4/3} \geqslant 0$ para toda x, tenemos $f''(x) < 0$ para $x < 0$ y para $0 < x < 6$, y $f''(x) > 0$ para $x > 6$. Así que f es cóncava hacia abajo sobre $(-\infty, 0)$ y $(0, 6)$ y cóncava hacia arriba sobre $(6, \infty)$, y el único punto de inflexión es $(6, 0)$. La gráfica se esboza en la figura 12. Tenga en cuenta que la curva tiene una recta tangente vertical en $(0, 0)$ y $(6, 0)$ debido a que $|f'(x)| \to \infty$ conforme $x \to 0$ y a medida que $x \to 6$.

Intente reproducir la gráfica de la figura 12 con una calculadora graficadora o una computadora. Algunas máquinas producen la gráfica completa, algunas generan únicamente la parte a la derecha del eje y, y algunas otras producen únicamente la parte entre $x = 0$ y $y = 6$. Para una explicación y resolución de esto, vea el ejemplo 7 en la sección 1.4. Una expresión equivalente que da la gráfica correcta es

$$y = (x^2)^{1/3} \cdot \frac{6 - x}{|6 - x|} |6 - x|^{1/3}$$

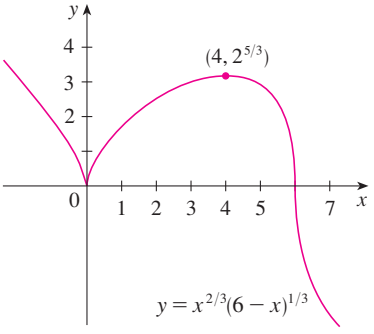


FIGURA 12

EJEMPLO 8 Utilice la primera y segunda derivadas de $f(x) = e^{1/x}$, junto con las asíntotas, para esbozar su gráfica.

SOLUCIÓN Note que el dominio de f es $\{x \mid x \neq 0\}$, por lo que comprobamos para asíntotas verticales calculando los límites por la izquierda y por la derecha cuando $x \to 0$. Conforme $x \to 0^+$, sabemos que $t = 1/x \to \infty$, así que

$$\lim_{x \to 0^+} e^{1/x} = \lim_{t \to \infty} e^t = \infty$$

y esto demuestra que $x = 0$ es una asíntota vertical. A medida que $x \to 0^-$, tenemos $t = 1/x \to -\infty$, por lo que

$$\lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = \lim_{t \to -\infty} e^t = 0$$

TEC En Module 4.3 puede usted practicar usando la información relacionada con f', f'' y las asíntotas para determinar la forma de la gráfica de f.

Conforme $x \to \pm\infty$, tenemos $1/x \to 0$ así que

$$\lim_{x \to \pm\infty} e^{1/x} = e^0 = 1$$

Esto demuestra que $y = 1$ es una asíntota horizontal.

Ahora vamos a calcular la derivada. La regla de la cadena da

$$f'(x) = -\frac{e^{1/x}}{x^2}$$

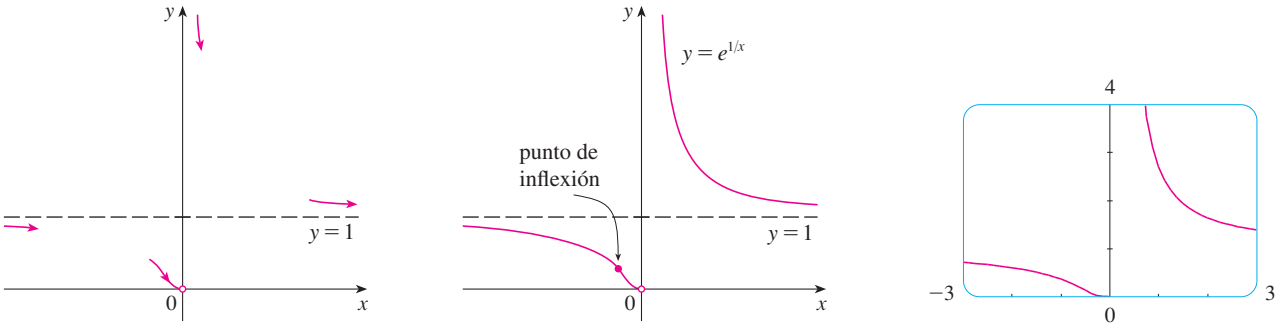
Como $e^{1/x} > 0$ y $x^2 > 0$ para toda $x \neq 0$, tenemos $f'(x) < 0$ para toda $x \neq 0$. Así f es decreciente sobre $(-\infty, 0)$ y sobre $(0, \infty)$. No hay un número crítico, por lo que la función

no tiene máximos ni mínimos locales. La segunda derivada es

$$f''(x) = -\frac{x^2e^{1/x}(-1/x^2) - e^{1/x}(2x)}{x^4} = \frac{e^{1/x}(2x + 1)}{x^4}$$

Puesto que $e^{1/x} > 0$ y $x^4 > 0$, tenemos $f''(x) > 0$ cuando $x > -\frac{1}{2}$ $(x \neq 0)$ y $f''(x) < 0$ cuando $x < -\frac{1}{2}$. Así que la curva es cóncava hacia abajo sobre $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ y cóncava hacia arriba sobre $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ y sobre $(0, \infty)$. El punto de inflexión es $\left(-\frac{1}{2}, e^{-2}\right)$.

Para esbozar la gráfica de f trazamos primero la asíntota horizontal $y = 1$ (como una recta discontinua), junto con las partes de la curva cerca de la asíntota en un esbozo preliminar [figura 13a]. Estas partes reflejan la información relativa a los límites y el hecho de que f es decreciente sobre $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$. Observe que hemos indicado que $f(x) \to 0$ conforme $x \to 0^-$, a pesar de que $f(0)$ no existe. En la Figura 13b terminamos el esbozo incorporando la información relativa a la concavidad y el punto de inflexión. En la figura 13c) revisamos nuestro trabajo con un dispositivo de graficación.



a) Esquema preliminar b) Dibujo terminado c) Configuración por computadora

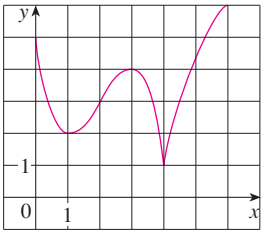
FIGURA 13

4.3 Ejercicios

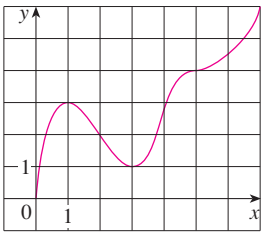
1-2 Utilice la gráfica de f para encontrar lo siguiente.

a) Los intervalos abiertos sobre los que f es creciente.
b) Los intervalos abiertos sobre los que f es decreciente.
c) Los intervalos abiertos sobre los que f es cóncava hacia arriba.
d) Los intervalos abiertos sobre los que f es cóncava hacia abajo.
e) Las coordenadas de los puntos de inflexión.

1.



2.

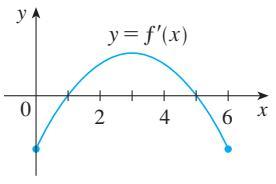


3. Supongamos que se le da una fórmula para una función f.
a) ¿cómo determinaría dónde f aumenta o disminuye?
b) ¿Cómo determinaría dónde la gráfica de f es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo?
c) ¿Dónde se localizan los puntos de inflexión?

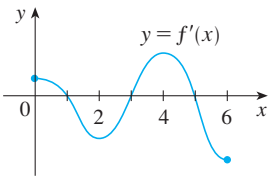
4. a) Establezca la prueba de la primera derivada
b) Establezca la prueba de la segunda derivada. ¿Bajo qué circunstancias no son concluyentes? ¿Qué haría si no es válida?

5-6 En los ejercicios 5 y 6, se muestran las gráficas de la *derivada* f' de una función f.
a) ¿Sobre qué intervalos f crece o decrece?
b) ¿En qué valores de x, f tiene un máximo o mínimo local?

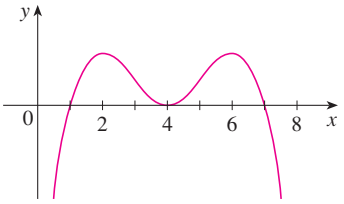
5.



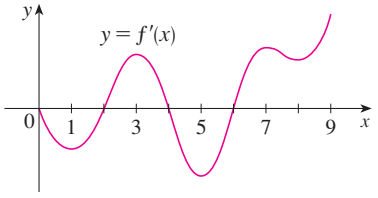
6.



7. En cada inciso establezca las coordenadas x de los puntos de inflexión de f. Dé las razones de sus respuestas.
a) Si la curva dada es la gráfica de f.
b) Si la curva dada es la gráfica de f'.
c) Si la curva dada es la gráfica de f''.



8. Se muestra la gráfica de la primera derivada f' de una función f.
a) ¿Sobre qué intervalos f es creciente? Explique.
b) ¿En qué valores de x tiene f un máximo o mínimo local? Explique.
c) ¿Sobre qué intervalos es f cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo? Explique.
d) ¿Cuáles son las coordenadas x de los puntos de inflexión de f? ¿Por qué?



9-18
a) Encuentre los intervalos sobre los cuales f es creciente o decreciente.
b) Encuentre los valores máximos y mínimos locales de f.
c) Encuentre los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.

9. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$

10. $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1$

11. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$

12. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

13. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

14. $f(x) = \cos^2 x - 2 \operatorname{sen} x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

15. $f(x) = e^{2x} + e^{-x}$

16. $f(x) = x^2 \ln x$

17. $f(x) = x^2 - x - \ln x$

18. $f(x) = x^4 e^{-x}$

19-21 Encuentre los valores máximos y mínimos locales de f utilizando las pruebas de la primera y la segunda derivada. ¿Qué método prefiere?

19. $f(x) = 1 + 3x^2 - 2x^3$

20. $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$

21. $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt[4]{x}$

22. a) Encuentre los números críticos de $f(x) = x^4(x - 1)^3$.
b) ¿Qué nos dice la prueba de la segunda derivada sobre el comportamiento de f en estos números críticos?
c) ¿Qué nos indica la prueba de la primera derivada?

23. Supongamos que f'' es continua sobre $(-\infty, \infty)$.
a) Si $f'(2) = 0$ y $f''(2) = -5$, ¿qué puede decir acerca de f'?
b) Si $f'(6) = 0$ y $f''(6) = 0$, ¿qué puede decir acerca de f?

24-29 Esboce la gráfica de una función que satisfaga todas las condiciones determinadas.

24. Asíntota vertical $x = 0$, $f'(x) > 0$ si $x < -2$,
$f'(x) < 0$ si $x > -2$ $(x \neq 0)$,
$f''(x) < 0$ si $x < 0$, $f''(x) > 0$ si $x > 0$

25. $f'(0) = f'(2) = f'(4) = 0$,
$f'(x) > 0$ si $x < 0$ o $2 < x < 4$,
$f'(x) < 0$ si $0 < x < 2$ o $x > 4$,
$f''(x) > 0$ si $1 < x < 3$, $f''(x) < 0$ si $x < 1$ o $x > 3$

26. $f'(1) = f'(-1) = 0$, $f'(x) < 0$ si $|x| < 1$,
$f'(x) > 0$ si $1 < |x| < 2$, $f'(x) = -1$ si $|x| > 2$,
$f''(x) < 0$ si $-2 < x < 0$, punto de inflexión $(0, 1)$

27. $f'(x) > 0$ si $|x| < 2$, $f'(x) < 0$ si $|x| > 2$,
$f'(-2) = 0$, $\lim_{x \to 2} |f'(x)| = \infty$, $f''(x) > 0$ si $x \neq 2$

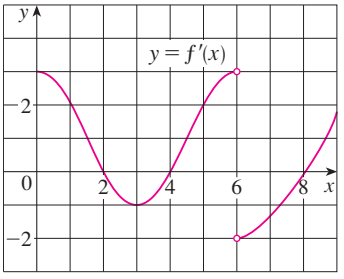
28. $f'(x) > 0$ si $|x| < 2$, $f'(x) < 0$ si $|x| > 2$,
$f'(-2) = 0$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$, $f(-x) = -f(x)$,
$f''(x) < 0$ si $0 < x < 3$, $f''(x) > 0$ si $x > 3$

29. $f'(x) < 0$ y $f''(x) < 0$ para toda x

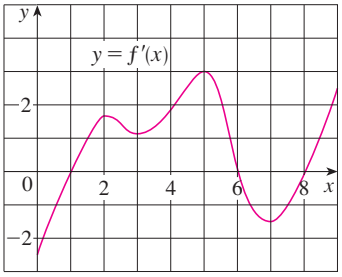
30. Supongamos que $f(3) = 2$, $f'(3) = \frac{1}{2}$ y $f'(x) > 0$ y $f''(x) < 0$ para toda x.
a) Esboce una posible gráfica para f.
b) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $f(x) = 0$? ¿Por qué?
c) ¿Es posible que $f'(2) = \frac{1}{3}$. ¿Por qué?

31-32 Se muestra la gráfica de la derivada f' de una función continua f.
a) ¿Sobre qué intervalos es f creciente? ¿Decreciente?
b) ¿En qué valores de x tiene f un máximo local? ¿Mínimo local?
c) ¿Sobre qué intervalos es f cóncava hacia arriba? ¿Cóncava hacia abajo?
d) Establezca las coordenadas x de los puntos de inflexión.
e) Suponiendo que $f(0) = 0$, esboce una gráfica de f.

31.



32.



33-34

a) Encuentre los intervalos donde crece o decrece.
b) Halle los valores máximos y mínimos locales.
c) Encuentre los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.
d) Utilice la información de los incisos a)-c) para esbozar la gráfica. Verifique su trabajo con un dispositivo de graficación.

33. $f(x) = x^3 - 12x + 2$

34. $f(x) = 36x + 3x^2 - 2x^3$

35. $f(x) = 2 + 2x^2 - x^4$

36. $g(x) = 200 + 8x^3 + x^4$

37. $h(x) = (x + 1)^5 - 5x - 2$

38. $h(x) = 5x^3 - 3x^5$

39. $F(x) = x\sqrt{6 - x}$

40. $G(x) = 5x^{2/3} - 2x^{5/3}$

41. $C(x) = x^{1/3}(x + 4)$

42. $f(x) = \ln(x^4 + 27)$

43. $f(\theta) = 2\cos\theta + \cos^2\theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

44. $S(x) = x - \operatorname{sen} x, \quad 0 \leq x \leq 4\pi$

45-52

a) Encuentre las asíntotas verticales y horizontales.
b) Halle los intervalos donde crece o decrece.
c) Busque los valores máximos y mínimos locales.
d) Encuentre los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.
e) Utilice la información de los incisos a)-d) para esbozar la gráfica de f.

45. $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$

46. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$

47. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$

48. $f(x) = \dfrac{e^x}{1 - e^x}$

49. $f(x) = e^{-x^2}$

50. $f(x) = x - \frac{1}{6}x^2 - \frac{2}{3}\ln x$

51. $f(x) = \ln(1 - \ln x)$

52. $f(x) = e^{\arctan x}$

53. Suponga que la derivada de una función f es $f'(x) = (x + 1)^2(x - 3)^5(x - 6)^4$. ¿Sobre qué intervalo es f creciente?

54. Utilice los métodos de esta sección para trazar la curva $y = x^3 - 3a^2x + 2a^3$, donde a es una constante positiva. ¿Qué tienen en común los miembros de esta familia de curvas? ¿Cómo se diferencian entre sí?

55-56

a) Utilice la gráfica de f para estimar los valores máximos y mínimos. Después, encuentre los valores exactos.
b) Estime el valor de x en el cual f crece más rápidamente. A continuación, encuentre el valor exacto.

55. $f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

56. $f(x) = x^2e^{-x}$

57-58

a) Utilice la gráfica de f para dar una estimación aproximada de los intervalos de concavidad y de las coordenadas de los puntos de inflexión.
b) Utilice la gráfica de f'' para dar estimaciones mejores.

57. $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

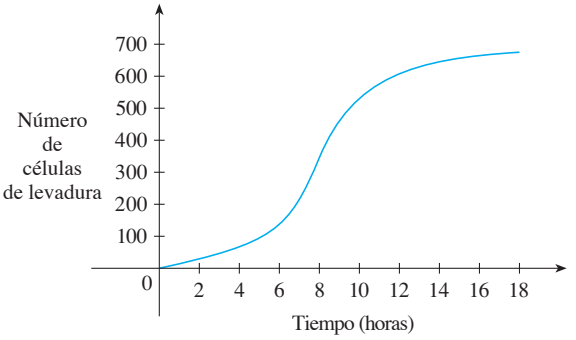
58. $f(x) = x^3(x - 2)^4$

SAC **59-60** Estime los intervalos de concavidad con una aproximación de un decimal mediante un sistema algebraico computarizado y grafique f''.

59. $f(x) = \dfrac{x^4 + x^3 + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$

60. $f(x) = \dfrac{x^2 \tan^{-1}x}{1 + x^3}$

61. Se muestra la gráfica de una población de células de levadura en un cultivo reciente de laboratorio como una función del tiempo.
a) Describa cómo varía la tasa de crecimiento de la población.
b) ¿Cuándo la tasa es más alta?
c) ¿Sobre qué intervalos es la función de población cóncava hacia arriba o hacia abajo?
d) Estime las coordenadas del punto de inflexión.



62. Sea $f(t)$ la temperatura en el tiempo t donde usted vive y suponga que en el tiempo $t = 3$ se siente incómodamente acalorado. ¿Cómo se siente en relación con los datos dados en cada caso?
a) $f'(3) = 2, \quad f''(3) = 4$
b) $f'(3) = 2, \quad f''(3) = -4$
c) $f'(3) = -2, \quad f''(3) = 4$
d) $f'(3) = -2, \quad f''(3) = -4$

63. Sea $C(t)$ una medida de los conocimientos que obtiene usted estudiando durante t horas para un examen. ¿Cuál cree que es más grande, $C(8) - C(7)$ o $C(3) - C(2)$? ¿Es la gráfica de C cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo? ¿Por qué?

64. Se vierte café en una jarrita como la que se ilustra en la figura, con una rapidez constante (medida en unidades de volumen por unidad de tiempo). Trace una gráfica aproximada de la altura ocupada por el café como función del tiempo. Explique la forma de la gráfica en términos de la concavidad. ¿Cuál es el significado del punto de inflexión?



65. Una *curva de respuesta a un medicamento* describe el nivel de medicación en el torrente sanguíneo después de que un medicamento es administrado. Con frecuencia se aplica una función de onda de impulso (surge, en inglés) $S(t) = At^p e^{-kt}$ para modelar la curva de respuesta, lo que refleja un aumento inicial en el nivel de medicamento y luego un descenso más gradual. Si, para un determinado medicamento, $A = 0.01$, $p = 4$, $k = 0.07$ y t se mide en minutos, calcule los tiempos correspondientes a los puntos de inflexión y explique su significado. Si usted dispone de un dispositivo de graficación, utilícelo para graficar la curva de respuesta.

66. La familia de curvas de campana

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

se utiliza en probabilidad y estadística y se le denomina *función de densidad normal*. La constante μ se conoce como *media*, y la constante positiva σ es la *desviación estándar*. Por simplicidad, cambiamos la escala de la función de modo que se elimine el factor $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$ y analizamos el caso especial donde $\mu = 0$. Por tanto, estudiamos la función

$$f(x) = e^{-x^2/(2\sigma^2)}$$

a) Encuentre la asíntota, el valor máximo y los puntos de inflexión de f.
b) ¿Qué rol tiene σ en la forma de la curva?
c) Ilustre graficando cuatro miembros de esta familia en la misma pantalla del dispositivo de graficación.

67. Encuentre una función cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ que tenga un valor máximo local de 3 en $x = -2$ y un valor mínimo local de 0 en $x = 1$.

68. ¿Para qué valores de los números a y b la función

$$f(x) = axe^{bx^2}$$

tiene el valor máximo $f(2) = 1$?

69. a) Si la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ tiene el valor mínimo local $-\frac{2}{9}\sqrt{3}$ en $x = 1/\sqrt{3}$, ¿cuáles son los valores de a y b?
b) ¿Cuál de las rectas tangentes a la curva en el inciso a) tiene la menor pendiente?

70. ¿Para qué valores de a y b es (2, 2.5) un punto de inflexión de la curva $x^2y + ax + by = 0$? ¿Qué puntos de inflexión adicionales tiene la curva?

71. Demuestre que la curva $y = (1 + x)/(1 + x^2)$ tiene tres puntos de inflexión y todos ellos se encuentran sobre una recta.

72. Demuestre que las curvas $y = e^{-x}$ e $y = -e^{-x}$ tocan la curva $y = e^{-x}$ sen x en sus puntos de inflexión.

73. Demuestre que los puntos de inflexión de la curva $y = x$ sen x están sobre la curva $y^2(x^2 + 4) = 4x^2$.

74-76 Suponga que todas las funciones son dos veces derivables y las segundas derivadas nunca son 0.

74. a) Si f y g son cóncavas hacia arriba sobre I, demuestre que $f + g$ es cóncava hacia arriba sobre I.
b) Si f es positiva y cóncava hacia arriba sobre I, demuestre que la función $g(x) = [f(x)]^2$ es cóncava hacia arriba sobre I.

75. a) Si f y g son positivas, crecientes y funciones cóncavas hacia arriba sobre I, demuestre que la función producto fg es cóncava hacia arriba sobre I.
b) Demuestre que el inciso a) es verdadero si f y g son decrecientes.
c) Suponga que f es creciente y g es decreciente. Muestre, dando tres ejemplos, que fg puede ser cóncava hacia arriba, cóncava hacia abajo o lineal. ¿Por qué no funciona en este caso el argumento de los incisos a) y b)?

76. Suponga que f y g son cóncavas hacia arriba sobre $(-\infty, \infty)$. ¿Bajo qué condiciones sobre f será la función compuesta $h(x) = f(g(x))$ cóncava hacia arriba?

---

77. Demuestre que $\tan x > x$ para $0 < x < \pi/2$. [*Sugerencia:* demuestre que $f(x) = \tan x - x$ es creciente sobre $(0, \pi/2)$.]

78. a) Demuestre que $e^x \geqslant 1 + x$ para $x \geqslant 0$.
b) Pruebe que $e^x \geqslant 1 + x + \frac{1}{2}x^2$ para $x \geqslant 0$.
c) Use inducción matemática para demostrar que para $x \geqslant 0$ y cualquier número entero positivo n,

$$e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

79. Demuestre que una función cúbica (una polinomial de tercer grado) siempre tiene exactamente un punto de inflexión. Si la gráfica tiene tres intersecciones en x: x_1, x_2 y x_3, demuestre que la coordenada x del punto de inflexión es $(x_1 + x_2 + x_3)/3$.

80. ¿Para qué valores de c el polinomio $P(x) = x^4 + cx^3 + x^2$ tienen dos puntos de inflexión? ¿Un punto de inflexión? ¿Ninguno? Ilustre graficando P para varios valores de c. ¿Cómo cambia la gráfica cuando c decrece?

81. Demuestre que si $(c, f(c))$ es un punto de inflexión de la gráfica de f y f'' existe en un intervalo abierto que contiene a c, entonces $f''(c) = 0$. [*Sugerencia:* aplique la prueba de la primera derivada y el teorema de Fermat a la función $g = f'$.]

82. Demuestre que si $f(x) = x^4$, entonces $f''(0) = 0$, pero $(0, 0)$ no es un punto de inflexión de la gráfica de f.

83. Demuestre que la función $g(x) = x\,|\,x\,|$ tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$, pero $g''(0)$ no existe.

84. Suponga que f''' es continua y $f'(c) = f''(c) = 0$, pero $f'''(c) > 0$. ¿f tiene un máximo o mínimo local en c? ¿f tiene un punto de inflexión en c?

85. Suponga que f es derivable sobre un intervalo I y $f'(x) > 0$ para todos los números x en I, excepto por un único número c. Demuestre que f es creciente sobre todo el intervalo I.

86. ¿Para qué valores de c la función

$$f(x) = cx + \frac{1}{x^2 + 3}$$

es creciente sobre $(-\infty, \infty)$?

87. Los tres casos en la prueba de la primera derivada cubren las situaciones que uno se encuentra con frecuencia, pero no agotan todas las posibilidades. Considere las funciones f, g y h cuyos valores en 0 son todas cero y, para $x \neq 0$,

$$f(x) = x^4 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \qquad g(x) = x^4\left(2 + \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right)$$

$$h(x) = x^4\left(-2 + \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right)$$

a) Demuestre que 0 es un número crítico de las tres funciones, pero sus derivadas cambian de signo infinitamente por ambos lados de 0.
b) Demuestre que f no tiene un máximo local ni un mínimo local en 0, g tiene un mínimo local y h tiene un máximo local.

4.4 Formas indeterminadas y regla de l´Hospital

Supongamos que estamos tratando de analizar el comportamiento de la función

$$F(x) = \frac{\ln x}{x - 1}$$

Aunque F no está definida cuando $x = 1$, necesitamos saber cómo se comporta *cerca* de 1. En particular, nos gustaría saber el valor del límite

$$\boxed{1} \qquad \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1}$$

Para el cálculo de este límite no podemos aplicar la ley 5 de los límites (el límite de un cociente es el cociente de los límites, consulte la sección 2.3) porque el límite del denominador es 0. De hecho, aunque en la expresión $\boxed{1}$ existe el límite, su valor no es evidente porque el numerador y denominador tienden a 0 y $\frac{0}{0}$ no está definido.

En general, si tenemos un límite de la forma

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

donde ambos $f(x) \to 0$ y $g(x) \to 0$ conforme $x \to a$, entonces este límite puede o no puede existir y se llama **forma indeterminada del tipo** $\frac{0}{0}$. Nos encontramos algunos límites de este tipo en el capítulo 2. Para funciones racionales, podemos cancelar factores comunes:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x(x - 1)}{(x + 1)(x - 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x}{x + 1} = \frac{1}{2}$$

Utilizamos un argumento geométrico para demostrar que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Pero estos métodos no funcionan para límites como los de 1, por lo que en esta sección presentamos un método sistemático, conocido como *regla de l'Hospital*, para la evaluación de formas indeterminadas.

Otra situación en la que no es evidente un límite ocurre cuando buscamos una asíntota horizontal de F y necesitamos evaluar el límite

$$\boxed{2} \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x - 1}$$

No es obvio cómo evaluar este límite porque tanto el numerador como el denominador son muy grandes conforme $x \to \infty$. Hay una lucha entre numerador y denominador. Si gana el numerador, el límite será ∞; si gana el denominador, la respuesta será 0. O puede haber algún comportamiento intermedio, en cuyo caso la respuesta será algún número finito positivo.

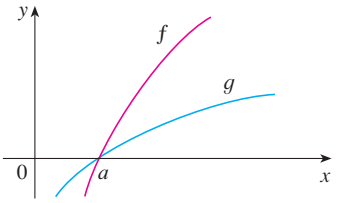
En general, si tenemos un límite de la forma

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

donde ambos $f(x) \to \infty$ (o $-\infty$) y $g(x) \to \infty$ (o $-\infty$), entonces el límite puede o no puede existir y se llama **forma indeterminada de tipo** ∞/∞. Vimos en la sección 2.6 que este tipo de límite puede ser evaluado para ciertas funciones, incluyendo funciones racionales, dividiendo numerador y denominador por la mayor potencia de x en el denominador. Por ejemplo,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \dfrac{1}{x^2}}{2 + \dfrac{1}{x^2}} = \frac{1 - 0}{2 + 0} = \frac{1}{2}$$

Este método no funciona para límites como 2, pero la regla de l'Hospital también se aplica a este tipo de forma indeterminada.



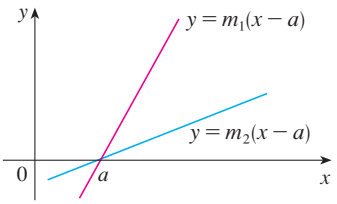


FIGURA 1

La figura 1 sugiere visualmente por qué regla de l'Hospital puede ser cierta. La primera gráfica muestra dos funciones derivables f y g, donde ambas se acercan a 0 conforme $x \to a$. Si pudiéramos acercarnos hacia el punto $(a, 0)$, las gráficas empezarían a parecerse a una recta. Pero si realmente las funciones fueran lineales, como en la segunda gráfica, entonces su razón sería

$$\frac{m_1(x - a)}{m_2(x - a)} = \frac{m_1}{m_2}$$

que es la razón de sus derivadas. Esto sugiere que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Regla de l'Hospital Suponga que f y g son derivables y $g'(x) \neq 0$ sobre un intervalo abierto I que contiene a (excepto posiblemente en a). Suponga que

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

o que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$$

(En otras palabras, tenemos una forma indeterminada de tipo $\frac{0}{0}$ o ∞/∞.) Entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

si existe el límite del lado derecho (o es ∞ o $-\infty$).

NOTA 1 La regla de l'Hospital señala que el límite de un cociente de funciones es igual al límite del cociente de sus derivadas, siempre que se cumplan con las condiciones dadas. Es especialmente importante verificar las condiciones impuestas a los límites de f y g antes de utilizar la regla de l'Hospital.

L´Hospital

La Regla de l'Hospital proviene de un noble francés, el marqués de l'Hospital (1661-1704), pero fue descubierto por un matemático suizo, John Bernoulli (1667-1748). A veces se puede ver l'Hospital escrito como l'HÔpital, pero él mismo escribe su nombre así, l'Hospital, como era común en el siglo XVII. Vea en el ejercicio 81 el ejemplo que el marqués utiliza para ilustrar su regla. Consulte el proyecto en la página 310 para más detalles históricos.

NOTA 2 La regla de l'Hospital también es válida para límites unilaterales y límites al infinito o al infinito negativo; es decir, "$x \to a$" puede ser sustituido por cualquiera de los símbolos $x \to a^+$, $x \to a^-$, $x \to \infty$ o $x \to -\infty$.

NOTA 3 Para el caso especial en que $f(a) = g(a) = 0$, f' y g' son continuas y $g'(a) \neq 0$, es fácil ver por qué la regla de l'Hospital es cierta. De hecho, utilizando la forma alternativa de la definición de una derivada, tenemos

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{\lim_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\lim_{x\to a} \dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \lim_{x\to a} \frac{\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Es más difícil demostrar la versión general de la regla de l'Hospital. Véase el apéndice F.

V EJEMPLO 1 Encuentre $\lim_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x - 1}$.

SOLUCIÓN Dado que

$$\lim_{x\to 1} \ln x = \ln 1 = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 1} (x - 1) = 0$$

podemos aplicar la regla de l'Hospital:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{\dfrac{d}{dx}(\ln x)}{\dfrac{d}{dx}(x - 1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1/x}{1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = 1$$

Observe que cuando se utiliza la regla de l'Hospital derivamos el numerador y el denominador por separado. No utilizamos la regla del cociente.

V EJEMPLO 2 Obtenga $\lim_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$.

SOLUCIÓN Tenemos $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$ y $\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$, así que la regla de l'Hospital da

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{d}{dx}(e^x)}{\dfrac{d}{dx}(x^2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x}$$

Ya que $e^x \to \infty$ y $2x \to \infty$ conforme $x \to \infty$, el límite del lado derecho también está indeterminado, pero aplicando nuevamente la regla de l'Hospital obtenemos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2} = \infty$$

En la figura 2 se muestra la gráfica de la función del ejemplo 2. Hemos discutido previamente que las funciones exponenciales crecen más rápido que las funciones potencia, por lo que el resultado del ejemplo 2 no es inesperado. Véase el ejercicio 71.

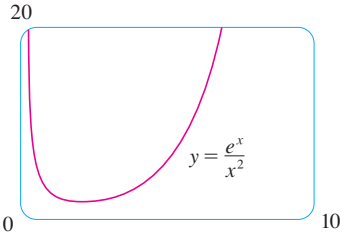


FIGURA 2

En la figura 3, se muestra la gráfica de la función del ejemplo 3. Ya hemos discutido previamente que las funciones logarítmicas crecen muy lentamente, así que no es sorprendente que la razón se aproxime a 0 conforme $x \to \infty$. Véase el ejercicio 72.

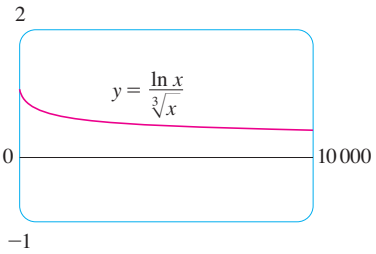


FIGURA 3

V EJEMPLO 3 Obtenga $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$.

SOLUCIÓN Dado que $x \to \infty$ y $\sqrt[3]{x} \to \infty$ conforme $x \to \infty$, utilizamos la regla de l'Hospital:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1/x}{\frac{1}{3}x^{-2/3}}$$

Note que ahora el límite del lado derecho es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Pero en lugar de aplicar la regla de l'Hospital una segunda vez, como lo hicimos en el ejemplo 2, primero simplificamos la expresión y vemos que la segunda aplicación no es necesaria:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1/x}{\frac{1}{3}x^{-2/3}} = \lim_{x \to \infty} \frac{3}{\sqrt[3]{x}} = 0$$

EJEMPLO 4 Encuentre $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan x - x}{x^3}$. (Véase el ejercicio 44 de la sección 2.2.)

SOLUCIÓN Observamos que $x - x \to 0$ y $x^3 \to 0$ a medida que $x \to 0$, así que aplicamos la regla de l'Hospital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2}$$

Ya que el límite del lado derecho es aún una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, volvemos a aplicar la regla de l'Hospital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sec^2 x \tan x}{6x}$$

La gráfica en la figura 4 da una confirmación visual del resultado de ejemplo 4. Sin embargo, si tuviéramos que extendernos demasiado, obtendríamos una gráfica muy inexacta porque $\tan x$ está cerca de x cuando ésta es pequeña. Véase el ejercicio 44d) de la sección 2.2.

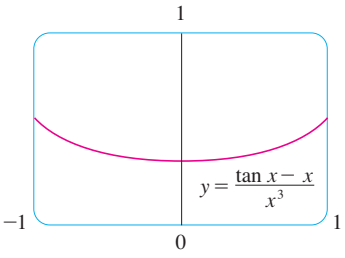


FIGURA 4

Puesto que $\lim_{x \to 0} \sec^2 x = 1$, simplificamos el cálculo escribiendo

$$\lim_{x \to 0} \frac{2 \sec^2 x \tan x}{6x} = \frac{1}{3} \lim_{x \to 0} \sec^2 x \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \frac{1}{3} \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}$$

Podemos evaluar este último límite utilizando la regla de l'Hospital por tercera vez o expresando la $\tan x$ como $(\operatorname{sen} x)/(\cos x)$ y recurriendo a nuestro conocimiento de límites trigonométricos. Haciendo todos estos pasos, obtenemos

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sec^2 x \tan x}{6x}$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \frac{1}{3} \lim_{x \to 0} \frac{\sec^2 x}{1} = \frac{1}{3}$$

V EJEMPLO 5 Encuentre $\lim_{x \to \pi^-} \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x}$.

SOLUCIÓN Si intentamos ciegamente utilizar la regla de l'Hospital, obtendríamos

$$\lim_{x \to \pi^-} \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x} = \lim_{x \to \pi^-} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = -\infty$$

¡Esto es erróneo! Aunque el numerador $x \to 0$ conforme $x \to \pi^-$, note que el denominador $(1 - \cos x)$ no tiende a 0, así que aquí no es posible aplicar la regla de l'Hospital.

El límite requerido es, de hecho, fácil de encontrar porque la función es continua en π y el denominador es distinto de cero:

$$\lim_{x \to \pi^-} \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x} = \frac{\operatorname{sen} \pi}{1 - \cos \pi} = \frac{0}{1 - (-1)} = 0$$

El ejemplo 5 muestra lo que puede salir mal si se utiliza la regla de l'Hospital sin pensar. Hay otros límites que *pueden* encontrarse mediante la regla de l'Hospital, pero se encuentran más fácilmente por otros métodos (Véanse los ejemplos de 3 y 5 en la sección 2.3, ejemplo 3 en la sección 2.6 y la discusión al principio de esta sección), por lo que al evaluar cualquier límite debe tener en cuenta otros métodos antes de utilizar la regla de l'Hospital.

Productos indeterminados

Si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$ (o $-\infty$), entonces no es claro cuál es el valor de $\lim_{x \to a} [f(x)\, g(x)]$, si existe. Hay una lucha entre f y g. Si gana f, la respuesta será 0; si gana g, la respuesta será ∞ (o $-\infty$). O puede haber un comportamiento intermedio donde la respuesta es un número finito distinto de cero. Este tipo de límite se llama **forma indeterminada de tipo $0 \cdot \infty$**, y lo podemos abordar expresando el producto fg como un cociente:

$$fg = \frac{f}{1/g} \qquad \text{o} \qquad fg = \frac{g}{1/f}$$

Esto convierte el límite dado en una forma indeterminada de tipo $\frac{0}{0}$ o ∞/∞, por lo que podemos utilizar la regla de l'Hospital.

V EJEMPLO 6 Evalúe $\lim_{x \to 0^+} x \ln x$.

La figura 5 muestra la gráfica de la función del ejemplo 6. Observe que la función está indefinida en $x = 0$; la gráfica se aproxima al origen, pero nunca lo alcanza.

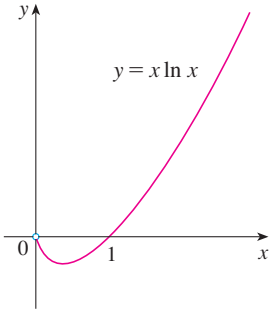


FIGURA 5

SOLUCIÓN El límite dado está indeterminado porque, conforme $x \to 0^+$, el primer factor (x) tiende a 0, mientras que el segundo factor $(\ln x)$ tiende a $-\infty$. Escribiendo $x = 1/(1/x)$, tenemos $1/x \to \infty$ a medida que $x \to 0^+$, por lo que la regla de l'Hospital da

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0$$

NOTA Tenga en cuenta que al resolver el ejemplo 6 otra opción posible habría sido escribir

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{1/\ln x}$$

Esto da una forma indeterminada del tipo $0/0$, pero si aplicamos la regla de l'Hospital, obtenemos una expresión más complicada que con la que empezamos. En general, cuando rescribimos un producto indeterminado, intentamos elegir la opción que conduce hasta el límite más simple.

Diferencias indeterminadas

Si $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$, entonces el límite

$$\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)]$$

se llama **forma indeterminada de tipo $\infty - \infty$**. Una vez más hay un contienda entre f y g. ¿La respuesta será ∞ (gana f) o será $-\infty$ (gana g) o habrá un término intermedio en un

número finito? Para encontrarlo, intentamos convertir la diferencia en un cociente (p. ej., utilizando un común denominador, racionalizando o factorizando un factor común), de manera que tenemos una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$ o ∞/∞.

EJEMPLO 7 Obtenga $\lim_{x \to (\pi/2)^-} (\sec x - \tan x)$

SOLUCIÓN Primero observe que $x \to \infty$ y $x \to \infty$ conforme $x \to (\pi/2)^-$, por lo que el límite está indeterminado. Aquí usamos un común denominador:

$$\lim_{x \to (\pi/2)^-} (\sec x - \tan x) = \lim_{x \to (\pi/2)^-} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \right)$$

$$= \lim_{x \to (\pi/2)^-} \frac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x} = \lim_{x \to (\pi/2)^-} \frac{-\cos x}{-\operatorname{sen} x} = 0$$

Observe que el uso de la regla de l'Hospital está justificada porque $1 - \operatorname{sen} x \to 0$ y $\cos x \to 0$ a medida que $x \to (\pi/2)^-$.

Potencias indeterminadas

Hay varias formas indeterminadas que surgen del límite

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^{g(x)}$$

1. $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ tipo 0^0
2. $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ tipo ∞^0
3. $\lim_{x \to a} f(x) = 1$ y $\lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$ tipo 1^∞

Aunque las formas de los tipos 0^0, ∞^0 y 1^∞ están indeterminadas, la forma 0^∞ no está indeterminada. (Véase el ejercicio 84.)

Cada uno de estos tres casos puede ser tratado ya sea tomando el logaritmo natural:

$$\text{sea } y = [f(x)]^{g(x)}, \quad \text{entonces} \quad \ln y = g(x) \ln f(x)$$

o expresando la función como una exponencial:

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

(Recuerde que ambos métodos fueron utilizados en la derivada de estas funciones.) Cualquiera de los métodos nos lleva al producto indeterminado $g(x) \ln f(x)$, que es del tipo $0 \cdot \infty$.

EJEMPLO 8 Obtenga $\lim_{x \to 0^+} (1 + \operatorname{sen} 4x)^{\cot x}$.

SOLUCIÓN Primero observe que cuando $x \to 0^+$, tenemos $1 + \operatorname{sen} 4x \to 1$ y $\cot x \to \infty$, por lo que el límite dado está indeterminado. Sea

$$y = (1 + \operatorname{sen} 4x)^{\cot x}$$

Entonces $$\ln y = \ln [(1 + \operatorname{sen} 4x)^{\cot x}] = \cot x \ln(1 + \operatorname{sen} 4x)$$

Así que la regla de l'Hospital da

$$\lim_{x \to 0^+} \ln y = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1 + \operatorname{sen} 4x)}{\tan x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\dfrac{4 \cos 4x}{1 + \operatorname{sen} 4x}}{\sec^2 x} = 4$$

Hasta ahora hemos calculado el límite de ln y, pero lo que queremos es el límite de y. Para encontrar este límite, utilizamos el hecho de que $y = e^{\ln y}$:

$$\lim_{x \to 0^+} (1 + \operatorname{sen} 4x)^{\cot x} = \lim_{x \to 0^+} y = \lim_{x \to 0^+} e^{\ln y} = e^4$$

V EJEMPLO 9 Encuentre $\lim_{x \to 0^+} x^x$.

SOLUCIÓN Note que este límite está indeterminado ya que $0^x = 0$ para cualquier $x > 0$, pero $x^0 = 1$ para cualquier $x \neq 0$. Podríamos proceder como en el ejemplo 8 o expresando la función como una exponencial:

$$x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x \ln x}$$

En el ejemplo 6 usamos la regla de l'Hospital para demostrar que

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$$

Por tanto,

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = \lim_{x \to 0^+} e^{x \ln x} = e^0 = 1$$

En la figura 6 se muestra la gráfica de la función $y = x^x$, $x > 0$. Observe que, aunque 0^0 no está definido, los valores de la función tienden a 1 conforme $x \to 0^+$. Esto confirma el resultado del ejemplo 9.

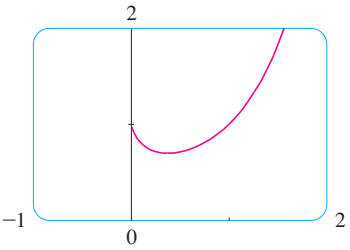


FIGURA 6

4.4 Ejercicios

1-4 Dado que

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to a} g(x) = 0 \qquad \lim_{x \to a} h(x) = 1$$

$$\lim_{x \to a} p(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a} q(x) = \infty$$

¿Cuáles de los siguientes límites son formas indeterminadas? Para aquellos que no tienen forma indeterminada, evalúe el límite donde sea posible.

1. a) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ b) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{p(x)}$ c) $\lim_{x \to a} \dfrac{h(x)}{p(x)}$

d) $\lim_{x \to a} \dfrac{p(x)}{f(x)}$ e) $\lim_{x \to a} \dfrac{p(x)}{q(x)}$

2. a) $\lim_{x \to a} [f(x)p(x)]$ b) $\lim_{x \to a} [h(x)p(x)]$

c) $\lim_{x \to a} [p(x)q(x)]$

3. a) $\lim_{x \to a} [f(x) - p(x)]$ b) $\lim_{x \to a} [p(x) - q(x)]$

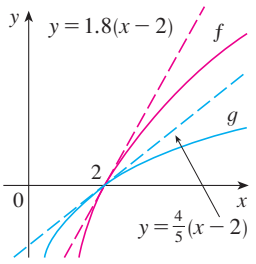
c) $\lim_{x \to a} [p(x) + q(x)]$

4. a) $\lim_{x \to a} [f(x)]^{g(x)}$ b) $\lim_{x \to a} [f(x)]^{p(x)}$ c) $\lim_{x \to a} [h(x)]^{p(x)}$

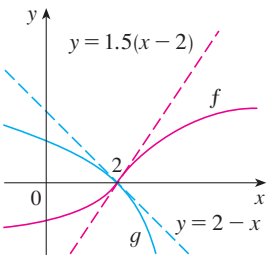
d) $\lim_{x \to a} [p(x)]^{f(x)}$ e) $\lim_{x \to a} [p(x)]^{q(x)}$ f) $\lim_{x \to a} \sqrt[q(x)]{p(x)}$

5-6 Utilice las gráficas de f y g y sus rectas tangentes en (2, 0) para encontrar $\lim_{x \to 2} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

5.



6.



7-66 Encuentre el límite. Utilice la regla de l'Hospital donde sea apropiado. Si existe un método más elemental, considere la posibilidad de usarlo. Si no aplica la regla de l'Hospital, explique por qué.

7. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - x}$

8. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$

9. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^3 - 1}$

10. $\lim_{x \to 1/2} \dfrac{6x^2 + 5x - 4}{4x^2 + 16x - 9}$

11. $\lim_{x \to (\pi/2)^+} \dfrac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x}$

12. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 4x}{\tan 5x}$

13. $\lim_{t \to 0} \dfrac{e^{2t} - 1}{\operatorname{sen} t}$

14. $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^2}{1 - \cos x}$

15. $\lim_{\theta \to \pi/2} \dfrac{1 - \operatorname{sen} \theta}{1 + \cos 2\theta}$

16. $\lim_{\theta \to \pi/2} \dfrac{1 - \operatorname{sen} \theta}{\csc \theta}$

17. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

18. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x + x^2}{1 - 2x^2}$

19. $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{x}$

20. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\ln \sqrt{x}}{x^2}$

21. $\lim_{t \to 1} \dfrac{t^8 - 1}{t^5 - 1}$

22. $\lim_{t \to 0} \dfrac{8^t - 5^t}{t}$

23. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + 2x} - \sqrt{1 - 4x}}{x}$

24. $\lim_{u \to \infty} \dfrac{e^{u/10}}{u^3}$

25. $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$

26. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{senh} x - x}{x^3}$

27. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tanh x}{\tan x}$

28. $\lim_{x \to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x - \tan x}$

29. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^{-1} x}{x}$

30. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x}$

31. $\lim_{x \to 0} \dfrac{x 3^x}{3^x - 1}$

32. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\cos mx - \cos nx}{x^2}$

33. $\lim_{x \to 0} \dfrac{x + \operatorname{sen} x}{x + \cos x}$

34. $\lim_{x \to 0} \dfrac{x}{\tan^{-1}(4x)}$

35. $\lim_{x \to 1} \dfrac{1 - x + \ln x}{1 + \cos \pi x}$

36. $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{x^x - 1}{\ln x + x - 1}$

37. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^a - ax + a - 1}{(x - 1)^2}$

38. $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x}$

39. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^4}$

40. $\lim_{x \to a^+} \dfrac{\cos x \ln(x - a)}{\ln(e^x - e^a)}$

41. $\lim_{x \to \infty} x \operatorname{sen}(\pi/x)$

42. $\lim_{x \to \infty} \sqrt{x}\, e^{-x/2}$

43. $\lim_{x \to 0} \cot 2x \operatorname{sen} 6x$

44. $\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sen} x \ln x$

45. $\lim_{x \to \infty} x^3 e^{-x^2}$

46. $\lim_{x \to \infty} x \tan(1/x)$

47. $\lim_{x \to 1^+} \ln x \tan(\pi x/2)$

48. $\lim_{x \to (\pi/2)^-} \cos x \sec 5x$

49. $\lim_{x \to 1} \left(\dfrac{x}{x - 1} - \dfrac{1}{\ln x} \right)$

50. $\lim_{x \to 0} (\csc x - \cot x)$

51. $\lim_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1} \right)$

52. $\lim_{x \to 0} \left(\cot x - \dfrac{1}{x} \right)$

53. $\lim_{x \to \infty} (x - \ln x)$

54. $\lim_{x \to 1^+} [\ln(x^7 - 1) - \ln(x^5 - 1)]$

55. $\lim_{x \to 0^+} x^{\sqrt{x}}$

56. $\lim_{x \to 0^+} (\tan 2x)^x$

57. $\lim_{x \to 0} (1 - 2x)^{1/x}$

58. $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{a}{x} \right)^{bx}$

59. $\lim_{x \to 1^+} x^{1/(1-x)}$

60. $\lim_{x \to \infty} x^{(\ln 2)/(1 + \ln x)}$

61. $\lim_{x \to \infty} x^{1/x}$

62. $\lim_{x \to \infty} (e^x + x)^{1/x}$

63. $\lim_{x \to 0^+} (4x + 1)^{\cot x}$

64. $\lim_{x \to 1} (2 - x)^{\tan(\pi x/2)}$

65. $\lim_{x \to 0^+} (\cos x)^{1/x^2}$

66. $\lim_{x \to \infty} \left(\dfrac{2x - 3}{2x + 5} \right)^{2x+1}$

67-68 Utilice una gráfica para estimar el valor del límite. Después utilice la regla de l'Hospital para encontrar el valor exacto.

67. $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{2}{x} \right)^x$

68. $\lim_{x \to 0} \dfrac{5^x - 4^x}{3^x - 2^x}$

69-70 Ilustre la regla de l'Hospital graficando $f(x)/g(x)$ y $f'(x)/g'(x)$ cerca de $x = 0$ para ver que estas razones tienen el mismo límite conforme $x \to 0$. También, calcule el valor exacto del límite.

69. $f(x) = e^x - 1, \quad g(x) = x^3 + 4x$

70. $f(x) = 2x \operatorname{sen} x, \quad g(x) = \sec x - 1$

71. Demuestre que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$$

para cualquier entero positivo n. Esto demuestra que la función exponencial tiende al infinito más rápido que cualquier potencia de x.

72. Pruebe que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0$$

para cualquier número $p > 0$. Esto demuestra que la función logarítmica tiende a ∞ más lentamente que cualquier potencia de x.

73-74 ¿Qué sucede si intenta usted utilizar la regla del l'Hospital para obtener el límite? Evalúe el límite utilizando cualquier otro método.

73. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

74. $\lim_{x \to (\pi/2)^-} \dfrac{\sec x}{\tan x}$

75. Investigue la familia de curvas $f(x) = e^x - cx$. En particular, encuentre los límites conforme $x \to \pm\infty$ y determine los valores de c para los cuales f tiene un mínimo absoluto. ¿Qué pasa con los puntos mínimos a medida que c crece?

76. Si un objeto con masa m se deja caer a partir del reposo, un modelo para su rapidez v después de t segundos, teniendo en cuenta la resistencia del aire, es

$$v = \frac{mg}{c}(1 - e^{-ct/m})$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad y c es una constante positiva. (En el capítulo 9 podremos deducir esta ecuación a partir del supuesto de que la resistencia del aire es proporcional a la velocidad del objeto, c es la constante de proporcionalidad). a) calcule $\lim_{t \to \infty} v$. ¿Cuál es el significado de este límite?

b) Para t fijo, utilice la regla de l'Hospital para calcular $\lim_{c \to 0^+} v$. ¿Qué puede concluir acerca de la velocidad de un objeto que cae en el vacío?

77. Si una cantidad inicial A_0 de dinero es invertida a una tasa de interés r compuesto n veces al año, el valor de la inversión después de t años es

$$A = A_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Si hacemos que $x \to \infty$, nos referimos a la *capitalización continua* de interés. Utilice la regla de l'Hospital para demostrar que si el interés es compuesto continuamente, entonces la cantidad después de t años es

$$A = A_0 e^{rt}$$

78. Si una bola de metal con masa m se arroja al agua y la fuerza de resistencia es proporcional al cuadrado de la velocidad, la distancia que la bola viaja en el tiempo t es

$$s(t) = \frac{m}{c} \ln \cosh \sqrt{\frac{gc}{mt}}$$

donde c es una constante positiva. Encuentre $\lim_{c \to 0^+} s(t)$.

79. Si un campo electrostático E actúa sobre un líquido o un dieléctrico polar gaseoso, el momento dipolar neto P por unidad de volumen es

$$P(E) = \frac{e^E + e^{-E}}{e^E - e^{-E}} - \frac{1}{E}$$

Demuestre que $\lim_{E \to 0^+} P(E) = 0$.

80. Un cable metálico tiene radio r y está cubierto por un aislante, por lo que la distancia desde el centro del cable hasta el exterior del aislante es R. La velocidad v de un impulso eléctrico en el cable es

$$v = -c\left(\frac{r}{R}\right)^2 \ln\left(\frac{r}{R}\right)$$

donde c es una constante positiva. Encuentre los siguientes límites e interprete sus respuestas.

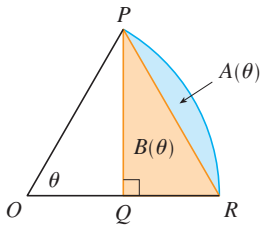
a) $\lim_{R \to r^+} v$ b) $\lim_{r \to 0^+} v$

81. La primera aparición impresa de la regla de l'Hospital fue en el libro *Analyse des Infiniment Petits* publicado en 1696 por el marqués de l'Hospital. Este texto fue el primer libro de cálculo publicado, y el ejemplo que utiliza el marqués en ese libro, para ilustrar esta regla, fue el de encontrar el límite de la función

$$y = \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{aax}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$$

cuando x tiende a a, donde $a > 0$. (En aquel tiempo era común escribir aa en vez de a^2). Resuelva este problema.

82. La figura muestra un sector de un círculo con ángulo central θ. Sea $A(\theta)$ el área del segmento entre la cuerda PR y el arco PR. Sea $B(\theta)$ el área del triángulo PQR. Encuentre el $\lim_{\theta \to 0^+} A(\theta)/B(\theta)$.



83. Evalúe $\lim_{x \to \infty} \left[x - x^2 \ln\left(\frac{1 + x}{x}\right)\right]$.

84. Suponga que f es una función positiva. Si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$, demuestre que

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^{g(x)} = 0$$

Esto demuestra que 0^∞ no es una forma indeterminada.

85. Si f' es continua, $f(2) = 0$ y $f'(2) = 7$, evalúe

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(2 + 3x) + f(2 + 5x)}{x}$$

86. ¿Para qué valores de a y b es verdadera la siguiente ecuación?

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{x^3} + a + \frac{b}{x^2}\right) = 0$$

87. Si f' es continua, utilice la regla de l'Hospital para demostrar que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h} = f'(x)$$

Explique el significado de esta ecuación con la ayuda de un diagrama.

88. Si f'' es continua, demuestre que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - 2f(x) + f(x - h)}{h^2} = f''(x)$$

89. Sea

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) Utilice la definición de derivada para obtener $f'(0)$.
b) Demuestre que f tiene derivadas de todos los órdenes que están definidas sobre $\mathbb{R}$. [*Sugerencia:* primero demuestre por inducción que existe una función polinomial $p_n(x)$ y un entero no negativo k_n tal que $f^{(n)}(x) = p_n(x)f(x)/x^{k_n}$ para $x \neq 0$.]

90. Sea

$$f(x) = \begin{cases} |x|^x & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) Demuestre que f es continua en $x = 0$.
b) Investigue gráficamente si f es derivable en $x = 0$ activando varias veces el *zoom* sobre el punto (0, 1) de la gráfica de f.
c) Demuestre que f no es derivable en $x = 0$. ¿Cómo puede usted conciliar este hecho con la apariencia de la gráfica del inciso b)?

REDACCIÓN DE PROYECTO LOS ORÍGENES DE LA REGLA DE L'HOSPITAL


ANALYSE
DES
INFINIMENT PETITS,
POUR
L'INTELLIGENCE DES LIGNES COURBES.
SECONDE EDITION.
A PARIS,
MDCCXVI

Biblioteca Thomas Fisher de libros excepcionales

www.stewartcalculus.com
La Internet es otra fuente de información para este proyecto. Haga clic en *History of Mathematics* para obtener una lista confiable de sitios web.

La regla de l'Hospital se publicó por primera vez en 1696, en el libro de texto del marqués de l'Hospital, *Analyse des Infiniment Petits*, pero la regla fue descubierta en 1694 por el matemático suizo Johann Bernoulli. La explicación es que ambos habían entrado en un curioso arreglo de negocios por medio del cual el marqués de l'Hospital compró los derechos de los descubrimientos matemáticos de Bernoulli. Los detalles, incluso una traducción de la carta de l'Hospital a Bernoulli en la que propone el arreglo, pueden hallarse en el libro escrito por Eves [1].

Escriba un informe sobre los orígenes históricos y matemáticos de la regla de l'Hospital. Empiece por dar breves detalles biográficos de los dos hombres (el diccionario editado por Gillispie [2] es una buena fuente) y describa el trato negociado entre ellos. A continuación, mencione el enunciado de l'Hospital de su regla, el cual se encuentra en el libro fuente de Struik [4] y, más sintéticamente, en el libro de Katz [3]. Observe que l'Hospital y Bernoulli formularon la regla geométricamente y dieron la respuesta en términos de diferenciales. Compare el enunciado de ellos con la versión de la regla de l'Hospital que se dio en la sección 4.4 y demuestre que, en esencia, los dos enunciados son los mismos.

1. Howard Eves, *In Mathematical Circles* (*Volumen* 2: *Cuadrantes III y IV*) (Boston: Prindle, Weber and Schmidt, 1969), pp. 20-22.
2. C. C. Gillispie, ed., *Dictionary of Scientific Biography* (Nueva York: Scribner's, 1974). Véase el artículo sobre Johann Bernoulli, por E. A. Fellman y J. 0. Fleckenstein, en el volumen II y el artículo sobre el marqués de l'Hospital, por Abraham Robinson, en el volumen VIII.
3. Victor Katz, *A History of Mathematics: An Introduction* (Nueva York: Harper Collins, 1993), pp. 484.
4. D. J. Struik, ed., *A Sourcebook in Mathematics, 1200-1800* (Princeton, NJ: Princeton University Press, 1969), pp. 315-316.

4.5 Resumen de trazado de curvas

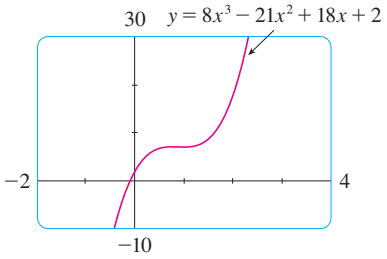


FIGURA 1

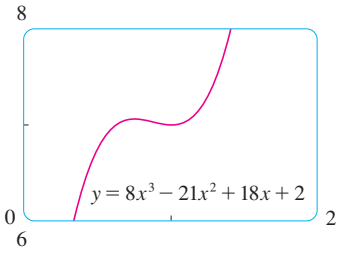


FIGURA 2

Hasta este momento sólo nos hemos interesado en algunos aspectos particulares del trazo de curvas: dominio, rango y simetría en el capítulo 1; límites, continuidad y asíntotas en el capítulo 2; derivadas y rectas tangentes en los capítulos 2 y 3, y valores extremos, intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad, puntos de inflexión y regla de l'Hospital en este capítulo. Pero ya es tiempo de reunir toda esta información relacionada con la elaboración de gráficas, que revela las características importantes de las funciones.

Usted podría preguntar: ¿por qué no usar sólo una calculadora o computadora para dibujar una curva? ¿Por qué necesitamos aplicar el cálculo?

Es cierto que los instrumentos modernos son capaces de generar gráficas muy exactas. Pero aun el mejor instrumento para graficar tiene que ser utilizado en forma inteligente. Como se establece en la sección 1.4 es muy importante elegir un rectángulo de vista adecuado para evitar obtener una gráfica engañosa. Vea en particular los ejemplos 1, 3, 4 y 5 de dicha sección. La aplicación del cálculo permite descubrir los aspectos más interesantes de las gráficas y, en muchos casos, calcular *exactamente* los puntos máximos y mínimos y los puntos de inflexión, y no sólo en forma aproximada.

Por ejemplo, en la figura 1 se presenta la gráfica de $f(x) = 8x^3 - 21x^2 + 18x + 2$. A primera vista parece razonable esperar que la gráfica tenga la misma forma que las curvas cúbicas como $y = x^3$, y parece no tener máximo ni mínimo. Pero si calcula la derivada, se dará cuenta de que hay un máximo cuando $x = 0.75$ y un mínimo cuando $x = 1$. En efecto, si hacemos un acercamiento a esta parte de la gráfica, vemos el comportamiento que se ilustra en la figura 2. Sin la herramienta del cálculo, podría fácilmente pasarlas por alto.

En la sección siguiente se elabora la gráfica de funciones recurriendo a la interacción del cálculo y los instrumentos para graficar. En esta sección dibujará gráficas consideran-

do la información siguiente. Se supone que no tiene instrumentos para graficar, pero si usted cuenta con uno, sólo utilícelo para verificar su trabajo.

Guía para el trazado de curvas

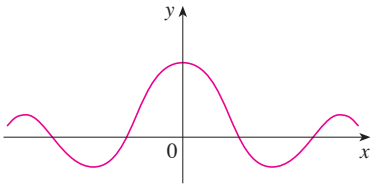
En la siguiente lista se intenta proponer directrices que sirvan de guía para dibujar una curva $y = f(x)$ a mano. No todos los elementos de la lista son relevantes para cada función. (Por ejemplo, una curva dada puede no tener una asíntota o poseer simetría.) Pero las directrices proporcionan toda la información que usted necesita para hacer un trazo que muestre los aspectos más importantes de la función.

A. Dominio A menudo resulta útil comenzar por determinar el dominio D de f; es decir, el conjunto de valores de x para los cuales $f(x)$ está definida.

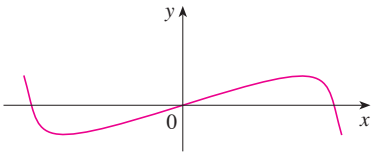
B. Intersección La intersección en y es $f(0)$ y esto nos indica dónde la curva cruza con el eje y. Para encontrar las intersecciones con el eje x, hacemos $y = 0$ y resolvemos para x. (Puede omitirse este paso si la ecuación es difícil de resolver.)

C. Simetría

i) Si $f(-x) = f(x)$ para toda x en D, es decir, la ecuación de la curva no se modifica cuando x se sustituye por $-x$, entonces f es una **función par** y la curva es simétrica respecto al eje y. Esto significa que nuestro trabajo se reduce a la mitad. Si conocemos la parte de la curva donde $x \geqslant 0$, entonces sólo necesitamos reflejar respecto al eje y, para obtener la curva completa [véase la figura 3a)]. Algunos ejemplo son $y = x^2$, $y = x^4$, $y = |x|$ y $y = \cos x$.



a) Función par: simetría por reflexión



b) Función impar: simetría por rotación

FIGURA 3

ii) Si $f(-x) = -f(x)$ para todo x en D, entonces f es una **función impar** y la curva es simétrica respecto al origen. Una vez más, podemos obtener la curva completa si conocemos la parte de la curva donde $x \geqslant 0$. [Gire 180° alrededor del origen; véase la figura 3b)]. Algunos ejemplos simples de funciones impares son $y = x$, $y = x^3$, $y = x^5$ y $y = \operatorname{sen} x$.

iii) Si $f(x + p) = f(x)$ para toda x en D, donde p es una constante positiva, entonces f se llama **función periódica** y el número p más pequeño se llama **periodo**. Por ejemplo, $y = \operatorname{sen} x$ tiene periodo 2π y $y = \tan x$ tiene periodo π. Si sabemos cómo es la gráfica en un intervalo de longitud p, entonces podemos utilizar una traslación para esbozar toda la gráfica (véase la figura 4).

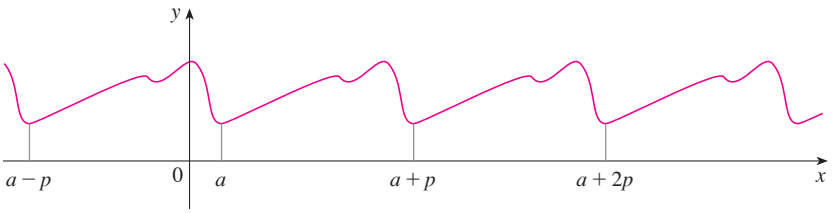


FIGURA 4
Función periódica: simetría traslacional

D. Asíntotas

i) *Asíntotas horizontales*. Recuerde de la sección 2.6 que si $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ o $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$, entonces la recta $y = L$ es una asíntota horizontal de la curva $y = f(x)$. Si resulta que $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ (o $-\infty$), entonces no tenemos una asíntota a la derecha, pero sigue siendo información útil para trazar la curva.

ii) *Asíntotas verticales*. Recuerde de la sección 2.2 que la recta $x = a$ es una asíntota vertical si al menos una de las siguientes afirmaciones es verdadera:

1

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$

(Para funciones racionales puede usted localizar las asíntotas verticales igualando el denominador a 0 después de cancelar los factores comunes. Pero para otras funciones no se aplica este método.) Además, en el trazado de la curva es muy útil saber exactamente cuál de las afirmaciones en 1 es verdadera. Si $f(a)$ no está definida, pero a es un extremo del dominio de f, entonces debe calcular $\lim_{x \to a^-} f(x)$ o $\lim_{x \to a^+} f(x)$, sea este límite infinito o no.

iii) *Asíntotas inclinadas*. Éstas se discuten al final de esta sección.

E. Intervalos donde la función es creciente o decreciente Utilice la prueba C y D. Obtenga $f'(x)$ y encuentre los intervalos en los que $f'(x)$ es positiva (f es creciente) y los intervalos en los que $f'(x)$ es negativa (f es decreciente).

F. Valores mínimo y máximo locales Encuentre los números críticos de f [los números c donde $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existen]. Después utilice la prueba de la primera derivada. Si f' cambia de positiva a negativa en un número crítico c, entonces $f(c)$ es un máximo local. Si f' cambia de negativa a positiva en c, entonces $f(c)$ es un mínimo local. Aunque es generalmente preferible utilizar la prueba de la primera derivada, puede utilizar la prueba de la segunda derivada si $f'(c) = 0$ y $f''(c) \neq 0$. Entonces $f''(c) > 0$ implica que $f(c)$ es un mínimo local, mientras que $f''(c) < 0$ implica que $f(c)$ es un máximo local.

G. Concavidad y puntos de inflexión Obtenga $f''(x)$ y utilice la prueba de la concavidad. La curva es cóncava hacia arriba donde $f''(x) > 0$ y cóncava hacia abajo donde $f''(x) < 0$. Los puntos de inflexión se localizan donde cambia de dirección la concavidad.

H. Trace la curva Utilizando la información de los apartados A-G, trace la gráfica. Dibuje las asíntotas como rectas discontinuas. Ubique las intersecciones, puntos máximos y mínimos y puntos de inflexión. Después, haga que la curva pase por estos puntos, creciendo y decreciendo de acuerdo con E, con concavidades de acuerdo con G y acercándose a las asíntotas. Si se desea precisión adicional cerca de cualquier punto, puede calcular el valor de la derivada allí. La recta tangente indica la dirección en que avanza la curva.

V EJEMPLO 1 Utilice la guía para trazar la gráfica de $y = \dfrac{2x^2}{x^2 - 1}$.

A. El dominio es

$$\{x \mid x^2 - 1 \neq 0\} = \{x \mid x \neq \pm 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$$

B. Las intersecciones en x y en y son, ambas, 0.

C. Ya que $f(-x) = f(x)$, la función f es par. La curva es simétrica respecto al eje y.

D.
$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2}{1 - 1/x^2} = 2$$

Por tanto, la recta $y = 2$ es una asíntota horizontal.

Puesto que el denominador es 0 cuando $x = \pm 1$, obtenemos los siguientes límites:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \infty \qquad \lim_{x \to 1^-} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = -\infty \qquad \lim_{x \to -1^-} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \infty$$

Por ende, las rectas $x = 1$ y $x = -1$ son asíntotas verticales. Esta información relacionada con los límites y asíntotas nos permite dibujar la curva preliminar de la figura 5, que muestra la curva cerca de las asíntotas.

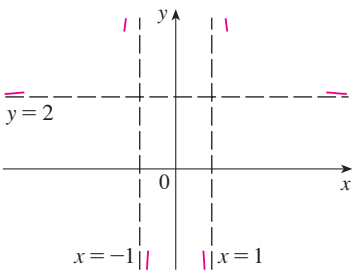


FIGURA 5
Trazo preliminar

Se muestra la curva que se aproxima a su asíntota horizontal desde arriba en la figura 5. Esto se confirma por los intervalos donde crece y decrece.

E. $$f'(x) = \frac{4x(x^2 - 1) - 2x^2 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$$

Ya que $f'(x) > 0$ cuando $x < 0$ $(x \neq -1)$ y $f'(x) < 0$ cuando $x > 0$ $(x \neq 1)$, f es creciente sobre $(-\infty, -1)$ y $(-1, 0)$ y decreciente sobre $(0, 1)$ y $(1, \infty)$.

F. El único número crítico es $x = 0$. Dado que f' cambia de positiva a negativa en $x = 0$, $f(0) = 0$ es un máximo local por la prueba de la primera derivada.

G. $$f''(x) = \frac{-4(x^2 - 1)^2 + 4x \cdot 2(x^2 - 1)2x}{(x^2 - 1)^4} = \frac{12x^2 + 4}{(x^2 - 1)^3}$$

Puesto que $12x^2 + 4 > 0$ para toda x, tenemos

$$f''(x) > 0 \iff x^2 - 1 > 0 \iff |x| > 1$$

y $f''(x) < 0 \iff |x| < 1$. Así, la curva es cóncava hacia arriba sobre los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(1, \infty)$ y cóncava hacia abajo sobre $(-1, 1)$. No hay puntos de inflexión ya que $x = 1$ y $x = -1$ no están en el dominio de f.

H. Utilizando la información de E-G, terminamos el trazo de la figura 6.

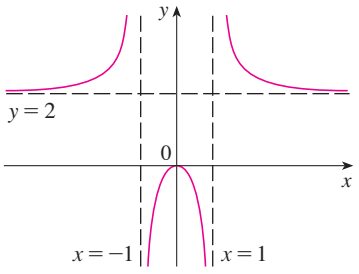


FIGURA 6
Trazo final de $y = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$

EJEMPLO 2 Trace la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x + 1}}$.

A. Dominio: $\{x \mid x + 1 > 0\} = \{x \mid x > -1\} = (-1, \infty)$

B. Las intersecciones en x y en y son ambas 0.

C. Simetría: ninguna

D. Dado que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{\sqrt{x + 1}} = \infty$$

no hay asíntotas horizontales. Ya que $\sqrt{x + 1} \to 0$ conforme $x \to -1^+$ y $f(x)$ es siempre positiva, tenemos

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x^2}{\sqrt{x + 1}} = \infty$$

y, por tanto, la recta $x = -1$ es una asíntota vertical.

E. $$f'(x) = \frac{2x\sqrt{x + 1} - x^2 \cdot 1/\left(2\sqrt{x + 1}\right)}{x + 1} = \frac{x(3x + 4)}{2(x + 1)^{3/2}}$$

Vemos que $f'(x) = 0$ cuando $x = 0$ (note que $-\frac{4}{3}$ no está en el dominio de f), así que el único número crítico es $x = 0$. Ya que $f'(x) < 0$ cuando $-1 < x < 0$ y $f'(x) > 0$ cuando $x > 0$, f es decreciente sobre $(-1, 0)$ y decreciente sobre $(0, \infty)$.

F. Puesto que $f'(0) = 0$ y f' cambia de negativa a positiva en $x = 0$, $f(0) = 0$ es un mínimo local (y absoluto) por la prueba de la primera derivada.

G. $$f''(x) = \frac{2(x + 1)^{3/2}(6x + 4) - (3x^2 + 4x)3(x + 1)^{1/2}}{4(x + 1)^3} = \frac{3x^2 + 8x + 8}{4(x + 1)^{5/2}}$$

Note que el denominador siempre es positivo. El numerador es la cuadrática $3x^2 + 8x + 8$, que siempre es positiva porque su discriminante es $b^2 - 4ac = -32$, que es negativo, y el coeficiente de x^2 es positivo. Así $f''(x) > 0$ para toda x en el dominio de f, lo que significa que f es cóncava hacia arriba sobre $(-1, \infty)$ y no hay punto de inflexión.

H. El trazo de la curva aparece en la figura 7.

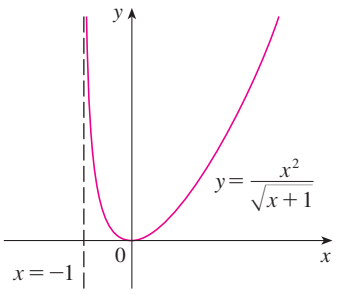


FIGURA 7

V EJEMPLO 3 Trace la gráfica de $f(x) = xe^x$.

A. El dominio es $\mathbb{R}$.

B. Las intersecciones en x y en y son ambas 0.

C. Simetría: ninguna

D. Ya que tanto x como e^x son muy grandes conforme $x \to \infty$, tenemos que $\lim_{x\to\infty} xe^x = \infty$. Sin embargo, a medida que $x \to -\infty$, $e^x \to 0$, así que tenemos un producto indeterminado que requiere la regla de l'Hospital:

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} (-e^x) = 0$$

Así, el eje x es una asíntota horizontal.

E.
$$f'(x) = xe^x + e^x = (x + 7)e^x$$

Ya que e^x siempre es positiva, vemos que $f'(x) > 0$ cuando $x + 1 > 0$, y $f'(x) < 0$ cuando $x + 1 < 0$. Así que f es creciente sobre $(-1, \infty)$ y decreciente sobre $(-\infty, -1)$.

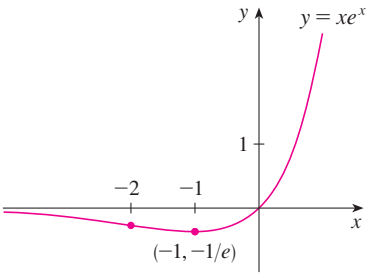


FIGURA 8

F. Ya que $f'(-1) = 0$ y f' cambia de negativa a positiva en $x = -1$, $f(-1) = -e^{-1}$ es un mínimo local (y absoluto).

G.
$$f''(x) = (x + 1)e^x + e^x = (x + 2)e^x$$

Ya que $f''(x) > 0$ si $x > -2$ y $f''(x) < 0$ si $x < -2$, f es cóncava hacia arriba sobre $(-2, \infty)$ y cóncava hacia abajo sobre $(-\infty, -2)$. El punto de inflexión es $(-2, -2e^{-2})$.

H. Con toda esta información trazamos la curva de la figura 8.

EJEMPLO 4 Trace la gráfica de $f(x) = \dfrac{\cos x}{2 + \operatorname{sen} x}$.

A. El dominio es $\mathbb{R}$.

B. La intersección en y es $f(0) = \frac{1}{2}$. Las intersecciones en x se localizan donde $\cos x = 0$, esto es, $x = (2n + 1)\pi/2$, donde n es un entero.

C. f no es par ni impar, pero $f(x + 2\pi) = f(x)$ para toda x, por lo que f es periódica con periodo 2π. Así, en lo siguiente, necesitamos considerar sólo $0 \leqslant x \leqslant 2x$ y después extender la curva por traslación en la parte H.

D. Asíntotas: ninguna

E.
$$f'(x) = \frac{(2 + \operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x) - \cos x\,(\cos x)}{(2 + \operatorname{sen} x)^2} = -\frac{2 \operatorname{sen} x + 1}{(2 + \operatorname{sen} x)^2}$$

Así, $f'(x) > 0$ cuando $2 \operatorname{sen} x + 1 < 0 \iff \operatorname{sen} x < -\frac{1}{2} \iff 7\pi/6 < x < 11\pi/6$. Por tanto, f es creciente sobre $(7\pi/6, 11\pi/6)$ y decreciente sobre $(0, 7\pi/6)$ y $(11\pi/6, 2\pi)$.

F. Del apartado E y la prueba de la primera derivada, vemos que el valor mínimo local es $f(7\pi/6) = -1/\sqrt{3}$ y el valor máximo local es $f(11\pi/6) = 1/\sqrt{3}$.

G. Si utilizamos la regla del cociente otra vez y simplificamos; obtenemos

$$f''(x) = -\frac{2 \cos x\,(1 - \operatorname{sen} x)}{(2 + \operatorname{sen} x)^3}$$

Debido a que $(2 + \operatorname{sen} x)^3 > 0$ y $1 - \operatorname{sen} x \geqslant 0$ para toda x, sabemos que $f''(x) > 0$ cuando $\cos x < 0$, esto es, $\pi/2 < x < 3\pi/2$. Así que f es cóncava hacia arriba sobre $(\pi/2, 3\pi/2)$ y cóncava hacia abajo sobre $(0, \pi/2)$ y $(3\pi/2, 2\pi)$. Los puntos de inflexión son $(\pi/2, 0)$ y $(3\pi/2, 0)$.

H. La gráfica de la función restringida a $0 \leq x \leq 2\pi$ se muestra en la figura 9. Después, la extendemos utilizando la periodicidad, para completar la gráfica de la figura 10.

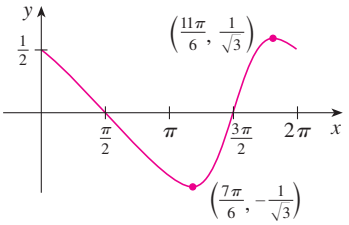


FIGURA 9

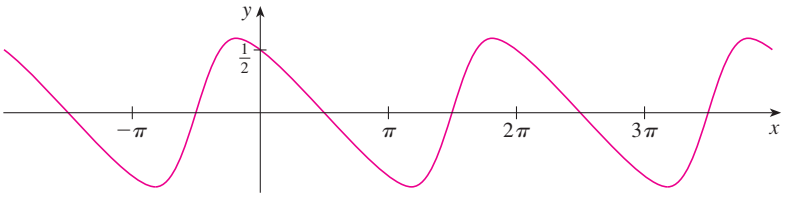


FIGURA 10

EJEMPLO 5 Trace la gráfica de $y = \ln(4 - x^2)$.

A. El dominio es

$$\{x \mid 4 - x^2 > 0\} = \{x \mid x^2 < 4\} = \{x \mid |x| < 2\} = (-2, 2)$$

B. La intersección en y es $f(0) = \ln 4$. Para encontrar la intersección con x, hacemos

$$y = \ln(4 - x^2) = 0$$

Sabemos que $\ln 1 = 0$, así que tenemos $4 - x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 3$ y, por tanto, las intersecciones en x son $\pm\sqrt{3}$.

C. Ya que $f(-x) = f(x)$, f es par y la curva es simétrica respecto al eje y.

D. Buscamos asíntotas verticales en los extremos del dominio. Como $4 - x^2 \to 0^+$ conforme $x \to 2^-$ y también a medida que $x \to -2^+$, tenemos

$$\lim_{x \to 2^-} \ln(4 - x^2) = -\infty \qquad \lim_{x \to -2^+} \ln(4 - x^2) = -\infty$$

Así, las rectas $x = 2$ y $x = -2$ son asíntotas verticales.

E.
$$f'(x) = \frac{-2x}{4 - x^2}$$

Dado que $f'(x) > 0$ cuando $-2 < x < 0$ y $f'(x) < 0$ cuando $0 < x < 2$, f es creciente sobre $(-2, 0)$ y decreciente sobre $(0, 2)$.

F. El único número crítico es $x = 0$. Como f' cambia de positiva a negativa en $x = 0$, $f(0) = \ln 4$ es un máximo local por la prueba de la primera derivada.

G.
$$f''(x) = \frac{(4 - x^2)(-2) + 2x(-2x)}{(4 - x^2)^2} = \frac{-8 - 2x^2}{(4 - x^2)^2}$$

Ya que $f''(x) < 0$ para toda x, la curva es cóncava hacia abajo sobre $(-2, 2)$ y no tiene punto de inflexión.

H. Con toda esta información, trazamos la curva en la figura 11.

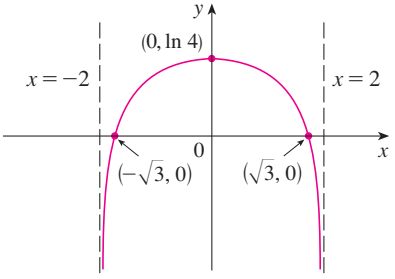


FIGURA 11
$y = \ln(4 - x^2)$

Asíntotas inclinadas

Algunas curvas tienen asíntotas que son *oblicuas*; esto es, no son horizontales ni verticales. Si

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$$

entonces la recta $y = mx + b$ se llama **asíntota inclinada** (oblicua) porque la distancia

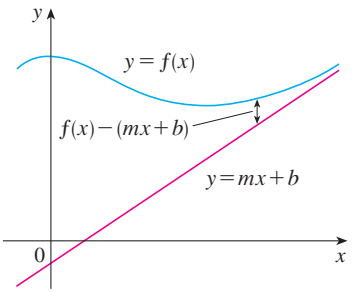


FIGURA 12

vertical entre la curva $y = f(x)$ y la recta $y = mx + b$ tiende a cero, como en la figura 12. (Existe una situación similar si hacemos $x \to -\infty$.) Para funciones racionales, las asíntotas inclinadas se producen cuando el grado del numerador es uno más que el grado del denominador. En tal caso la ecuación de la asíntota oblicua puede encontrarse por división larga como en el siguiente ejemplo.

V EJEMPLO 6 Trace la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$.

A. El dominio es $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

B. Las intersecciones en x y en y son ambas 0.

C. Puesto que $f(-x) = -f(x)$, f es impar y su gráfica es simétrica respecto al origen.

D. Ya que $x^2 + 1$ nunca es 0, no hay asíntotas verticales. Ya que $f(x) \to \infty$ conforme $x \to \infty$ y $f(x) \to -\infty$ a medida que $x \to -\infty$ no hay asíntotas horizontales. Pero la división larga da

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1} = x - \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$f(x) - x = -\frac{x}{x^2 + 1} = -\frac{\dfrac{1}{x}}{1 + \dfrac{1}{x^2}} \to 0 \quad \text{conforme } x \to \pm\infty$$

Así que la recta $y = x$ es una asíntota oblicua.

E.
$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 + 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2(x^2 + 3)}{(x^2 + 1)^2}$$

Dado que $f'(x) > 0$ para toda x (excepto 0), f es creciente sobre $(-\infty, \infty)$.

F. Aunque $f'(0) = 0$, f' no cambia de signo en $x = 0$, así que no hay máximo ni mínimo local.

G.
$$f''(x) = \frac{(4x^3 + 6x)(x^2 + 1)^2 - (x^4 + 3x^2) \cdot 2(x^2 + 1)2x}{(x^2 + 1)^4} = \frac{2x(3 - x^2)}{(x^2 + 1)^3}$$

Ya que $f''(x) = 0$ cuando $x = 0$ o $x = \pm\sqrt{3}$, podemos elaborar la siguiente tabla:

Intervalo	x	$3 - x^2$	$(x^2 + 1)^3$	$f''(x)$	Concavidad de f
$x < -\sqrt{3}$	−	−	+	+	Hacia arriba sobre $(-\infty, -\sqrt{3})$
$-\sqrt{3} < x < 0$	−	+	+	−	Hacia abajo sobre $(-\sqrt{3}, 0)$
$0 < x < \sqrt{3}$	+	+	+	+	Hacia arriba sobre $(0, \sqrt{3})$
$x > \sqrt{3}$	+	−	+	−	Hacia abajo sobre $(\sqrt{3}, \infty)$

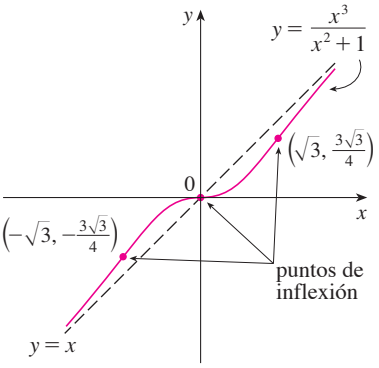


FIGURA 13

Los puntos de inflexión son $(-\sqrt{3}, -\frac{3}{4}\sqrt{3})$, $(0, 0)$ y $(\sqrt{3}, \frac{3}{4}\sqrt{3})$.

H. La gráfica de f se muestra en la figura 13.

4.5 Ejercicios

1-54 Utilice la guía de esta sección para trazar cada una de las siguientes curvas:

1. $y = x^3 - 12x^2 + 36x$

2. $y = 2 + 3x^2 - x^3$

3. $y = x^4 - 4x$

4. $y = x^4 - 8x^2 + 8$

5. $y = x(x-4)^3$

6. $y = x^5 - 5x$

7. $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{8}{3}x^3 + 16x$

8. $y = (4 - x^2)^5$

9. $y = \dfrac{x}{x-1}$

10. $y = \dfrac{x^2-4}{x^2-2x}$

11. $y = \dfrac{x - x^2}{2 - 3x + x^2}$

12. $y = \dfrac{x}{x^2-9}$

13. $y = \dfrac{1}{x^2-9}$

14. $y = \dfrac{x^2}{x^2+9}$

15. $y = \dfrac{x}{x^2+9}$

16. $y = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$

17. $y = \dfrac{x-1}{x^2}$

18. $y = \dfrac{x}{x^3-1}$

19. $y = \dfrac{x^2}{x^2+3}$

20. $y = \dfrac{x^3}{x-2}$

21. $y = (x-3)\sqrt{x}$

22. $y = 2\sqrt{x} - x$

23. $y = \sqrt{x^2 + x - 2}$

24. $y = \sqrt{x^2 + x} - x$

25. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

26. $y = x\sqrt{2 - x^2}$

27. $y = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

28. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

29. $y = x - 3x^{1/3}$

30. $y = x^{5/3} - 5x^{2/3}$

31. $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$

32. $y = \sqrt[3]{x^3 + 1}$

33. $y = \operatorname{sen}^3 x$

34. $y = x + \cos x$

35. $y = x \tan x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$

36. $y = 2x - \tan x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$

37. $y = \frac{1}{2}x - \operatorname{sen} x, \quad 0 < x < 3\pi$

38. $y = \sec x + \tan x, \quad 0 < x < \pi/2$

39. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}$

40. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{2 + \cos x}$

41. $y = \arctan(e^x)$

42. $y = (1 - x)e^x$

43. $y = 1/(1 + e^{-x})$

44. $y = e^{-x} \operatorname{sen} x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

45. $y = x - \ln x$

46. $y = e^{2x} - e^x$

47. $y = (1 + e^x)^{-2}$

48. $y = e^x/x^2$

49. $y = \ln(\operatorname{sen} x)$

50. $y = \ln(x^2 - 3x + 2)$

51. $y = xe^{-1/x}$

52. $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$

53. $y = e^{3x} + e^{-2x}$

54. $y = \tan^{-1}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

55. En la teoría de la relatividad, la masa de una partícula es

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

donde m_0 es la masa en reposo de la partícula, m es la masa cuando la partícula se mueve con rapidez v relativa al observador y c es la rapidez de la luz. Trace la gráfica de m como una función de v.

56. En la teoría de la relatividad, la energía de una partícula es

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + h^2 c^2/\lambda^2}$$

donde m_0 es la masa en reposo de la partícula, λ es la longitud de onda y h es la constante de Planck. Trace la gráfica de E como una función de λ. ¿Qué indica la gráfica en relación con la energía?

57. Un modelo para la divulgación de un rumor está dado por la ecuación

$$p(t) = \frac{1}{1 + ae^{-kt}}$$

donde $p(t)$ es la proporción de la población que sabe del rumor en el tiempo t, y a y k son constantes positivas.

a) ¿Cuándo habrá oído el rumor la mitad de la población?

b) ¿Cuándo es mayor la rapidez de divulgación del rumor?

c) Trace la gráfica de p.

58. Un modelo para la concentración de un medicamento inyectado en la corriente sanguínea es

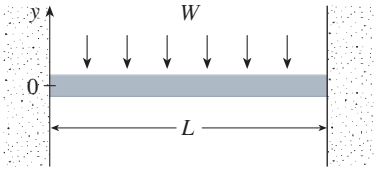
$$C(t) = K(e^{-at} - e^{-bt})$$

donde a, b y K son constantes positivas y $b > a$. Trace la gráfica de la función de concentración. ¿Qué nos indica la gráfica en relación con la variación de la concentración al transcurrir el tiempo?

59. La figura muestra una viga de longitud L incrustada en muros de hormigón. Si una carga constante W se distribuye uniformemente a lo largo de su longitud, la viga toma la forma de la curva de deflexión

$$y = -\frac{W}{24EI}x^4 + \frac{WL}{12EI}x^3 - \frac{WL^2}{24EI}x^2$$

donde E e I son constantes positivas. (E es el módulo de Young de elasticidad e I es el momento de inercia de una sección transversal de la viga). Trace la gráfica de la curva de deflexión.

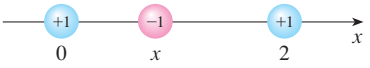


1. Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

60. La ley de Coulomb establece que la fuerza de atracción entre dos partículas cargadas es directamente proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas. La figura muestra partículas con carga 1 ubicadas en las posiciones 0 y 2 sobre una recta de coordenadas y una partícula con carga -1 en una posición x entre ellas. De la ley del Coulomb se deduce que la fuerza neta que actúa sobre la partícula ubicada a la mitad es

$$F(x) = -\frac{k}{x^2} + \frac{k}{(x-2)^2} \qquad 0 < x < 2$$

donde k es una constante positiva. Trace la gráfica de la función fuerza neta. ¿Qué indica la gráfica acerca de la fuerza?



61-64 Encuentre la ecuación de la asíntota inclinada en cada una de la funciones dadas. No trace la gráfica de la curva.

61. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x + 1}$

62. $y = \dfrac{2x^3 + x^2 + x + 3}{x^2 + 2x}$

63. $y = \dfrac{4x^3 - 2x^2 + 5}{2x^2 + x - 3}$

64. $y = \dfrac{5x^4 + x^2 + x}{x^3 - x^2 + 2}$

65-70 Utilice la guía de esta sección para trazar cada una de las siguientes curvas. En el apartado D encuentre la ecuación de la asíntota inclinada.

65. $y = \dfrac{x^2}{x - 1}$

66. $y = \dfrac{1 + 5x - 2x^2}{x - 2}$

67. $y = \dfrac{x^3 + 4}{x^2}$

68. $y = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$

69. $y = 1 + \frac{1}{2}x + e^{-x}$

70. $y = 1 - x + e^{1+x/3}$

71. Demuestre que la curva $y = x - \tan^{-1}x$ tiene dos asíntotas inclinadas: $y = x + \pi/2$ y $y = x - \pi/2$. Utilice este hecho para trazar la curva.

72. Demuestre que la curva $y = \sqrt{x^2 + 4x}$ tiene dos asíntotas inclinadas: $y = x + 2$ y $y = -x - 2$. Utilice este hecho para trazar la curva.

73. Demuestre que las rectas $y = (b/a)x$ y $y = -(b/a)x$ son asíntotas inclinadas de la hipérbola $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$.

74. Sea $f(x) = (x^3 + 1)/x$. Demuestre que

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - x^2] = 0$$

Esto demuestra que la gráfica de f se aproxima a la gráfica de $y = x^2$ y decimos que la curva $y = f(x)$ es *asintótica* a la parábola $y = x^2$. Utilice este hecho para trazar la gráfica de f.

75. Analice la conducta asintótica de $f(x) = (x^4 + 1)/x$ de la misma manera que en el ejercicio 74. Después utilice su resultado para ayudarse en el trazo de la gráfica de f.

76. Utilice la conducta asintótica de $f(x) = \cos x + 1/x^2$ para trazar su gráfica sin usar el procedimiento de trazo de curvas de esta sección.

4.6 Graficación con cálculo y calculadoras

Si no ha leído la sección 1.4, debería hacerlo ahora. En particular, se explica cómo evitar algunos de los escollos de los dispositivos de graficación, eligiendo rectángulos de vista adecuados.

El método que utilizamos para trazar curvas en la sección anterior fue una culminación de gran parte de nuestro estudio del cálculo diferencial. La gráfica fue el objeto final que hemos producido. En esta sección nuestro punto de vista es completamente diferente. Aquí comenzamos con una gráfica producida por una calculadora graficadora o un equipo de cómputo y luego la refinamos. Utilizamos el cálculo para asegurarnos de que nos revelan todos los aspectos importantes de la curva. Y con el uso de dispositivos de graficación podemos abordar curvas que serían demasiado complicadas sin considerar la tecnología. El tema es la *interacción* entre el cálculo y las calculadoras.

EJEMPLO 1 Grafique la función polinomial $f(x) = 2x^6 + 3x^5 + 3x^3 - 2x^2$. Utilice las gráficas de f' y f'' para estimar todos los puntos máximos y mínimos e intervalos de concavidad.

SOLUCIÓN Si especificamos un dominio, pero no un rango, muchos dispositivos de graficación utilizan un rango adecuado de los valores calculados. La figura 1 muestra el trazo que hace un dispositivo si especificamos que $-5 \leq x \leq 5$. Aunque este rectángulo de vista es útil para mostrar que el comportamiento asintótico (o comportamiento extremo) es el mismo que para $y = 2x^6$, obviamente está ocultando algún detalle más fino. Así que cambiamos el rectángulo de vista a $[-3, 2]$ por $[-50, 100]$ que se muestra en la figura 2.

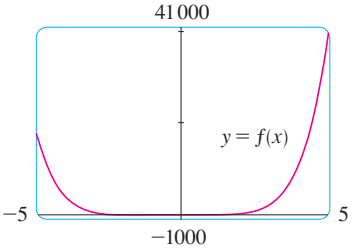


FIGURA 1

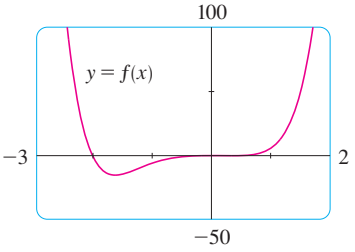


FIGURA 2

De esta gráfica se deduce que hay un valor mínimo absoluto de alrededor -15.33 cuando $x \approx -1.62$ (utilizando el cursor) y f es decreciente sobre $(-\infty, -1.62)$ y es creciente sobre $(-1.62, \infty)$. También parece haber una recta tangente horizontal en el origen y puntos de inflexión cuando $x = 0$ y cuando x se encuentra en algún lugar entre -2 y -1.

Ahora vamos a tratar de confirmar estas impresiones mediante el cálculo. Derivamos y obtenemos

$$f'(x) = 12x^5 + 15x^4 + 9x^2 - 4x$$

$$f''(x) = 60x^4 + 60x^3 + 18x - 4$$

Cuando graficamos f' en la figura 3 vemos que $f'(x)$ cambia de negativa a positiva cuando $x \approx -1.62$; esto confirma (por la prueba de la primera derivada) el valor mínimo que hemos encontrado antes. Pero, quizá para nuestra sorpresa, también notamos que $f'(x)$ cambia de positiva a negativa cuando $x = 0$ y de negativa a positiva cuando $x \approx 0.35$. Esto significa que f tiene un máximo local en 0 y un mínimo local cuando $x \approx 0.35$, pero éstos fueron escondidos en la figura 2. De hecho, si hacemos ahora acercamientos hacia el origen en la figura 4, vemos lo que nos faltó antes: un valor máximo local de 0 cuan-do $x = 0$ y un valor mínimo local de -0.1 cuando $x \approx 0.35$.

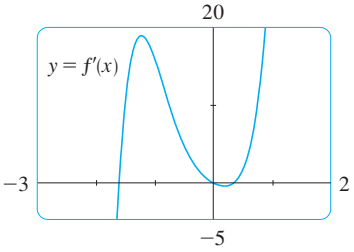


FIGURA 3

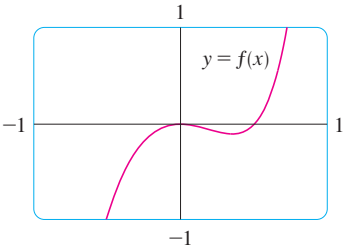


FIGURA 4

¿Qué pasa con la concavidad y los puntos de inflexión? En las figuras 2 y 4 parece haber puntos de inflexión cuando x está un poco a la izquierda de -1 y cuando x está un poco a la derecha del 0. Pero es difícil determinar puntos de inflexión de la gráfica de f, por lo que la graficamos la segunda derivada f'' en la figura 5. Vemos que f'' cambia de positiva a negativa cuando $x \approx -1.23$ y de negativa a positiva cuando $x \approx 0.19$. Así, corregimos con dos decimales, f es cóncava hacia arriba sobre $(-\infty, -1.23)$ y $(0.19, \infty)$ y cóncava hacia abajo sobre $(-1.23, 0.19)$. Los puntos de inflexión son $(-1.23, -10.18)$ y $(0.19, -0.05)$.

Hemos descubierto que una simple gráfica no revela todas las características importantes de esta función polinomial. Pero las figuras 2 y 4, tomadas en conjunto, proporcionan una imagen más precisa.

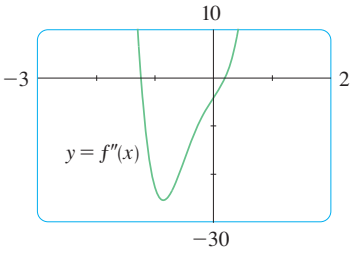


FIGURA 5

V EJEMPLO 2 Dibuje la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{x^2 + 7x + 3}{x^2}$$

en un rectángulo de vista que contenga todas las características importantes de la función. Estime los valores máximos y mínimos y los intervalos de concavidad. Después utilice el cálculo para encontrar exactamente estas cantidades.

SOLUCIÓN La figura 6, producida por un equipo de cómputo con escala automática, es un desastre. Algunas calculadoras graficadoras utilizan $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$ como el rectángulo de vista predeterminada, así que vamos a probarlo. Obtenemos la gráfica que se muestra en la figura 7; es una mejora importante.

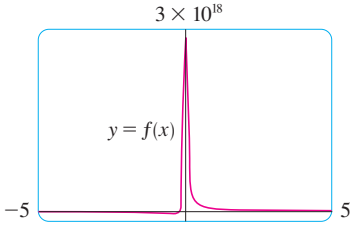


FIGURA 6

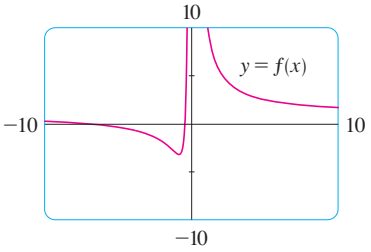


FIGURA 7

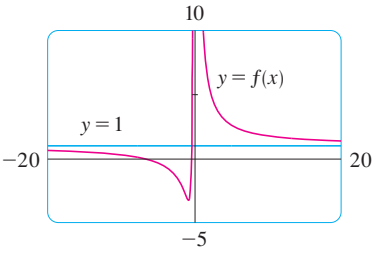


FIGURA 8

El eje y parece ser una asíntota vertical y, de hecho, lo es porque

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 7x + 3}{x^2} = \infty$$

La figura 7 también nos permite estimar las intersecciones con el eje x: cerca de -0.5 y -6.5. Los valores exactos se obtienen mediante la fórmula cuadrática para resolver la ecuación $x^2 + 7x + 3 = 0$; obtenemos $x = \left(-7 \pm \sqrt{37}\right)/2$.

Para obtener un mejor vistazo de las asíntotas horizontales, cambiamos el rectángulo de vista $[-20, 20]$ por $[-5, 10]$ en la figura 8. Parece que $y = 1$ es la asíntota horizontal y esto es fácilmente confirmado:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + 7x + 3}{x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{7}{x} + \frac{3}{x^2}\right) = 1$$

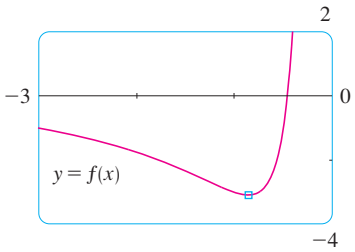


FIGURA 9

Para estimar el valor mínimo acercamos el rectángulo de vista $[-3, 0]$ por $[-4, 2]$ en la figura 9. El cursor indica que el valor mínimo absoluto es aproximadamente -3.1 cuando $x \approx -0.9$, y vemos que la función decrece sobre $(-\infty, -0.9)$ y $(0, \infty)$ y crece sobre $(-0.9, 0)$. Los valores exactos se obtienen derivando:

$$f'(x) = -\frac{7}{x^2} - \frac{6}{x^3} = -\frac{7x + 6}{x^3}$$

Esto demuestra que $f'(x) > 0$ cuando $-\frac{6}{7} < x < 0$ y $f'(x) < 0$ cuando $x < -\frac{6}{7}$ y cuando $x > 0$. El valor mínimo exacto es $f\left(-\frac{6}{7}\right) = -\frac{37}{12} \approx -3.08$.

La figura 9 también muestra que un punto de inflexión se localiza en algún lugar entre $x = -1$ y $x = -2$. Podríamos estimar con mucho más exactitud utilizando la gráfica de la segunda derivada, pero en este caso es fácil encontrar valores exactos. Ya que

$$f''(x) = \frac{14}{x^3} + \frac{18}{x^4} = \frac{2(7x + 9)}{x^4}$$

vemos que $f''(x) > 0$ cuando $x > -\frac{9}{7}$ $(x \neq 0)$. Así, f es cóncava hacia arriba sobre $\left(-\frac{9}{7}, 0\right)$ y $(0, \infty)$ y cóncava hacia abajo sobre $\left(-\infty, -\frac{9}{7}\right)$. El punto de inflexión es $\left(-\frac{9}{7}, -\frac{71}{27}\right)$.

El análisis mediante las dos primeras derivadas muestra en la figura 8 todos los aspectos importantes de la curva.

V EJEMPLO 3 Grafique la función $f(x) = \dfrac{x^2(x+1)^3}{(x-2)^2(x-4)^4}$.

SOLUCIÓN De nuestra experiencia con una función racional en el ejemplo 2, comencemos por graficar f en el rectángulo de vista $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$. De la figura 10 tenemos la sensación de que vamos a tener que acercarnos para ver algún detalle más fino y también para ver la imagen más grande. Pero, como una guía para hacer un acercamiento inteligente, primero veamos con más cuidado la expresión para $f(x)$. Debido a los factores $(x-2)^2$ y $(x-4)^4$ en el denominador, esperamos que $x = 2$ y $x = 4$ sean las asíntotas verticales. De hecho, lo son, ya que

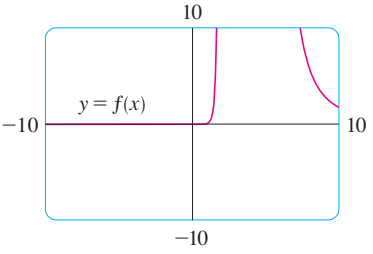


FIGURA 10

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2(x+1)^3}{(x-2)^2(x-4)^4} = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 4} \frac{x^2(x+1)^3}{(x-2)^2(x-4)^4} = \infty$$

Para encontrar las asíntotas horizontales, dividimos el numerador y el denominador por x^6:

$$\frac{x^2(x+1)^3}{(x-2)^2(x-4)^4} = \frac{\dfrac{x^2}{x^3} \cdot \dfrac{(x+1)^3}{x^3}}{\dfrac{(x-2)^2}{x^2} \cdot \dfrac{(x-4)^4}{x^4}} = \frac{\dfrac{1}{x}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^3}{\left(1 - \dfrac{2}{x}\right)^2\left(1 - \dfrac{4}{x}\right)^4}$$

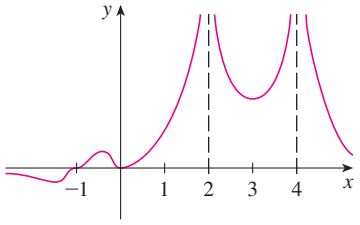


FIGURA 11

Esto demuestra que $f(x) \to 0$ conforme $x \to \pm\infty$, así que el eje x es una asíntota horizontal.

También es muy útil examinar el comportamiento de la gráfica cerca de la intersección con el eje x, usando un análisis como en el ejemplo 12 en la sección 2.6. Ya que x^2 es positiva, $f(x)$ no cambia de signo en 0 y, por tanto, su gráfica no cruza el eje x en 0. Pero, debido al factor $(x+1)^3$, la gráfica cruza el eje x en -1 y tiene allí una recta tangente horizontal. Poniendo toda esta información junta, pero sin utilizar derivadas, vemos que la curva tiene que ser algo como la de la figura 11.

Ahora que sabemos qué buscar, nos acercamos con el *zoom* (varias veces) para producir las gráficas de las figuras 12 y 13 y alejamos (varias veces) para obtener la figura 14.

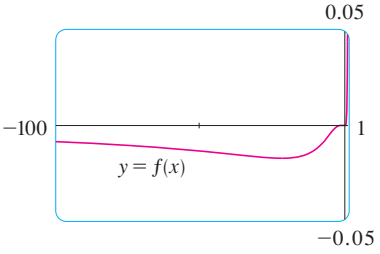


FIGURA 12

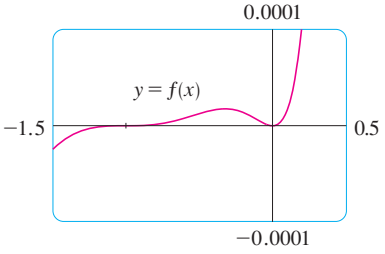


FIGURA 13

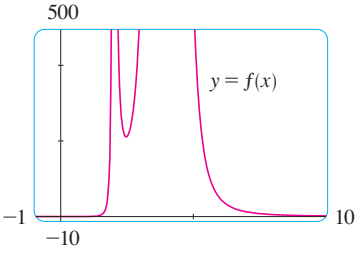


FIGURA 14

De estas gráficas, podemos leer que el mínimo absoluto es aproximadamente -0.02 y se produce cuando $x \approx -20$. También hay un máximo local ≈ 0.00002 cuando $x \approx -0.3$ y un mínimo local ≈ 211 cuando $x \approx 2.5$. Estas gráficas también muestran tres puntos de inflexión cerca de -35, -5 y -1 y dos entre -1 y 0. Para estimar los puntos de inflexión más cercanamente necesitaríamos la gráfica de f'', pero graficar f'' a mano es una tarea poco razonable. Si tiene un sistema algebraico computarizado, es más fácil (véase el ejercicio 15).

Hemos visto que, para esta función en particular, son necesarias *tres* gráficas (figuras 12, 13 y 14) para transmitir toda la información útil. La única manera de mostrar todas estas características de la función en una gráfica única es dibujar a mano. A pesar de las exageraciones y distorsiones, la figura 11 logra resumir la naturaleza esencial de la función.

La familia de funciones

$$f(x) = \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} cx)$$

donde c es una constante, aparece en aplicaciones a la sintonía de frecuencia modulada (FM). Una onda sinusoidal es modulada por una onda con una frecuencia diferente (sen cx). El caso donde $c = 2$ se estudia en el ejemplo 4. El ejercicio 27 explora otro caso especial.

EJEMPLO 4 Grafique la función $f(x) = \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} 2x)$. Para $0 \leq x \leq \pi$, estime todos los valores máximos y mínimos, intervalos donde la función crece y decrece y los puntos de inflexión.

SOLUCIÓN Primero observamos que f es periódica con periodo 2π. Asimismo, f es impar y $|f(x)| \leq 1$ para toda x. Así, la elección de un rectángulo de vista no es un problema para esta función: empezamos con $[0, \pi]$ por $[-1.1, 1.1]$ (Véase la Figura 15.) Parece que hay tres valores máximos locales y dos valores mínimos locales en esa ventana. Para confirmar esto y localizarlos con mayor precisión, obtenemos

$$f'(x) = \cos(x + \operatorname{sen} 2x) \cdot (1 + 2 \cos 2x)$$

y graficamos f y f' en la figura 16.

Utilizando el *zoom* y la prueba de la primera derivada, nos encontramos con los siguientes valores aproximados:

Intervalos sobre los que crece: (0, 0.6), (1.0, 1.6), (2.1, 2.5)

Intervalos sobre los que decrece: (0.6, 1.0), (1.6, 2.1), (2.5, π)

Valores máximos locales: $f(0.6) \approx 1, f(1.6) \approx 1, f(2.5) \approx 1$

Valores mínimos locales: $f(1.0) \approx 0.94, f(2.1) \approx 0.94$

La segunda derivada es

$$f''(x) = -(1 + 2 \cos 2x)^2 \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} 2x) - 4 \operatorname{sen} 2x \cos(x + \operatorname{sen} 2x)$$

Graficando f y f'' en la figura 17, obtenemos los siguientes valores aproximados:

Cóncava hacia arriba sobre: (0.8, 1.3), (1.8, 2.3)

Cóncava hacia abajo sobre: (0, 0.8), (1.3, 1.8), (2.3, π)

Puntos de inflexión: (0, 0), (0.8, 0.97), (1.3, 0.97), (1.8, 0.97), (2.3, 0.97)

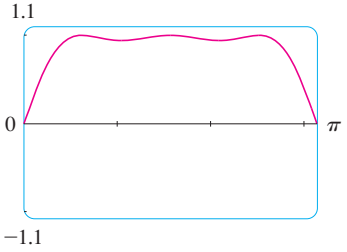


FIGURA 15

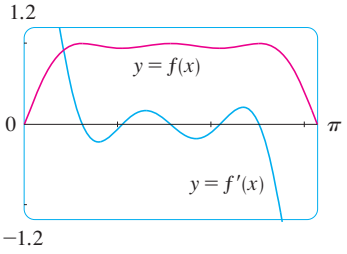


FIGURA 16

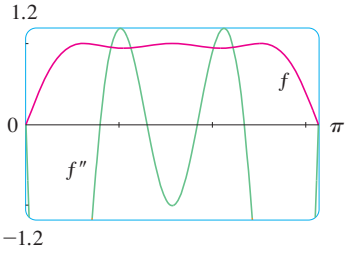


FIGURA 17

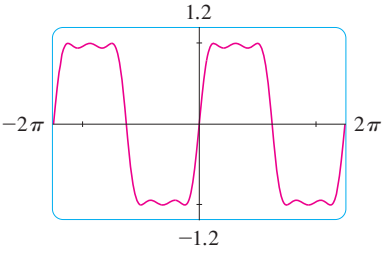


FIGURA 18

Hemos comprobado que la figura 15 representa f con precisión para $0 \leq x \leq \pi$, por lo que podemos afirmar que la gráfica ampliada en la figura 18 representa f con precisión para $-2\pi \leq x \leq 2\pi$.

Nuestro último ejemplo se refiere a las *familias* de funciones. Como se explica en la sección 1.4, esto significa que las funciones de la familia están relacionadas con otras mediante una fórmula que contiene una o más constantes arbitrarias. Cada valor de la constante da lugar a un miembro de la familia, y la idea es ver cómo varía la gráfica de la función con los constantes cambios.

V EJEMPLO 5 ¿Cómo varía la gráfica de $f(x) = 1/(x^2 + 2x + c)$ cuando c cambia?

SOLUCIÓN Las gráficas de las figuras 19 y 20 (casos especiales para $c = 2$ y $c = -2$) muestran dos maneras muy diferentes de ver las curvas. Antes de dibujar más gráficas, veamos qué tienen en común los miembros de esta familia. Ya que

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + c} = 0$$

para cualquier valor de c, todas tienen al eje x como asíntota horizontal. Una asíntota vertical ocurre cuando $x^2 + 2x + c = 0$. Resolviendo esta ecuación cuadrática, obtenemos $x = -1 \pm \sqrt{1 - c}$. Cuando $c > 1$, no hay asíntotas verticales (como en la figura 19). Cuando $c = 1$, la gráfica tiene una sola asíntota vertical $x = -1$ porque

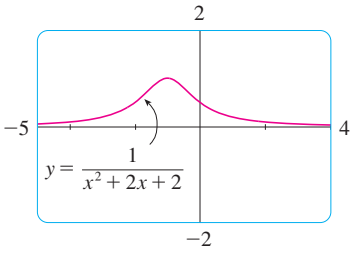


FIGURA 19
$c = 2$

$$\lim_{x \to -1} \frac{1}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{1}{(x + 1)^2} = \infty$$

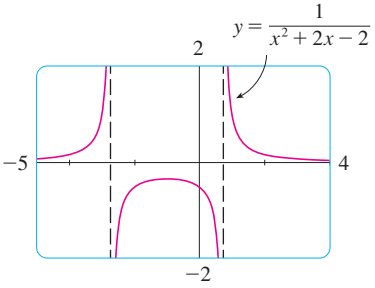


FIGURA 20
$c = -2$

Cuando $c < 1$, hay dos asíntotas verticales $x = -1 \pm \sqrt{1 - c}$ (como en la figura 20).

Ahora obtenemos la derivada:

$$f'(x) = -\frac{2x + 2}{(x^2 + 2x + c)^2}$$

Esto demuestra que $f'(x) = 0$ cuando $x = -1$ (si $c \neq 1$), $f'(x) > 0$ cuando $x < -1$ y $f'(x) < 0$ cuando $x > -1$. Para $c \geqslant 1$, esto significa que f es creciente sobre $(-\infty, -1)$ y decreciente sobre $(-1, \infty)$. Para $c > 1$, hay un valor máximo absoluto $f(-1) = 1/(c - 1)$. Para $c < 1$, $f(-1) = 1/(c - 1)$ es un valor máximo local, y los intervalos donde es creciente y decreciente se interrumpen debido a las asíntotas verticales.

La figura 21 es una "serie de diapositivas" que muestran cinco miembros de la familia, todas representadas en el rectángulo de vista $[-5, 4]$ por $[-2, 2]$. Como previmos, $c = 1$ es el valor desde donde tiene lugar una transición de dos asíntotas verticales a una y luego a ninguna. Cuando c aumenta desde 1, vemos que el punto máximo resulta menor; esto se explica por el hecho de que $1/(c - 1) \to 0$ conforme $c \to \infty$. Cuando c disminuye de 1, las asíntotas verticales se separan más ampliamente porque la distancia entre ellas es $2\sqrt{1 - c}$, lo cual resulta muy grande a medida que $c \to -\infty$. Nuevamente, el punto máximo se aproxima al eje x porque $1/(c - 1) \to 0$ conforme $c \to -\infty$.

TEC Vea una animación de la figura 21 en Visual 4.6

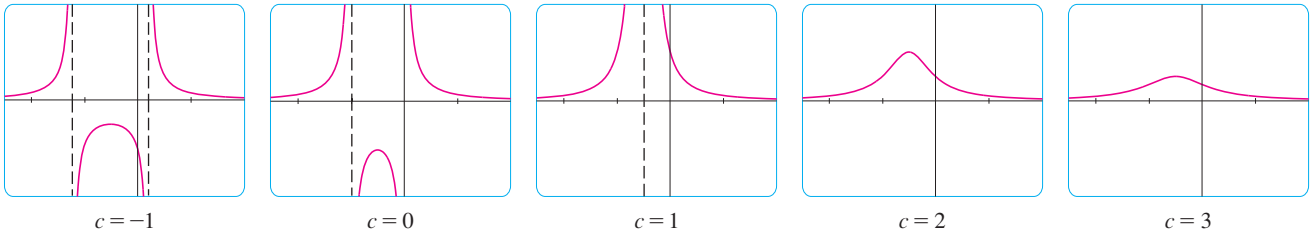


FIGURA 21 La familia de funciones $f(x) = 1/(x^2 + 2x + c)$

Claramente, no hay ningún punto de inflexión cuando $c \leq 1$. Para $c > 1$ obtenemos

$$f''(x) = \frac{2(3x^2 + 6x + 4 - c)}{(x^2 + 2x + c)^3}$$

y deducimos que los puntos de inflexión ocurren cuando $x = -1 \pm \sqrt{3(c-1)}/3$. Así, los puntos de inflexión se extienden al aumentar c, y esto parece verosímil, por lo que se ve en las dos últimas partes de la figura 21.

4.6 Ejercicios

1-8 Elabore gráficas de f que revelen todos los aspectos importantes de cada una de las siguientes curvas. En particular, debe utilizar gráficas de f' y f'' para estimar los intervalos donde f es creciente y decreciente, valores extremos, intervalos de concavidad y puntos de inflexión.

1. $f(x) = 4x^4 - 32x^3 + 89x^2 - 95x + 29$

2. $f(x) = x^6 - 15x^5 + 75x^4 - 125x^3 - x$

3. $f(x) = x^6 - 10x^5 - 400x^4 + 2\,500x^3$

4. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{40x^3 + x + 1}$ **5.** $f(x) = \dfrac{x}{x^3 + x^2 + 1}$

6. $f(x) = 6 \operatorname{sen} x - x^2, \quad -5 \leq x \leq 3$

7. $f(x) = 6 \operatorname{sen} x + \cot x, \quad -\pi \leq x \leq \pi$

8. $f(x) = e^x - 0.186x^4$

9-10 Elabore gráficas de f que revelen todos los aspectos importantes de cada una de las siguientes curvas. Determine los intervalos donde f es creciente y decreciente e intervalos de concavidad y utilice el cálculo para encontrar exactamente estos intervalos.

9. $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{8}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$ **10.** $f(x) = \dfrac{1}{x^8} - \dfrac{2 \times 10^8}{x^4}$

11-12

a) Grafique la función.

b) Utilice la regla de l'Hospital para explicar el comportamiento conforme $x \to 0$.

c) Estime el valor mínimo y los intervalos de concavidad. Después, utilice el cálculo para encontrar los valores exactos.

11. $f(x) = x^2 \ln x$ **12.** $f(x) = xe^{1/x}$

13-14 Esboce a mano la gráfica utilizando asíntotas e intersecciones pero no derivadas. Después utilice su esbozo como una guía para elaborar gráficas (con un dispositivo de graficación) que muestran las principales características de la curva. Utilice estas gráficas para estimar los valores máximos y mínimos.

13. $f(x) = \dfrac{(x+4)(x-3)^2}{x^4(x-1)}$ **14.** $f(x) = \dfrac{(2x+3)^2(x-2)^5}{x^3(x-5)^2}$

SAC **15.** Si f es la función considerada en el ejemplo 3, utilice un sistema algebraico computarizado para calcular f' y luego grafíquela para confirmar que todos los valores máximos y mínimos son como en el ejemplo. Calcule f'' y utilícela para estimar los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.

SAC **16.** Si f es la función del ejercicio 14, encuentre f' y f'' y utilice sus gráficas para estimar los intervalos donde f es creciente, decreciente y de concavidad.

SAC **17-22** Utilice un sistema algebraico computarizado para graficar f y para encontrar f' y f''. Use las gráficas de estas derivadas para estimar los intervalos donde f es creciente y decreciente, los valores extremos, intervalos de concavidad y sus puntos de inflexión.

17. $f(x) = \dfrac{x^3 + 5x^2 + 1}{x^4 + x^3 - x^2 + 2}$ **18.** $f(x) = \dfrac{x^{2/3}}{1 + x + x^4}$

19. $f(x) = \sqrt{x + 5 \operatorname{sen} x}, \quad x \leq 20$

20. $f(x) = (x^2 - 1)\, e^{\arctan x}$

21. $f(x) = \dfrac{1 - e^{1/x}}{1 + e^{1/x}}$ **22.** $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{\tan x}}$

SAC **23-24** Grafique la función utilizando tantos rectángulos de vista como necesite para representar la verdadera naturaleza de la función.

23. $f(x) = \dfrac{1 - \cos(x^4)}{x^8}$ **24.** $f(x) = e^x + \ln|x - 4|$

SAC **25-26**

a) Grafique la función.

b) Explique la forma de la gráfica obteniendo el límite conforme $x \to 0^+$ o a medida que $x \to \infty$.

c) Estime los valores máximo y mínimo y, a continuación, utilice el cálculo para encontrar los valores exactos.

d) Utilice la gráfica de f'' para estimar las coordenadas x de los puntos de inflexión.

25. $f(x) = x^{1/x}$ **26.** $f(x) = (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}$

27. En el ejemplo 4 hemos considerado un miembro de la familia de funciones $f(x) = \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} cx)$ que se presenta en la sintonía FM. Aquí investigamos la función con $c = 3$. Empiece

por graficar f en el rectángulo de vista $[0, \pi]$ por $[-1.2, 1.2]$. ¿Cuántos puntos máximos locales ve usted? La gráfica tiene más de lo que se puede notar a simple vista. Para descubrir los puntos máximos y mínimos ocultos tendrá que examinar la gráfica de f' muy cuidadosamente. De hecho, ayuda mirar la gráfica de f'' al mismo tiempo. Encuentre todos los valores máximos y mínimos y puntos de inflexión. Luego grafique f en el rectángulo de vista $[-2\pi, 2\pi]$ por $[-1.2, 1.2]$ y comente lo relacionado con la simetría.

28-35 Describa cómo varía la gráfica de f conforme c varía. Grafique varios miembros de la familia para ilustrar las tendencias que descubre usted. En particular, debe investigar cómo se mueven los puntos máximos y mínimos y los puntos de inflexión cuando c cambia. También debe identificar cualquier valor de transición de c, en el que cambia la forma básica de la curva.

28. $f(x) = x^3 + cx$

29. $f(x) = \sqrt{x^4 + cx^2}$

30. $f(x) = x\sqrt{c^2 - x^2}$

31. $f(x) = e^x + ce^{-x}$

32. $f(x) = \ln(x^2 + c)$

33. $f(x) = \dfrac{cx}{1 + c^2x^2}$

34. $f(x) = x^2 + ce^{-x}$

35. $f(x) = cx + \operatorname{sen} x$

36. La familia de funciones $f(t) = C(e^{-at} - e^{-bt})$, donde a, b y C son números positivos y $b > a$, ha sido utilizada para modelar la concentración de un fármaco que se inyecta en el torrente sanguíneo en el tiempo $t = 0$. Grafique varios miembros de esta familia. ¿Qué tienen en común? Para valores fijos de C y a, descubra gráficamente lo que ocurre a medida que aumenta b. Después utilice el cálculo para demostrar lo que ha descubierto.

37. Investigue la familia de curvas dada por $f(x) = xe^{-cx}$, donde c es un número real. Empiece por obtener los límites conforme $x \to \pm\infty$. Identifique los valores de transición de c donde cambia la forma básica. ¿Qué sucede con los puntos máximos o mínimos y los puntos de inflexión a medida que c cambia? Ilustre graficando varios miembros de la familia.

38. Investigue la familia de curvas dada por la ecuación $f(x) = x^4 + cx^2 + x$. Comience por determinar el valor de transición de c, en el que el número de puntos de inflexión cambia. A continuación, grafique varios miembros de la familia para ver qué formas son posibles. Hay otro valor de transición de c en el que cambia el número de números críticos. Intente descubrirlo gráficamente. Después demuestre lo que usted ha descubierto.

39. a) Investigue la familia de funciones polinomiales dada por $f(x) = cx^4 - 2x^2 + 1$. ¿Para qué valores de c la curva tiene puntos mínimos?
b) Demuestre que los puntos máximos y mínimos de cada curva en la familia se encuentran sobre la parábola $y = 1 - x^2$. Ilustre graficando esta parábola y varios miembros de la familia.

40. a) Investigue la familia de funciones polinomiales dada por $f(x) = 2x^3 + cx^2 + 2x$. ¿Para qué valores de c la curva tiene puntos máximos y mínimos?
b) Demuestre que los puntos máximos y mínimos de cada curva en la familia se encuentran sobre la curva $y = x - x^3$. Ilustre graficando esta curva y varios miembros de la familia.

4.7 Problemas de optimización

Los métodos que hemos aprendido en este capítulo para encontrar los valores extremos tienen aplicaciones prácticas en muchas áreas de la vida. Un empresario quiere minimizar los costos y maximizar las ganancias. Un viajero quiere minimizar el tiempo de transporte. El principio de Fermat en óptica establece que la luz sigue el camino que toma el menor tiempo. En esta sección resolvemos problemas como la maximización de áreas, volúmenes y beneficios y la minimización de distancias, tiempos y costos.

En la resolución de tales problemas prácticos, el mayor desafío suele ser convertir el problema expresado en palabras en un problema de optimización matemática, estableciendo la función que va a maximizar o minimizar. Para esto, vamos a recordar los RP principios para resolver problemas que se discutieron en la página 75 y adaptarlos a esta situación:

Pasos para la resolución de problemas de optimización

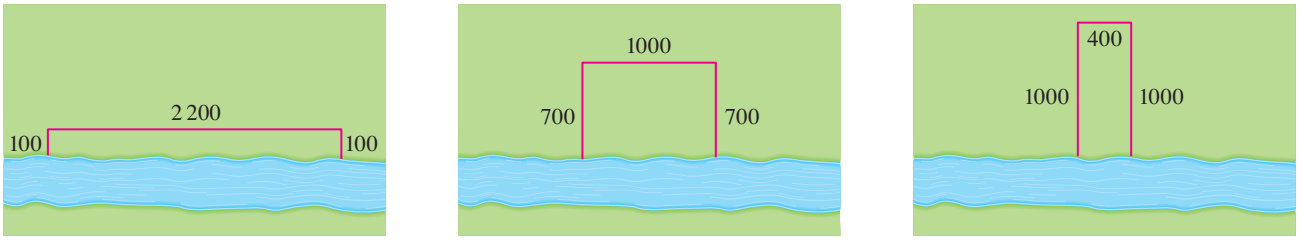
1. **Comprenda el problema** El primer paso consiste en leer detenidamente el problema hasta que se entienda claramente. Pregúntese: ¿qué es lo desconocido? ¿Cuáles son las cantidades conocidas? ¿Cuáles son las condiciones dadas?
2. **Dibuje un diagrama** En la mayoría de los problemas resulta útil dibujar un diagrama e identificar las cantidades dadas y las cantidades requeridas en el diagrama.

3. **Introduzca la notación** Asigne un símbolo a la cantidad que va a ser maximizada o minimizada [vamos a llamarla Q (del inglés *quantity*) por ahora]. También seleccione símbolos $(a, b, c, \ldots, x, y)$ para otras cantidades desconocidas y etiquete el diagrama con estos símbolos. Puede ser provechoso utilizar iniciales como símbolos sugerentes —p. ej., A para el área, h para la altura, t para el tiempo.
4. Exprese Q en términos de algunos de los otros símbolos del paso 3.
5. Si Q se ha expresado como una función de más de una variable en el paso 4, utilice la información dada para encontrar relaciones (en forma de ecuaciones) entre estas variables. Utilice estas ecuaciones para eliminar todas, excepto una de las variables en la expresión para Q. Así Q se expresará en función de *una* variable x, digamos, $Q = f(x)$. Escriba el dominio de esta función.
6. Utilice los métodos de las secciones 4.1 y 4.3 para encontrar los valores máximo o mínimo *absolutos* de f. En particular, si el dominio de f es un intervalo cerrado, entonces puede utilizarse el método del intervalo cerrado de la sección 4.1.

EJEMPLO 1 Un agricultor tiene 2 400 pies de material y quiere construir una barda para cercar un campo rectangular que bordea un río recto, de modo que no necesita barda a lo largo del río. ¿Cuáles son las dimensiones que debe tener el campo para encerrar el área más grande?

RP Comprenda el problema
RP Analogía: intente casos especiales
RP Dibuje diagramas

SOLUCIÓN Para hacerse una idea de lo que está sucediendo en este problema, vamos a experimentar con algunos casos especiales. La figura 1 (no a escala) muestra tres formas de posibles arreglos de los 2 400 metros de material.



Área = 100 · 2 200 = 220 000 pies^2 | Área = 700 · 1000 = 700 000 pies^2 | Área = 1000 · 400 = 400 000 pies^2

FIGURA 1

Vemos que cuando intentamos campos muy anchos y poco largos, o campos angostos y muy largos, obtenemos áreas relativamente pequeñas. Parece verosímil que exista alguna configuración intermedia que produzca el área más grande.

La figura 2 ilustra el caso general. Queremos maximizar el área A del rectángulo. Sea x y y el largo y el ancho, respectivamente, del rectángulo (en pies). Entonces, queremos expresar A en términos de x y y:

RP Introduzca notación

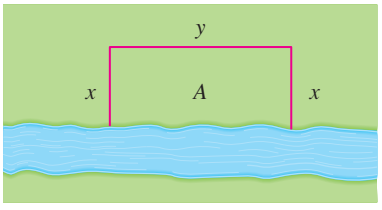


FIGURA 2

$$A = xy$$

Queremos expresar A en función de una sola variable, por lo que eliminamos y expresándola en términos de x. Para ello utilizamos la información dada de que la longitud total de la barda es 2 400 pies. Así

$$2x + y = 2\,400$$

De esta ecuación tenemos $y = 2\,400 - 2x$, lo cual da

$$A = x(2\,400 - 2x) = 2\,400x - 2x^2$$

Tenga en cuenta que $x \geqslant 0$ y $x \leqslant 1200$ (de lo contrario $A < 0$), así que la función que deseamos maximizar es

$$A(x) = 2\,400x - 2x^2 \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1200$$

La derivada es $A'(x) = 2\,400 - 4x$, así que para encontrar los números críticos resolvemos

$$2\,400 - 4x = 0$$

que da $x = 600$. El valor máximo de A debe producirse en este número crítico o en un extremo del intervalo. Ya que $A(0) = 0$, $A(600) = 720\,000$ y $A(1200) = 0$, el método del intervalo cerrado da el valor máximo cuando $A(600) = 720\,000$.

[Alternativamente, podríamos haber observado que $A''(x) = -4 < 0$ para toda x, por lo que A es siempre cóncava hacia abajo y el máximo local en $x = 600$ debe ser un máximo absoluto.]

Así, el campo rectangular debe tener 600 pies de largo y 1200 pies de ancho.

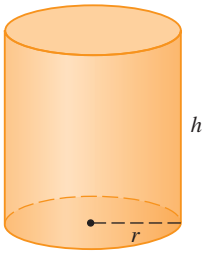


FIGURA 3

V EJEMPLO 2 Se va un fabricar una lata que ha de contener 1 L de aceite. Encuentre las dimensiones que debe tener la lata de manera que minimicen el costo del metal para fabricarla.

SOLUCIÓN Dibuje el diagrama como el de la figura 3, donde r es el radio y h la altura (ambos en cm). Para minimizar el costo del metal, minimizaremos el área superficial total del cilindro (tapa, fondo y lados). A partir de la figura 4, observamos que los lados se fabrican de una lámina rectangular con dimensiones $2\pi r$ y h. De esta manera, el área superficial es

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

Para eliminar h recurrimos al hecho de que el volumen está dado como 1 L, que tomamos como $1000\,\text{cm}^3$. Así

$$\pi r^2 h = 1000$$

lo cual da $h = 1000/(\pi r^2)$. Sustituyendo esto en la expresión para A, da

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1000}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \frac{2\,000}{r}$$

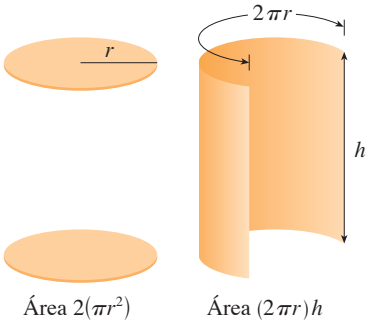


FIGURA 4

Por tanto, la función que queremos minimizar es

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2\,000}{r} \qquad r > 0$$

Para encontrar los números críticos, derivamos:

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2\,000}{r^2} = \frac{4(\pi r^3 - 500)}{r^2}$$

Entonces $A'(r) = 0$ cuando $\pi r^3 = 500$, así que el único número crítico es $r = \sqrt[3]{500/\pi}$.

Puesto que el dominio de A es $(0, \infty)$, no podemos aplicar el argumento del ejemplo 1 concerniente a los puntos extremos. Pero podemos observar que $A'(r) < 0$ para $r < \sqrt[3]{500/\pi}$ y $A'(r) > 0$ para $r > \sqrt[3]{500/\pi}$, por lo que A es decreciente para *toda* r a la izquierda del número crítico y creciente para *toda* r a la derecha. De este modo, $r = \sqrt[3]{500/\pi}$ debe dar lugar a un mínimo *absoluto*.

[Como otra posibilidad, podríamos argumentar que $A(r) \to \infty$ conforme $r \to 0^+$ y $A(r) \to \infty$ a medida que $r \to \infty$, de manera que debe haber un valor mínimo de $A(r)$, el cual tiene que ocurrir en el número crítico. Véase la figura 5.]

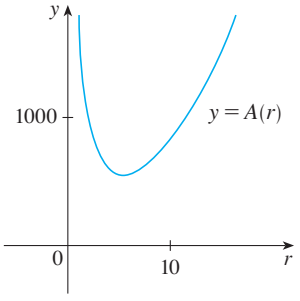


FIGURA 5

En el Proyecto de aplicación en página 337 investigamos la forma más económica para la fabricación de una lata teniendo en cuenta los costos de producción.

El valor de h correspondiente a $r = \sqrt[3]{500/\pi}$ es

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} = \frac{1000}{\pi(500/\pi)^{2/3}} = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 2r$$

Así, para minimizar el costo de la lata, el radio debe ser $\sqrt[3]{500/\pi}$ cm y la altura debe ser igual al doble del radio, es decir, el diámetro.

NOTA 1 El argumento utilizado en el ejemplo 2 para justificar el mínimo absoluto es una variante de la prueba de la primera derivada (que sólo se aplica a valores máximos o mínimos *locales*) y se establece aquí para referencia futura.

TEC Module 4.7 lo lleva a través de seis problemas adicionales de optimización, incluyendo animaciones de las situaciones físicas.

Prueba de la primera derivada para valores extremos absolutos Suponga que c es un número crítico de una función continua f definida sobre un intervalo.

a) Si $f'(x) > 0$ para toda $x < c$ y $f'(x) < 0$ para toda $x > c$, entonces $f(c)$ es el valor máximo absoluto de f.

b) Si $f'(x) < 0$ para toda $x < c$ y $f'(x) > 0$ para toda $x > c$, entonces $f(c)$ es el valor mínimo absoluto de f.

NOTA 2 Un método alternativo para resolver problemas de optimización es utilizar derivación implícita. Veamos el ejemplo 2 nuevamente para ilustrar el método. Trabajamos con las mismas ecuaciones

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh \qquad \pi r^2 h = 1000$$

pero en lugar de eliminar h, derivamos ambas ecuaciones implícitamente, respecto a r:

$$A' = 4\pi r + 2\pi h + 2\pi rh' \qquad 2\pi rh + \pi r^2 h' = 0$$

El mínimo se produce en un número crítico, por lo que establecemos $A' = 0$; simplificamos para llegar a las ecuaciones

$$2r + h + rh' = 0 \qquad 2h + rh' = 0$$

y la sustracción da $2r - h = 0$, o $h = 2r$.

V EJEMPLO 3 Encuentre el punto sobre la parábola $y^2 = 2x$ que está más cerca del punto $(1, 4)$.

SOLUCIÓN La distancia entre el punto $(1, 4)$ y el punto (x, y) es

$$d = \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 4)^2}$$

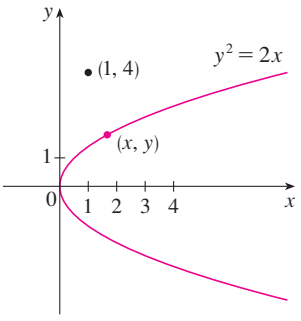


FIGURA 6

(Véase la figura 6). Pero si (x, y) se encuentra sobre la parábola, entonces $x = \frac{1}{2}y^2$, por lo que la expresión para d se convierte en

$$d = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}y^2 - 1\right)^2 + (y - 4)^2}$$

(Como alternativa, podríamos haber sustituido $y = \sqrt{2x}$ para obtener d solamente en términos de x.) En lugar de minimizar d, minimizamos su cuadrado:

$$d^2 = f(y) = \left(\tfrac{1}{2}y^2 - 1\right)^2 + (y - 4)^2$$

(Debe usted convencerse de que el mínimo de d ocurre en el mismo punto donde ocurre el

mínimo de d^2, pero es más fácil trabajar con d^2.) Derivando, obtenemos

$$f'(y) = 2\left(\tfrac{1}{2}y^2 - 1\right)y + 2(y - 4) = y^3 - 8$$

de manera que $f'(y) = 0$ cuando $y = 2$. Observe que $f'(y) < 0$ cuando $y < 2$ y $f'(y) > 0$ cuando $y > 2$, así que, por la prueba de la primera derivada para valores extremos absolutos, el mínimo absoluto se obtiene cuando $y = 2$. (O simplemente podríamos decir que, debido a la naturaleza geométrica del problema, es evidente que hay un punto más cercano, pero no un punto más lejano). El correspondiente valor de x es $x = \frac{1}{2}y^2 = 2$. Por tanto, el punto sobre $y^2 = 2x$ más cercano a $(1, 4)$ es $(2, 2)$.

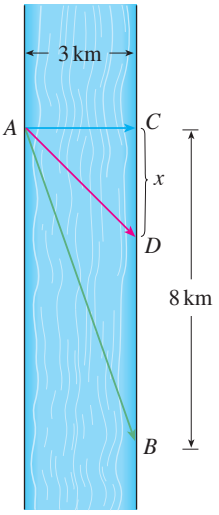


FIGURA 7

EJEMPLO 4 Un hombre lanza su lancha desde un punto A a la orilla de un río recto de 3 km de ancho y quiere alcanzar el punto B, 8 km abajo en la orilla opuesta, en el menor tiempo posible (véase la figura 7). Podría enfilar su lancha directamente a través del río al punto C y después correr a B, podría enfilarse directamente a B, o podía ir a algún punto D entre C y B para después avanzar corriendo hacia B. Si el hombre puede remar a 6 km/h y correr a 8 km/h, ¿dónde debe desembarcar para llegar a B tan pronto como sea posible? (Suponemos que la rapidez del agua es insignificante en comparación con la rapidez a la que el hombre rema.)

SOLUCIÓN Sea x la distancia entre C y D; entonces la distancia que ha de correr es $|DB| = 8 - x$ y el teorema de Pitágoras da la distancia que ha de remar $|AD| = \sqrt{x^2 + 9}$. Utilizamos la ecuación

$$\text{tiempo} = \frac{\text{distancia}}{\text{rapidez}}$$

Entonces el tiempo de remo es $\sqrt{x^2 + 9}/6$, y el tiempo de carrera es $(8 - x)/8$, por lo que el tiempo total T como una función de x es

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{6} + \frac{8 - x}{8}$$

El dominio de esta función T es $[0, 8]$. Observe que si $x = 0$, él rema hacia C y si $x = 8$, rema directamente a B. La derivada de T es

$$T'(x) = \frac{x}{6\sqrt{x^2 + 9}} - \frac{1}{8}$$

Así, utilizando el hecho de que $x \geqslant 0$, tenemos

$$\begin{aligned} T'(x) = 0 &\iff \frac{x}{6\sqrt{x^2 + 9}} = \frac{1}{8} \iff 4x = 3\sqrt{x^2 + 9} \\ &\iff 16x^2 = 9(x^2 + 9) \iff 7x^2 = 81 \\ &\iff x = \frac{9}{\sqrt{7}} \end{aligned}$$

El único número crítico es $x = 9/\sqrt{7}$. Para ver si el mínimo ocurre en este número crítico o en un extremo del dominio $[0, 8]$, evaluamos T en los tres puntos:

$$T(0) = 1.5 \qquad T\left(\frac{9}{\sqrt{7}}\right) = 1 + \frac{\sqrt{7}}{8} \approx 1.33 \qquad T(8) = \frac{\sqrt{73}}{6} \approx 1.42$$

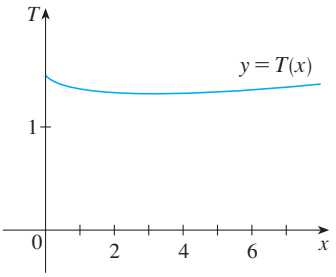


FIGURA 8

Como el más pequeño de estos valores de T se produce cuando $x = 9/\sqrt{7}$, el valor mínimo absoluto de T debe ocurrir allí. La figura 8 ilustra este cálculo mostrando la gráfica de T.

Así, el hombre debe desembarcar en un punto a $9/\sqrt{7}$ km (≈ 3.4 km) río abajo de su punto de partida.

V EJEMPLO 5 Encuentre el rectángulo de mayor área que puede ser inscrito en un semicírculo de radio r.

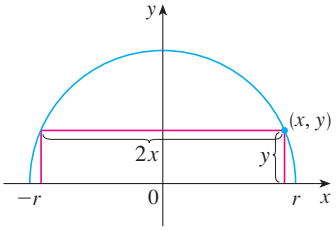


FIGURA 9

SOLUCIÓN 1 Tomemos la semicircunferencia como la mitad superior de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ con centro en el origen. Entonces la palabra *inscrita* significa que el rectángulo tiene dos vértices sobre la semicircunferencia y dos vértices sobre el eje x, como se muestra en la figura 9.

Sea (x, y) el vértice que se encuentra en el primer cuadrante. Entonces, el rectángulo tiene lados de longitud $2x$ e y, por lo que su área es

$$A = 2xy$$

Para eliminar y recurrimos al hecho de que (x, y) se encuentra sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$, así que $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Por tanto,

$$A = 2x\sqrt{r^2 - x^2}$$

El dominio de esta función es $0 \leqslant x \leqslant r$. Su derivada es

$$A' = 2\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{2(r^2 - 2x^2)}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

que es 0 cuando $2x^2 = r^2$, es decir, $x = r/\sqrt{2}$ (ya que $x \geqslant 0$). Este valor de x da un valor máximo de A porque $A(0) = 0$ y $A(r) = 0$. Por tanto, el rectángulo inscrito de mayor área es

$$A\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right) = 2\frac{r}{\sqrt{2}}\sqrt{r^2 - \frac{r^2}{2}} = r^2$$

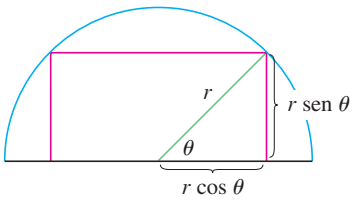


FIGURA 10

SOLUCIÓN 2 Es posible una solución más sencilla si consideramos utilizar un ángulo como una variable. Sea θ el ángulo mostrado en la figura 10. Entonces el área del rectángulo es

$$A(\theta) = (2r\cos\theta)(r\,\text{sen}\,\theta) = r^2(2\,\text{sen}\,\theta\,\cos\theta) = r^2\,\text{sen}\,2\theta$$

Sabemos que sen 2θ tiene un valor máximo de 1 y se produce cuando $2\theta = \pi/2$. Así, $A(\theta)$ tiene un valor máximo de r^2 y se produce cuando $\theta = \pi/4$.

Observe que esta solución trigonométrica no implica derivación. De hecho, no tenemos que utilizar cálculo en absoluto.

Aplicaciones en negocios y economía

En la sección 3.7 hemos introducido la idea de costo marginal. Recuerde que si $C(x)$, la **función costo**, es el costo de producir x unidades de un determinado producto, entonces el **costo marginal** es la tasa de cambio de C respecto a x. En otras palabras, la función costo marginal es la derivada, $C'(x)$, de la función costo.

Ahora consideremos la comercialización. Sea $p(x)$ el precio por unidad que la empresa puede cobrar si vende x unidades. Entonces p se llama **función demanda** (o **función de precio**) y esperaríamos que sea una función de x decreciente. Si x unidades son vendidas y el precio por unidad es de $p(x)$, entonces el ingreso (*revenue*, en inglés) total es

$$R(x) = xp(x)$$

y R se llama **función ingreso**. La derivada R' de la función ingreso se llama **función ingreso marginal** y es la tasa de cambio de ingreso respecto al número de unidades vendidas.

Si se venden x unidades, entonces la utilidad (*profit*, en inglés) total es

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

y P se llama **función utilidad**. La **función utilidad marginal** es P', la derivada de la función utilidad. En los ejercicios 57-62, se le pide que utilice las funciones costo marginal, ingreso y utilidad para minimizar los costos y maximizar los ingresos y utilidades.

V EJEMPLO 6 Una tienda ha estado vendiendo 200 reproductores de discos Blu-ray por semana a $350 cada uno. Un estudio de mercado indica que por cada $10 de descuento ofrecido a los compradores, el número de unidades vendidas se incrementará en 20 a la semana. Encuentre la función demanda y la función ingreso. ¿Qué tan grande debe ser el descuento que ofrezca la tienda para maximizar sus ingresos?

SOLUCIÓN Si x es el número de reproductores Blu-ray vendidos por semana, entonces el aumento semanal de ventas es $x - 200$. Por cada aumento de 20 unidades vendidas, el precio se reduce por $10. Por tanto, por cada unidad adicional vendida, la disminución del precio será $\frac{1}{20} \times 10$, y la función demanda es

$$p(x) = 350 - \tfrac{10}{20}(x - 200) = 450 - \tfrac{1}{2}x$$

La función ingreso es

$$R(x) = xp(x) = 450x - \tfrac{1}{2}x^2$$

Dado que $R'(x) = 450 - x$, vemos que $R'(x) = 0$ cuando $x = 450$. Este valor de x da un máximo absoluto por la prueba de la primera derivada (o simplemente al observar que la gráfica de R es una parábola que abre hacia abajo). El precio correspondiente es

$$p(450) = 450 - \tfrac{1}{2}(450) = 225$$

y el descuento es $350 - 225 = 125$. Por tanto, para maximizar el ingreso, la tienda debe ofrecer un descuento de $125.

4.7 Ejercicios

1. Considere el siguiente problema: encuentre dos números cuya suma es 23 y cuyo producto es un máximo.

a) Haga una tabla de valores como la siguiente, para la que la suma de los números en las dos primeras columnas siempre es 23. Sobre la base de las evidencias de la tabla, estime la respuesta al problema.

Primer número	Segundo número	Producto
1	22	22
2	21	42
3	20	60
.	.	.
.	.	.
.	.	.

b) Utilice el cálculo para resolver el problema y compare con su respuesta al inciso a).

2. Encuentre dos números cuya diferencia es 100 y cuyo producto es un mínimo.

3. Encuentre dos números positivos cuyo producto es 100 y cuya suma es un mínimo.

4. La suma de dos números positivos es 16. ¿Cuál es el menor valor posible de la suma de sus cuadrados?

5. ¿Cuál es la distancia vertical máxima entre la recta $y = x + 2$ y la parábola $y = x^2$ para $-1 \leq x \leq 2$?

6. ¿Cuál es la distancia vertical mínima entre la parábolas $y = x^2 + 1$ y $y = x - x^2$?

7. Encuentre las dimensiones de un rectángulo con un perímetro de 100 metros, cuya área sea tan grande como sea posible.

8. Encuentre las dimensiones de un rectángulo con área de 1 000 m^2 cuyo perímetro sea tan pequeño como sea posible.

9. Un modelo utilizado para el rendimiento (*yield*) Y de una producción agrícola como una función del nivel de nitrógeno N en el suelo (medido en unidades adecuadas) es

$$Y = \frac{kN}{1 + N^2}$$

donde k es una constante positiva. ¿Qué nivel de nitrógeno ofrece el mejor rendimiento?

10. La rapidez (en mg carbono/m^3/h) en que la fotosíntesis tiene lugar para una especie de fitoplancton es modelada por la función

$$P = \frac{100I}{I^2 + I + 4}$$

donde I es la intensidad de luz (medida en miles de pie-candela) ¿Para qué intensidad de luz P es máxima?

11. Considere el siguiente problema: un agricultor que dispone de 750 pies de material para construir una barda quiere delimitar un área rectangular y luego dividirla en cuatro corrales con bardas paralelas a un lado del rectángulo. ¿Cuál es el área total más grande posible de los cuatro corrales?

a) Dibuje varios diagramas que ilustren la situación, algunos con corrales anchos y largos cortos, y otros con corrales angostos y grandes largos. Encuentre las áreas totales de estas configuraciones. ¿Parece que hay un área máxima? Si es así, estímela.
b) Dibuje un diagrama que ilustre la situación general. Introduzca la notación y etiquete el diagrama con sus símbolos.
c) Escriba una expresión para el área total.
d) Utilice la información proporcionada para plantear una ecuación que relacione las variables.
e) Utilice el inciso d) para expresar el área total como una función de una variable.
f) Termine de resolver el problema y compare la respuesta con su estimación en el inciso a).

12. Considere el siguiente problema: se desea construir una caja con tapa abierta, utilizando una pieza cuadrada de cartón de 3 pies de ancho, recortando un cuadrado en cada una de las cuatro esquinas y doblando los costados. Encuentre el volumen más grande que esa caja puede tener.

a) Dibuje varios diagramas para ilustrar la situación, algunas cajas de poca altura con bases grandes y algunas cajas de mucha altura con bases pequeñas. Encuentre los volúmenes de varias de esas cajas. ¿Parece que existe un volumen máximo? Si es así, estímelo.
b) Dibuje un diagrama que ilustre la situación general. Introduzca la notación y etiquete el diagrama con sus símbolos.
c) Escriba una expresión para el volumen.
d) Utilice la información proporcionada para plantear una ecuación que relacione las variables.
e) Utilice el inciso d) para expresar el volumen como función de una variable.
f) Termine de resolver el problema y compare la respuesta con su estimación en el inciso a).

13. Un agricultor quiere cercar un área de 1.5 millones de pies cuadrados en un terreno rectangular y luego dividirlo por la mitad, con una cerca paralela a uno de los lados del rectángulo. ¿Cómo puede el agricultor hacer esto para minimizar el costo de la barda?

14. Una caja con una base cuadrada, abierta en la parte superior, debe tener un volumen de 32 000 cm^3. Encuentre las dimensiones de la caja que minimicen la cantidad de material que ha de utilizarse.

15. Si se dispone de 1200 cm^2 de material para hacer una caja con una base cuadrada y sin tapa; encuentre el mayor volumen posible de la caja.

16. Un contenedor rectangular de almacenamiento sin tapa ha de tener un volumen de 10 m^3. La longitud de su base es dos veces el ancho. El material para la base cuesta \$10 por metro cuadrado y el material para los costados cuesta \$6 por metro cuadrado. Encuentre el costo de los materiales que hagan más barato el contenedor.

17. Resuelva el ejercicio 16 suponiendo que el contenedor tiene una tapa fabricada con el mismo material que los lados.

18. a) Demuestre que de todos los rectángulos con un área determinada, el de perímetro más pequeño es un cuadrado.
b) Pruebe que de todos los rectángulos con un perímetro determinado, el de mayor área es un cuadrado.

19. Encuentre el punto sobre la recta $y = 2x + 3$ que está más cerca del origen.

20. Halle el punto sobre la curva $y = \sqrt{x}$ que está más cerca del punto (3, 0).

21. Busque los puntos sobre la elipse $4x^2 + y^2 = 4$ que están más lejos del punto (1, 0).

22. Encuentre, con una aproximación de dos decimales, las coordenadas del punto sobre la curva $y = \operatorname{sen} x$ que está más cerca del punto (4, 2).

23. Halle las dimensiones del rectángulo de mayor área que puede ser inscrito en un círculo de radio r.

24. Busque el rectángulo de mayor área que puede ser inscrito en la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

25. Encuentre las dimensiones del rectángulo de mayor área que puede ser inscrito en un triángulo equilátero de lado L si uno de los lados del rectángulo se encuentra sobre la base del triángulo.

26. Halle el área del trapecio más grande que puede ser inscrito en un círculo de radio 1 y cuya base es un diámetro del círculo.

27. Busque las dimensiones del triángulo isósceles de mayor área que puede ser inscrito en un círculo de radio r.

28. Encuentre el área del rectángulo más grande que puede ser inscrito en un triángulo rectángulo con catetos de longitudes de 3 cm y 4 cm si dos lados del rectángulo se encuentran a lo largo de los catetos.

29. Halle el cilindro de mayor volumen posible que puede inscribirse en una esfera de radio r.

30. Busque el cilindro de mayor volumen posible que puede inscribirse en un cono de altura h y radio base r.

31. Encuentre el cilindro circular recto de mayor superficie que puede inscribirse en una esfera de radio r.

32. Una ventana normanda tiene la forma de un rectángulo rematado por un semicírculo. (Así, el diámetro del semicírculo es igual al ancho del rectángulo. Véase el ejercicio 62 en la página 22). Si el perímetro de la ventana es de 30 pies, encuentre las dimensiones de la ventana para que sea admitida la mayor cantidad posible de luz.

33. Los márgenes superior e inferior de un cartel son de 6 cm y los márgenes de los lados de 4 cm. Si el área de impresión sobre el cartel se fija en 384 cm^2, encuentre las dimensiones del cartel con la menor área.

34. Un cartel debe tener un área de 180 pulg^2 con márgenes de 1 pulg en la parte inferior y laterales, y un margen de 2 pulg en la parte superior. ¿Qué dimensiones darán la mayor área de impresión?

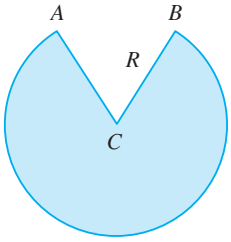
35. Un pedazo de alambre de 10 m de largo está cortado en dos piezas. Una pieza está doblada en forma de cuadrado y la otra de un triángulo equilátero. ¿Cómo debe cortarse el alambre para que el área total encerrada sea a) un máximo?, ¿b) un mínimo?

36. Conteste el ejercicio 35 si una pieza está doblada en forma de un cuadrado y la otra de un círculo.

37. Se hace una lata cilíndrica sin tapa para contener V cm^3 de líquido. Encuentre las dimensiones que minimizan el costo del metal para hacer la lata.

38. Una barda de 8 pies de altura corre paralela a una distancia de 4 pies de un edificio alto. ¿Cuál es la escalera de menor longitud que, colocada en el suelo, pasando sobre la barda, alcanzará la pared del edificio?

39. Un recipiente cónico para beber se hace de una pieza circular de papel de radio R, recortando un sector y uniendo los bordes CA y CB. Encuentre la capacidad máxima de dicho recipiente.



40. Un recipiente para beber, en forma de cono, se diseña para contener 27 cm^3 de agua. Encuentre la altura y el radio del cono que utilizará la menor cantidad de papel.

41. Un cono de altura h está inscrito en un cono de mayor tamaño con altura H, de manera que su vértice está en el centro de la base del cono más grande. Demuestre que el cono interior tiene volumen máximo cuando $h = \frac{1}{3}H$.

42. Un objeto con peso W es arrastrado a lo largo de un plano horizontal por una fuerza que actúa a lo largo de una cuerda atada al objeto. Si la cuerda forma un ángulo θ con un plano, entonces la magnitud de la fuerza es

$$F = \frac{\mu W}{\mu \operatorname{sen}\theta + \cos\theta}$$

donde μ es una constante denominada coeficiente de fricción. ¿Para qué valor de θ es F más pequeña?

43. Si se conecta una resistencia de R ohms a través de una batería de E volts con resistencia interna de r ohms, entonces la potencia (en vatios) en la resistencia externa es

$$P = \frac{E^2R}{(R + r)^2}$$

Si E y r son fijos, pero R varía, ¿cuál es el valor máximo de la potencia?

44. Para un pez nadando a una rapidez v relativa al agua, el gasto de energía por unidad de tiempo es proporcional a v^3. Se cree que durante la migración, los peces intentan minimizar la energía total requerida para nadar una distancia fija. Si los peces están nadando contra una corriente u ($u < v$), entonces el tiempo necesario para nadar una distancia L es $L/(v - u)$, y la energía total E necesaria para nadar la distancia viene dada por

$$E(v) = av^3 \cdot \frac{L}{v - u}$$

donde a es la constante de proporcionalidad.

a) Determine el valor de v que minimiza E.

b) Trace la gráfica de E.

Nota: este resultado ha sido verificado experimentalmente; en la migración, los peces nadan contra la corriente a una velocidad de 50% mayor que la rapidez de la corriente.

45. En un panal, cada celda es un prisma hexagonal regular, abierto en un extremo en un ángulo triedro en el otro extremo como en la figura. Se cree que las abejas forman sus celdas de modo que se minimice la superficie para un volumen determinado, utilizando así la menor cantidad de cera en la construcción de la celda. El examen de estas celdas ha demostrado que la medida del ángulo θ del vértice es sorprendentemente consistente. Basado en la geometría de la celda, puede demostrarse que la superficie S está dada por

$$S = 6sh - \tfrac{3}{2}s^2\cot\theta + \left(3s^2\sqrt{3}/2\right)\csc\theta$$

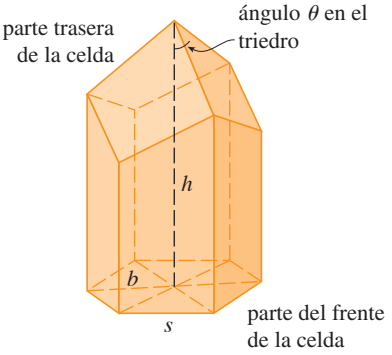
donde s, la longitud de los lados del hexágono y h, la altura, son constantes.

a) Calcule $dS/d\theta$.

b) ¿Qué ángulo deberían preferir las abejas?

c) Determine la superficie mínima de la celda (en términos de s y h).

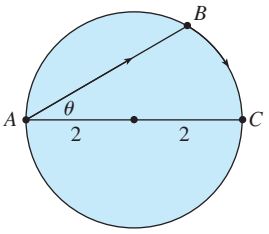
Nota: se han realizado las mediciones reales del ángulo θ en panales, y las medidas de estos ángulos difieren raramente del valor calculado por más de 2°.



46. Un barco sale de un muelle a las 14:00 y viaja hacia el sur a una velocidad de 20 km/h. Otro barco ha estado dirigiéndose al este a 15 km/h y llega al mismo muelle a las 15:00. ¿A qué hora estuvieron los dos barcos más cerca uno del otro?

47. Resuelva el problema en el ejemplo 4 si el río es de 5 km de ancho y el punto B está a sólo 5 km río abajo de A.

48. Una mujer, en un punto A en la orilla de un lago circular con radio de 2 mi, quiere llegar al punto C diametralmente opuesto a A al otro lado del lago en el menor tiempo posible (véase la figura). Ella puede caminar a una rapidez de 4 mi/h y remar a 2 mi/h. ¿Cómo debe proceder?



49. Una refinería de petróleo se encuentra en la orilla norte de un río recto que tiene 2 km de ancho. Se debe construir una tubería desde la refinería a tanques de almacenamiento situados en la orilla sur del río, 6 km al este de la refinería. El costo de colocación de tubería es \$400 000/km sobre la tierra a un punto P a la orilla norte y \$800 000/km bajo el río a los tanques. Para minimizar el costo de la tubería, ¿dónde debe ubicarse P?

50. Supongamos que la refinería en el ejercicio 49 está situada a 1 km al norte del río. ¿Dónde debe estar ubicado P?

51. La iluminación de un objeto por una fuente de luz es directamente proporcional a la intensidad de la fuente, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a la fuente. Si dos fuentes luminosas, una tres veces más intensa que la otra, se colocan a 10 pies de distancia, ¿dónde se debe colocar un objeto en la recta entre las fuentes a fin de recibir la menor iluminación?

52. Encuentre la ecuación de la recta a que pasa por el punto (3, 5) que corta el primer cuadrante con la menor área.

53. Sean a y b números positivos. Encuentre la longitud del menor segmento de recta que corta el primer cuadrante y pasa por el punto (a, b).

54. ¿En cuáles puntos sobre la curva $y = 1 + 40x^3 - 3x^5$ la recta tangente tiene la mayor pendiente?

55. ¿Cuál es la longitud más corta posible del segmento de recta que corta el primer cuadrante y es tangente a la curva $y = 3/x$ en algún punto?

56. ¿Cuál es el triángulo de menor área posible que corta el primer cuadrante y cuya hipotenusa es tangente a la parábola $y = 4 - x^2$ en algún punto?

57. a) Si $C(x)$ es el costo de producir x unidades de un producto, entonces el **costo promedio** por unidad es de $c(x) = C(x)/x$. Demuestre que si el costo promedio es un mínimo, entonces el costo marginal es igual al costo promedio.

b) Si $C(x) = 16\,000 + 200x + 4x^{3/2}$, en dólares, encuentre i) el costo, el costo promedio y el costo marginal a un nivel de producción de 1000 unidades; ii) el nivel de producción que minimizará el costo promedio y iii) el costo promedio mínimo.

58. a) Demuestre que si la utilidad $P(x)$ es un máximo, entonces el ingreso marginal es igual al costo marginal.

b) Si $C(x) = 16\,000 + 500x - 1.6x^2 + 0.004x^3$ es la función costo y $p(x) = 1700 - 7x$ es la función demanda, encuentre el nivel de producción que maximiza la utilidad.

59. Un equipo de beisbol juega en un estadio con capacidad para 55 000 espectadores. Con el precio de las entradas a \$10, la asistencia promedio había sido de 27 000. Cuando los precios se redujeron a \$8, la asistencia promedio subió a 33 000.

a) Encuentre la función demanda, suponiendo que es lineal.

b) ¿Cómo se deben establecer los precios de las entradas para maximizar los ingresos?

60. Durante los meses de verano, Tomás hace y vende collares en la playa. El verano pasado vendió los collares a \$10 y sus ventas promedio fueron de 20 por día. Cuando aumentó el precio por \$1, encontró que el promedio disminuyó dos ventas por día.

a) Encuentre la función demanda, suponiendo que es lineal.

b) Si el material para cada collar le cuesta a Tomás \$6, ¿qué precio de venta debe maximizar su utilidad?

61. Un fabricante ha estado vendiendo 1000 televisores de pantalla plana a la semana a \$450. Un estudio de mercado indica que, por cada \$10 de descuento ofrecido al comprador, el número de televisores vendidos se incrementará en 100 por semana.

a) Encuentre la función demanda.

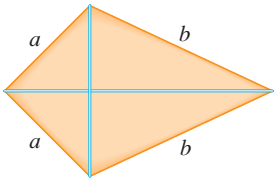
b) ¿Qué tan grande debe ser el descuento que ofrezca la compañía al comprador a fin de maximizar sus utilidades?

c) Si la función costo semanal es $C(x) = 68\,000 + 150x$, ¿cómo debería el fabricante establecer el tamaño de la rebaja, a fin de maximizar sus ganancias?

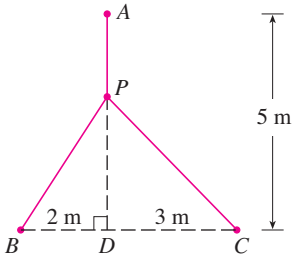
62. El administrador de un complejo habitacional de 100 apartamentos sabe por experiencia que todas las unidades serán ocupadas si el alquiler es de \$800 al mes. Un estudio de mercado sugiere que, en promedio, una unidad adicional permanecerá vacante por cada incremento de \$10 en el alquiler. ¿Qué renta debe cobrar el administrador para maximizar los ingresos?

63. Demuestre que, de todos los triángulos isósceles con un determinado perímetro, el de mayor área es equilátero.

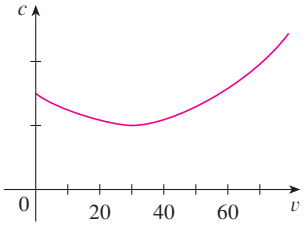
SAC **64.** El marco de una cometa está hecho de seis piezas de madera. Las cuatro piezas exteriores se han recortado con las longitudes indicadas en la figura. Para maximizar el área de la cometa, ¿qué longitud deben tener las piezas diagonales?



65. Un punto P debe estar ubicado en algún lugar sobre la recta AD, de manera que la longitud total L de cables ligados de P a los puntos A, B y C se minimice (véase la figura). Exprese L como una función de $x = |AP|$ y utilice las gráficas de L y dL/dx se para estimar el valor mínimo de L.



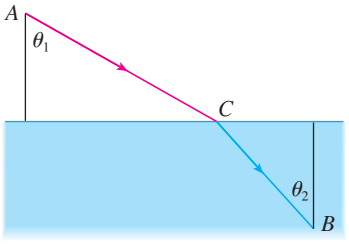
66. La gráfica muestra el consumo de combustible c de un automóvil (medido en galones por hora) en función de la velocidad v del automóvil. A muy bajas velocidades el motor funciona de manera ineficiente, así que inicialmente c disminuye a medida que aumenta la velocidad. Pero a alta velocidad el consumo de combustible se incrementa. Puede verse que $c(v)$ está minimizada para este automóvil cuando $v \approx 30$ mi/h. Sin embargo, para la eficiencia de combustible, lo que debe reducirse al mínimo no es el consumo en galones por hora, sino más bien el consumo de combustible en galones *por milla*. Vamos a llamar G a este consumo. Utilizando la gráfica, estime la velocidad a la que G tiene su valor mínimo.



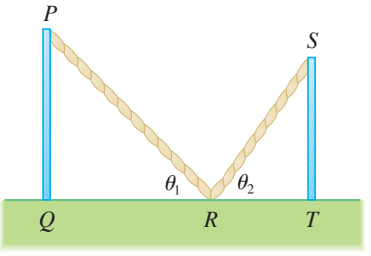
67. Sea v_1 la velocidad de la luz en el aire y v_2 la velocidad de la luz en el agua. De acuerdo con el principio de Fermat, un rayo de luz viajará desde un punto A en el aire a un punto B en el agua por una trayectoria ACB que minimiza el tiempo de recorrido. Demuestre que

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

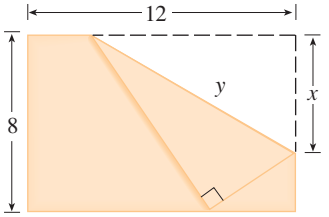
donde θ_1 (el ángulo de incidencia) y θ_2 (el ángulo de refracción) son como se muestra. Esta ecuación es conocida como la ley de Snell.



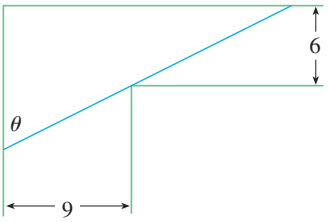
68. Dos postes verticales PQ y ST están asegurados por una cuerda PRS que van desde la parte superior del primer poste a la parte superior del segundo poste como en la figura. Demuestre que la longitud más corta de esa cuerda se produce cuando $\theta_1 = \theta_2$.



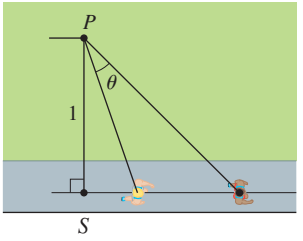
69. Se pliega la esquina superior derecha de un pedazo de papel de 12 pulg por 8 pulg, como en la figura, sobre la orilla inferior. ¿Cómo debería usted plegarla para minimizar la longitud del pliegue? En otras palabras, ¿cómo se elige x para minimizar y?



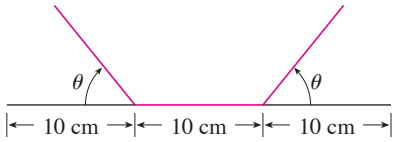
70. Se lleva cargando un tubo de acero por un pasillo de 9 metros de ancho. Al final de la sala hay un giro recto en un estrecho pasillo de 6 pies de ancho. ¿Cuál es la longitud del tubo más largo que puede dar la vuelta horizontalmente alrededor de la esquina?



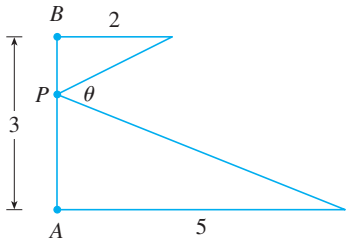
71. Un observador se encuentra en un punto P a una unidad de una pista. Dos corredores comienzan en el punto S en la figura y corren a lo largo de la pista. Un atleta corre tres veces más rápido que el otro. Encuentre el valor máximo del ángulo de vista del observador θ entre los corredores. [*Sugerencia:* maximice θ.]



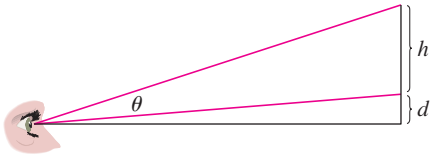
72. Se desea construir una caída de agua de lluvia utilizando una hoja de metal de 30 cm de ancho, plegando hasta un tercio a cada lado de la hoja con un ángulo θ. ¿Cómo debe elegirse θ de manera que el canal conduzca la cantidad máxima de agua?



73. ¿Dónde debe elegirse el punto P sobre el segmento de recta AB a fin de maximizar el ángulo θ?



74. Una pintura en una galería de arte tiene altura h y está colgada de manera que su borde inferior esté a una distancia d sobre el ojo de un observador (como en la figura). ¿Hasta qué punto de la pared debe estar el observador para tener la mejor vista? (En otras palabras, dónde debe pararse el observador para maximizar el ángulo θ subtendido a su ojo por la pintura?)

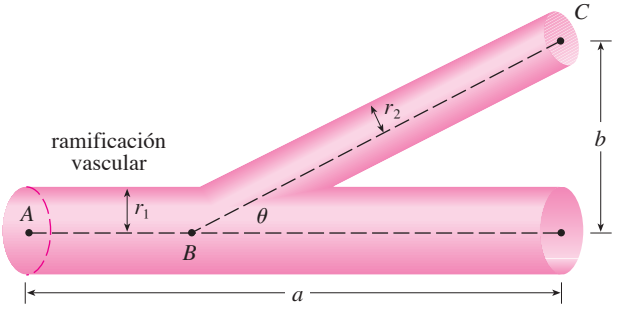


75. Encuentre el rectángulo de área máxima que puede ser circunscrito por un rectángulo dado con longitud L y ancho W. [*Sugerencia:* exprese el área en función de un ángulo θ.]

76. El sistema vascular de sangre consiste en vasos sanguíneos (arterias, arteriolas, capilares y venas) que trasladan la sangre desde el corazón hasta los órganos y de éstos al corazón. Este sistema debe trabajar de manera que minimice la energía gastada por el corazón al bombear la sangre. En particular, esta energía se reduce cuando disminuye la resistencia de la sangre. Una de las leyes de Poiseuille da la resistencia R de la sangre como

$$R = C\frac{L}{r^4}$$

donde L es la longitud de los vasos sanguíneos, r es el radio y C es una constante positiva, determinada por la viscosidad de la sangre. (Poiseuille estableció esta ley experimentalmente, pero también de la ecuación 8.4.2.) La figura muestra un vaso principal con radio r_1 bifurcado en un ángulo θ en un vaso más pequeño con radio r_2.



a) Utilice la ley de Poiseuille para demostrar que la resistencia total de la sangre a lo largo de la ruta ABC es

$$R = C\left(\frac{a - b\cot\theta}{r_1^4} + \frac{b\csc\theta}{r_2^4}\right)$$

donde a y b son las distancias que se muestran en la figura.

b) Demuestre que esta resistencia está minimizada cuando

$$\cos\theta = \frac{r_2^4}{r_1^4}$$

c) Encuentre el ángulo de bifurcación óptimo (aproximado al grado más cercano) cuando el radio de los vasos sanguíneos más pequeños es dos tercios el radio del vaso más grande.



© Manfred Kage / Peter Arnold Images / Photolibrary

77. Los ornitólogos han determinado que algunas especies de aves tienden a evitar vuelos sobre grandes masas de agua durante el día. Se cree que requieren más energía para volar sobre el agua que sobre tierra porque el aire generalmente se eleva sobre la tierra y cae sobre el agua durante el día. Un pájaro con estas tendencias es lanzado desde una isla que está a 5 km del punto B más cercano a una costa recta, vuela a un punto C sobre la costa y luego vuela a lo largo de la costa hasta su lugar de anidación D. Suponga que el ave elige instintivamente un camino que minimiza su gasto de energía. Los puntos B y D están a 13 km de distancia uno del otro.

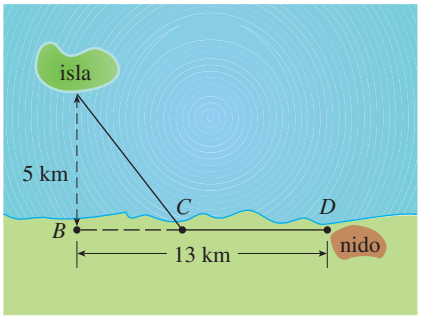
a) En general, si requiere 1.4 veces más energía para volar sobre el agua que sobre la tierra, ¿a qué punto C debe el ave

volar a fin de minimizar la energía total gastada en regresar a su zona de anidación?

b) Sean W y L la energía (en joules) por kilómetro volado sobre agua y tierra, respectivamente. ¿Qué significaría un valor muy grande de la relación W/L en términos del vuelo de las aves? ¿Qué significaría un valor pequeño? Determine la relación W/L correspondiente al gasto mínimo de energía.

c) ¿Cuál debería ser el valor de W/L para que el ave vuele directamente a su zona de anidación D? ¿Cuál debe ser el valor de W/L para que el ave vuele a B y luego a lo largo de la orilla a D?

d) Si los ornitólogos observan que las aves de cierta especie llegan a la orilla en un punto a 4 km de B, ¿cuántas veces más energía necesita un ave para volar sobre el agua que sobre la tierra?



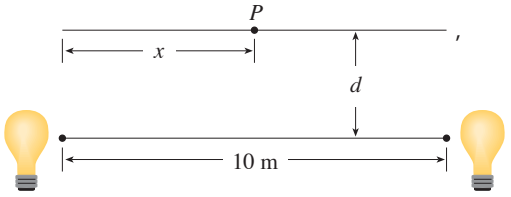
78. Dos fuentes luminosas de idéntica intensidad se colocan separadas 10 m. Un objeto se ha de colocar en un punto P sobre una recta ℓ paralela a la recta que une las fuentes de luz y a una distancia d metros de ella (véase la figura). Queremos localizar P sobre ℓ de manera que se minimice la intensidad de iluminación. Tenemos que utilizar el hecho de que la intensidad de iluminación de una fuente única es directamente proporcional a la intensidad de la fuente e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia desde el origen.

a) Encuentre una expresión para la intensidad $I(x)$ en el punto P.

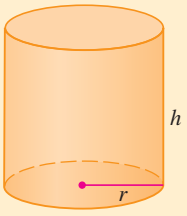
b) Si $d = 5$ m, utilice las gráficas de $I(x)$ y de $I'(x)$ para demostrar que la intensidad es minimizada cuando $x = 5$ m, es decir, cuando P está en el punto medio de ℓ.

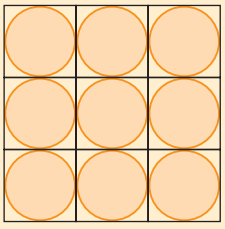
c) Si $d = 10$ m, demuestre que la intensidad (quizá sorprendentemente) *no* se minimiza en el punto medio.

d) En algún punto entre $d = 5$ m y $d = 10$ m hay un valor de transición de d en el que el punto de mínima iluminación cambia abruptamente. Calcule este valor de d por métodos gráficos. A continuación, encuentre el valor exacto de d.



PROYECTO DE APLICACIÓN LA FORMA DE UNA LATA





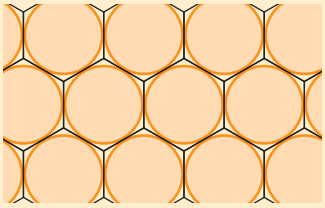
Discos cortados de cuadrados

En este proyecto investigamos la forma más económica para una lata. Primero interpretamos que esto significa que el volumen V de una lata cilíndrica está dado y que tenemos que encontrar la altura h y radio r que minimizan el costo del metal para fabricar la lata (véase la figura). Si estamos haciendo caso omiso de cualquier residuo de metal en el proceso de fabricación, el problema es minimizar la superficie del cilindro. Resolvimos este problema en el ejemplo 2, en la sección 4.7 y encontramos que $h = 2r$; es decir, la altura debe ser la misma que el diámetro. Pero si va a su alacena o a un supermercado con una regla, descubrirá que la altura es generalmente mayor que el diámetro, y la relación h/r varía desde 2 hasta aproximadamente 3.8. Vamos a ver si podemos explicar este fenómeno.

1. El material para las latas se corta de hojas de metal. Las partes cilíndricas se forman doblando rectángulos; estos rectángulos son cortados de la hoja buscando poco o ningún desperdicio. Pero si se cortan los discos superior e inferior de cuadrados de lado $2r$ (como en la figura), esto deja un desperdicio considerable de metal, que puede ser reciclado, pero tiene poco o ningún valor para los fabricantes de la lata. Si este es el caso, demuestre que la cantidad de metal utilizada es minimizada cuando

$$\frac{h}{r} = \frac{8}{\pi} \approx 2.55$$

Se requiere calculadora graficadora o computadora



Discos cortados de hexágonos

2. Un embalaje más eficiente de los discos se obtiene dividiendo la hoja de metal en hexágonos y cortando las tapas circulares y bases de los hexágonos (véase la figura). Demuestre que si se adopta esta estrategia, entonces

$$\frac{h}{r} = \frac{4\sqrt{3}}{\pi} \approx 2.21$$

3. Los valores de h/r que encontramos en los problemas 1 y 2 son un poco más parecidos a los que realmente se ven en los estantes de los supermercados, pero todavía no se explica todo. Si miramos más de cerca algunas latas reales, vemos que la base y la tapa están formados por discos con radio mayor que r y están dobladas sobre los extremos de la lata. Si tomamos en cuenta esto aumentaríamos h/r. También es importante considerar que, además de los costos del metal, necesitamos incorporar la fabricación de la lata en el costo. Vamos a suponer que la mayoría de los gastos se incurren al unir a los lados de los bordes de las latas. Si cortamos los discos de hexágonos como en el problema 2, entonces el costo total es proporcional a

$$4\sqrt{3}\,r^2 + 2\pi rh + k(4\pi r + h)$$

donde k es el recíproco de la longitud que puede unirse para el costo de una unidad de área de metal. Demuestre que esta expresión se minimiza cuando

$$\frac{\sqrt[3]{V}}{k} = \sqrt[3]{\frac{\pi h}{r}} \cdot \frac{2\pi - h/r}{\pi h/r - 4\sqrt{3}}$$

4. Grafique $\sqrt[3]{V}/k$ como una función de $x = h/r$ y utilice su gráfica para argumentar que cuando una lata es grande o la unión de las piezas es barata, deberíamos hacer h/r aproximadamente 2.21 (como en el problema 2). Pero cuando la lata es pequeña o la unión es costosa, h/r debería ser mucho mayor.

5. Nuestro análisis muestra que grandes latas deben ser casi cuadradas, pero pequeñas latas deben ser altas y delgadas. Observe las formas relativas de las latas en un supermercado. ¿Nuestra conclusión suele ser cierta en la práctica? ¿Existen excepciones? ¿Puede sugerir razones de por qué las pequeñas latas no son siempre altas y delgadas?

4.8 El método de Newton

Supongamos que un concesionario de automóviles le ofrece venderle un auto al contado en $18 000 o en pagos de $375 mensuales durante cinco años. A usted le gustaría saber qué tasa de interés mensual le cobrará el vendedor. Para encontrar la respuesta, tiene que resolver la ecuación

$$48x(1 + x)^{60} - (1 + x)^{60} + 1 = 0 \qquad \boxed{1}$$

(Los detalles se explican en el ejercicio 41). ¿Cómo resolvería tal ecuación?

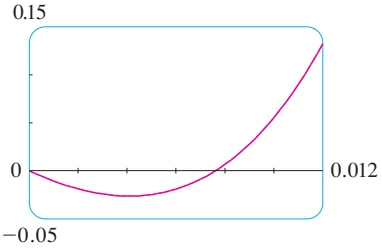


FIGURA 1

Para una ecuación cuadrática $ax^2 + bc + c = 0$ hay una fórmula conocida para las raíces. Para las ecuaciones de tercer y cuarto grado también hay fórmulas para las raíces, pero son muy complicadas. Si f es un polinomio de grado 5 o superior, no hay ninguna fórmula de este tipo (véase la nota en la página 212). Asimismo, no hay ninguna fórmula que nos permita encontrar las raíces exactas de una ecuación trascendente como $\cos x = x$.

Podemos encontrar una solución *aproximada* para la ecuación 1 graficando el lado izquierdo de la ecuación. Mediante un dispositivo de graficación y tras experimentar con rectángulos de vista, obtenemos la gráfica de la figura 1.

Vemos que, además de la solución $x = 0$ que no nos interesa, hay una solución entre 0.007 y 0.008. Al hacer acercamientos se ve que la raíz es aproximadamente 0.0076.

Intente resolver la ecuación 1 utilizando el buscador numérico de raíces en su equipo de graficación o calculadora. Algunos equipos no son capaces de solucionarlo. Otros lo logran, pero requieren que especifique un punto de partida para la búsqueda.

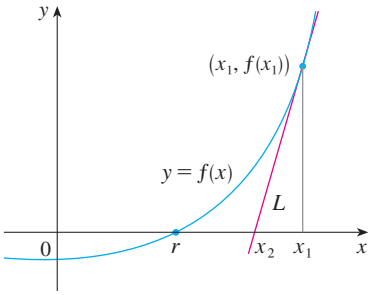


FIGURA 2

Si se requiere más precisión pueden hacerse acercamientos repetidas veces, pero esto es algo tedioso. Una alternativa más rápida es utilizar un rastreador numérico de raíces con una calculadora o en un sistema algebraico computarizado. Con esto encontramos la raíz, con una aproximación de nueve decimales: 0.007628603.

¿Cómo funcionan esos buscadores numéricos de raíces? Utilizan una variedad de métodos, pero la mayoría de ellos utilizan algún **método de Newton**, también llamado **método de Newton-Raphson**. Explicaremos cómo funciona este método, en parte para mostrar lo que sucede dentro de una calculadora o computadora y en parte como una aplicación de la idea de aproximación lineal.

La geometría del método de Newton se muestra en la figura 2, donde la raíz que estamos tratando de encontrar está etiquetada con r. Comenzamos con una primera aproximación x_1, que se obtiene por suposición, o de un esbozo de la gráfica de f, o de una gráfica de f generada por el equipo de graficación. Considere la recta tangente L a la curva $y = f(x)$ en el punto $(x_1, f(x_1))$ y miramos la intersección de L con el eje x, etiquetado con x_2. La idea del método de Newton es que la recta tangente es cercana a la curva y su intersección en x, x_2, cercana a la intersección de la curva con x (es decir, la raíz r que estamos buscando). Dado que la tangente es una recta, podemos encontrar fácilmente su intersección con el eje x.

Para encontrar una fórmula para x_2 en términos de x_1, recurrimos al hecho de que la pendiente de L es $f'(x_1)$; así que su ecuación es

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$

Dado que la intersección de L con el eje x es x_2, hacemos $y = 0$, y obtenemos

$$0 - f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

Si $f'(x_1) \neq 0$, podemos resolver esta ecuación para x_2:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Utilizamos x_2 como una segunda aproximación a r.

Enseguida repetimos este procedimiento con x_1 remplazándola por la segunda aproximación x_2, utilizando la recta tangente en $(x_2, f(x_2))$. Esto da una tercera aproximación:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

Si mantenemos este proceso, obtenemos una sucesión de aproximaciones $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$ como se muestra en la figura 3. En general, si la n-ésima aproximación es x_n y $f'(x_n) \neq 0$, entonces la siguiente aproximación está dada por

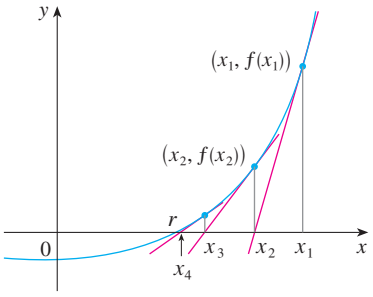


FIGURA 3

2

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

El tema de sucesiones fue brevemente presentado en *A preview of Calculus* en la página 5. Una discusión en mayor detalle inicia en la sección 11.1.

Si los números x_n resultan más y más cercanos a r cuando n es muy grande, entonces decimos que la sucesión *converge* a r y escribimos

$$\lim_{n \to \infty} x_n = r$$

Aunque la sucesión de aproximaciones converge a la raíz deseada para funciones del tipo ilustrado en la figura 3, en ciertas circunstancias la sucesión puede no converger.

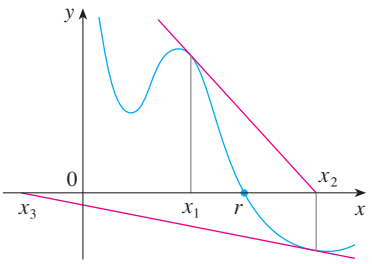


FIGURA 4

Por ejemplo, considere la situación que se muestra en la figura 4. Puede ver que x_2 es una peor aproximación que x_1. Esto suele ser el caso cuando $f'(x_1)$ está cerca de 0. Incluso puede ocurrir que una aproximación (como x_3 en la figura 4) caiga fuera del dominio de f. Entonces, el método de Newton falla y debe elegirse una mejor aproximación inicial x_1. Véase los ejercicios 31-34 para ejemplos concretos en que el método de Newton funciona muy lentamente o no funciona en absoluto.

V EJEMPLO 1 Empiece con $x_1 = 2$ para encontrar la tercera aproximación x_3 a la raíz de la ecuación $x^3 - 2x - 5 = 0$.

SOLUCIÓN Aplicamos el método de Newton con

$$f(x_1) = x^3 - 2x - 5 \qquad \text{y} \qquad f'(x) = 3x^2 - 2$$

TEC En Module 4.8 usted puede investigar cómo funciona el método de Newton para varias funciones y qué pasa cuando se cambia x_1.

Newton mismo utilizó esta ecuación para ilustrar su método y eligió $x_1 = 2$ después de algunas experimentaciones porque $f(1) = -6, f(2) = -1$ y $f(3) = 16$. La ecuación 2 resulta

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 2x_n - 5}{3x_n^2 - 2}$$

La figura 5 muestra la geometría detrás del primer paso en el método de Newton en el ejemplo 1. Ya que $f'(2) = 10$, la recta tangente a $y = x^3 - 2x - 5$ en $(2, -1)$ tiene la ecuación $y = 10x - 21$ así que su intersección con el eje x es $x_2 = 2.1$.

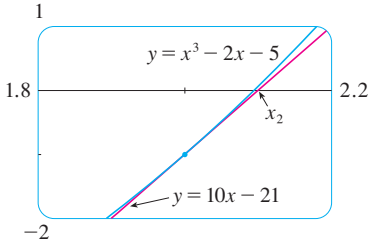


FIGURA 5

Con $n = 1$ tenemos

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^3 - 2x_1 - 5}{3x_1^2 - 2}$$

$$= 2 - \frac{2^3 - 2(2) - 5}{3(2)^2 - 2} = 2.1$$

Entonces, con $n = 2$ obtenemos

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2^3 - 2x_2 - 5}{3x_2^2 - 2} = 2.1 - \frac{(2.1)^3 - 2(2.1) - 5}{3(2.1)^2 - 2} \approx 2.0946$$

Resulta que esta tercera aproximación $x_3 \approx 2.0946$ es precisa a cuatro decimales.

Supongamos que queremos lograr una precisión dada, digamos con ocho decimales, usando el método de Newton. ¿Cómo sabemos cuándo parar? La regla que generalmente se utiliza es que podemos detener cuando aproximaciones sucesivas x_n y x_{n+1} se ajustan a ocho decimales. (Se dará una declaración precisa sobre la exactitud en el método de Newton en el ejercicio 39 en la sección 11.11.)

Observe que el procedimiento que va de n a $n + 1$ es el mismo para todos los valores de n (se llama proceso *iterativo*). Esto significa que el método de Newton es especialmente conveniente para el uso con una calculadora programable o un equipo de computación.

V EJEMPLO 2 Utilice el método de Newton para encontrar $\sqrt[6]{2}$ con una aproximación de ocho decimales.

SOLUCIÓN Primero observamos que encontrar $\sqrt[6]{2}$ es equivalente a encontrar la raíz positiva de la ecuación

$$x^6 - 2 = 0$$

por lo que tomamos $f(x) = x^6 - 2$. Luego $f'(x) = 6x^5$ y la fórmula 2 (método de Newton) se convierte en

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^6 - 2}{6x_n^5}$$

Si elegimos $x_1 = 1$ como una aproximación inicial, obtenemos

$$x_2 \approx 1.16666667$$
$$x_3 \approx 1.12644368$$
$$x_4 \approx 1.12249707$$
$$x_5 \approx 1.12246205$$
$$x_6 \approx 1.12246205$$

Puesto que x_5 y x_6 coinciden en ocho decimales, concluimos que

$$\sqrt[6]{2} \approx 1.12246205$$

a ocho lugares decimales.

V EJEMPLO 3 Encuentre, con una aproximación a seis lugares decimales, la raíz de la ecuación $\cos x = x$.

SOLUCIÓN Primero rescribimos la ecuación en su forma estándar:

$$\cos x - x = 0$$

Hacemos $f(x) = \cos x - x$. Entonces $f'(x) = -\operatorname{sen} x - 1$, así que la fórmula 2 resulta

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\cos x_n - x_n}{-\operatorname{sen} x_n - 1} = x_n + \frac{\cos x_n - x_n}{\operatorname{sen} x_n + 1}$$

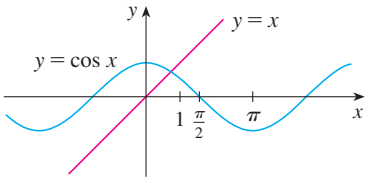


FIGURA 6

A fin de proponer un valor adecuado para x_1 esbozamos las gráficas de $y = \cos x$ e $y = x$ en la figura 6. Parece que se intersecan en un punto cuya coordenada x es algo menor que 1, así que vamos a tomar $x_1 = 1$ como una conveniente primera aproximación. Entonces, recordando poner en nuestra calculadora en modo radianes, obtenemos

$$x_2 \approx 0.75036387$$
$$x_3 \approx 0.73911289$$
$$x_4 \approx 0.73908513$$
$$x_5 \approx 0.73908513$$

Como x_4 y x_5 concuerdan con seis decimales (ocho, de hecho), concluimos que la raíz de la ecuación, correcta a seis cifras decimales, es 0.739085.

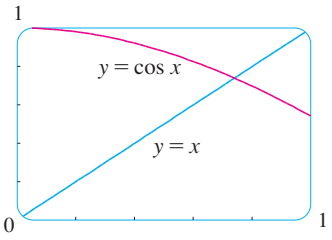


FIGURA 7

En lugar de utilizar el esbozo de la figura 6 para obtener una aproximación inicial para el método de Newton en el ejemplo 3, podríamos haber utilizado la gráfica más precisa que proporciona una calculadora o una computadora. La figura 7 sugiere que utilicemos $x_1 = 0.75$ como la aproximación inicial. Entonces el método de Newton da

$$x_2 \approx 0.73911114 \qquad x_3 \approx 0.73908513 \qquad x_4 \approx 0.73908513$$

y así obtenemos la misma respuesta que antes, pero con un paso menos.

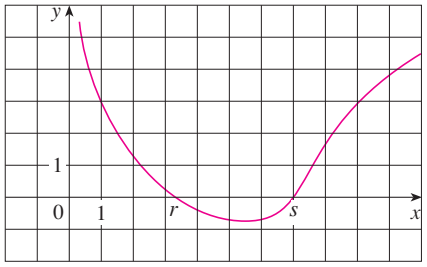
Cabría preguntarse por qué nos molestamos por completo con el método de Newton si está disponible un dispositivo de gráficos. ¿No es más fácil acercarnos en repetidas ocasiones y buscar las raíces, como hicimos en la sección 1.4? Si sólo se requiere uno o dos decimales de aproximación, entonces el método de Newton es inadecuado, y un dispositivo de gráficos es suficiente. Pero si se requiere seis u ocho decimales, entonces hacer acercamientos en repetidas ocasiones se hace tedioso. En general, es normalmente más rápido y más eficaz utilizar un equipo de cómputo y el método de Newton juntos: el dispositivo de gráficos para empezar y el método de Newton para terminar.

4.8 Ejercicios

1. La figura muestra la gráfica de una función f. Supongamos que se utiliza el método de Newton para aproximar la raíz r de la ecuación $f(x) = 0$ con aproximación inicial $x_1 = 1$.

a) Dibuje las rectas tangentes que se utilizan para encontrar x_2 y x_3 y estime los valores numéricos de x_2 y x_3.

b) ¿Sería $x_1 = 5$ una mejor primera aproximación? Explique.

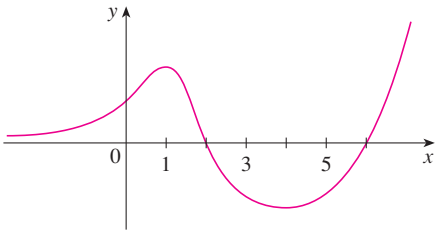


2. Siga las instrucciones para el ejercicio 1a), pero utilice $x_1 = 9$ como la aproximación inicial para encontrar la raíz s.

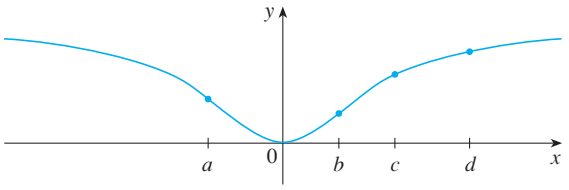
3. Suponga que la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(2, 5)$ tiene la ecuación $y = 9 - 2x$. Si se utiliza el método de Newton para localizar una raíz de la ecuación $f(x) = 0$ y la aproximación inicial es $x_1 = 2$, encuentre la segunda aproximación x_2.

4. Para cada aproximación inicial, determine gráficamente lo que ocurre si se utiliza el método de Newton para la función cuya gráfica se muestra.

a) $x_1 = 0$ b) $x_1 = 1$ c) $x_1 = 3$
d) $x_1 = 4$ e) $x_1 = 5$



5. ¿Para cuál de las aproximaciones iniciales $x_1 = a$, b, c y d cree usted que el método de Newton funcionará y conducirá a la raíz de la ecuación $f(x) = 0$?



6-8 Utilice el método de Newton con la aproximación inicial especificada x_1 para encontrar x_3, la tercera aproximación a la raíz de la ecuación dada. (Dé su respuesta con cuatro decimales.)

6. $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3 = 0, \quad x_1 = -3$

7. $x^5 - x - 1 = 0, \quad x_1 = 1$

8. $x^7 + 4 = 0, \quad x_1 = -1$

9. Utilice el método de Newton con aproximación inicial de $x_1 = -1$ para encontrar x_2, la segunda aproximación a la raíz de la ecuación $x^3 + x + 3 = 0$. Explique cómo funciona el método graficando primero la función y su recta tangente en $(-1, 1)$.

10. Utilice el método de Newton con aproximación inicial $x_1 = 1$ para encontrar x_2, la segunda aproximación a la raíz de la ecuación $x^4 - x - 1 = 0$. Explique cómo funciona el método graficando primero la función y su recta tangente en $(1, -1)$.

11-12 Utilice el método de Newton para aproximar el número dado, correcto a ocho decimales.

11. $\sqrt[5]{20}$

12. $\sqrt[100]{100}$

13-16 Utilice el método de Newton para aproximar la raíz indicada de la ecuación, con una aproximación a seis decimales.

13. La raíz de $x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 6 = 0$ en el intervalo $[1, 2]$

14. La raíz de $2.2x^5 - 4.4x^3 + 1.3x^2 - 0.9x - 4.0 = 0$ en el intervalo $[-2, -1]$

15. La raíz negativa de $e^x = 4 - x^2$

16. La raíz positiva de $3 \operatorname{sen} x = x$

17-22 Utilice el método de Newton para encontrar todas las raíces de la ecuación con una aproximación a seis decimales.

17. $3 \cos x = x + 1$

18. $\sqrt{x + 1} = x^2 - x$

19. $(x - 2)^2 = \ln x$

20. $\dfrac{1}{x} = 1 + x^3$

21. $x^3 = \tan^{-1} x$

22. $\operatorname{sen} x = x^2 - 2$

23-28 Utilice el método de Newton para encontrar todas las raíces de la ecuación, correcta a ocho decimales. Comience por dibujar una gráfica para encontrar aproximaciones iniciales.

23. $x^6 - x^5 - 6x^4 - x^2 + x + 10 = 0$

24. $x^5 - 3x^4 + x^3 - x^2 - x + 6 = 0$

25. $\dfrac{x}{x^2 + 1} = \sqrt{1 - x}$

26. $\cos(x^2 - x) = x^4$

27. $4e^{-x^2} \operatorname{sen} x = x^2 - x + 1$

28. $e^{\arctan x} = \sqrt{x^3 + 1}$

29. a) Aplique el método de Newton a la ecuación $x^2 - a = 0$ para obtener el siguiente algoritmo para la raíz cuadrada, utilizado por los antiguos babilonios para calcular $\sqrt{a}$:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

b) utilice el inciso a) para calcular $\sqrt{1000}$ correcta con seis decimales.

30. a) Aplique el método de Newton a la ecuación $1/x - a = 0$ para obtener el siguiente algoritmo recíproco:

$$x_{n+1} = 2x_n - ax_n^2$$

(este algoritmo permite que una computadora encuentre recíprocos sin dividir realmente).

b) Utilice el inciso a) para calcular $1/1.6984$ correcto a seis cifras decimales.

31. Explique por qué no funciona el método de Newton para encontrar la raíz de la ecuación $x^3 - 3x + 6 = 0$ si la aproximación inicial es elegida como $x_1 = 1$.

32. a) Utilice el método de Newton con $x_1 = 1$ para encontrar la raíz de la ecuación $x^3 - x = 1$ correcta a seis decimales.

b) Resuelva la ecuación en el inciso a) utilizando $x_1 = 0.6$ como la aproximación inicial.

c) Resuelva la ecuación en el inciso a) utilizando $x_1 = 0.57$. (Definitivamente, usted necesita una calculadora programable para esta parte.)

d) Grafique $f(x) = x^3 - x - 1$ y sus rectas tangentes en $x_1 = 1$, 0.6 y 0.57 para explicar por qué el método de Newton es tan sensible al valor de la aproximación inicial.

33. Explique por qué el método de Newton falla cuando se aplica a la ecuación $\sqrt[3]{x} = 0$ con cualquier aproximación inicial $x_1 \neq 0$. Ilustre su explicación con una gráfica.

34. Si

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

entonces la raíz de la ecuación $f(x) = 0$ es $x = 0$. Explique por qué el método de Newton no puede encontrar la raíz sin importar qué aproximación inicial $x_1 \neq 0$ se utilice. Ilustre su explicación con un dibujo.

35. a) Utilice el método de Newton para encontrar los números críticos de la función $f(x) = x^6 - x^4 + 3x^3 - 2x$ correctos a seis lugares decimales.

b) Encuentre el valor mínimo absoluto de f correcto a cuatro decimales.

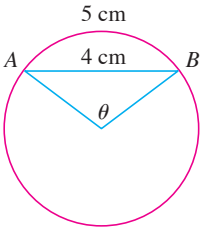
36. Utilice el método de Newton para encontrar el valor máximo absoluto de la función $f(x) = x \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, correcto a seis decimales.

37. Utilice el método de Newton para encontrar las coordenadas del punto de inflexión de la curva $y = x^2 \operatorname{sen} x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, correcto a seis decimales.

38. De las infinitas rectas que son tangentes a la curva $y = -\operatorname{sen} x$ y pasan por el origen, hay una que tiene la mayor pendiente. Utilice el método de Newton para encontrar la pendiente de la recta, correcta a seis decimales.

39. Utilice el método de Newton para encontrar las coordenadas correctas a seis decimales, del punto sobre la parábola $y = (x - 1)^2$ que está más cerca del origen.

40. En la figura, la longitud de la cuerda AB es de 4 cm y la longitud del arco AB es 5 cm. Encuentre el ángulo central θ, en radianes, a cuatro decimales. Luego, dé la respuesta al grado más próximo.



41. Un concesionario de coches vende un automóvil nuevo en \$18 000. También ofrece vender el mismo auto por pagos de \$375 al mes durante cinco años. ¿Qué tasa de interés mensual está cobrando este distribuidor?

Para resolver este problema, tendrá usted que utilizar la fórmula para el valor presente A de una anualidad formada por pagos iguales de magnitud R con una tasa de interés i por periodo

$$A = \frac{R}{i}[1 - (1 + i)^{-n}]$$

Sustituyendo i por x, demuestre que

$$48x(1 + x)^{60} - (1 + x)^{60} + 1 = 0$$

Utilice el método de Newton para resolver esta ecuación.

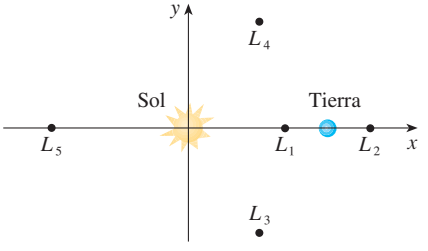
42. La figura muestra el Sol situado en el origen y la Tierra en el punto (1, 0). (Aquí, la unidad es la distancia entre los centros de la Tierra y el Sol, llamada *unidad astronómica*: 1 AU $\approx 1.496 \times 10^8$ km.) Hay cinco ubicaciones L_1, L_2, L_3, L_4 y L_5 en este plano de rotación de la Tierra alrededor del Sol, donde un satélite permanece inmóvil respecto a la Tierra porque las fuerzas que actúan sobre el satélite (incluyendo las atracciones gravitacionales de la Tierra y el Sol) se equilibran entre sí. Estas ubicaciones se denominan *puntos de libración*. (Un satélite de investigación solar se ha colocado en uno de estos puntos de libración.) Si m_1 es la masa del Sol, m_2 es la masa de la Tierra y $r = m_2/(m_1 + m_2)$, resulta que la coordenada x de L_1 es la única raíz de la ecuación de quinto grado

$$p(x) = x^5 - (2 + r)x^4 + (1 + 2r)x^3 - (1 - r)x^2 + 2(1 - r)x + r - 1 = 0$$

y la coordenada x de L_2 es la raíz de la ecuación

$$p(x) - 2rx^2 = 0$$

Utilizando el valor $r \approx 3.04042 \times 10^{-6}$, encuentre las ubicaciones de los puntos de libración a) L_1 y b) L_2.



4.9 Antiderivadas

Un físico que conoce la velocidad de una partícula podría desear conocer su posición en un instante dado. Un ingeniero que puede medir la cantidad variable a la cual se fuga el agua de un tanque quiere conocer la cantidad que se ha fugado durante cierto periodo. Un biólogo que conoce la rapidez a la que crece una población de bacterias puede interesarse en deducir el tamaño de la población en algún momento futuro. En cada caso, el problema es encontrar una función F cuya derivada es la función conocida f. Si tal función F existe, se llama *antiderivada* de f.

Definición Una función F recibe el nombre de **antiderivada** de f sobre un intervalo I si $F'(x) = f(x)$ para toda x en I.

Por ejemplo, sea $f(x) = x^2$. No es difícil descubrir una antiderivada de f si utiliza la regla de la potencia. En efecto, si $F(x) = \frac{1}{3}x^3$, entonces $F'(x) = x^2 = f(x)$. Pero la función $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + 100$ también satisface $G'(x) = x^2$. Por tanto, F y G son antiderivadas de f. De hecho, cualquier función de la forma $H(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$, donde C es una constante, es una antiderivada de f. Surge la pregunta: ¿hay otras?

Para contestar la pregunta, recordemos que en la sección 4.2 utilizamos el teorema del valor medio para demostrar que si dos funciones tienen derivadas idénticas sobre un intervalo, entonces éstas deben diferir en una constante (corolario 4.2.7). Por tanto, si F y G son dos antiderivadas cualesquiera de f, entonces

$$F'(x) = f(x) = G'(x),$$

así que $G(x) - F(x) = C$, donde C es una constante. Esto lo podemos escribir como $G(x) = F(x) + C$, de modo que se tiene el siguiente resultado.

1 Teorema Si F es una antiderivada de f sobre un intervalo I, entonces la antiderivada más general de f sobre I es

$$F(x) + C$$

donde C es una constante arbitraria.

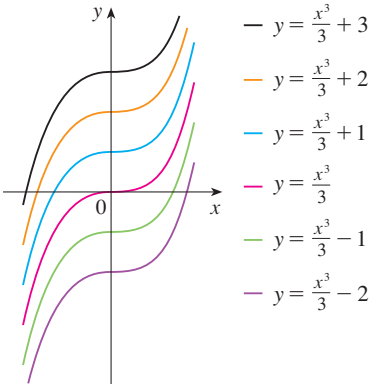


FIGURA 1
Miembros de la familia de antiderivadas de $f(x) = x^2$

De nuevo, para la función $f(x) = x^2$, vemos que la antiderivada general de f es $\frac{1}{3}x^3 + C$. Al asignar valores específicos a la constante C, obtenemos una familia de funciones cuyas gráficas son traslaciones verticales de una a otra (véase la figura 1). Esto tiene sentido porque cada curva debe tener la misma pendiente en cualquier valor conocido de x.

EJEMPLO 1 Encuentre la antiderivada más general de cada una de las funciones siguientes.

a) $f(x) = \operatorname{sen} x$ b) $f(x) = 1/x$ c) $f(x) = x^n, \quad n \neq -1$

SOLUCIÓN

a) Si $F(x) = -\cos x$, entonces $F'(x) = \operatorname{sen} x$, de manera que una antiderivada de $\operatorname{sen} x$ es $-\cos x$. Por el teorema 1, la antiderivada mas general es $G(x) = -\cos x + C$.

b) Con base en lo que se vio en la sección 3.6, recuerde que

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

Por consiguiente, en el intervalo $(0, \infty)$ la antiderivada general de $1/x$ es $\ln x + C$. También aprendimos que

$$\frac{d}{dx}(\ln |x|) = \frac{1}{x}$$

para todo $x \neq 0$. Entonces, el teorema 1 afirma que la antiderivada general de $f(x) = 1/x$ es $\ln|x| + C$ sobre cualquier intervalo que no contenga $x = 0$. En particular, esto es verdadero sobre cada uno de los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$. Por consiguiente, la antiderivada general de f es

$$F(x) = \begin{cases} \ln x + C_1 & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x) + C_2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

c) Utilice la regla de la potencia para descubrir una antiderivada de x^n. De hecho, si $n \neq -1$, entonces

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{(n+1)x^n}{n+1} = x^n$$

Así, la antiderivada general de $f(x) = x^n$ es

$$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Esto es válido para $n \geqslant 0$, ya que $f(x) = x^n$ está definida sobre el intervalo. Si n es negativo (pero $n \neq -1$), sólo es válida sobre cualquier intervalo que no contenga a $x = 0$.

Como en el ejemplo 1, toda fórmula de derivación leída de derecha a izquierda da lugar a una fórmula de antiderivación. En la tabla 2 se enlistan algunas antiderivadas. Cada fórmula de la tabla es verdadera, puesto que la derivada de la función de la columna de la derecha aparece en la columna izquierda. En particular, en la primera fórmula se afirma que la antiderivada de una constante multiplicada por una función es una constante multiplicada por la antiderivada de la función. En la segunda fórmula se afirma que la antiderivada de una suma es la suma de las antiderivadas. (Se usa la notación $F' = f$, $G' = g$.)

2 Tabla de fórmulas de antiderivación

Para obtener la antiderivada más general, a partir de las particulares de la tabla 2, tenemos que sumar una constante (o constantes), como en el ejemplo 1.

Función	Antiderivada particular	Función	Antiderivada particular
$cf(x)$	$cF(x)$	$\sec^2 x$	$\tan x$
$f(x) + g(x)$	$F(x) + G(x)$	$\sec x \tan x$	$\sec x$
$x^n \quad (n \neq -1)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{sen}^{-1} x$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\tan^{-1} x$
e^x	e^x	$\cosh x$	$\operatorname{senh} x$
$\cos x$	$\operatorname{sen} x$	$\operatorname{senh} x$	$\cosh x$
$\operatorname{sen} x$	$-\cos x$		

EJEMPLO 2 Encuentre todas las funciones g tales que

$$g'(x) = 4 \operatorname{sen} x + \frac{2x^5 - \sqrt{x}}{x}$$

SOLUCIÓN Primero, escriba de nuevo la función dada en la forma siguiente:

$$g'(x) = 4 \operatorname{sen} x + \frac{2x^5}{x} - \frac{\sqrt{x}}{x} = 4 \operatorname{sen} x + 2x^4 - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

De esta manera, deseamos hallar una antiderivada de

$$g'(x) = 4 \operatorname{sen} x + 2x^4 - x^{-1/2}$$

Utilizando las fórmulas de la tabla 2 con el teorema 1, obtenemos

$$g(x) = 4(-\cos x) + 2\frac{x^5}{5} - \frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C$$

$$= -4\cos x + \tfrac{2}{5}x^5 - 2\sqrt{x} + C$$

En las aplicaciones del cálculo es muy común tener una situación como la del ejemplo 2, donde se requiere hallar una función, dado el conocimiento acerca de sus derivadas. Una ecuación que involucra las derivadas de una función se llama **ecuación diferencial**. Estas ecuaciones se estudian en cierto detalle en el capítulo 9; pero, por el momento, es posible resolver algunas ecuaciones diferenciales elementales. La solución general de una ecuación diferencial contiene una constante arbitraria (o varias constantes arbitrarias), como en el ejemplo 2. Sin embargo, puede haber algunas condiciones adicionales que determinen las constantes y, por tanto, especifican de manera única la solución.

EJEMPLO 3 Encuentre f si $f'(x) = e^x + 20(1 + x^2)^{-1}$ y $f(0) = -2$.

SOLUCIÓN La antiderivada general de

$$f'(x) = e^x + \frac{20}{1 + x^2}$$

es

$$f(x) = e^x + 20\tan^{-1}x + C$$

Para determinar C, utilizamos el hecho de que $f(0) = -2$:

$$f(0) = e^0 + 20\tan^{-1}0 + C = -2$$

En estos términos, tenemos $C = -2 - 1 = -3$, de modo que la solución particular es

$$f(x) = e^x + 20\tan^{-1}x - 3$$

En la figura 2 se muestran las gráficas de la función f' del ejemplo 3 y de su antiderivada f. Note que $f'(x) > 0$, de manera que f siempre es creciente. Observe también que, cuando f' tiene un máximo o un mínimo, f parece que tiene un punto de inflexión. De modo que la gráfica sirve como una comprobación de nuestro cálculo.

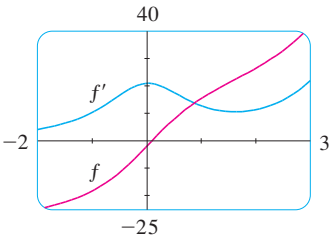


FIGURA 2

V EJEMPLO 4 Encuentre f si $f''(x) = 12x^2 + 6x - 4$, $f(0) = 4$ y $f(1) = 1$.

SOLUCIÓN La antiderivada general de $f''(x) = 12x^2 + 6x - 4$ es

$$f'(x) = 12\frac{x^3}{3} + 6\frac{x^2}{2} - 4x + C = 4x^3 + 3x^2 - 4x + C$$

Si usamos una vez más las reglas de antiderivación, encontramos que

$$f(x) = 4\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + Cx + D = x^4 + x^3 - 2x^2 + Cx + D$$

Para determinar C y D, utilizamos las condiciones dadas: $f(0) = 4$ y $f(1) = 1$. Ya que $f(0) = 0 + D = 4$, entonces $D = 4$. Puesto que

$$f(1) = 1 + 1 - 2 + C + 4 = 1$$

tenemos que $C = -3$. Por tanto, la función requerida es

$$f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x + 4$$

Si conocemos la gráfica de una función f, razonablemente debemos ser capaces de dibujar la gráfica de una antiderivada F. Por ejemplo, suponga que sabe que $F(0) = 1$. Entonces, hay un punto de donde partir, el punto $(0, 1)$, y la dirección en la cual tiene que desplazar su lápiz la proporciona, en cada etapa, la derivada $F'(x) = f(x)$. En el ejemplo siguiente aplicamos los principios de este capítulo para mostrar cómo graficar F aun cuando no tenemos una fórmula para f. Este sería el caso, por ejemplo, cuando $f(x)$ está determinado por datos experimentales.

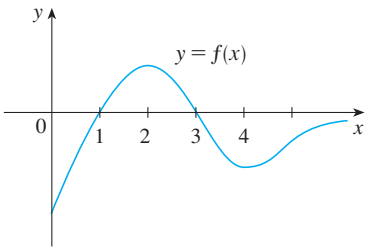


FIGURA 3

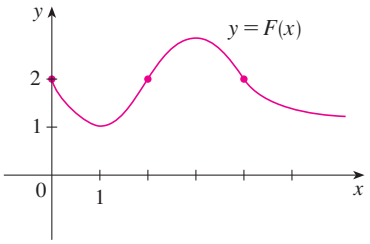


FIGURA 4

V EJEMPLO 5 La gráfica de una función f se muestra en la figura 3. Trace un esbozo de una antiderivada F, dado que $F(0) = 2$.

SOLUCIÓN Nos guía el hecho de que la pendiente de $y = F(x)$ es $f(x)$. Partimos del punto $(0, 2)$ y dibujamos F como una función inicialmente decreciente, ya que $f(x)$ es negativa cuando $0 < x < 1$. Observe que $f(1) = f(3) = 0$, de modo que F tiene rectas tangentes horizontales cuando $x = 1$ y $x = 3$. En el caso de $1 < x < 3$, $f(x)$ es positiva, y de este modo F es creciente. Observe que F tiene un mínimo local cuando $x = 1$ y un máximo local cuando $x = 3$. Para $x > 3$, $f(x)$ es negativa y F es decreciente en $(3, \infty)$. Ya que $f(x) \to 0$ conforme $x \to \infty$, la gráfica de F se vuelve más plana a medida que $x \to \infty$. Note también que $F''(x) = f'(x)$ cambia de positiva a negativa en $x = 2$, y de negativa a positiva en $x = 4$; así F tiene puntos de inflexión cuando $x = 2$ y $x = 4$. Utilizamos esta información para trazar la gráfica de la antiderivada en la figura 4.

Movimiento rectilíneo

La antiderivación es en particular útil al analizar el movimiento de un objeto que se mueve en línea recta. Recuerde que si el objeto tiene la función posición $s = f(t)$, entonces la función velocidad es $v(t) = s'(t)$. Esto significa que la función posición es una antiderivada de la función velocidad. Del mismo modo, la función aceleración es $a(t) = v'(t)$, de manera que la función velocidad es una antiderivada de la aceleración. Si se conocen la aceleración y los valores iniciales $s(0)$ y $v(0)$, entonces puede hallarse la función posición aplicando dos veces la antiderivada.

V EJEMPLO 6 Una partícula se mueve en línea recta y con una aceleración dada por $a(t) = 6t + 4$. Su velocidad inicial es $v(0) = -6$ cm/s y su desplazamiento inicial es $s(0) = 9$ cm. Encuentre su función posición $s(t)$.

SOLUCIÓN Dado que $v'(t) = a(t) = 6t + 4$, la antiderivada da

$$v(t) = 6\frac{t^2}{2} + 4t + C = 3t^2 + 4t + C$$

Observe que $v(0) = C$. Pero $v(0) = -6$, así que $C = -6$ y

$$v(t) = 3t^2 + 4t - 6$$

Puesto que $v(t) = s'(t)$, s es la antiderivada de v:

$$s(t) = 3\frac{t^3}{3} + 4\frac{t^2}{2} - 6t + D = t^3 + 2t^2 - 6t + D$$

Esto da $s(0) = D$. Dado que $s(0) = 9$, tenemos que $D = 9$, y la función posición requerida es

$$s(t) = t^3 + t^2 - 6t + 9$$

Un objeto cerca de la superficie de la Tierra está sujeto a una fuerza gravitacional que produce una aceleración hacia abajo denotada por g. Para un movimiento cercano a la Tierra, suponemos que g es constante y su valor es de unos 9.8 m/s^2 (o 32 pies/s^2).

EJEMPLO 7 Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba con una rapidez de 48 pies/s desde el borde de un acantilado a 432 pies por encima del nivel del suelo. Encuentre su altura sobre el nivel del suelo t segundos más tarde. ¿Cuándo alcanza su altura máxima? ¿Cuándo choca contra el suelo?

SOLUCIÓN El movimiento es vertical y se elige la dirección positiva como la correspondiente hacia arriba. En un instante t, la distancia arriba del nivel del suelo $s(t)$ y la velocidad

$v(t)$ es decreciente. Por consiguiente, la aceleración debe ser negativa y

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -32$$

Tomando antiderivadas, tenemos

$$v(t) = -32t + C$$

Para determinar C, usamos la información dada $v(0) = 48$. Esto da $48 = 0 + C$, de manera que

$$v(t) = -32t + 48$$

La altura máxima se alcanza cuando $v(t) = 0$; es decir, después de 1.5 s. Como $s'(t) = v(t)$, la nueva antiderivada da

$$s(t) = -16t^2 + 48t + D$$

Utilizamos el hecho de que $s(0) = 432$, tenemos $432 = 0 + D$; por consiguiente,

$$s(t) = -16t^2 + 48t + 432$$

La expresión para $s(t)$ es válida hasta que la pelota choca contra el suelo. Esto sucede cuando $s(t) = 0$; o sea, cuando

$$-16t^2 + 48t + 432 = 0$$

o, equivalentemente,

$$t^2 - 3t - 27 = 0$$

Con la fórmula cuadrática, resolvemos esta ecuación para obtener

$$t = \frac{3 \pm 3\sqrt{13}}{2}$$

No consideramos la solución con el signo menos, ya que da un valor negativo para t. En consecuencia, la pelota choca contra el nivel del suelo después de $3\left(1 + \sqrt{13}\right)/2 \approx 6.9$ s.

En la figura 5 se muestra la función posición de la pelota del ejemplo 7. La gráfica corrobora la conclusión obtenida: la pelota alcanza su altura máxima después de 1.5 s y choca contra el suelo después de 6.9 s.

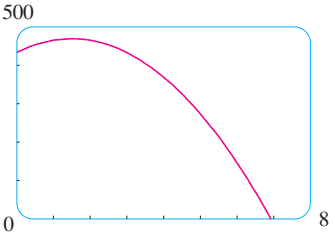


FIGURA 5

4.9 Ejercicios

1-22 Encuentre la antiderivada más general de la función. (Compruebe su respuesta mediante la derivación.)

1. $f(x) = x - 3$

2. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$

3. $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x^2 - \frac{4}{5}x^3$

4. $f(x) = 8x^9 - 3x^6 + 12x^3$

5. $f(x) = (x + 1)(2x - 1)$

6. $f(x) = x(2 - x)^2$

7. $f(x) = 7x^{2/5} + 8x^{-4/5}$

8. $f(x) = x^{3.4} - 2x^{\sqrt{2}-1}$

9. $f(x) = \sqrt{2}$

10. $f(x) = e^2$

11. $f(x) = 3\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x}$

12. $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + x\sqrt{x}$

13. $f(x) = \dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{x}$

14. $f(t) = \dfrac{3t^4 - t^3 + 6t^2}{t^4}$

15. $g(t) = \dfrac{1 + t + t^2}{\sqrt{t}}$

16. $r(\theta) = \sec\theta \tan\theta - 2e^{\theta}$

17. $h(\theta) = 2 \operatorname{sen}\theta - \sec^2\theta$

18. $f(t) = \operatorname{sen} t + 2 \operatorname{senh} t$

19. $f(x) = 5e^x - 3 \cosh x$

20. $f(x) = 2\sqrt{x} + 6 \cos x$

21. $f(x) = \dfrac{x^5 - x^3 + 2x}{x^4}$

22. $f(x) = \dfrac{2 + x^2}{1 + x^2}$

23-24 Encuentre la antiderivada F de f que satisfaga la condición dada. Compruebe su respuesta comparando las gráficas de f y F.

23. $f(x) = 5x^4 - 2x^5, \quad F(0) = 4$

24. $f(x) = 4 - 3(1 + x^2)^{-1}, \quad F(1) = 0$

25-48 Halle f.

25. $f''(x) = 20x^3 - 12x^2 + 6x$

26. $f''(x) = x^6 - 4x^4 + x + 1$

27. $f''(x) = \frac{2}{3}x^{2/3}$

28. $f''(x) = 6x + \operatorname{sen} x$

29. $f'''(t) = \cos t$

30. $f'''(t) = e^t + t^{-4}$

31. $f'(x) = 1 + 3\sqrt{x}, \quad f(4) = 25$

32. $f'(x) = 5x^4 - 3x^2 + 4, \quad f(-1) = 2$

33. $f'(t) = 4/(1 + t^2), \quad f(1) = 0$

34. $f'(t) = t + 1/t^3, \quad t > 0, \quad f(1) = 6$

35. $f'(t) = 2\cos t + \sec^2 t, \quad -\pi/2 < t < \pi/2, \quad f(\pi/3) = 4$

36. $f'(x) = (x^2 - 1)/x, \quad f(1) = \frac{1}{2}, \quad f(-1) = 0$

37. $f'(x) = x^{-1/3}, \quad f(1) = 1, \quad f(-1) = -1$

38. $f'(x) = 4/\sqrt{1 - x^2}, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

39. $f''(x) = -2 + 12x - 12x^2, \quad f(0) = 4, \quad f'(0) = 12$

40. $f''(x) = 8x^3 + 5, \quad f(1) = 0, \quad f'(1) = 8$

41. $f''(\theta) = \operatorname{sen}\theta + \cos\theta, \quad f(0) = 3, \quad f'(0) = 4$

42. $f''(t) = 3/\sqrt{t}, \quad f(4) = 20, \quad f'(4) = 7$

43. $f''(x) = 4 + 6x + 24x^2, \quad f(0) = 3, \quad f(1) = 10$

44. $f''(x) = x^3 + \operatorname{senh} x, \quad f(0) = 1, \quad f(2) = 2.6$

45. $f''(x) = 2 + \cos x, \quad f(0) = -1, \quad f(\pi/2) = 0$

46. $f''(t) = 2e^t + 3\operatorname{sen} t, \quad f(0) = 0, \quad f(\pi) = 0$

47. $f''(x) = x^{-2}, \quad x > 0, \quad f(1) = 0, \quad f(2) = 0$

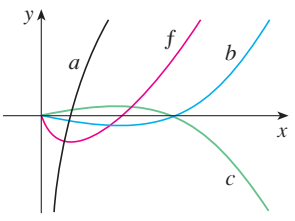
48. $f'''(x) = \cos x, \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 2, \quad f''(0) = 3$

49. Dado que la gráfica de f pasa por el punto $(1, 6)$ y que la pendiente de su recta tangente en $(x, f(x))$ es $2x + 1$, encuentre $f(2)$.

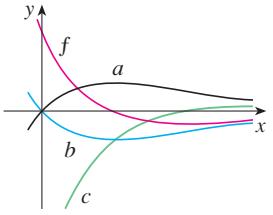
50. Encuentre una función f tal que $f'(x) = x^3$ y la recta $x + y = 0$ sea tangente a la grafica de f.

51-52 Se proporciona la gráfica de una función f. ¿Qué gráfica es una antiderivada de f y por qué?

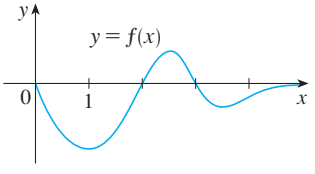
51.



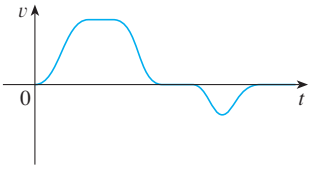
52.



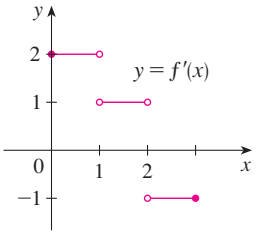
53. Se muestra la gráfica de una función en la figura. Trace un esbozo de una antiderivada F, dado que $F(0) = 1$.



54. En la figura se muestra la gráfica de la función velocidad de una partícula. Trace la gráfica de una función posición.



55. En la figura se muestra la gráfica de f'. Dibuje la gráfica de f si ésta es continua y $f(0) = -1$.



56. a) Utilice un dispositivo de graficación para dibujar $f(x) = 2x - 3\sqrt{x}$.
b) A partir de la gráfica del inciso a), dibuje una gráfica aproximada de la antiderivada F que satisfaga $F(0) = 1$.
c) Aplique las reglas de esta sección a fin de hallar una expresión para $F(x)$.
d) Dibuje F usando la expresión del inciso c). Compare con su esbozo del inciso b).

57-58 Dibuje una gráfica de f y utilícela para esbozar la antiderivada que pasa por el origen

57. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + x^2}, \quad -2\pi \leq x \leq 2\pi$

58. $f(x) = \sqrt{x^4 - 2x^2 + 2} - 2, \quad -3 \leq x \leq 3$

59-64 Una partícula se mueve de acuerdo con la información dada. Determine la posición de la partícula.

59. $v(t) = \operatorname{sen} t - \cos t, \quad s(0) = 0$

60. $v(t) = 1.5\sqrt{t}, \quad s(4) = 10$

61. $a(t) = 2t + 1, \quad s(0) = 3, \quad v(0) = -2$

62. $a(t) = 3\cos t - 2\operatorname{sen} t, \quad s(0) = 0, \quad v(0) = 4$

63. $a(t) = 10\operatorname{sen} t + 3\cos t, \quad s(0) = 0, \quad s(2\pi) = 12$

64. $a(t) = t^2 - 4t + 6, \quad s(0) = 0, \quad s(1) = 20$

65. Una piedra se deja caer desde la plataforma superior de observación (la plataforma espacial) de la Torre CN, 450 m por encima del nivel del suelo.
a) Encuentre la distancia de la piedra arriba del nivel del suelo en el instante t.
b) ¿Cuánto tarda la piedra en llegar al nivel del suelo?
c) ¿Con qué velocidad choca contra el nivel del suelo?
d) Si la piedra se lanza hacia arriba a una rapidez de 5 m/s, ¿cuánto tarda en llegar al nivel del suelo?

66. Demuestre que para el movimiento en línea recta con aceleración constante a, velocidad inicial v_0 y desplazamiento inicial s_0, el desplazamiento después del tiempo t es

$$s = \tfrac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0$$

67. Se lanza un objeto hacia arriba con velocidad inicial v_0 metros por segundo, desde un punto a s_0 metros por encima del nivel del suelo. Demuestre que

$$[v(t)]^2 = v_0^2 - 19.6[s(t) - s_0]$$

68. Se lanzan dos pelotas hacia arriba desde el borde del acantilado del ejemplo 7. La primera se lanza con una rapidez de 48 pies/s y la otra se arroja 1 s más tarde con una rapidez de 24 pies/s. ¿En algún momento rebasa una a la otra?

69. Se deja caer una piedra desde un desfiladero y choca contra el suelo con una rapidez de 120 pies/s. ¿Cuál es la altura del desfiladero?

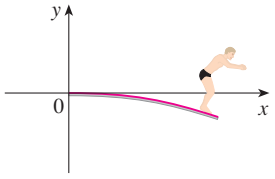
70. Si un clavadista con masa m está en el borde de una plataforma de clavados con longitud L y densidad lineal ρ, entonces la plataforma adopta la forma de una curva $y = f(x)$, donde

$$EIy'' = mg(L - x) + \tfrac{1}{2}\rho g(L - x)^2$$

E e I son constantes positivas que dependen del material con que está hecha la plataforma y g (< 0) es la aceleración debida a la gravedad.

a) Halle una expresión para la forma de la curva.

b) Use $f(L)$ para estimar la distancia debajo de la horizontal al borde de la plataforma.



71. Una compañía estima que el costo marginal (en dólares por artículo) de producir x artículos es de $1.92 - 0.002x$. Si el costo de producción de un artículo es de $562, encuentre el costo de producir 100 artículos.

72. La densidad lineal de una varilla con una longitud de 1 m se expresa por medio de $\rho(x) = 1/\sqrt{x}$ en gramos por centímetro, donde x se mide en centímetros desde uno de los extremos de la varilla. Encuentre la masa de esta última.

73. Dado que las gotas de lluvia crecen a medida que caen, su área superficial aumenta y, por tanto, se incrementa la resistencia a su caída. Una gota de lluvia tiene una velocidad inicial hacia abajo de 10 m/s, y su aceleración hacia abajo es

$$a = \begin{cases} 9 - 0.9t & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 10 \\ 0 & \text{si } t > 10 \end{cases}$$

Si al inicio la gota de lluvia está a 500 m arriba de la superficie de la tierra, ¿cuánto tarda en caer?

74. Un vehículo se desplaza a 50 mi/h cuando aplica los frenos, lo que produce una desaceleración constante de 22 pies/s^2. ¿Cuál es la distancia que recorre el automóvil antes de detenerse?

75. ¿Qué aceleración constante se requiere para incrementar la rapidez de un vehículo desde 30 mi/h hasta 50 mi/h en 5 s?

76. Un automóvil frenó con una desaceleración constante de 16 pies/s^2, lo que genera antes de detenerse unas marcas de deslizamiento que miden 200 pies. ¿Qué tan rápido se desplazaba el vehículo cuando se aplicaron los frenos?

77. Un automóvil se desplaza a 100 km/h cuando el conductor ve un accidente 80 m más adelante y aplica los frenos apresuradamente. ¿Qué desaceleración constante se requiere para detener el vehículo a tiempo de evitar chocar con los vehículos accidentados?

78. Un modelo de cohete se dispara verticalmente hacia arriba a partir del reposo. Su aceleración durante los primeros tres segundos es $a(t) = 60t$, momento en que se agota el combustible y se convierte en un cuerpo en "caída libre". Después de 14 s, se abre el paracaídas del cohete y la velocidad (hacia abajo) disminuye linealmente hasta -18 pies/s en 5 s. Entonces el cohete "flota" hasta el piso a esa velocidad.

a) Determine la función posición s y la función velocidad v (para todos los tiempos t). Dibuje s y v.

b) ¿En qué momento el cohete alcanza su altura máxima y cuál es esa altura?

c) ¿En qué momento aterriza?

79. Un tren "bala" de alta velocidad acelera y desacelera a una razón de 4 pies/s^2. Su rapidez de crucero máxima es de 90 mi/h.

a) ¿Cuál es la distancia máxima que puede recorrer el tren si se acelera desde el reposo hasta que alcanza su rapidez de crucero y, a continuación, corre a esa rapidez durante 15 minutos?

b) Suponga que el tren parte del reposo y debe detenerse por completo en 15 minutos. ¿Cuál es la distancia máxima que puede recorrer en estas condiciones?

c) Encuentre el tiempo mínimo que tarda el tren en viajar entre dos estaciones consecutivas que se encuentran a 45 millas de distancia.

d) El viaje de una estación a la siguiente dura 37.5 minutos. ¿Cuál es la distancia entre las estaciones?

4 Repaso

Verificación de conceptos

1. Explique la diferencia entre máximo absoluto y máximo local. Ilustre por medio de un dibujo.
2. a) ¿Qué dice el teorema del valor extremo?
   b) Explique cómo funciona el método del intervalo cerrado.
3. a) Enuncie el teorema de Fermat.
   b) Defina un número crítico de f.
4. a) Enuncie el teorema de Rolle.
   b) Enuncie el teorema del valor medio y dé una interpretación geométrica.
5. a) Enuncie la prueba de creciente/decreciente.
   b) ¿Qué significa decir que f es cóncava hacia arriba sobre un intervalo I?
   c) Enuncie la prueba de la concavidad.
   d) ¿Qué son los puntos de inflexión? ¿Cómo puede hallarlos?
6. a) Enuncie la prueba de la primera derivada.
   b) Enuncie la prueba de la segunda derivada.
   c) ¿Cuáles son las ventajas y las desventajas relativas de estas pruebas?
7. a) ¿Qué afirma la regla de l'Hospital?
   b) ¿Cómo puede usar la Regla de l'Hospital si tiene un producto $f(x)g(x)$ donde $f(x) \to 0$ y $g(x) \to \infty$ conforme $x \to a$?
   c) ¿Cómo puede usar la regla de l'Hospital si tiene una diferencia $f(x) - g(x)$ donde $f(x) \to \infty$ y $g(x) \to \infty$ a medida que $x \to a$?
   d) ¿Cómo puede usar la regla de l'Hospital si tiene una potencia $[f(x)]^{g(x)}$ donde $f(x) \to 0$ y $g(x) \to 0$ conforme $x \to a$?
8. Si tiene una calculadora graficadora o una computadora, ¿por qué necesita el cálculo para dibujar una función?
9. a) Dada una aproximación inicial x_1 para una raíz de la ecuación $f(x) = 0$, explique geométricamente, mediante un dibujo, ¿cómo se obtiene la segunda aproximación x_2 en el método de Newton?
   b) Escriba una expresión para x_2 en términos de x_1, $f(x_1)$ y $f'(x_1)$.
   c) Escriba una expresión para x_{n+1} en términos de x_n, $f(x_n)$ y $f'(x_n)$.
   d) ¿Bajo qué circunstancias es probable que el método de Newton falle o funcione muy lentamente?
10. a) ¿Qué es una antiderivada de una función f?
    b) Suponga que F_1 y F_2 son antiderivadas de f sobre un intervalo I. ¿Cómo se relacionan F_1 y F_2?

Examen rápido Verdadero-Falso

Determine si la proposición es verdadera o falsa. Si es verdadera, explique por qué. Si es falsa, explique por qué o dé un ejemplo que refute la proposición.

1. Si $f'(c) = 0$, entonces f tiene un máximo o un mínimo locales en c.
2. Si f tiene un valor mínimo absoluto en c, entonces $f'(c) = 0$.
3. Si f es continua sobre (a, b), entonces f alcanza un valor máximo absoluto $f(c)$ y un valor mínimo absoluto $f(d)$ en algunos números c y k en (a, b).
4. Si f es derivable y $f(-1) = f(1)$, entonces existe un número c tal que $|c| < 1$ y $f'(c) = 0$.
5. Si $f'(x) < 0$ para $1 < x < 6$, entonces f es decreciente sobre $(1, 6)$.
6. Si $f''(2) = 0$, entonces $(2, f(2))$ es un punto de inflexión de la curva $y = f(x)$.
7. Si $f'(x) = g'(x)$ para $0 < x < 1$, entonces $f(x) = g(x)$ para $0 < x < 1$.
8. Existe una función f tal que $f(1) = -2$, $f(3) = 0$ y $f'(x) > 1$ para toda x.
9. Existe una función f tal que $f(x) > 0$, $f'(x) < 0$ y $f''(x) > 0$ para toda x.
10. Existe una función f tal que $f(x) < 0$, $f'(x) < 0$ y $f''(x) > 0$ para toda x.
11. Si f y g son crecientes sobre un intervalo I, entonces $f + g$ es creciente sobre I.
12. Si f y g son crecientes sobre un intervalo I, entonces $f - g$ es creciente sobre I.
13. Si f y g son crecientes sobre un intervalo I, entonces fg es creciente sobre I.
14. Si f y g son funciones crecientes positivas sobre un intervalo I, entonces fg es creciente sobre I.
15. Si f es creciente y $f(x) > 0$ en I, entonces $g(x) = 1/f(x)$ es decreciente sobre I.
16. Si f es par, entonces f' es par.
17. Si f es periódica, entonces f' es periódica.
18. La antiderivada más general de $f(x) = x^{-2}$ es
$$F(x) = -\frac{1}{x} + C$$
19. Si $f'(x)$ existe y es diferente de cero para toda x, entonces $f(1) \neq f(0)$.
20. $\lim_{x \to 0} \dfrac{x}{e^x} = 1$

Ejercicios

1-6 Encuentre los valores extremos locales y absolutos de la función sobre el intervalo dado.

1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1, \quad [2, 4]$

2. $f(x) = x\sqrt{1 - x}, \quad [-1, 1]$

3. $f(x) = \dfrac{3x - 4}{x^2 + 1}, \quad [-2, 2]$

4. $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}, \quad [-2, 1]$

5. $f(x) = x + 2\cos x, \quad [-\pi, \pi]$

6. $f(x) = x^2 e^{-x}, \quad [-1, 3]$

7-14 Obtenga el límite.

7. $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{\tan x}$

8. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan 4x}{x + \operatorname{sen} 2x}$

9. $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^{4x} - 1 - 4x}{x^2}$

10. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{e^{4x} - 1 - 4x}{x^2}$

11. $\lim_{x \to -\infty} (x^2 - x^3)e^{2x}$

12. $\lim_{x \to \pi^-} (x - \pi)\csc x$

13. $\lim_{x \to 1^+} \left(\dfrac{x}{x - 1} - \dfrac{1}{\ln x} \right)$

14. $\lim_{x \to (\pi/2)^-} (\tan x)^{\cos x}$

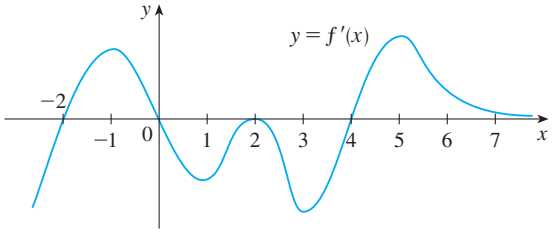
15-17 Trace la gráfica de una función que satisface las condiciones dadas.

15. $f(0) = 0, \quad f'(-2) = f'(1) = f'(9) = 0,$
$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to 6} f(x) = -\infty,$
$f'(x) < 0$ sobre $(-\infty, -2), (1, 6)$ y $(9, \infty)$,
$f'(x) > 0$ sobre $(-2, 1)$ y $(6, 9)$,
$f''(x) > 0$ sobre $(-\infty, 0)$ y $(12, \infty)$,
$f''(x) < 0$ sobre $(0, 6)$ y $(6, 12)$

16. $f(0) = 0, \quad f$ es continua y par,
$f'(x) = 2x$ si $0 < x < 1, \quad f'(x) = -1$ si $1 < x < 3,$
$f'(x) = 1$ si $x > 3$

17. f es impar, $f'(x) < 0$ para $0 < x < 2,$
$f'(x) > 0$ para $x > 2, \quad f''(x) > 0$ para $0 < x < 3,$
$f''(x) < 0$ para $x > 3, \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = -2$

18. En la figura se ilustra la gráfica de la *derivada* f' de una función f.
a) ¿Sobre qué intervalos f es creciente o decreciente?
b) ¿Para qué valores de x la función f tiene un máximo local o un mínimo local?
c) Trace la gráfica de f''.
d) Trace la posible gráfica de f.



19-34 Trace la curva mediante los criterios de la sección 4.5.

19. $y = 2 - 2x - x^3$

20. $y = x^3 - 6x^2 - 15x + 4$

21. $y = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x$

22. $y = \dfrac{x}{1 - x^2}$

23. $y = \dfrac{1}{x(x - 3)^2}$

24. $y = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{(x - 2)^2}$

25. $y = x^2/(x + 8)$

26. $y = \sqrt{1 - x} + \sqrt{1 + x}$

27. $y = x\sqrt{2 + x}$

28. $y = \sqrt[3]{x^2 + 1}$

29. $y = e^x \operatorname{sen} x, \quad -\pi \leq x \leq \pi$

30. $y = 4x - \tan x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$

31. $y = \operatorname{sen}^{-1}(1/x)$

32. $y = e^{2x - x^2}$

33. $y = (x - 2)e^{-x}$

34. $y = x + \ln(x^2 + 1)$

35-38 Elabore gráficas de f que revelen todos los aspectos importantes de la curva. Use las gráficas de f' y f'' para estimar los intervalos de incremento y decremento, los valores extremos, los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión. En el ejercicio 35 aplique el cálculo para determinar estas cantidades con exactitud.

35. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3}$

36. $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{x^2 + x + 3}$

37. $f(x) = 3x^6 - 5x^5 + x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 2$

38. $f(x) = x^2 + 6.5 \operatorname{sen} x, \quad -5 \leq x \leq 5$

39. Trace la gráfica $f(x) = e^{-1/x^2}$ en un rectángulo de vista en que aparezcan todos los aspectos principales de la función. Estime los puntos de inflexión. Enseguida, aplique el cálculo para determinarlos con exactitud.

40. a) Grafique la función $f(x) = 1/(1 + e^{1/x})$.
b) Explique la forma de la gráfica calculando los límites de $f(x)$ conforme x tiende a ∞, $-\infty$, 0^+ y 0^-.
c) Use la gráfica de f para estimar las coordenadas de los puntos de inflexión.
d) Utilice su SAC para calcular y trazar la gráfica de f''.
e) Con la gráfica del inciso d) estime el punto de inflexión con más exactitud.

SAC **41-42** Utilice las gráficas de f, f' y f'' para estimar la coordenada x de los puntos máximo y mínimo y los puntos de inflexión de f.

41. $f(x) = \dfrac{\cos^2 x}{\sqrt{x^2 + x + 1}}, \quad -\pi \leq x \leq \pi$

42. $f(x) = e^{-0.1x} \ln(x^2 - 1)$

43. Investigue la familia de funciones de $f(x) = \ln(\operatorname{sen} x + C)$ ¿Cuáles características en común tienen los miembros de esta familia? ¿En qué difieren? ¿Para cuáles valores de C es f continua en $(+\infty, \infty)$? ¿Para cuáles valores de C f no tiene gráfica? ¿Qué sucede conforme $C \to \infty$?

44. Investigue la familia de funciones $f(x) = cxe^{-cx^2}$. ¿Qué le ocurre a los puntos máximos y mínimos y a los puntos de inflexión al cambiar c? Ilustre sus conclusiones dibujando varios miembros de la familia.

45. Demuestre que la ecuación $3x + 2\cos x + 5 = 0$ tiene exactamente una raíz real.

46. Suponga que f es continua sobre $[0, 4]$, $f(0) = 1$, y $2 \leq f'(x) \leq 5$ para toda x en $(0, 4)$. Demuestre que $9 \leq f(4) \leq 21$.

47. Aplicando el teorema del valor medio a la función $f(x) = x^{1/5}$ sobre el intervalo $[32, 33]$, demuestre que

$$2 < \sqrt[5]{33} < 2.0125$$

48. ¿Para cuáles valores de las constantes a y b se tiene que $(1, 3)$ es un punto de inflexión de la curva $y = ax^3 + bx^2$?

49. Sea $g(x) = f(x^2)$, donde f es dos veces derivable para toda x, $f'(x) > 0$ para toda $x \neq 0$ y f es cóncava hacia abajo sobre $(-\infty, 0)$, y cóncava hacia arriba sobre $(0, \infty)$.
a) ¿En cuáles números tiene g un valor extremo?
b) Discuta la concavidad de g.

50. Halle dos números enteros positivos tales que la suma del primer número y cuatro veces el segundo sea 1000 y el producto de los números sea lo más grande posible.

51. Demuestre que la distancia más corta desde el punto (x_1, y_1) a la recta $Ax + By + C = 0$ es

$$\frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

52. Encuentre el punto sobre la hipérbola $xy = 8$ que está más cercano al punto $(3, 0)$.

53. Halle el área más pequeña posible de un triángulo isósceles que está circunscrito a una circunferencia de radio r.

54. Encuentre el volumen del cono circular más grande que puede inscribirse en una esfera de radio r.

55. En ΔABC, D queda sobre AB, $CD \perp AB$, $|AD| = |BD| = 4$ cm y $|CD| = 5$ cm. ¿Dónde se debe situar un punto P sobre CD de tal modo que la suma $|PA| + |PB| + |PC|$ sea mínima?

56. Resuelva el ejercicio 55 cuando $|CD| = 2$ cm.

57. La velocidad de una ola de longitud L en agua profunda es

$$v = K\sqrt{\frac{L}{C} + \frac{C}{L}}$$

donde K y C son constantes positivas conocidas. ¿Cuál es la longitud de la ola que da la velocidad mínima?

58. Se va a construir un tanque metálico de almacenamiento con volumen V, en forma de un cilindro circular recto rematado por un hemisferio. ¿Cuáles dimensiones requerirán la cantidad mínima de metal?

59. Un equipo de *hockey* juega en una arena con capacidad de 15 000 espectadores. Con el precio del boleto fijado en \$12, la asistencia promedio en un juego es de 11 000 espectadores. Un estudio de mercado indica que por cada dólar que disminuya el precio del boleto, la asistencia promedio aumentará 1000. ¿Cómo deben fijar los propietarios del equipo el precio de la entrada para maximizar sus ingresos provenientes de la venta de boletos?

60. Un fabricante determina que el costo de fabricar x unidades de un artículo es $C(x) = 1800 + 25x - 0.2x^2 + 0.001x^3$ y la función de demanda es $p(x) = 48.2 - 0.03x$.
a) Grafique las funciones costo e ingreso y úselas para estimar el nivel de producción para obtener la utilidad máxima.
b) Aplique el cálculo a fin de hallar el nivel de producción para obtener la utilidad máxima.
c) Estime el nivel de producción que minimice el costo promedio.

61. Aplique el método de Newton para calcular la raíz de la ecuación $x^5 - x^4 + 3x^2 - 3x - 2 = 0$ en el intervalo $[1, 2]$ con una aproximación de seis decimales.

62. Aplique el método de Newton para hallar todas las raíces de la ecuación $\operatorname{sen} x = x^2 - 3x + 1$ a una exactitud de seis decimales.

63. Aplique el método de Newton para hallar el valor máximo absoluto de la función $f(t) = \cos t + t - t^2$, a una exactitud de ocho decimales.

64. Utilice la guía de la sección 4.5 para trazar la curva $y = x \operatorname{sen} x$, $0 \leq x \leq 2\pi$. Recurra al método de Newton si es necesario.

65-72 Determine f.

65. $f'(x) = \cos x - (1 - x^2)^{-1/2}$

66. $f'(x) = 2e^x + \sec x \tan x$

67. $f'(x) = \sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^2}$

68. $f'(x) = \operatorname{senh} x + 2\cosh x, \quad f(0) = 2$

69. $f'(t) = 2t - 3\operatorname{sen} t, \quad f(0) = 5$

70. $f'(u) = \dfrac{u^2 + \sqrt{u}}{u}, \quad f(1) = 3$

71. $f''(x) = 1 - 6x + 48x^2, \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 2$

72. $f''(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5, \quad f(0) = 2, \quad f(1) = 0$

73-74 Una partícula se mueve de acuerdo con lo siguiente. Encuentre la posición de la partícula.

73. $v(t) = 2t - 1/(1 + t^2), \quad s(0) = 1$

74. $a(t) = \operatorname{sen} t + 3 \cos t, \quad s(0) = 0, \quad v(0) = 2$

75. a) Si $f(x) = 0.1e^x + \operatorname{sen} x$, $-4 \leq x \leq 4$, use la gráfica de f para dibujar una gráfica aproximada de la antiderivada F de f que satisfaga $F(0) = 0$.
b) Encuentre una expresión para $F(x)$.
c) Dibuje F con la expresión del inciso b). Compare con su esquema del inciso a).

76. Investigue la familia de curvas dada por

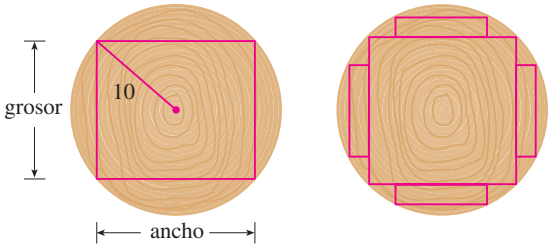
$$f(x) = x^4 + x^3 + cx^2$$

En particular, determine el valor de transición de c en que cambia la cantidad de números críticos y el valor de transición en que varia el número de puntos de inflexión. Ilustre con gráficas las formas posibles.

77. Se deja caer un recipiente metálico desde un helicóptero a 500 m arriba de la superficie de la Tierra. Su paracaídas no se abre, pero el recipiente ha sido diseñado para soportar una velocidad de impacto de 100 m/s. ¿Se reventará o no?

78. En una carrera de automóviles a lo largo de una pista recta, el auto A deja atrás dos veces al vehículo B. Demuestre que en algún momento en la carrera las aceleraciones de los automóviles fueron iguales. Plantee los supuestos que haga.

79. Se va a cortar una viga rectangular a partir de un tronco cilíndrico que tiene un radio de 10 pulgadas.
a) Demuestre que la viga de área máxima de sección transversal es cuadrada.
b) Se van a cortar cuatro tablones rectangulares de las cuatro secciones del tronco que quedan después de cortar la viga cuadrada. Determine las dimensiones de los tablones que tendrán el área máxima de la sección transversal.
c) Suponga que la resistencia de la viga rectangular es proporcional al producto de su ancho y al cuadrado de su altura. Encuentre las dimensiones de la viga más fuerte que se puede cortar a partir del tronco cilíndrico.



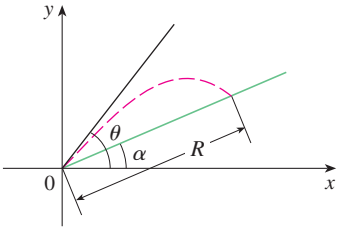
80. Si se dispara un proyectil a una velocidad inicial v a un ángulo de inclinación θ a partir de la horizontal, por tanto, su trayectoria, despreciando la resistencia del aire, es la parábola

$$y = (\tan\theta)x - \frac{g}{2v^2 \cos^2\theta} x^2 \qquad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

a) Suponga que el proyectil se dispara desde la base de un plano inclinado que forman un ángulo α, $\alpha > 0$, respecto a la horizontal, como se muestra en la figura. Demuestre que el alcance del proyectil, medido por encima de la pendiente, se expresa mediante

$$R(\theta) = \frac{2v^2 \cos\theta \operatorname{sen}(\theta - \alpha)}{g \cos^2\alpha}$$

b) Determine θ de modo que R sea un máximo.
c) Suponga que el plano forma un ángulo α *abajo* de la horizontal. Determine el alcance R en este caso y el ángulo en el cual debe dispararse el proyectil para maximizar R.

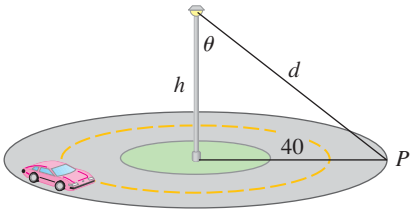


81. Demuestre que, para $x > 0$,

$$\frac{x}{1 + x^2} < \tan^{-1}x < x$$

82. Trace la gráfica de una función f tal que $f'(x) < 0$ para toda x, $f''(x) > 0$ para $|x| > 1$, $f''(x) < 0$ para $|x| < 1$ y $\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) + x] = 0$.

83. Una luz se coloca encima de un poste de altura h pies, con el fin de iluminar un círculo, que tiene radio de 40 pies, ocupado por el tráfico. La intensidad de iluminación I en cualquier punto P en el círculo es directamente proporcional al coseno del ángulo θ (véase la figura) e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia d de la fuente de luz.
a) ¿Qué tan alto debe estar la luz sobre el poste de manera que se maximice I?
b) Supongamos que la luz sobre el poste está a h pies de altura y que una mujer está caminando hacia afuera de la base del poste a una rapidez de 4 pies/s. ¿Con qué rapidez disminuye la intensidad de la luz en el punto a su espalda a 4 pies sobre el suelo, cuando ella alcanza el borde exterior del círculo de tráfico?



84. Está fluyendo agua a un ritmo constante dentro de un tanque esférico. Sea $V(t)$ el volumen de agua en el tanque y $H(t)$ la altura del agua en el tanque en el tiempo t.
a) ¿Cuáles son los significados de $V'(t)$ y $H'(t)$? ¿Son estas derivadas positivas, negativas o cero?
b) ¿Es $V''(t)$ positiva, negativa o cero? Explique.
c) Sean t_1, t_2 y t_3 los tiempos cuando el tanque está lleno a un cuarto, la mitad y a tres cuartas partes del total, respectivamente. ¿Son los valores $H''(t_1)$, $H''(t_2)$ y $H''(t_3)$ positivos, negativos o cero? ¿Por qué?

Problemas adicionales

Uno de los principios más importantes en la resolución de problemas es la *analogía* (véase la pagina 75). Si tiene dificultades para comenzar un problema, conviene resolver un problema semejante más sencillo. En el ejemplo siguiente se ilustra el principio. Cubra la solución e intente resolverlo primero.

EJEMPLO 1 Si x, y y z son números positivos, demuestre que

$$\frac{(x^2 + 1)(y^2 + 1)(z^2 + 1)}{xyz} \geqslant 8$$

SOLUCIÓN Puede resultar difícil empezar con este problema. (Algunos estudiantes lo han atacado multiplicando el numerador, pero eso sólo genera dificultades.) Intente pensar en un problema similar más sencillo. Cuando intervienen varias variables, a menudo resulta útil pensar en un problema análogo con menos variables. En este caso, puede reducir el número de variables de tres a una y probar la desigualdad análoga

$$\boxed{1} \qquad \frac{x^2 + 1}{x} \geqslant 2 \qquad \text{para } x > 0$$

De hecho, si puede probar $\boxed{1}$, entonces se deduce la desigualdad deseada porque

$$\frac{(x^2 + 1)(y^2 + 1)(z^2 + 1)}{xyz} = \left(\frac{x^2 + 1}{x}\right)\left(\frac{y^2 + 1}{y}\right)\left(\frac{z^2 + 1}{z}\right) \geqslant 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

La clave para demostrar $\boxed{1}$ es reconocer que es una versión disfrazada de problema de mínimo. Si hace

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x} = x + \frac{1}{x} \qquad x > 0$$

entonces $f'(x) = 1 - (1/x^2)$, de tal suerte que $f'(x) = 0$ cuando $x = 1$. También, $f'(x) < 0$ para $0 < x < 1$, y $f'(x) > 0$ para $x > 1$. Por consiguiente, el valor mínimo absoluto de f es $f(1) = 2$. Esto significa que

$$\frac{x^2 + 1}{x} \geqslant 2 \qquad \text{para todos los valores positivos de } x$$

y, como se mencionó, por multiplicación se infiere la desigualdad dada.

La desigualdad $\boxed{1}$ pudo probarse sin cálculo. De hecho, si $x > 0$, tenemos

$$\frac{x^2 + 1}{x} \geqslant 2 \iff x^2 + 1 \geqslant 2x \iff x^2 - 2x + 1 \geqslant 0$$

$$\iff (x - 1)^2 \geqslant 0$$

Debido a que la última desigualdad es obviamente verdadera, la primera también lo es.

RP RETOME EL CONCEPTO

¿Qué ha aprendido a partir de la solución de este ejemplo?

- Para resolver un problema que involoucra varias variables, podría ayudar resolver un problema semejante con una variable.
- Cuando intente probar una desigualdad, podría ayudar si piensa en ella como en un problema de máximos y mínimos.

Problemas

1. Si un rectángulo tiene su base sobre el eje x y dos vértices sobre la curva $y = e^{-x^2}$, demuestre que el rectángulo tiene el área más grande posible cuando los dos vértices están en los puntos de inflexión de la curva.

2. Demuestre que $|\operatorname{sen} x - \cos x| \leq \sqrt{2}$ para toda x.

3. ¿La función $f(x) = e^{10|x-2|-x^2}$ tiene un máximo absoluto? Si es así, encuéntrelo. ¿Qué hay del máximo absoluto?

4. Demuestre que $x^2y^2(4 - x^2)(4 - y^2) \leq 16$ para todos los números x y y tales que $|x| \leq 2$ y $|y| \leq 2$.

5. Demuestre que los puntos de inflexión de la curva $y = (\operatorname{sen} x)/x$ está sobre la curva $y^2(x^4 + 4) = 4$.

6. Encuentre el punto sobre la parábola $y = 1 - x^2$ en el cual la recta tangente corta el primer cuadrante en un triángulo con área mínima.

7. Si a, b, c y d son constantes tales que

$$\lim_{x \to 0} \frac{ax^2 + \operatorname{sen} bx + \operatorname{sen} cx + \operatorname{sen} dx}{3x^2 + 5x^4 + 7x^6} = 8$$

halle el valor de la suma $a + b + c + d$.

8. Esquematice el conjunto de todos los puntos (x, y) tales que $|x + y| \leq e^x$.

9. Encuentre los puntos más altos y más bajos sobre la curva $x^2 + xy + y^2 = 12$.

10. ¿Para qué valores de c la curva $y = cx^3 + e^x$ tiene puntos de inflexión?

11. Si $P(a, a^2)$ es cualquier punto sobre la parábola $y = x^2$, excepto en el origen, sea Q el punto donde la recta normal cruza la parábola una vez más (véase la figura). Demuestre que el segmento de recta PQ tiene la longitud más corta posible cuando $a = 1/\sqrt{2}$.

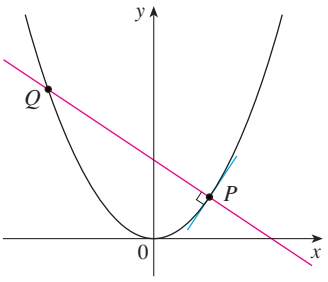
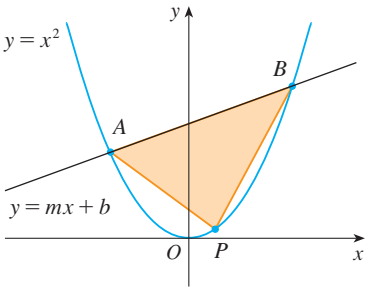


FIGURA PARA EL PROBLEMA 11

12. Trace la región en el plano que consta de todos los puntos (x, y) tales que

$$2xy \leq |x - y| \leq x^2 + y^2$$

13. La recta $y = mx + b$ corta a la parábola $y = x^2$ en los puntos A y B (véase la figura). Determine el punto P sobre el arco AOB de la parábola que maximiza el área del triángulo PAB.



14. $ABCD$ es un trozo cuadrado de papel con lados de longitud 1 m. Se dibuja un cuarto de circunferencia desde B hasta D, con centro en A. El trozo de papel se dobla a lo largo de EF con E sobre AB y F sobre AD, de manera que A cae sobre el cuarto de circunferencia. Determine las áreas máxima y mínima que podría tener el triángulo AEF.

15. ¿Para qué números positivos a la curva $y = a^x$ corta a la recta $y = x$?

16. ¿Para qué valores de a es verdadera la siguiente ecuación?

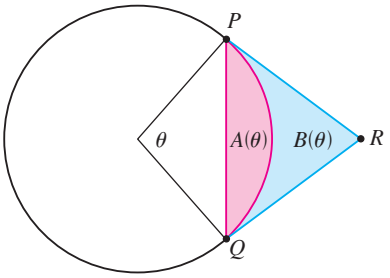
$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x + a}{x - a} \right)^x = e$$

17. Sea $f(x) = a_1 \operatorname{sen} x + a_2 \operatorname{sen} 2x + \cdots + a_n \operatorname{sen} nx$, donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales y n es un entero positivo. Si se sabe que $|f(x)| \leq |\operatorname{sen} x|$ para toda x, demuestre que

$$|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leq 1$$

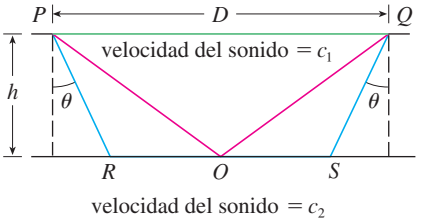
18. Un arco PQ de un círculo subtiende un ángulo central θ, como en la figura. Sea $A(\theta)$ el área entre la cuerda PQ y el arco PQ. Sea $B(\theta)$ el área entre las rectas tangentes PR, QR y el arco. Encuentre

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{A(\theta)}{B(\theta)}$$



19. La velocidad del sonido c_1 en una capa superior y c_2 en una capa inferior de roca y el espesor h de la capa superior pueden calcularse mediante la exploración sísmica, si la velocidad del sonido en la capa inferior es mayor que la velocidad en la capa superior. Se hace detonar una carga de dinamita en el punto P y las señales transmitidas se registran en el punto Q, el cual está a una distancia D de P. La primera señal que llega a Q viaja por la superficie y tarda T_1 segundos. La siguiente señal viaja desde el punto P al punto R, desde R a S en la capa inferior y luego a Q, lo cual le lleva T_2 segundos. La tercera señal es reflejada por la capa inferior en el punto medio O de RS y tarda T_3 segundos en llegar a Q.

a) Exprese T_1, T_2 y T_3 en función de D, h, c_1, c_2 y θ.
b) Demuestre que T_2 es un mínimo cuando $\operatorname{sen} \theta = c_1/c_2$.
c) Suponga que $D = 1$ km, $T_1 = 0.26$ s, $T_2 = 0.32$ s y $T_3 = 0.34$ s. Calcule c_1, c_2 y h.



Nota: los geofísicos usan esta técnica cuando estudian la estructura de la corteza terrestre, ya sea con fines de exploración petrolera o para la detección de enormes fallas en las rocas.

20. ¿Para qué valores de c existe una recta que cruce la curva

$$y = x^4 + cx^3 + 12x^2 - 5x + 2$$

en cuatro puntos diferentes?

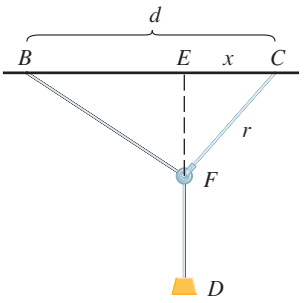


FIGURA PARA EL PROBLEMA 21

21. Uno de los problemas que planteó el marqués de l'Hospital en su libro de texto *Analyse des Infiniment Petits* concierne a una polea conectada al techo de una habitación en un punto C mediante una cuerda de longitud r. En otro punto B sobre el techo, a una distancia d de C (donde $d > r$), una cuerda de longitud ℓ se conecta a la polea y pasa por ésta en F y se ata a un peso W. El peso se libera y alcanza el reposo en su posición de equilibrio D. Tal y como argumentó l'Hospital, esto sucede cuando la distancia $|ED|$ se maximiza. Demuestre que cuando el sistema alcanza el punto de equilibrio, el valor de x es

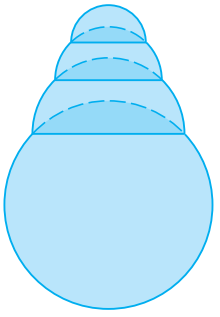
$$\frac{r}{4d}\left(r + \sqrt{r^2 + 8d^2}\right)$$

Observe que esta expresión es independiente tanto de W como de ℓ.

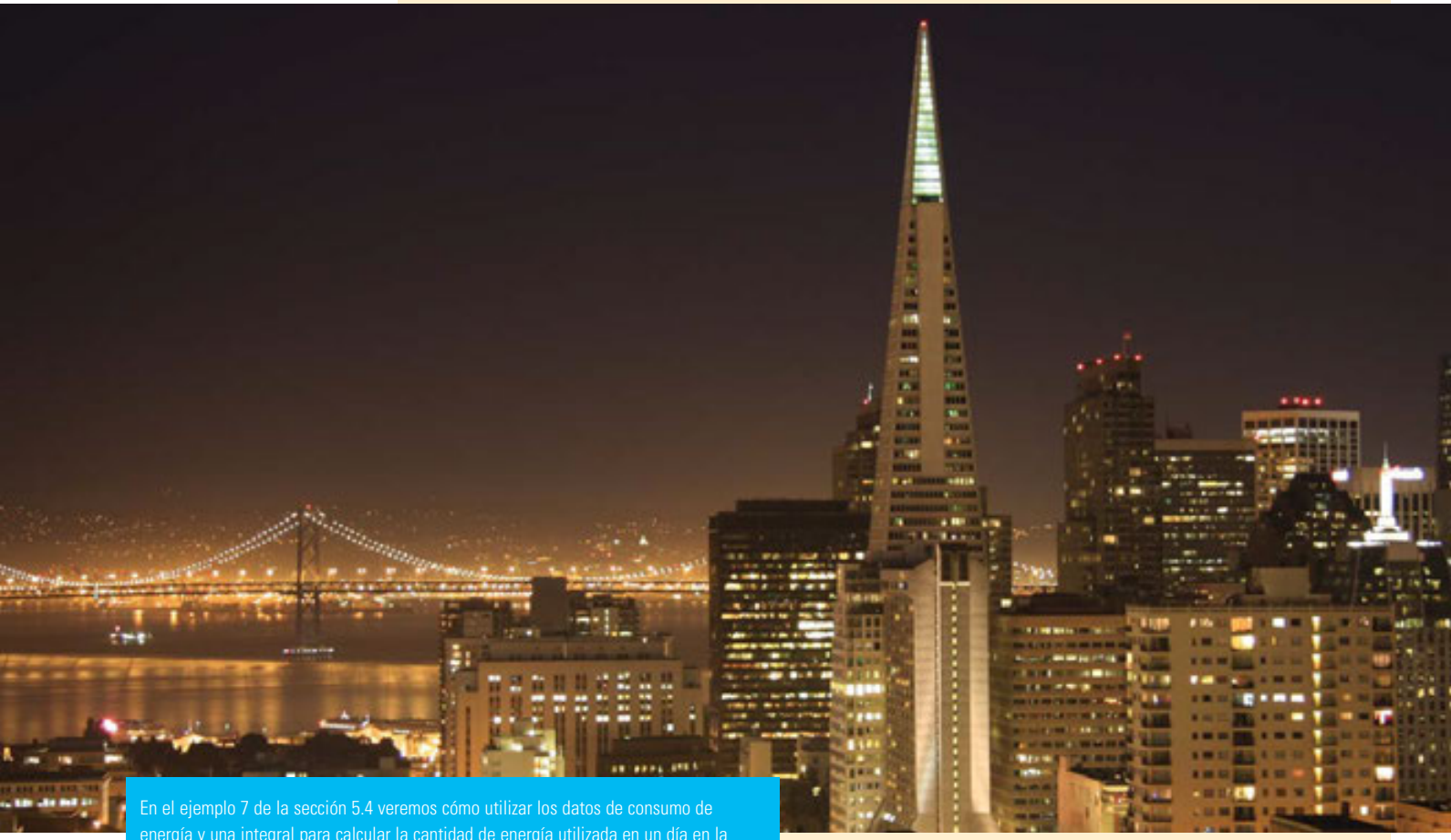
22. Dada una esfera con radio r, encuentre la altura de una pirámide de volumen mínimo cuya base es un cuadrado y cuyas caras base y triangular son tangentes a la esfera. ¿Qué sucede si la base de la pirámide es un n-ágono regular? (Un n-ágono regular es un polígono con n lados y ángulos iguales.) (Use el hecho de que el volumen de una pirámide es $\frac{1}{3}Ah$, donde A es el área de la base.)

23. Suponga que una bola de nieve se derrite de tal modo que su volumen disminuye en proporción directa a su área superficial. Si tarda tres horas en que la bola disminuya a la mitad de su volumen original, ¿cuánto tardará la bola en fundirse totalmente?

24. Una burbuja hemisférica se coloca sobre una burbuja esférica de radio 1. Después, una burbuja hemisférica más pequeña se coloca sobre la primera. Este proceso prosigue hasta que se forman n cámaras, incluso la esfera. (La figura muestra el caso $n = 4$). Utilice la inducción matemática para demostrar que la altura máxima de cualquier torre de burbujas con n cámaras es $1 + \sqrt{n}$.



5 Integrales



En el ejemplo 7 de la sección 5.4 veremos cómo utilizar los datos de consumo de energía y una integral para calcular la cantidad de energía utilizada en un día en la ciudad de San Francisco.

© Nathan Jaskowiak / Shutterstock

En el capítulo 2 utilizamos los problemas de la recta tangente y la velocidad para introducir el concepto de derivada, que es la idea central en el cálculo diferencial. De la misma manera, este capítulo comienza con los problemas de área y distancia y los utiliza para formular la idea de integral definida, que es el concepto básico del cálculo integral. Veremos en los capítulos 6 y 8 cómo utilizar la integral para resolver problemas relacionados con volúmenes, longitud de curvas, predicciones de una población, registro cardiaco, fuerzas sobre una presa, trabajo, excedente de consumo y el beisbol, entre muchas otras situaciones.

Existe una conexión entre el cálculo integral y el cálculo diferencial. El teorema fundamental del cálculo relaciona la integral con la derivada; veremos en este capítulo que este teorema simplifica en gran medida la resolución de muchos problemas.

5.1 Áreas y distancias

Ahora es *un* buen momento para leer (o volver a leer) *Presentación preliminar del cálculo* (véase la página 1), que analiza las ideas unificadoras del cálculo y lo ayuda a situarse en la perspectiva de donde está y hacia dónde va.

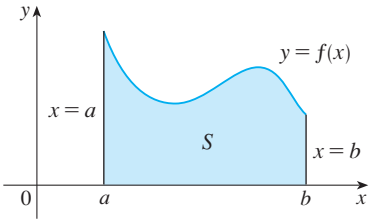


FIGURA 1
$S = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$

En esta sección se descubre que, al intentar calcular el área bajo una curva o la distancia recorrida por un automóvil, se llega al mismo tipo especial de límite.

El problema del área

Empezaremos por intentar resolver el *problema del área*: encuentre el área de la región S que está debajo de la curva $y = f(x)$, desde a hasta b. Esto significa que S (figura 1) está limitada por la grafica de una función continua f [donde $f(x) \geqslant 0$], las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ y el eje x.

Al intentar resolver el problema del área, debemos preguntarnos: ¿cuál es el significado de la palabra *área?* Esta cuestión es fácil de responder para regiones con lados rectos. Para un rectángulo, se define como el producto del largo y el ancho. El área de un triángulo es la mitad de la base multiplicada por la altura. El área de un polígono se encuentra al dividirlo en triángulos (figura 2) y sumar las áreas de esos triángulos.

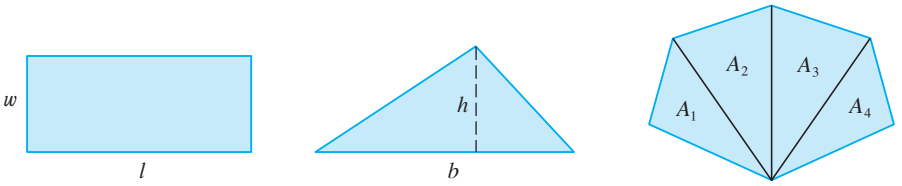


FIGURA 2
$A = lw$ $\quad A = \frac{1}{2}bh$ $\quad A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$

Sin embargo, no es fácil hallar el área de una región con lados curvos. Todos tenemos una idea intuitiva de lo que es el área de una región, pero parte del problema del área es hacer que esta idea intuitiva se precise dando una definición exacta.

Recuerde que al definir una recta tangente, primero obtuvimos una aproximación de la pendiente de la recta tangente para las pendientes de rectas secantes y, a continuación, tomamos el límite de estas aproximaciones. Sigamos una idea similar para las áreas. En primer lugar obtenemos una aproximación de la región S representándola por medio de rectángulos, y después tomamos el límite de las áreas de los rectángulos cuando se incrementa el número de éstos. En el ejemplo siguiente se ilustra el procedimiento.

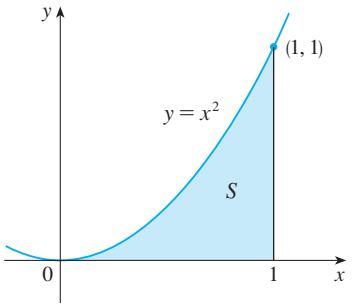


FIGURA 3

V EJEMPLO 1 Utilice rectángulos para estimar el área bajo la parábola $y = x^2$, desde 0 hasta 1 (la región parabólica S se ilustra en la figura 3).

SOLUCIÓN En primer lugar, el área S debe encontrarse en alguna parte entre 0 y 1 porque S está contenida en un cuadrado de lado 1, pero, en verdad, podemos lograr algo mejor que eso. Suponga que dividimos S en cuatro franjas, S_1, S_2, S_3 y S_4, al trazar las rectas verticales $x = \frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{2}$ y $x = \frac{3}{4}$ como en la figura 4a).

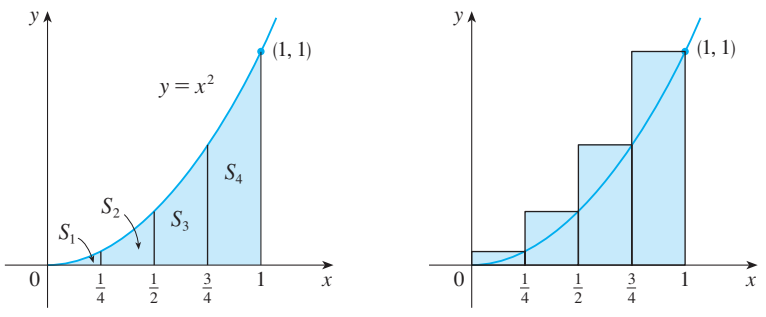


FIGURA 4

Podemos obtener una aproximación de cada franja por medio de un rectángulo cuya base sea la misma que la de la franja y cuya altura sea la misma que la del lado derecho de la propia franja [véase la figura 4b)]. En otras palabras, las alturas de estos rectángulos son los valores de la función $f(x) = x^2$ en los puntos extremos de la derecha de los subintervalos $[0, \frac{1}{4}]$, $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ y $[\frac{3}{4}, 1]$.

Cada rectángulo tiene un ancho de $\frac{1}{4}$, y las alturas son $(\frac{1}{4})^2$, $(\frac{1}{2})^2$, $(\frac{3}{4})^2$ y 1^2. Si denotamos con R_4 la suma de las áreas de estos rectángulos de aproximación, obtenemos

$$R_4 = \tfrac{1}{4} \cdot (\tfrac{1}{4})^2 + \tfrac{1}{4} \cdot (\tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{1}{4} \cdot (\tfrac{3}{4})^2 + \tfrac{1}{4} \cdot 1^2 = \tfrac{15}{32} = 0.46875$$

A partir de la figura 4b) vemos que el área A de S es menor que R_4, de modo que

$$A < 0.46875$$

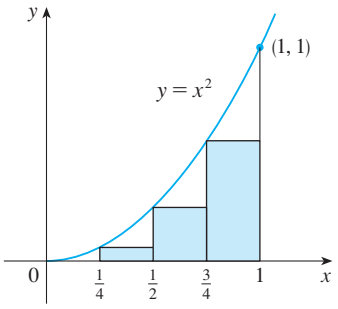


FIGURA 5

En lugar de usar los rectángulos de la figura 4b), podríamos utilizar los rectángulos más pequeños de la figura 5, cuyas alturas son los valores de f en los puntos extremos de la izquierda de los subintervalos. (El rectángulo de la extrema izquierda se ha aplastado debido a que su altura es 0.) La suma de las áreas de estos rectángulos de aproximación es

$$L_4 = \tfrac{1}{4} \cdot 0^2 + \tfrac{1}{4} \cdot (\tfrac{1}{4})^2 + \tfrac{1}{4} \cdot (\tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{1}{4} \cdot (\tfrac{3}{4})^2 = \tfrac{7}{32} = 0.21875$$

Vemos ahora que el área de S es mayor que L_4, de modo que se tienen estimaciones superior e inferior para A:

$$0.21875 < A < 0.46875$$

Es posible repetir este procedimiento con un número mayor de franjas. En la figura 6 se muestra lo que sucede cuando dividimos la región S en ocho franjas de anchos iguales.

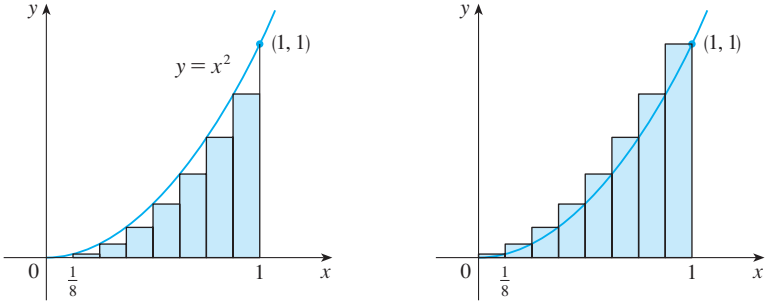


FIGURA 6
Aproximación a S con ocho rectángulos

a) Usando los puntos extremos a la izquierda

b) Usando los puntos extremos a la derecha

Al calcular la suma de las áreas de los rectángulos más pequeños (L_8) y la suma de las áreas de los rectángulos más grandes (R_8), obtenemos mejores estimaciones inferior y superior para A:

$$0.2734375 < \mathrm{A} < 0.3984375$$

De modo que una posible respuesta para la pregunta es decir que el área verdadera de S se encuentra entre 0.2734375 y 0.3984375.

Podríamos obtener mejores estimaciones al incrementar el número de franjas. En la tabla que aparece a la izquierda se muestran los resultados de cálculos semejantes (por computadora), usando n rectángulos cuyas alturas se encontraron con los puntos extremos de la izquierda (L_n) o con los puntos extremos de la derecha (R_n). En particular, al usar 50 franjas, el área se encuentra entre 0.3234 y 0.3434. Con 1000 franjas, lo estrecha incluso más: A se halla entre 0.3328335 y 0.3338335. Una buena estimación se obtiene promediando estos números: $A \approx 0.3333335$.

n	L_n	R_n
10	0.2850000	0.3850000
20	0.3087500	0.3587500
30	0.3168519	0.3501852
50	0.3234000	0.3434000
100	0.3283500	0.3383500
1000	0.3328335	0.3338335

Con base en los valores de la tabla en el ejemplo 1, parece que R_n tiende a $\frac{1}{3}$ conforme n crece. Esto se confirma en el ejemplo siguiente.

V EJEMPLO 2 Para la región S del ejemplo 1, demuestre que la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación superiores tiende a $\frac{1}{3}$; es decir,

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \tfrac{1}{3}$$

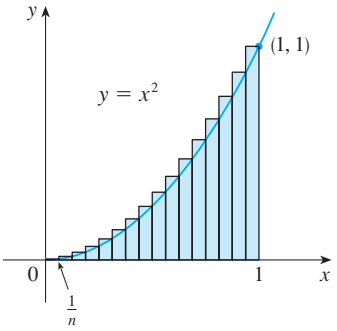


FIGURA 7

SOLUCIÓN R_n es la suma de las áreas de los n rectángulos de la figura 7. Cada rectángulo tiene un ancho de $1/n$, y las alturas son los valores de la función $f(x) = x^2$ en los puntos $1/n, 2/n, 3/n, \ldots, n/n$; es decir, las alturas son $(1/n)^2, (2/n)^2, (3/n)^2, \ldots, (n/n)^2$. De este modo,

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2 \\ &= \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n^2}\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2\right) \\ &= \frac{1}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2\right) \end{aligned}$$

Aquí necesitamos la fórmula para la suma de los cuadrados de los n primeros enteros positivos:

$$\boxed{1} \qquad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Es posible que ya antes haya visto esta fórmula. Se demuestra en el ejemplo 5 del apéndice E.

Poniendo la fórmula 1 en nuestra expresión para R_n, obtenemos

$$R_n = \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

De modo que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} R_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Puede demostrarse que las sumas de aproximación inferiores también tienden a $\frac{1}{3}$; es decir,

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \tfrac{1}{3}$$

Aquí estamos calculando el límite de la sucesión $\{R_n\}$. Las sucesiones y sus límites fueron discutidos en la *Presentación preliminar del cálculo* y serán estudiados en detalle en la sección 11.1. La idea es muy similar a un límite en el infinito (sección 2.6), salvo que en la expresión $\lim_{n\to\infty}$, restringimos n a un número entero positivo. En particular, sabemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Cuando escribimos $\lim_{n\to\infty} R_n = \frac{1}{3}$ queremos decir que podemos hacer R_n tan cercano a $\frac{1}{3}$ como queramos, tomando n suficientemente grande.

Con base en las figuras 8 y 9 parece que, conforme n crece, tanto L_n como R_n son cada vez mejores aproximaciones para el área de S. Por tanto, *definimos* el área A como el límite de las sumas de las áreas de los rectángulos de aproximación; esto es,

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} L_n = \tfrac{1}{3}$$

TEC En Visual 5.1 puede crear figuras como la 8 y 9 para otros valores de n.

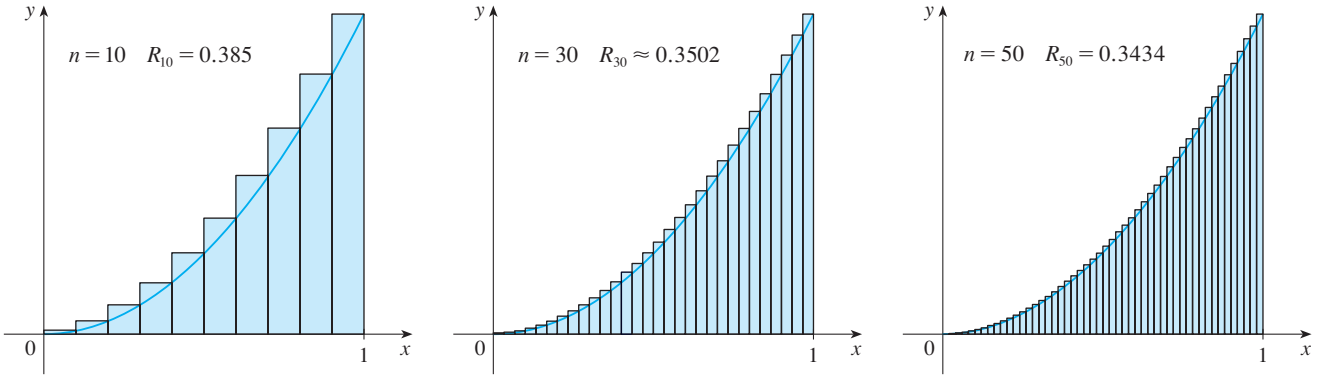


FIGURA 8 Los puntos extremos derechos producen sumas por arriba porque $f(x) = x^2$ es creciente.

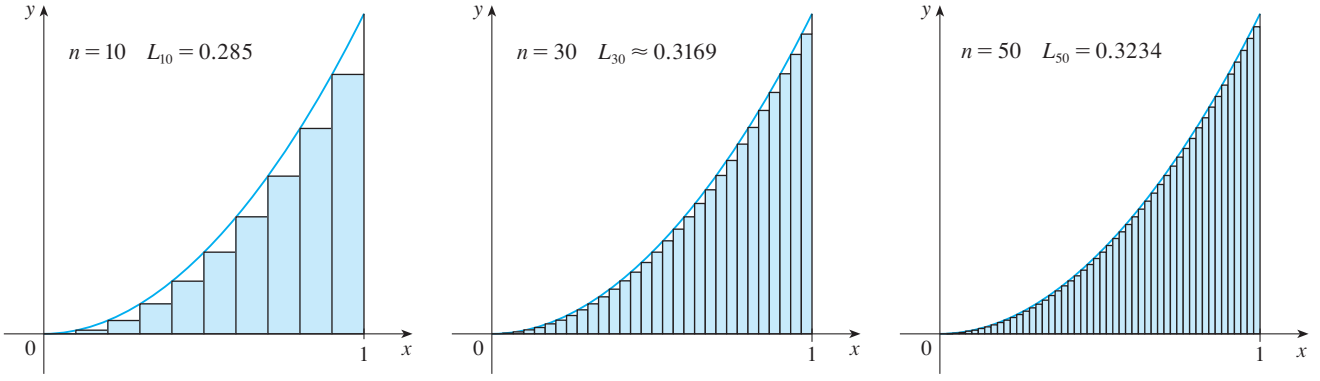


FIGURA 9 Los puntos extremos izquierdos producen sumas por abajo porque $f(x) = x^2$ es creciente.

Apliquemos la idea de los ejemplos 1 y 2 a la región más general S de la figura 1. Empecemos por subdividir S en n franjas $S_1, S_2, \ldots, S_n$ de anchos iguales, como en la figura 10.

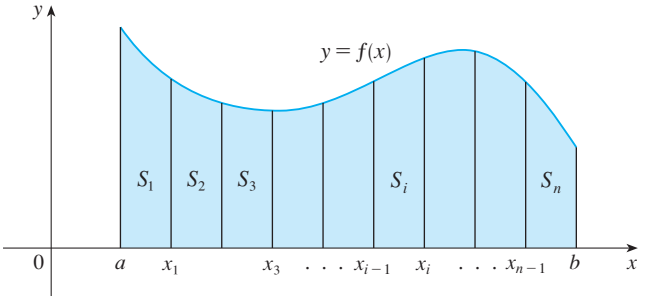


FIGURA 10

El ancho del intervalo $[a, b]$ es $b - a$, de modo que el ancho de cada una de las n franjas es

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

Estas franjas dividen el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos

$$[x_0, x_1], \quad [x_1, x_2], \quad [x_2, x_3], \quad \ldots, \quad [x_{n-1}, x_n]$$

donde $x_0 = a$ y $x_n = b$. Los puntos extremos de la derecha de los subintervalos son

$$x_1 = a + \Delta x,$$
$$x_2 = a + 2\,\Delta x,$$
$$x_3 = a + 3\,\Delta x,$$
$$\vdots$$

Aproximamos la i-ésima franja, S_i, con un rectángulo de ancho Δx y altura $f(x_i)$, que es el valor de f en el punto extremo de la derecha (véase la figura 11). Entonces, el área del i-ésimo rectángulo es $f(x_i)\,\Delta x$. Lo que concebimos de manera intuitiva como el área de S se aproxima con la suma de las áreas de estos rectángulos:

$$R_n = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x$$

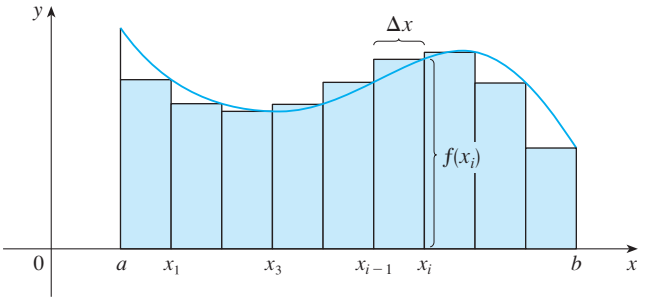
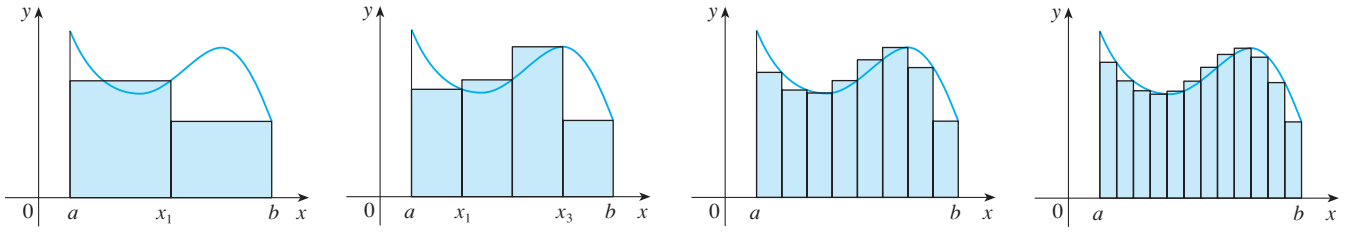


FIGURA 11

En la figura 12 se muestra esta aproximación para $n = 2$, 4, 8 y 12. Note que esta aproximación parece mejorarse a medida que se incrementa la cantidad de franjas; es decir, cuando $n \to \infty$. Por consiguiente, definimos el área A de la región S de la manera siguiente:



a) $n = 2$ b) $n = 4$ c) $n = 8$ d) $n = 12$

FIGURA 12

2 Definición El **área** A de la región S que se encuentra bajo la gráfica de la función continua f es el límite de la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación:

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} [f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x]$$

Puede demostrarse que el límite de la definición 2 siempre existe, porque se supone que f es continua. También es posible demostrar que se obtiene el mismo valor con los puntos extremos de la izquierda:

$$\boxed{3} \qquad A = \lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} [f(x_0)\,\Delta x + f(x_1)\,\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\,\Delta x]$$

De hecho, en lugar de usar los puntos extremos de la izquierda o los de la derecha, podríamos tomar la altura del i-ésimo rectángulo como el valor de f en *cualquier* número x_i^*, en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. A estos números $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ se les llama **puntos muestra**. En la figura 13 se presentan los rectángulos de aproximación cuando se eligen puntos muestra diferentes de los puntos extremos. Así, una expresión más general para el área de S es

$$\boxed{4} \qquad A = \lim_{n\to\infty} [f(x_1^*)\,\Delta x + f(x_2^*)\,\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\,\Delta x]$$

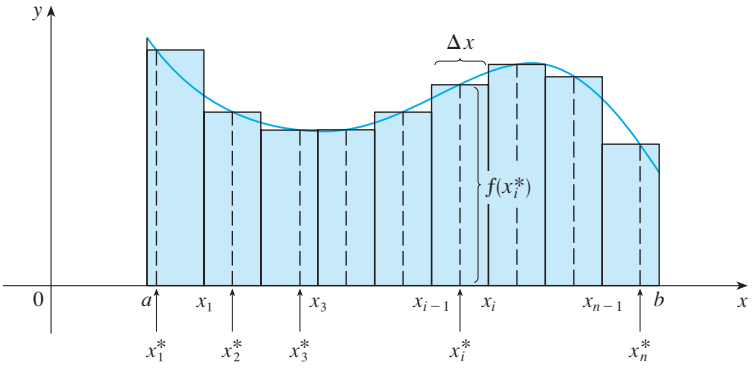


FIGURA 13

NOTA Puede demostrarse que una definición equivalente de área es la siguiente: *A es el único número más grande que todas las sumas inferiores y menor que todas las sumas superiores*. Vimos en los ejemplos 1 y 2, por ejemplo, que el área $\left(A = \frac{1}{3}\right)$ está atrapada entre todas las sumas de aproximación izquierda L_n y todas las sumas de aproximación derecha R_n. La función de esos ejemplos, $f(x) = x^2$, pasa a ser creciente sobre $[0, 1]$ y así las sumas inferiores surgen de los extremos izquierdos y las sumas superiores de los extremos de la derecha. (Véanse las figuras 8 y 9). En general, formamos **sumas inferiores** (y **superiores**) mediante la selección de los puntos muestra x_i^* de manera que $f(x_i^*)$ es el valor mínimo (y máximo) de f sobre el i-ésimo subintervalo. (Véase la figura 14 y los ejercicios 7-8).

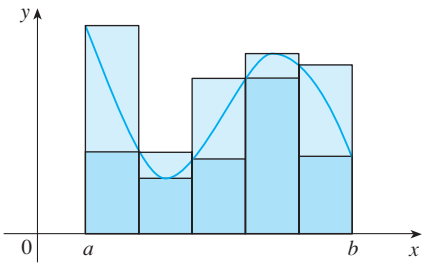


FIGURA 14
Sumas inferiores (rectángulos cortos)
Sumas superiores (rectángulos altos)

Esto indica que hay que terminar con $i = n$.

Esto indica que hay que sumar.

Esto indica que hay que empezar con $i = m$.

$$\sum_{i=m}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

Si necesita practicar la notación sigma, vea los ejemplos e intente resolver algunos de los del apéndice E.

A menudo se usa la **notación sigma** para escribir de manera más compacta las sumas de muchos términos. Por ejemplo,

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x$$

Con esto, las expresiones para el área que se dan en las ecuaciones 2, 3 y 4, pueden escribirse como:

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

También podríamos rescribir la fórmula 1 de esta manera:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

EJEMPLO 3 Sea A el área de la región que está bajo la gráfica de $f(x) = e^{-x}$, entre $x = 0$ y $x = 2$.

a) Con los puntos extremos de la derecha, encuentre una expresión para A como un límite. No evalúe ese límite.

b) Estime el área tomando los puntos muestra como los puntos medios y utilizando cuatro subintervalos y luego con 10 subintervalos.

SOLUCIÓN

a) Dado que $a = 0$ y $b = 2$, el ancho de un subintervalo es

$$\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$$

Por tanto, $x_1 = 2/n$, $x_2 = 4/n$, $x_3 = 6/n$, $x_i = 2i/n$ y $x_n = 2n/n$. La suma de las áreas de los rectángulos de aproximación es

$$\begin{aligned} R_n &= f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x \\ &= e^{-x_1}\,\Delta x + e^{-x_2}\,\Delta x + \cdots + e^{-x_n}\,\Delta x \\ &= e^{-2/n}\left(\frac{2}{n}\right) + e^{-4/n}\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + e^{-2n/n}\left(\frac{2}{n}\right) \end{aligned}$$

De acuerdo con la definición 2, el área es

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\left(e^{-2/n} + e^{-4/n} + e^{-6/n} + \cdots + e^{-2n/n}\right)$$

Si se usa la notación sigma, se podría escribir

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} e^{-2i/n}$$

Es difícil evaluar directamente a mano este límite, pero se facilita con la ayuda de un sistema algebraico computarizado (véase el ejercicio 28). En la sección 5.3 hallaremos A con más facilidad aplicando un método diferente.

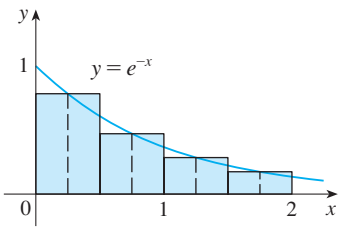


FIGURA 15

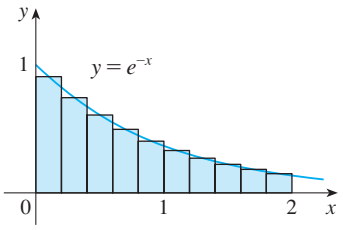


FIGURA 16

b) Con $n = 4$, los subintervalos de igual ancho, $\Delta x = 0.5$, son $[0, 0.5]$, $[0.5, 1]$, $[1, 1.5]$ y $[1.5, 2]$. Los puntos medios de estos subintervalos son $x_1^* = 0.25$, $x_2^* = 0.75$, $x_3^* = 1.25$ y $x_4^* = 1.75$, y la suma de las áreas de los cuatro rectángulos de aproximación (véase la figura 15) es

$$\begin{aligned} M_4 &= \sum_{i=1}^{4} f(x_i^*)\,\Delta x \\ &= f(0.25)\,\Delta x + f(0.75)\,\Delta x + f(1.25)\,\Delta x + f(1.75)\,\Delta x \\ &= e^{-0.25}(0.5) + e^{-0.75}(0.5) + e^{-1.25}(0.5) + e^{-1.75}(0.5) \\ &= \tfrac{1}{2}(e^{-0.25} + e^{-0.75} + e^{-1.25} + e^{-1.75}) \approx 0.8557 \end{aligned}$$

De este modo, una estimación para el área es

$$A \approx 0.8557$$

Con $n = 10$, los subintervalos son $[0, 0.2]$, $[0.2, 0.4], \ldots, [1.8, 2]$, y los puntos medios son $x_1^* = 0.1$, $x_2^* = 0.3$, $x_3^* = 0.5, \ldots, x_{10}^* = 1.9$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} A \approx M_{10} &= f(0.1)\,\Delta x + f(0.3)\,\Delta x + f(0.5)\,\Delta x + \cdots + f(1.9)\,\Delta x \\ &= 0.2(e^{-0.1} + e^{-0.3} + e^{-0.5} + \cdots + e^{-1.9}) \approx 0.8632 \end{aligned}$$

Con base en la figura 16, parece que esta estimación es mejor que la que se hizo con $n = 4$.

El problema de la distancia

Consideremos ahora el *problema de la distancia*: halle la distancia recorrida por un objeto durante cierto periodo de tiempo, si se conoce la velocidad del objeto en todo momento. (En cierto sentido, este es el problema inverso del problema de la velocidad que se analizó en la sección 2.1.) Si la velocidad permanece constante, entonces el problema de la distancia es fácil de resolver por medio de la formula:

$$\text{distancia} = \text{velocidad} \times \text{tiempo}$$

Pero si la velocidad varía, no es fácil hallar la distancia recorrida. Investigamos el problema en el ejemplo siguiente.

V EJEMPLO 4 Supongamos que el odómetro de nuestro automóvil esta averiado y que deseamos estimar la distancia que ha recorrido en un intervalo de tiempo de 30 segundos. Tomamos las lecturas del velocímetro cada cinco segundos y las registramos en la tabla siguiente:

Tiempo (s)	0	5	10	15	20	25	30
Velocidad (mi/h)	17	21	24	29	32	31	28

Para tener el tiempo y la velocidad en unidades coherentes, convertimos las lecturas de velocidad a pies por segundo (1 mi/h = 5 280/3 600 pies/s):

Tiempo (s)	0	5	10	15	20	25	30
Velocidad (pies/s)	25	31	35	43	47	46	41

Durante los primeros cinco segundos, la velocidad no cambia mucho, de modo que podemos estimar la distancia recorrida durante ese tiempo al suponer que la velocidad es

constante. Si tomamos la velocidad durante este intervalo de tiempo, con velocidad inicial (25 pies/s), entonces obtenemos la distancia aproximada recorrida durante los primeros cinco segundos:

$$25\,\text{pies/s} \times 5\,\text{s} = 125\,\text{pies}$$

De manera análoga, durante el segundo intervalo de tiempo la velocidad es aproximadamente constante, y tomamos la velocidad correspondiente a $t = 5\,\text{s}$. De modo que nuestra estimación para la distancia recorrida desde $t = 5\text{s}$ hasta $t = 10\,\text{s}$ es

$$31\,\text{pies/s} \times 5\,\text{s} = 155\,\text{pies}$$

Si sumamos estimaciones similares para los otros intervalos de tiempo, obtenemos una estimación para la distancia total recorrida:

$$(25 \times 5) + (31 \times 5) + (35 \times 5) + (43 \times 5) + (47 \times 5) + (46 \times 5) = 1\,135\,\text{pies}$$

Podríamos así haber utilizado la velocidad al *final* de cada periodo de tiempo en lugar de la velocidad al principio como nuestra supuesta velocidad constante. Entonces nuestra estimación se convierte en

$$(31 \times 5) + (35 \times 5) + (43 \times 5) + (47 \times 5) + (46 \times 5) + (41 \times 5) = 1\,215\,\text{pies}$$

Si buscáramos una estimación más exacta, habríamos tomado las lecturas de la velocidad cada dos segundos o cada segundo.

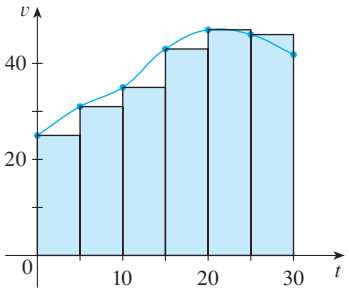


FIGURA 17

Tal vez los cálculos del ejemplo 4 le recuerden las sumas usadas al principio para estimar las áreas. La semejanza se explica cuando dibujamos la gráfica de la función velocidad del automóvil de la figura 17 y dibujamos rectángulos cuyas alturas son las velocidades iniciales en cada intervalo. El área del primer rectángulo es $25 \times 5 = 125$, lo que también es su estimación de la distancia recorrida en los primeros cinco segundos. De hecho, el área de cada rectángulo puede interpretarse como una distancia porque la altura representa la velocidad, y el ancho, al tiempo. La suma de las áreas de los rectángulos de la figura 17 es $L_6 = 1135$, lo cual es nuestra estimación inicial de la distancia total recorrida.

En general, supongamos que un objeto se mueve con velocidad $v = f(t)$, donde $a \leqslant t \leqslant b$ y $f(t) \geqslant 0$ (de modo que el objeto siempre se mueve en la dirección positiva). Tomemos las lecturas de la velocidad en los instantes $t_0\ (= a)$, t_1, $t_2, \ldots,$ $t_n\ (= b)$ de modo que la velocidad sea aproximadamente constante sobre cada subintervalo. Si estos instantes están igualmente espaciados, entonces el tiempo entre lecturas consecutivas es $\Delta t = (b - a)/n$. Durante el primer intervalo de tiempo, la velocidad es aproximadamente $f(t_0)$ y, por consiguiente, la distancia recorrida es aproximadamente $f(t_0)\,\Delta t$. De manera análoga, la distancia recorrida durante el segundo intervalo de tiempo es alrededor de $f(t_1)\,\Delta t$ y la distancia total recorrida durante el intervalo $[a, b]$ es aproximadamente

$$f(t_0)\,\Delta t + f(t_1)\,\Delta t + \cdots + f(t_{n-1})\,\Delta t = \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\,\Delta t$$

Si usamos la velocidad en los puntos extremos de la derecha, en lugar de los puntos extremos de la izquierda, nuestra estimación para la distancia total resulta

$$f(t_1)\,\Delta t + f(t_2)\,\Delta t + \cdots + f(t_n)\,\Delta t = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta t$$

Cuanto mayor sea la frecuencia con que se mide la velocidad, más exactas son las estimaciones, así que parece plausible que la distancia *exacta d* recorrida sea el *límite* de esas expresiones:

$$d = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\,\Delta t = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta t \qquad \boxed{5}$$

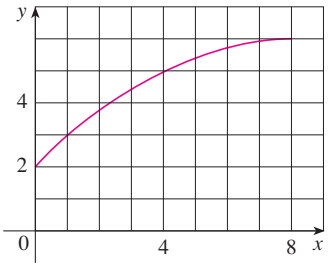
En la sección 5.4 veremos que, en efecto, esto es verdadero.

Puesto que la ecuación 5 tiene la misma forma que las expresiones para el área, dadas en las ecuaciones 2 y 3, se concluye que la distancia recorrida es igual al área bajo la gráfica de la función velocidad. En el capítulo 6 veremos que otras cantidades de interés en las ciencias naturales y sociales, como el trabajo realizado por una fuerza variable o el gasto cardiaco, también pueden interpretarse como el área bajo una curva. De modo que cuando calcule áreas en este capítulo, tenga presente que pueden interpretarse de diversas maneras prácticas.

5.1 Ejercicios

1. a) A partir de la lectura de los valores de la gráfica dada de f, use cinco rectángulos para hallar una estimación inferior y una superior para el área bajo esa gráfica dada de f, desde $x = 0$ hasta $x = 8$. En cada caso, dibuje los rectángulos que use.

b) Encuentre nuevas estimaciones usando ocho rectángulos en cada caso.



2. a) Use seis rectángulos para encontrar estimaciones de cada tipo para el área bajo la gráfica de f desde $x = 0$ hasta $x = 12$.

i) L_6 (los puntos muestra son los puntos extremos de la izquierda)

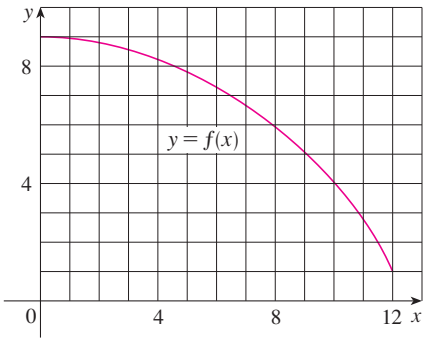
ii) R_6 (los puntos muestra son los puntos extremos de la derecha)

iii) M_6 (los puntos muestra son los puntos medios)

b) ¿L_6 sobrestima o subestima el área verdadera?

c) ¿R_6 sobrestima o subestima el área verdadera?

d) ¿Cuál de los números L_6, R_6 o M_6 da la mejor estimación? Explique.



3. a) Estime el área bajo la gráfica de $f(x) = \cos x$ desde $x = 0$ hasta $x = \pi/2$, usando cuatro rectángulos de aproximación y los puntos extremos de la derecha. Dibuje la curva y los rectángulos de aproximación. ¿Su estimación es una subestimación o una sobrestimación?

b) Repita el inciso a), con los puntos extremos de la izquierda.

4. a) Estime el área bajo la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ desde $x = 0$ hasta $x = 4$ usando cuatro rectángulos de aproximación y puntos extremos de la derecha. Trace la gráfica y los rectángulos. ¿Su estimación es una sobrestimación o una subestimación?

b) Repita el inciso a, con los puntos extremos de la izquierda.

5. a) Estime el área bajo la gráfica de $f(x) = 1 + x^2$ de $x = -1$ hasta $x = 2$ con tres rectángulos de aproximación y puntos extremos de la derecha. Después mejore su estimación usando seis rectángulos. Dibuje la curva y los rectángulos de aproximación.

b) Repita el inciso a) usando los puntos extremos de la izquierda.

c) Repita el inciso a) usando los puntos medios.

d) Con base en sus dibujos de los incisos a) a c), ¿cuál parece ser la mejor estimación?

6. a) Trace la gráfica de la función

$$f(x) = x - 2 \ln x,\ 1 \leqslant x \leqslant 5$$

b) Estime el área bajo la gráfica de f con cuatro rectángulos de aproximación y considerando que los puntos muestra son i) los puntos extremos de la derecha y ii) los puntos medios. En cada caso, trace la curva y los rectángulos.

c) Mejore sus estimaciones del inciso b) utilizando ocho rectángulos.

7. Evalúe las sumas superior e inferior para $f(x) = 2 + \operatorname{sen} x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, con $n = 2$, 4 y 8. Ilustre con diagramas como los de la figura 14.

8. Evalúe las sumas superior e inferior para $f(x) = 1 + x^2$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, con $n = 3$ y 4. Ilustre con diagramas como los de la figura 14.

9-10 Con una calculadora programable (o una computadora) es posible evaluar las expresiones para las sumas de las áreas de los rectángulos de aproximación, incluso para grandes valores de n, con el uso de iteraciones. (En una calculadora TI, use el comando (**I**s>) o una iteración For-EndFor; en una Casio, use Isz y en una HP o en BASIC, use una iteración FOR-NEXT.) Calcule la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación; use subintervalos iguales y los puntos extremos de la derecha, para $n = 10$, 30, 50 y 100. Luego, infiera el valor del área exacta.

9. La región bajo $y = x^4$ desde 0 hasta 1.

10. La región bajo $y = \cos x$ desde 0 hasta $\pi/2$.

SAC **11.** Algunos sistemas algebraicos computarizados tienen comandos que dibujan los rectángulos de aproximación y evalúan las sumas de sus áreas, por lo menos si x_i^* es un punto extremo de la izquierda o de la derecha. (Por ejemplo, en Maple, use `leftbox`, `rightbox`, `leftsum`, y `rightsum`.)

a) Si $f(x) = 1/(x^2 + 1)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, encuentre las sumas izquierda y derecha para $n = 10$, 30 y 50.

b) Ilustre mediante el dibujo de las gráficas de los rectángulos del inciso a).

c) Demuestre que el área exacta bajo f se encuentra entre 0.780 y 0.791

SAC **12.** a) Si $f(x) = \ln x$, $1 \leqslant x \leqslant 4$, use los comandos que se analizaron en el ejercicio 11 a fin de hallar las sumas izquierda y derecha, para $n = 10$, 30 y 50.

b) Ilustre dibujando las gráficas de los rectángulos del inciso a).

c) Demuestre que el área exacta bajo f se encuentra entre 2.50 y 2.59.

13. La rapidez de una competidora aumentó de manera constante durante los tres primeros segundos de una carrera. En la tabla se da su rapidez a intervalos de medio segundo. Encuentre las estimaciones inferior y superior para la distancia que recorrió durante estos tres segundos.

t (s)	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
v (pies/s)	0	6.2	10.8	14.9	18.1	19.4	20.2

14. En la tabla se proporcionan las lecturas del velocímetro de una motocicleta a intervalos de 12 segundos.

a) Estime la distancia recorrida por la motocicleta durante este periodo usando las velocidades al principio de los intervalos.

b) Dé otra estimación usando las velocidades al final de los periodos de tiempo.

c) ¿Sus estimaciones de los incisos a) y b) son estimaciones superiores e inferiores? Explique su respuesta.

t (s)	0	12	24	36	48	60
v (pies/s)	30	28	25	22	24	27

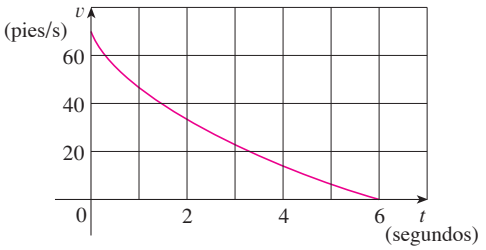
15. Se fugó aceite de un tanque con una rapidez de $r(t)$ litros por hora. La rapidez disminuyó conforme transcurrió el tiempo y los valores de esta rapidez se muestran en la tabla en intervalos de dos horas. Halle estimaciones inferiores y superiores para la cantidad total de aceite que se fugó.

t (h)	0	2	4	6	8	10
$r(t)$ (L/h)	8.7	7.6	6.8	6.2	5.7	5.3

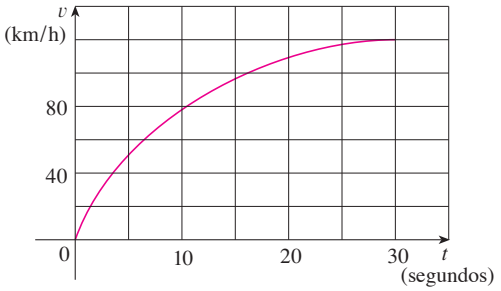
16. Cuando estimamos distancias a partir de datos de la velocidad, a veces es necesario usar instantes t_0, t_1, t_2, t_3, ..., que no están igualmente espaciados. Aun así, podemos estimar las distancias usando los periodos de tiempo $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Por ejemplo, el 7 de mayo de 1992 el transbordador espacial *Endeavour* fue lanzado en la misión STS-49, cuya finalidad era instalar un nuevo motor de impulso en el perigeo en un satélite Intelsat de comunicaciones. En la tabla, proporcionada por la NASA, se dan los datos de la velocidad del transbordador entre el despegue y el desprendimiento de los cohetes auxiliares de combustible sólido. Utilice estos datos para estimar la altura por arriba de la superficie de la Tierra a la que se encontró el *Endeavour*, 62 segundos después del lanzamiento.

Suceso	Tiempo (s)	Velocidad (pies/s)
Lanzamiento	0	0
Inicio de la maniobra de giro alrededor del eje	10	185
Fin de la maniobra de giro alrededor del eje	15	319
Válvula de estrangulación a 89%	20	447
Válvula de estrangulación a 67%	32	742
Válvula de estrangulación a 104%	59	1 325
Presión dinámica máxima	62	1 445
Separación del cohete auxiliar de combustible sólido	125	4 151

17. Se muestra la gráfica de la velocidad de un automóvil al frenar. Úsela para estimar la distancia que recorre mientras se aplican los frenos.



18. Se muestra la grafica de aceleración de un automóvil que parte del estado de reposo hasta una velocidad de 120 km/h durante un periodo de 30 segundos. Estime la distancia recorrida durante este periodo.



19-21 Utilice la definición 2 para hallar una expresión para el área bajo la grafica de f como un límite. No evalúe el límite.

19. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}, \quad 1 \leq x \leq 3$

20. $f(x) = x^2 + \sqrt{1 + 2x}, \quad 4 \leq x \leq 7$

21. $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}, \quad 0 \leq x \leq \pi$

22-23 Determine una región cuya área sea igual al límite dado. No evalúe el límite.

22. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{2}{n}\left(5 + \dfrac{2i}{n}\right)^{10}$

23. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\pi}{4n} \tan\dfrac{i\pi}{4n}$

24. a) Utilice la definición 2 para encontrar una expresión para el área bajo la curva $y = x^3$ desde 0 hasta 1 como un límite.

b) La fórmula siguiente para la suma de los cubos de los primeros n enteros se demuestra en el apéndice E. Úsela para evaluar el límite del inciso a).

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

25. Sea A el área bajo la gráfica de una función f creciente continua desde a hasta b, y sea L_n y R_n las aproximaciones a A con n subintervalos utilizando los extremos izquierdo y derecho, respectivamente.

a) ¿Cómo se relacionan A, L_n y R_n?

b) Demuestre que

$$R_n - L_n = \frac{b-a}{n}[f(b) - f(a)]$$

A continuación, dibuje un diagrama para ilustrar esta ecuación, mostrando que los n rectángulos que representan $R_n - L_n$ puede ensamblarse para formar un único rectángulo cuya área es la parte derecha de la ecuación.

c) Deduzca que

$$R_n - A < \frac{b-a}{n}[f(b) - f(a)]$$

26. Si A es el área bajo la curva $y = e^x$ de 1 a 3, utilice el ejercicio 25 para encontrar un valor de n tal que $R_n - A < 0.0001$.

SAC **27.** a) Exprese el área bajo la curva $y = x^5$ desde 0 hasta 2 como un límite.

b) Utilice un sistema algebraico computarizado a fin de encontrar la suma de su expresión del inciso a).

c) Evalúe el límite del inciso a).

SAC **28.** Halle el área exacta de la región bajo la gráfica de $y = e^{-x}$ desde 0 hasta 2 utilizando un sistema algebraico computarizado, con objeto de evaluar la suma y después el límite del ejemplo 3a). Compare su respuesta con la estimación obtenida en el ejemplo 3b).

SAC **29.** Encuentre el área exacta bajo la curva $y = \cos x$, desde $x = 0$ hasta $x = b$, donde $0 \leq b \leq \pi/2$. (Use un sistema algebraico computarizado para evaluar la suma y calcular el límite.) En particular, ¿cuál es el área si $b = \pi/2$?

30. a) Sea A_n el área de un polígono con n lados iguales, inscrito en un círculo con radio r. Al dividir el polígono en n triángulos congruentes con ángulo central $2\pi/n$, demuestre que

$$A_n = \tfrac{1}{2} n r^2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

b) Demuestre que $\lim_{n\to\infty} A_n = \pi r^2$. [*Sugerencia:* use la ecuación 3.3.2 de la página 192.]

5.2 La integral definida

En la sección 5.1 vimos que, cuando se calcula un área, surge un límite de la forma

$$\boxed{1} \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty} [f(x_1^*)\,\Delta x + f(x_2^*)\,\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\,\Delta x]$$

También vimos que aparece cuando intentamos hallar la distancia recorrida por un objeto. Resulta que este tipo de límite se presenta en una amplia variedad de situaciones, incluso cuando f no es necesariamente una función positiva. En los capítulos 6 y 8 veremos que también surgen límites de la forma $\boxed{1}$ al calcular longitudes de curvas, volúmenes de sólidos, centros de masa, la fuerza debida a la presión del agua y el trabajo, así como otras cantidades. Por esta razón, a este límite le damos un nombre y una notación especiales.

2 Definición de la integral definida Si f es una función continua definida para $a \leq x \leq b$, dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual ancho $\Delta x = (b - a)/n$. Sean $x_0 (= a), x_1, x_2, \ldots, x_n (= b)$ los puntos extremos de estos subintervalos y sean $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ los **puntos muestra** en estos subintervalos, de modo que x_i^* se encuentre en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Entonces la **integral definida de f, desde a hasta b**, es

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

siempre que este límite exista y dé el mismo valor para todos las posibles elecciones de los puntos muestra. Si existe, decimos que f es **integrable** sobre $[a, b]$.

El significado preciso del límite que define a la integral es como sigue:

Para cualquier número $\varepsilon > 0$, existe un entero N tal que

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x \right| < \varepsilon$$

para cualquier entero $n > N$ y para cualquier elección de x_i^* en $[x_{i-1}, x_i]$.

NOTA 1 Leibniz introdujo el símbolo $\int$ y se llama **signo de integral**. Es una S alargada y se eligió debido a que una integral es un límite de sumas. En la notación $\int_a^b f(x)\,dx$, $f(x)$ se llama **integrando**, y a y b se conocen como **límites de integración**; a es el **límite inferior** y b es el **límite superior**. Por ahora, el símbolo dx no tiene significado por sí mismo; la expresión $\int_a^b f(x)\,dx$, vista como un todo, es un símbolo único. La dx indica simplemente que la variable independiente es x. El procedimiento para calcular una integral se llama **integración**.

NOTA 2 La integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ es un número que no depende de x. De hecho, podría utilizarse cualquier letra en lugar de x sin cambiar el valor de la integral:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(r)\,dr$$

NOTA 3 La suma

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

que aparece en la definición 2 se llama **suma de Riemann**, en honor del matemático alemán Bernhard Riemann (1826-1866). De tal manera que la definición 2 indica que la integral definida de una función integrable puede aproximarse dentro de cualquier grado de exactitud mediante la suma de Riemann.

Sabemos que si f es positiva, entonces la suma de Riemann puede interpretarse como una suma de áreas de los rectángulos de aproximación (véase la figura 1). Al comparar la definición 2 con la definición de área de la sección 5.1, vemos que la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ puede interpretarse como el área bajo la curva $y = f(x)$, desde a hasta b (véase la figura 2).

RIEMANN

Bernhard Riemann recibió su doctorado en filosofía bajo la dirección del legendario Gauss, en la Universidad de Göttingen, y permaneció allí para enseñar. Gauss, que no tenía el hábito de elogiar a otros matemáticos, habló de "la mente creativa, activa, en verdad matemática y la gloriosamente fértil originalidad" de Riemann. La definición 2 de integral que utilizamos se debe a Riemann. También hizo colaboraciones importantes a la teoría de funciones de una variable compleja, a la fisicomatemática, a la teoría de números y a los fundamentos de la geometría. El profundo concepto de Riemann del espacio y de la geometría resultó ser, 50 años más tarde, el apoyo idóneo para la teoría general de la relatividad de Einstein. La salud de Riemann fue mala durante toda su vida, y murió de tuberculosis a los 39 años.

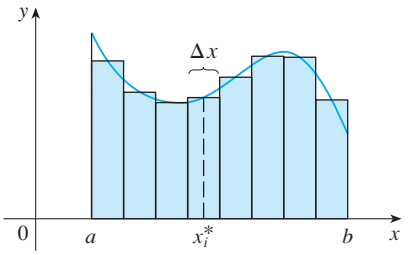


FIGURA 1
Si $f(x) \geqslant 0$, la suma de Riemann $\Sigma\, f(x_i^*)\, \Delta x$ es la suma de las áreas de los rectángulos.

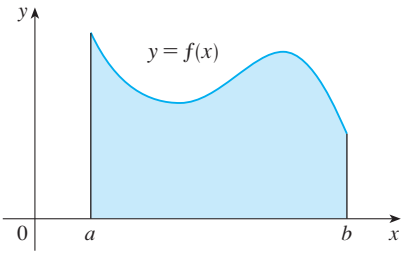


FIGURA 2
Si $f(x) \geqslant 0$, la integral $\int_a^b f(x)\, dx$ es el área bajo la curva $y = f(x)$ desde a hasta b.

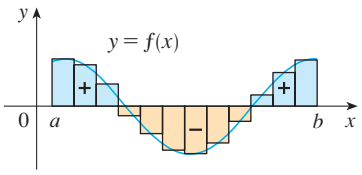


FIGURA 3
$\Sigma\, f(x_i^*)\, \Delta x$ es una aproximación al área neta.

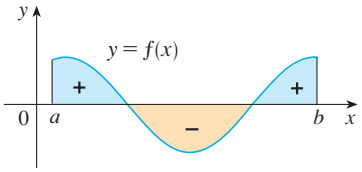


FIGURA 4
$\int_a^b f(x)\, dx$ es el área neta.

Si f toma valores tanto positivos como negativos, como en la figura 3, entonces la suma de Riemann es la suma de las áreas de los rectángulos que se encuentran arriba del eje x y los *negativos* de las áreas de los rectángulos que están debajo del eje x (las áreas de los rectángulos en azul *menos* las áreas de los rectángulos en oro). Cuando tomamos el límite de esas sumas de Riemann, obtenemos la situación que se ilustra en la figura 4. Una integral definida puede interpretarse como un **área neta**; es decir, una diferencia de áreas:

$$\int_a^b f(x)\, dx = A_1 - A_2$$

donde A_1 es el área de la región arriba del eje x y debajo de la gráfica de f, y A_2 corresponde al área de la región debajo del eje x y arriba de la gráfica de f.

NOTA 4 Aunque hemos definido $\int_a^b f(x)\, dx$ dividiendo $[a, b]$ en subintervalos del mismo ancho, hay situaciones en las que resulta ventajoso trabajar con intervalos de diferente ancho. Por ejemplo, en el ejercicio 16 de la sección 5.1, la NASA proporcionó datos de velocidad en tiempos que no estaban igualmente espaciados, pero aun así fuimos capaces de estimar la distancia recorrida. Existen métodos para la integración numérica que aprovechan los subintervalos desiguales.

Si los anchos de los intervalos son $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$, debemos asegurarnos de que todos estos anchos tiendan a 0 en el proceso de determinación de límites. Esto sucede si el ancho más grande, máx Δx_i, tiende a 0. De manera que en este caso la definición de la integral definida se convierte en

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\text{máx } \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\, \Delta x_i$$

NOTA 5 Hemos definido la integral definida para una función integrable, pero no todas las funciones son integrables (véanse los ejercicios 69-70). El teorema siguiente muestra que la mayor parte de las funciones que usualmente se presentan en realidad son integrables. Esto se demuestra en cursos más avanzados.

3 Teorema Si f es continua sobre $[a, b]$, o si f tiene sólo un número finito de discontinuidades de salto, entonces f es integrable sobre $[a, b]$; es decir, la integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$ existe.

Si f es integrable sobre $[a, b]$, entonces el límite en la definición 2 existe y proporciona el mismo valor, sin importar cómo seleccione los puntos muestra x_i^*. Para simplificar los cálculos de la integral, con frecuencia tomamos los puntos muestra en los extremos de la derecha. Por tanto, $x_i^* = x_i$ y la definición de la integral se simplifica como sigue.

4 Teorema Si f es integrable sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

donde $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ y $x_i = a + i\,\Delta x$

EJEMPLO 1 Exprese

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i^3 + x_i \operatorname{sen} x_i)\,\Delta x$$

como una integral sobre el intervalo $[0, \pi]$.

SOLUCIÓN Al comparar el límite dado con el límite en el teorema 4, vemos que es idéntico si elegimos $f(x) = x^3 + x \operatorname{sen} x$. Puesto que $a = 0$ y $b = \pi$, tenemos, por el teorema 4,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i^3 + x_i \operatorname{sen} x_i)\,\Delta x = \int_0^{\pi} (x^3 + x \operatorname{sen} x)\,dx$$

Más adelante, cuando apliquemos la integral definida a situaciones físicas, será importante reconocer los límites de sumas como integrales, como en el ejemplo 1. Cuando Leibniz eligió la notación para la integral, escogió los ingredientes para recordar el proceso de tomar el límite. En general, cuando escribimos

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx$$

reemplazamos lím Σ por $\int$, x_i^* por x, y Δx por dx.

Evaluación de integrales

Cuando utilizamos la definición para evaluar una integral definida, necesitamos saber cómo trabajar con sumas. Las tres ecuaciones siguientes dan fórmulas para las sumas de potencias de enteros positivos. Es posible que conozca la ecuación 5 a partir un curso de álgebra. Las ecuaciones 6 y 7 se analizaron en la sección 5.1 y se demuestran en el apéndice E.

5 $$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

6 $$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

7 $$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Las fórmulas restantes son simples reglas para trabajar con la notación sigma:

8 $$\sum_{i=1}^{n} c = nc$$

9 $$\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$$

10 $$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

11 $$\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$$

Las fórmulas 8 a 11 se demuestran escribiendo cada uno de los miembros en forma desarrollada. El lado izquierdo de la ecuación 9 es

$$ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n$$

El lado derecho es

$$c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$

Por la propiedad distributiva, éstas son iguales. Las otras fórmulas se analizan en el apéndice E.

EJEMPLO 2

a) Evalúe la suma de Riemann para $f(x) = x^3 - 6x$, tomando los puntos muestra de los puntos extremos de la derecha y $a = 0$, $b = 3$ y $n = 6$.

b) Evalúe $\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx$.

SOLUCIÓN

a) Con $n = 6$ el ancho del intervalo es

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{3 - 0}{6} = \frac{1}{2}$$

y los puntos extremos de la derecha son $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1.0$, $x_3 = 1.5$, $x_4 = 2.0$, $x_5 = 2.5$ y $x_6 = 3.0$. De modo que la suma de Riemann es

$$\begin{aligned} R_6 &= \sum_{i=1}^{6} f(x_i)\,\Delta x \\ &= f(0.5)\,\Delta x + f(1.0)\,\Delta x + f(1.5)\,\Delta x + f(2.0)\,\Delta x + f(2.5)\,\Delta x + f(3.0)\,\Delta x \\ &= \tfrac{1}{2}(-2.875 - 5 - 5.625 - 4 + 0.625 + 9) \\ &= -3.9375 \end{aligned}$$

Note que f no es una función positiva, por lo que la suma de Riemann no representa una suma de áreas de rectángulos. Pero sí representa la suma de las áreas de los rectángulos azules (que están arriba del eje x) menos la suma de las áreas de los rectángulos de color oro (que están abajo del eje x) de la figura 5.

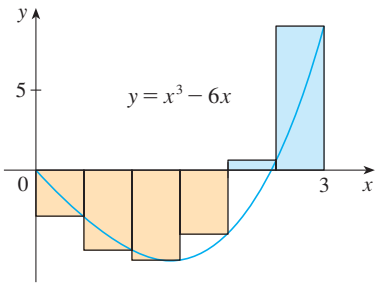


FIGURA 5

b) Con n subintervalos, tenemos

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3}{n}$$

Así, $x_0 = 0$, $x_1 = 3/n$, $x_2 = 6/n$, $x_3 = 9/n$ y, en general, $x_i = 3i/n$. Dado que estamos utilizando los puntos extremos derechos, podemos utilizar el teorema 4:

$$\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{3i}{n}\right)\frac{3}{n}$$

En la suma, n es una constante (diferente de i), por eso podemos mover $3/n$ hacia afuera del signo Σ.

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{3i}{n}\right)^3 - 6\left(\frac{3i}{n}\right) \right] \qquad \text{(ecuación 9 con } c = 3/n\text{)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{27}{n^3} i^3 - \frac{18}{n} i \right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{81}{n^4} \sum_{i=1}^{n} i^3 - \frac{54}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i \right] \qquad \text{(ecuaciones 11 y 9)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{81}{n^4} \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 - \frac{54}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} \right\} \qquad \text{(ecuaciones 7 y 5)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{81}{4} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 - 27\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right]$$

$$= \frac{81}{4} - 27 = -\frac{27}{4} = -6.75$$

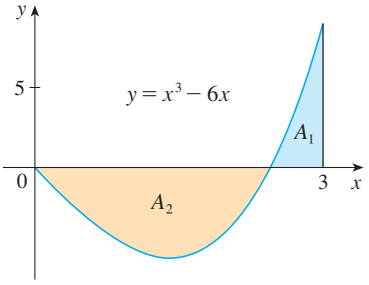


FIGURA 6
$\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx = A_1 - A_2 = -6.75$

Esta integral no puede interpretarse como un área porque f toma tanto valores positivos como negativos; pero puede interpretarse como la diferencia de áreas $A_1 - A_2$, donde A_1 y A_2 se muestran en la figura 6.

En la figura 7 se ilustran los cálculos al mostrar los términos positivos y negativos en la suma de Riemann R_n de la derecha, para $n = 40$. Los valores que aparecen en la tabla hacen ver que las sumas de Riemann tienden al valor exacto de la integral, -6.75, cuando $n \to \infty$.

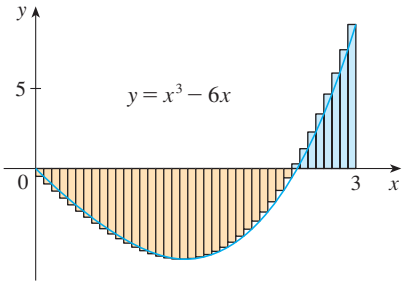


FIGURA 7
$R_{40} \approx -6.3998$

n	R_n
40	−6.3998
100	−6.6130
500	−6.7229
1000	−6.7365
5000	−6.7473

En la sección 5.4 veremos un método mucho más sencillo para evaluar la integral del ejemplo 2.

Puesto que $f(x) = e^x$ es positiva, la integral del ejemplo 3 representa el área que se muestra en la figura 8.

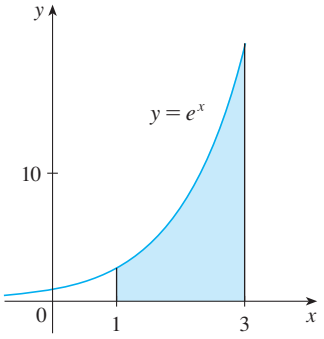


FIGURA 8

EJEMPLO 3

a) Plantee una expresión para $\int_1^3 e^x\,dx$ como un límite de sumas.
b) Utilice un sistema algebraico computarizado para evaluar la expresión.

SOLUCIÓN

a) Aquí tenemos $f(x) = e^x$, $a = 1$, $b = 3$ y

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n}$$

De modo que $x_0 = 1$, $x_1 = 1 + 2/n$, $x_2 = 1 + 4/n$, $x_3 = 1 + 6/n$ y

$$x_i = 1 + \frac{2i}{n}$$

A partir del teorema 4, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_1^3 e^x\,dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(1 + \frac{2i}{n}\right)\frac{2}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} e^{1+2i/n}\end{aligned}$$

b) Si le pedimos a un sistema algebraico computarizado que evalúe la suma y simplifique, obtenemos

$$\sum_{i=1}^{n} e^{1+2i/n} = \frac{e^{(3n+2)/n} - e^{(n+2)/n}}{e^{2/n} - 1}$$

Un sistema algebraico computarizado es capaz de hallar una expresión explícita para esta suma porque es una serie geométrica. El límite podría encontrarse usando la regla de l'Hospital.

Ahora le pedimos al sistema algebraico computarizado que evalúe el límite:

$$\int_1^3 e^x\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \cdot \frac{e^{(3n+2)/n} - e^{(n+2)/n}}{e^{2/n} - 1} = e^3 - e$$

En la siguiente sección aprenderemos un método más sencillo para la evaluación de integrales.

V EJEMPLO 4 Evalúe las siguientes integrales interpretando cada una en términos de áreas:

a) $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx$ b) $\int_0^3 (x - 1)\,dx$

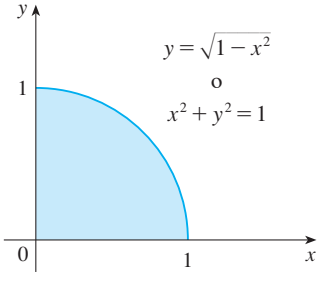


FIGURA 9

SOLUCIÓN

a) Dado que $f(x) = \sqrt{1 - x^2} \geqslant 0$, podemos interpretar esta integral como el área bajo la curva $y = \sqrt{1 - x^2}$ desde 0 hasta 1. Pero, ya que $y^2 = 1 - x^2$, obtenemos $x^2 + y^2 = 1$, lo cual muestra que la gráfica de f es el cuarto de circunferencia con radio 1, que aparece en la figura 9. Por tanto,

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx = \tfrac{1}{4}\pi(1)^2 = \frac{\pi}{4}$$

(En la sección 7.3 usted será capaz de *demostrar* que el área de un círculo con radio r es πr^2.)

b) La gráfica de $y = x - 1$ es la recta con pendiente 1 que se muestra en la figura 10. Calcularemos la integral como la diferencia de las áreas de los dos triángulos:

$$\int_0^3 (x - 1)\,dx = A_1 - A_2 = \tfrac{1}{2}(2 \cdot 2) - \tfrac{1}{2}(1 \cdot 1) = 1.5$$

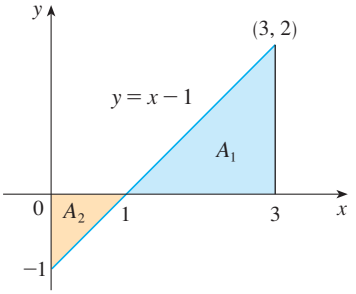


FIGURA 10

La regla del punto medio

A menudo se elige el punto muestra x_i^* como el extremo de la derecha del i-ésimo intervalo porque resulta conveniente para calcular el límite. Pero si la finalidad es hallar una *aproximación* para una integral, es mejor elegir x_i^* como el punto medio del intervalo, el cual se denota con $\bar{x}_i$. Cualquier suma de Riemann es una aproximación a una integral, pero si usamos los puntos medios, obtenemos la siguiente aproximación:

TEC En Module 5.2/7.7 se muestra cómo la regla del punto medio mejora cuando n se incrementa.

Regla del punto medio

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\,\Delta x = \Delta x\,[f(\bar{x}_1) + \cdots + f(\bar{x}_n)]$$

donde $$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

y $$\bar{x}_i = \tfrac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) = \text{punto medio de } [x_{i-1}, x_i]$$

V EJEMPLO 5 Use la regla del punto medio con $n = 5$ para hallar una aproximación de $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$.

SOLUCIÓN Los puntos extremos de los cinco subintervalos son 1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8 y 2.0, de modo que los puntos medios son 1.1, 1.3, 1.5, 1.7 y 1.9. El ancho de los subintervalos es $\Delta x = (2 - 1)/5 = \frac{1}{5}$, de modo que la regla del punto medio da

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx \Delta x\,[f(1.1) + f(1.3) + f(1.5) + f(1.7) + f(1.9)]$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{1.1} + \frac{1}{1.3} + \frac{1}{1.5} + \frac{1}{1.7} + \frac{1}{1.9}\right)$$

$$\approx 0.691908$$

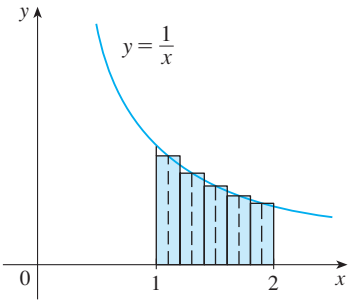


FIGURA 11

Puesto que $f(x) = 1/x > 0$ para $1 \leqslant x \leqslant 2$, la integral representa un área y la aproximación dada por la regla del punto medio es la suma de las áreas de los rectángulos que se muestran en la figura 11.

Hasta el momento no sabemos qué tan exacta es la aproximación del ejemplo 5; pero en la sección 7.7 aprenderemos un método para estimar el error involucrado, con el uso de la regla del punto medio. En ese momento se exponen otros métodos para hallar aproximaciones de integrales definidas.

Si aplicamos la regla del punto medio a la integral del ejemplo 2, obtenemos el dibujo que aparece en la figura 12. La aproximación $M_{40} \approx -6.7563$ está mucho más cerca del valor verdadero de -6.75 que la aproximación con el punto extremo de la derecha, $R_{40} \approx -6.3998$, que se muestra en la figura 7.

TEC En Visual 5.2 podemos comparar las aproximaciones izquierda, derecha y del punto medio para la integral del ejemplo 2 para diferentes valores de n.

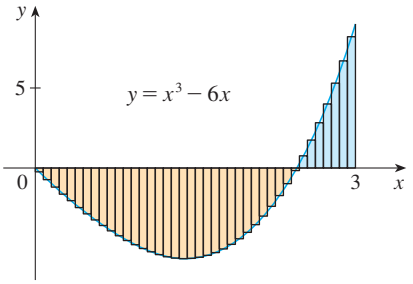


FIGURA 12
$M_{40} \approx -6.7563$

Propiedades de la integral definida

Cuando se definió la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$, de manera implícita se supuso que $a < b$. Pero la definición como un límite de la suma de Riemann tiene sentido aun cuando $a > b$. Note que si invertimos a y b, entonces Δx cambia de $(b - a)/n$ a $(a - b)/n$. En consecuencia,

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Si $a = b$, entonces $\Delta x = 0$ de manera que

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Ahora aparecen algunas propiedades básicas de las integrales que lo ayudarán a la evaluación de éstas con mayor facilidad. Suponga que f y g son funciones continuas.

Propiedades de la integral

1. $\int_a^b c\,dx = c(b - a)$, donde c es cualquier constante
2. $\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
3. $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$, donde c es cualquier constante
4. $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

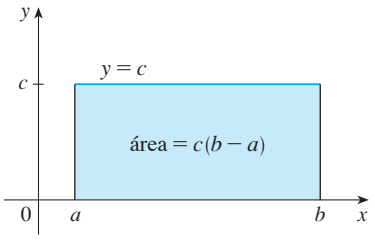


FIGURA 13
$\int_a^b c\,dx = c(b - a)$

En la propiedad 1 se expresa que la integral de una función constante $f(x) = c$ es la constante multiplicada por la longitud del intervalo. Si $c > 0$ y $a < b$, esto es de esperarse porque $c(b - a)$ es el área del rectángulo de la figura 13.

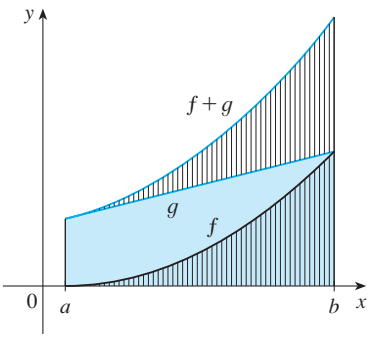


FIGURA 14

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

En la propiedad 2 se afirma que la integral de una suma es la suma de las integrales. Para funciones positivas, esto quiere decir que el área bajo $f + g$ es el área bajo f más el área bajo g. La figura 14 ayuda a comprender por qué esto es cierto: en vista de la manera en que funciona la adición de gráficas, los segmentos de recta verticales correspondientes tienen alturas iguales.

En general, la propiedad 2 se deduce del teorema 4 y del hecho de que el límite de una suma es la suma de los límites:

$$\begin{aligned}\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) + g(x_i)]\,\Delta x \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x + \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\,\Delta x \right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\,\Delta x \\ &= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\end{aligned}$$

La propiedad 3 parece intuitivamente razonable porque si se multiplica una función por un número positivo c, su gráfica se alarga o contrae en el sentido vertical un factor de c. De modo que alarga o contrae cada rectángulo de aproximación un factor de c y, por consecuencia, tiene el efecto de multiplicar el área por c.

La propiedad 3 puede demostrarse de manera semejante y en ella se expresa que la integral de una constante multiplicada por una función es la constante multiplicada por la integral de la función. En otras palabras, una constante (pero *sólo* una constante) puede llevarse hacia afuera de un signo de integral. La propiedad 4 se demuestra escribiendo $f - g = f + (-g)$ y aplicando las propiedades 2 y 3 con $c = -1$.

EJEMPLO 6 Utilice las propiedades de las integrales para evaluar $\int_0^1 (4 + 3x^2)\,dx$.

SOLUCIÓN Utilizando las propiedades 2 y 3 de las integrales, se tiene

$$\int_0^1 (4 + 3x^2)\,dx = \int_0^1 4\,dx + \int_0^1 3x^2\,dx = \int_0^1 4\,dx + 3\int_0^1 x^2\,dx$$

Por la propiedad 1, sabemos que

$$\int_0^1 4\,dx = 4(1 - 0) = 4$$

y, en el ejemplo 2 de la sección 5.1, encontramos que $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$. De manera que,

$$\begin{aligned}\int_0^1 (4 + 3x^2)\,dx &= \int_0^1 4\,dx + 3\int_0^1 x^2\,dx \\ &= 4 + 3 \cdot \tfrac{1}{3} = 5\end{aligned}$$

En la siguiente propiedad indica cómo combinar las integrales de la misma función sobre intervalos adyacentes:

5. $$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

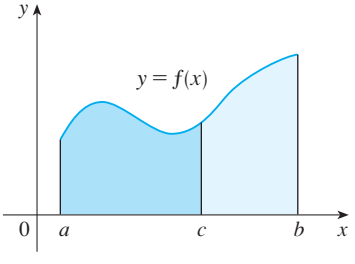


FIGURA 15

Esto no es fácil de demostrar en general; pero, para el caso donde $f(x) \geqslant 0$ y $a < c < b$, puede verse la propiedad 5 a partir de la interpretación geométrica de la figura 15: el área bajo $y = f(x)$, desde a hasta c, más el área desde c hasta b es igual al área total desde a hasta b.

EJEMPLO 7 Si se sabe que $\int_0^{10} f(x)\,dx = 17$ y $\int_0^8 f(x)\,dx = 12$, encuentre $\int_8^{10} f(x)\,dx$.

SOLUCIÓN Por la propiedad 5, tenemos

$$\int_0^8 f(x)\,dx + \int_8^{10} f(x)\,dx = \int_0^{10} f(x)\,dx$$

de modo que $$\int_8^{10} f(x)\,dx = \int_0^{10} f(x)\,dx - \int_0^8 f(x)\,dx = 17 - 12 = 5$$

Las propiedades 1 a 5 son verdaderas ya sea que $a < b$, $a = b$ o $a > b$. Las propiedades que se enuncian a continuación, en las que se comparan tamaños de funciones y tamaños de integrales, son verdaderas sólo si $a \leq b$.

Propiedades de comparación de la integral

6. Si $f(x) \geq 0$ para $a \leq x \leq b$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

7. Si $f(x) \geq g(x)$ para $a \leq x \leq b$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$.

8. Si $m \leq f(x) \leq M$ para $a \leq x \leq b$, entonces

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b - a)$$

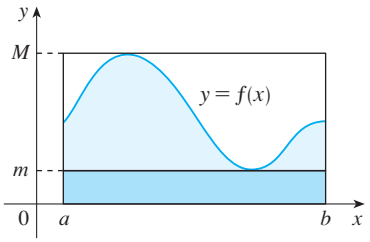


FIGURA 16

Si $f(x) \geq 0$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ representa el área bajo la gráfica de f, de manera que la interpretación geométrica de la propiedad 6 es simplemente que las áreas son positivas (esto también se sigue directamente de la definición porque todas las cantidades involucradas son positivas). La propiedad 7 expresa que una función más grande tiene una integral más grande, lo cual se infiere de las propiedades 6 y 4 porque $f - g \geq 0$.

La propiedad 8 se ilustra mediante la figura 16 para el caso en que $f(x) \geq 0$. Si f es continua podríamos tomar m y M como los valores mínimo y máximo absolutos de f sobre el intervalo $[a, b]$. En este caso, la propiedad 8 expresa que el área bajo la gráfica de f es mayor que el área del rectángulo con altura m y menor que el área del rectángulo con altura M.

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPIEDAD 8 Puesto que $m \leq f(x) \leq M$, la propiedad 7 plantea que

$$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx$$

Si aplicamos la propiedad 1 para evaluar las integrales en el primero y el segundo miembros, obtenemos

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b - a)$$

La propiedad 8 es útil si lo que quiere se reduce es una estimación general del tamaño de una integral sin las dificultades que representa el uso de la regla del punto medio.

EJEMPLO 8 Use la propiedad 8 para estimar $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$.

SOLUCIÓN Debido a que $f(x) = e^{-x^2}$ es una función decreciente sobre $[0, 1]$, su valor máximo absoluto es $M = f(0) = 1$ y su valor mínimo absoluto es $m = f(1) = e^{-1}$. De

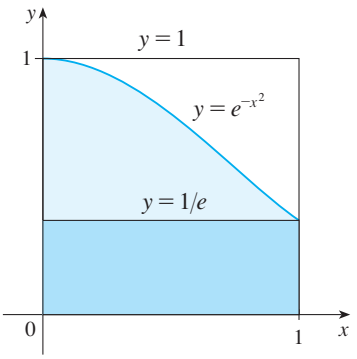


FIGURA 17

esta manera, por la propiedad 8,

$$e^{-1}(1-0) \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leqslant 1(1-0)$$

o bien

$$e^{-1} \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leqslant 1$$

Dado que $e^{-1} \approx 0.3679$, podemos escribir

$$0.367 \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leqslant 1$$

El resultado del ejemplo 8 se ilustra en la figura 17. La integral es mayor que el área del rectángulo inferior y menor que el área del cuadrado.

5.2 Ejercicios

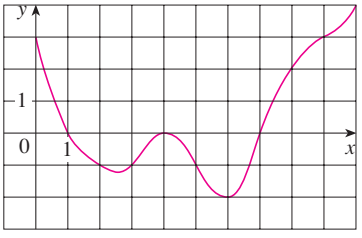
1. Evalúe la suma de Riemann para $f(x) = 3 - \frac{1}{2}x$, $2 \leqslant x \leqslant 14$, con seis subintervalos, tomando los puntos extremos de la izquierda como los puntos muestra. Con ayuda de un diagrama, explique qué representa la suma de Riemann.

2. Si $f(x) = x^2 - 2x$, $0 \leqslant x \leqslant 3$, evalúe la suma de Riemann con $n = 6$ tomando los puntos extremos de la derecha como los puntos muestra. ¿Qué representa la suma de Riemann? Ilustre su respuesta con un diagrama.

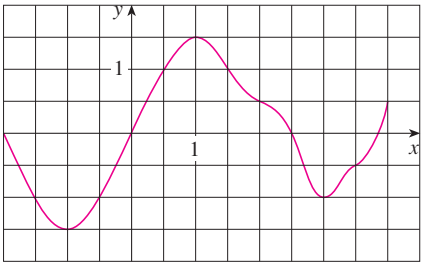
3. Si $f(x) = e^x - 2$, $0 \leqslant x \leqslant 2$, encuentre la suma de Riemann con $n = 4$ correcta hasta seis cifras decimales, tomando los puntos medios como los puntos muestra. ¿Qué representa la suma de Riemann? Ilustre con un diagrama.

4. a) Encuentre la suma de Riemann para $f(x) = \operatorname{sen} x$, $0 \leqslant x \leqslant 3\pi/2$, con seis términos, tomando los puntos muestra como los puntos extremos de la derecha (Dé su respuesta a una aproximación de seis cifras decimales.) Explique, con ayuda de un diagrama, qué representa la suma de Riemann.
b) Repita el inciso a) con los puntos medios como los puntos muestra.

5. Se da la gráfica de una función. Estime $\int_0^{10} f(x)\,dx$ usando cinco subintervalos con a) los puntos extremos de la derecha, b) los puntos extremos de la izquierda y c) los puntos medios.



6. Se muestra la gráfica de g. Estime $\int_{-2}^{4} g(x)\,dx$ con seis subintervalos usando a) los puntos extremos de la derecha, b) los puntos extremos de la izquierda y c) los puntos medios.



7. Se muestra una tabla de valores de una función creciente f. Utilícela para hacer estimaciones inferiores y superiores para $\int_{10}^{30} f(x)\,dx$.

x	10	14	18	22	26	30
$f(x)$	−12	−6	−2	1	3	8

8. En la tabla se dan los valores de una función obtenida a partir de un experimento. Con ellos estime $\int_3^9 f(x)\,dx$ usando tres subintervalos iguales con a) los puntos extremos de la derecha, b) los puntos extremos de la izquierda y c) los puntos medios. Si se sabe que la función es decreciente, ¿puede decir si sus estimaciones son menores o mayores que el valor exacto de la integral?

x	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	−3.4	−2.1	−0.6	0.3	0.9	1.4	1.8

9-12 Use la regla del punto medio, con el valor dado de n, para hallar una aproximación de cada una de las siguientes integrales. Redondee cada respuesta hasta cuatro cifras decimales.

9. $\int_0^8 \operatorname{sen}\sqrt{x}\,dx, \quad n = 4$

10. $\int_0^{\pi/2} \cos^4 x\,dx, \quad n = 4$

11. $\int_0^2 \dfrac{x}{x+1}\,dx, \quad n = 5$

12. $\int_1^5 x^2 e^{-x}\,dx, \quad n = 4$

SAC **13.** Si tiene un SAC que evalúe las aproximaciones con los puntos medios y trace los rectángulos correspondientes (en Maple, use los comandos de `RiemannSum` o `middlebox` y `middlebox`), compruebe la respuesta del ejercicio 11 e ilustre con una gráfica. Después, repita con $n = 10$ y $n = 20$.

14. Con una calculadora programable o una computadora (vea las instrucciones para el ejercicio 9 de la sección 5.1), calcule las sumas de Riemann izquierda y derecha para la función $f(x) = x/(x+1)$ sobre el intervalo $[0, 2]$, con $n = 100$. Explique por qué estas estimaciones demuestran que

$$0.8946 < \int_0^2 \frac{x}{x+1}\,dx < 0.9081$$

15. Use una calculadora o una computadora para hacer una tabla de valores de sumas de la derecha de Riemann R_n para la integral $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx$ con $n = 5$, 10, 50 y 100. ¿A qué valor parecen aproximarse estos números?

16. Use calculadora o computadora para hacer una tabla de valores de las sumas de la izquierda y de la derecha de Riemann L_n y R_n para la integral $\int_0^2 e^{-x^2}\,dx$ con $n = 5$, 10, 50 y 100. ¿Entre que números tiene que encontrarse el valor de la integral? ¿Puede formular un enunciado similar para la integral $\int_{-1}^2 e^{-x^2}\,dx$? Explique su respuesta.

17-20 Exprese cada uno de los siguientes límites como una integral definida sobre el intervalo dado.

17. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n x_i \ln(1 + x_i^2)\,\Delta x, \quad [2, 6]$

18. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \dfrac{\cos x_i}{x_i}\,\Delta x, \quad [\pi, 2\pi]$

19. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n [5(x_i^*)^3 - 4x_i^*]\,\Delta x, \quad [2, 7]$

20. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \dfrac{x_i^*}{(x_i^*)^2 + 4}\,\Delta x, \quad [1, 3]$

21-25 Use la forma de la definición de integral que se dio en el teorema 4 para evaluar la integral.

21. $\int_2^5 (4 - 2x)\,dx$

22. $\int_1^4 (x^2 - 4x + 2)\,dx$

23. $\int_{-2}^0 (x^2 + x)\,dx$

24. $\int_0^2 (2x - x^3)\,dx$

25. $\int_0^1 (x^3 - 3x^2)\,dx$

26. a) Halle una aproximación a la integral $\int_0^4 (x^2 - 3x)\,dx$ usando una suma de Riemann con puntos extremos de la derecha y $n = 8$.
b) Dibuje un diagrama como el de la figura 3 para ilustrar la aproximación del inciso a).
c) Aplique el teorema 4 para evaluar $\int_0^4 (x^2 - 3x)\,dx$.
d) Interprete la integral del inciso c) como una diferencia de áreas e ilustre con un diagrama como el de la figura 4.

27. Demuestre que $\int_a^b x\,dx = \dfrac{b^2 - a^2}{2}$.

28. Demuestre que $\int_a^b x^2\,dx = \dfrac{b^3 - a^3}{3}$.

29-30 Exprese la integral como un límite de sumas de Riemann. No evalúe el límite.

29. $\int_2^6 \dfrac{x}{1 + x^5}\,dx$

30. $\int_1^{10} (x - 4\ln x)\,dx$

SAC **31-32** Exprese cada una de las siguientes integrales como un límite de sumas. Después, evalúe utilizando un sistema algebraico computarizado para encontrar tanto la suma como el límite.

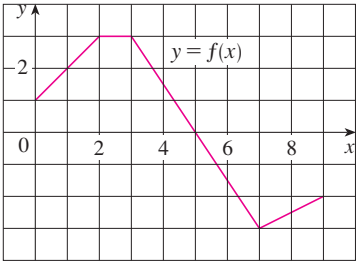
31. $\int_0^\pi \operatorname{sen} 5x\,dx$

32. $\int_2^{10} x^6\,dx$

33. Se muestra la gráfica de f. Evalúe cada una de las siguientes integrales interpretándola en términos de áreas.

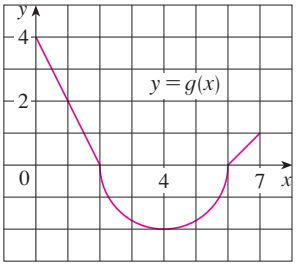
a) $\int_0^2 f(x)\,dx$ b) $\int_0^5 f(x)\,dx$

c) $\int_5^7 f(x)\,dx$ d) $\int_0^9 f(x)\,dx$



34. La gráfica g consiste en dos rectas y una semicircunferencia. Úsela para evaluar cada una de las siguientes integrales.

a) $\int_0^2 g(x)\,dx$ b) $\int_2^6 g(x)\,dx$ c) $\int_0^7 g(x)\,dx$



35-40 Evalúe cada una de las siguientes integrales interpretándola en términos de áreas.

35. $\int_{-1}^{2} (1 - x)\,dx$

36. $\int_{0}^{9} \left(\frac{1}{3}x - 2\right) dx$

37. $\int_{-3}^{0} \left(1 + \sqrt{9 - x^2}\right) dx$

38. $\int_{-5}^{5} \left(x - \sqrt{25 - x^2}\right) dx$

39. $\int_{-1}^{2} |x|\,dx$

40. $\int_{0}^{10} |x - 5|\,dx$

41. Evalúe $\int_{\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x\,dx$.

42. Dado que $\int_{0}^{1} 3x\sqrt{x^2 + 4}\,dx = 5\sqrt{5} - 8$, ¿a qué es igual $\int_{1}^{0} 3u\sqrt{u^2 + 4}\,du$?

43. En el ejemplo 2 de la sección 5.1, demostramos que $\int_{0}^{1} x^2\,dx = \frac{1}{3}$. Utilice este hecho y las propiedades de las integrales para evaluar $\int_{0}^{1} (5 - 6x^2)\,dx$.

44. Utilice las propiedades de las integrales y el resultado del ejemplo 3 para evaluar $\int_{1}^{3} (2e^x - 1)\,dx$.

45. Utilice el resultado del ejemplo 3 para evaluar $\int_{1}^{3} e^{x+2}\,dx$.

46. A partir de los resultados del ejercicio 27 y del hecho de que $\int_{0}^{\pi/2} \cos x\,dx = 1$ (según el ejercicio 25 de la sección 5.1), junto con las propiedades de las integrales, evalúe $\int_{0}^{\pi/2} (2\cos x - 5x)\,dx$.

47. Escriba como una sola integral en la forma $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$.

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{5} f(x)\,dx - \int_{-2}^{-1} f(x)\,dx$$

48. Si $\int_{1}^{5} f(x)\,dx = 12$ y $\int_{4}^{5} f(x)\,dx = 3.6$, encuentre $\int_{1}^{4} f(x)\,dx$

49. Si $\int_{0}^{9} f(x)\,dx = 37$ y $\int_{0}^{9} g(x)\,dx = 16$, encuentre $\int_{0}^{9} [2f(x) + 3g(x)]\,dx$.

50. Encuentre $\int_{0}^{5} f(x)\,dx$ para

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{para } x < 3 \\ x & \text{para } x \geqslant 3 \end{cases}$$

51. Para la función f cuya gráfica se muestra, enliste las siguientes cantidades en orden creciente, de menor a mayor, y explique su razonamiento.

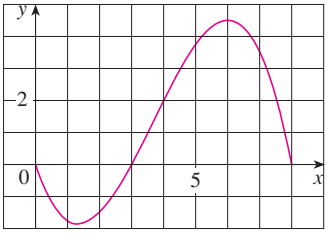
a) $\int_{0}^{8} f(x)\,dx$

b) $\int_{0}^{3} f(x)\,dx$

c) $\int_{3}^{8} f(x)\,dx$

d) $\int_{4}^{8} f(x)\,dx$

e) $f'(1)$



52. Si $F(x) = \int_{2}^{x} f(t)\,dt$, donde f es la función cuya gráfica está dada, ¿cuál de los siguientes valores es el más grande?

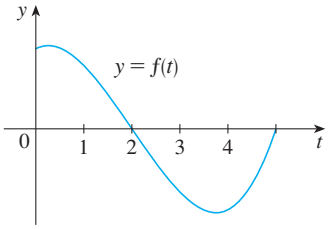
a) $F(0)$

b) $F(1)$

c) $F(2)$

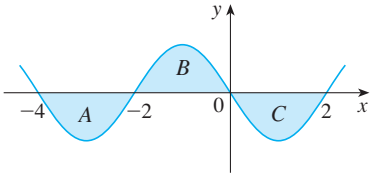
d) $F(3)$

e) $F(4)$



53. Cada una de las regiones A, B, y C, limitadas por la gráfica de f y el eje x, tiene área 3. Encuentre el valor de

$$\int_{-4}^{2} [f(x) + 2x + 5]\,dx$$



54. Suponga que f tiene el valor mínimo absoluto m y el valor máximo absoluto M. ¿Entre qué valores se encuentra $\int_{0}^{2} f(x)\,dx$? ¿Qué propiedad de las integrales le permite sostener su conclusión?

55-58 Aplique las propiedades de las integrales para verificar la desigualdad sin evaluar las integrales.

55. $\int_{0}^{4} (x^2 - 4x + 4)\,dx \geqslant 0$

56. $\int_{0}^{1} \sqrt{1 + x^2}\,dx \leqslant \int_{0}^{1} \sqrt{1 + x}\,dx$

57. $2 \leqslant \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + x^2}\,dx \leqslant 2\sqrt{2}$

58. $\frac{\sqrt{2}\,\pi}{24} \leqslant \int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos x\,dx \leqslant \frac{\sqrt{3}\,\pi}{24}$

59-64 Utilice la propiedad 8 para estimar el valor de cada una de las siguientes integrales.

59. $\int_{1}^{4} \sqrt{x}\,dx$

60. $\int_{0}^{2} \frac{1}{1 + x^2}\,dx$

61. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \tan x\,dx$

62. $\int_{0}^{2} (x^3 - 3x + 3)\,dx$

63. $\int_{0}^{2} xe^{-x}\,dx$

64. $\int_{\pi}^{2\pi} (x - 2\operatorname{sen} x)\,dx$

65-66 Mediante las propiedades de las integrales, junto con los ejercicios 27 y 28, demuestre cada una de las siguientes desigualdades.

65. $\int_1^3 \sqrt{x^4 + 1}\, dx \geqslant \frac{26}{3}$

66. $\int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} x\, dx \leqslant \frac{\pi^2}{8}$

67. Demuestre la propiedad 3 de las integrales.

68. a) Si f es continua sobre $[a, b]$, demuestre que

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\, dx$$

[*Sugerencia:* $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$.]

b) Utilice el resultado del inciso a) para demostrar que

$$\left| \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} 2x\, dx \right| \leqslant \int_0^{2\pi} |f(x)|\, dx$$

69. Sea $f(x) = 0$ si x es cualquier número racional y $f(x) = 1$ si x es cualquier número irracional. Demuestre que f no es integrable sobre $[0, 1]$.

70. Sea $f(0) = 0$ y $f(x) = 1/x$ si $0 < x \leqslant 1$. Demuestre que f no es integrable sobre $[0, 1]$. [*Sugerencia:* demuestre que el primer término en la suma de Riemann, $f(x_i^*)\,\Delta x$, puede hacerse de manera arbitraria muy grande].

71-72 Exprese cada uno de los siguientes límites como una integral definida.

71. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^4}{n^5}$ [*Sugerencia:* considere $f(x) = x^4$.]

72. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 + (i/n)^2}$

73. Determine $\int_1^2 x^{-2}\, dx$. *Sugerencia*: elija x_i^* como la media geométrica x_{i-1} y x_i (es decir, $x_i^* = \sqrt{x_{i-1}x_i}$) y use la identidad

$$\frac{1}{m(m+1)} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}$$

PROYECTO PARA UN DESCUBRIMIENTO

FUNCIONES ÁREA

1. a) Trace la recta $y = 2t + 1$ y utilice la geometría para hallar el área bajo esta recta, arriba del eje t y entre las rectas verticales $t = 1$ y $t = 3$.

b) Si $x > 1$, sea $A(x)$ el área de la región que se encuentra bajo la recta $y = 2t + 1$, entre $t = 1$ y $t = x$. Dibuje un esquema de esta región y use la geometría a fin de hallar una expresión para $A(x)$.

c) Derive la función área $A(x)$. ¿Qué observa?

2. a) Si $x \geqslant -1$, sea

$$A(x) = \int_{-1}^{x} (1 + t^2)\, dt$$

$A(x)$ representa el área de una región. Grafique la región.

b) A partir de los resultados del ejercicio 28 de la sección 5.2 encuentre una expresión para $A(x)$.

c) Determine $A'(x)$. ¿Qué observa?

d) Si $x \geqslant -1$ y h es un número positivo pequeño, entonces $A(x + h) - A(x)$ representa el área de una región. Describa y grafique la región.

e) Dibuje un rectángulo que aproxime la región del inciso d). Mediante la comparación de áreas de estas dos regiones demuestre que

$$\frac{A(x+h) - A(x)}{h} \approx 1 + x^2$$

f) Mediante el inciso e) proporcione una explicación intuitiva del resultado del inciso c).

3. a) Grafique la función $f(x) = \cos(x^2)$ en el rectángulo de vista $[0, 2]$ por $[-1.25, 1.25]$.

b) Si definimos una nueva función g por medio de

$$g(x) = \int_0^x \cos(t^2)\, dt$$

entonces $g(x)$ es el área bajo la gráfica de f de 0 a x [hasta que $f(x)$ sea negativa, en cuyo punto $g(x)$ es una diferencia de áreas]. Use el resultado del inciso a) para determinar el

Se requiere calculadora graficadora o computadora

valor de x en el cual $g(x)$ empieza a decrecer. [A diferencia de la integral del problema 2, es imposible evaluar la integral que define g para obtener una expresión explícita para $g(x)$.]

c) Utilice el comando de integración de su calculadora o computadora para estimar $g(0.2)$, $g(0.4)$, $g(0.6), \ldots, g(1.8)$, $g(2)$. Después, con estos valores dibuje una gráfica de g.

d) Use su gráfica de g del inciso c) para dibujar la gráfica de g' utilizando la interpretación de $g'(x)$ como la pendiente de una recta tangente. ¿Qué relación existe entre la gráfica de g' y la de f?

4. Supongamos que f es una función continua sobre el intervalo $[a, b]$ y definimos una nueva función g por la ecuación

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Tomando como base sus resultados en los problemas 1 a 3, deduzca una expresión para $g'(x)$.

5.3 Teorema fundamental del cálculo

El teorema fundamental del cálculo recibe de manera apropiada este nombre porque establece una conexión entre las dos ramas del Cálculo: el cálculo diferencial y el cálculo integral. El Cálculo diferencial surgió del problema de la recta tangente, mientras que el Cálculo integral lo hizo de un problema en apariencia no relacionado, el problema del área. El profesor de Newton en Cambridge, Isaac Barrow (1630-1677), descubrió que en realidad estos dos problemas estaban íntimamente relacionados. De hecho, se dio cuenta de que la derivación y la integración son procesos inversos. El teorema fundamental del cálculo precisa la relación inversa entre la derivada y la integral. Newton y Leibniz explotaron esta relación y la usaron para desarrollar el cálculo como un método matemático sistemático. En particular, observaron que el teorema fundamental les permitía calcular con gran facilidad áreas e integrales, sin tener que calcularlas como límites de sumas como en las secciones 5.1 y 5.2.

La primera parte del teorema fundamental trata con funciones definidas por una ecuación en la forma

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad \boxed{1}$$

donde f es una función continua sobre $[a, b]$ y x varía entre a y b. Observe que g depende sólo de x, que aparece como el límite variable superior en la integral. Si x es un número fijo, entonces la integral $\int_a^x f(t)\,dt$ es un número definido. Si después hacemos variar x, el número $\int_a^x f(t)\,dt$ también varía y define una función de x que se denota mediante $g(x)$.

Si f es una función positiva, entonces $g(x)$ puede interpretarse como el área bajo la gráfica de f de a a x, donde x puede variar de a a b. (Piense en g como la función "el área hasta"; véase la figura 1.)

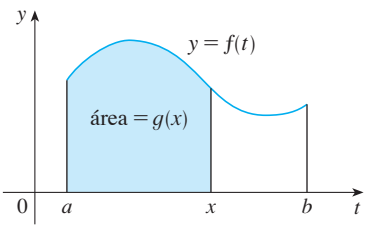


FIGURA 1

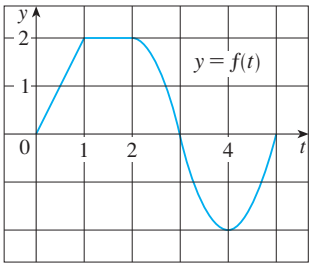


FIGURA 2

V EJEMPLO 1 Si f es la función cuya gráfica se ilustra en la figura 2 y $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, encuentre los valores de $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$, $g(4)$ y $g(5)$. Luego trace una gráfica aproximada de g.

SOLUCIÓN En primer lugar, observe que $g(0) = \int_0^0 f(t)\,dt = 0$. A partir de la figura 3 se ve que $g(1)$ es el área de un triángulo:

$$g(1) = \int_0^1 f(t)\,dt = \tfrac{1}{2}(1 \cdot 2) = 1$$

Para hallar $g(2)$ le agregamos a $g(1)$ el área de un rectángulo:

$$g(2) = \int_0^2 f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^2 f(t)\,dt = 1 + (1 \cdot 2) = 3$$

Estimamos que el área bajo f de 2 a 3 es alrededor de 1.3, de manera que

$$g(3) = g(2) + \int_2^3 f(t)\,dt \approx 3 + 1.3 = 4.3$$

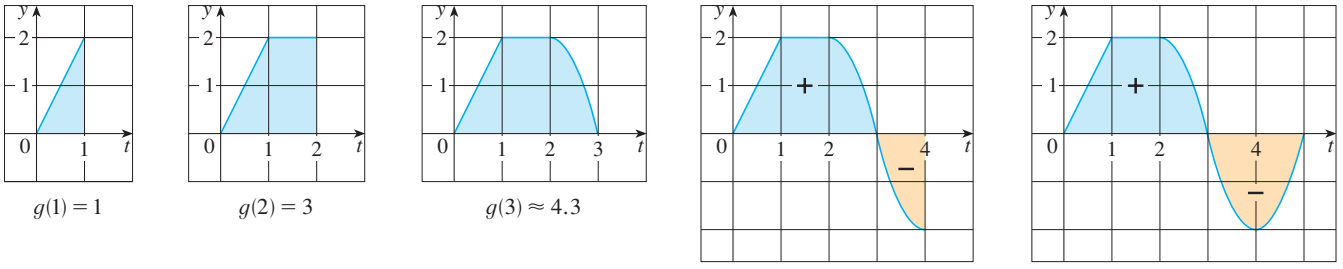


FIGURA 3

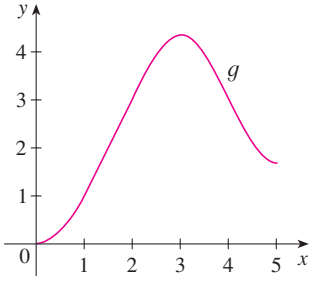


FIGURA 4
$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

Para $t > 3$, $f(t)$ es negativa y, por tanto, empezamos a restar áreas:

$$g(4) = g(3) + \int_3^4 f(t)\,dt \approx 4.3 + (-1.3) = 3.0$$

$$g(5) = g(4) + \int_4^5 f(t)\,dt \approx 3 + (-1.3) = 1.7$$

Usamos estos valores para trazar la gráfica de g en la figura 4. Observe que, debido a que $f(t)$ es positiva para $t < 3$, se sigue sumando área para $t < 3$ y, por tanto, g es creciente hasta $x = 3$, donde alcanza un valor máximo. Para $x > 3$, g decrece porque $f(t)$ es negativa.

Si tomamos $f(t) = t$ y $a = 0$, entonces, aprovechando el ejercicio 27 de la sección 5.2, tenemos

$$g(x) = \int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}$$

Observe que $g'(x) = x$; es decir, $g' = f$. En otras palabras, si g se define como la integral de f mediante la ecuación 1, entonces g resulta ser, cuando menos en este caso, una antiderivada de f. Y si trazamos la gráfica de la derivada de la función g que se ilustra en la figura 4 al estimar las pendientes de las rectas tangentes, obtenemos una gráfica como la de f en la figura 2. Por eso, sospechamos que en el ejemplo 1 también $g' = f$.

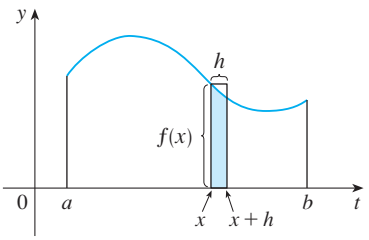


FIGURA 5

Con objeto de ver por qué en general esto puede ser verdadero, considere cualquier función continua f con $f(x) \geqslant 0$. Entonces $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ puede interpretarse como el área bajo la gráfica de f de a a x, como en la figura 1.

A fin de calcular $g'(x)$ a partir de la definición de derivada, en primer lugar observe que, para $h > 0$, $g(x + h) - g(x)$ se obtiene restando áreas; por tanto, es el área bajo la gráfica de f de x a $x + h$ (el área azul de la figura 5). Para h pequeñas, a partir de la figura puede ver que esta área es aproximadamente igual al área del rectángulo con altura $f(x)$ y ancho h:

$$g(x + h) - g(x) \approx hf(x)$$

por eso

$$\frac{g(x + h) - g(x)}{h} \approx f(x)$$

En consecuencia, por intuición, esperamos que

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x + h) - g(x)}{h} = f(x)$$

El hecho de que esto sea verdadero, aun cuando f no sea necesariamente positiva, es la primera parte del teorema fundamental del cálculo.

El nombre de este teorema se abrevia como TFC1: expresa que la derivada de una integral definida respecto a su límite superior es el integrando evaluado tal límite.

Teorema fundamental del cálculo, parte 1 Si f es continua sobre $[a, b]$, entonces la función g definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad a \leqslant x \leqslant b$$

es continua sobre $[a, b]$ y derivable sobre (a, b), y $g'(x) = f(x)$.

DEMOSTRACIÓN Si x y $x + h$ están en (a, b), entonces

$$\begin{aligned} g(x + h) - g(x) &= \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \\ &= \left(\int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt \right) - \int_a^x f(t)\,dt \qquad \text{(por la propiedad 5)} \\ &= \int_x^{x+h} f(t)\,dt \end{aligned}$$

y de este modo, para $h \neq 0$,

$$\boxed{2} \qquad \frac{g(x + h) - g(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

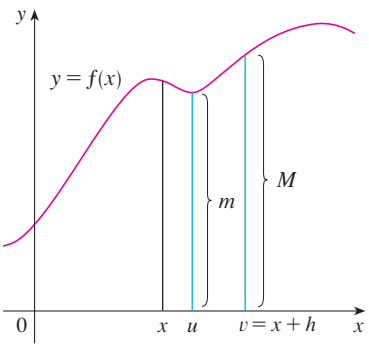


FIGURA 6

Por ahora supongamos que $h > 0$. Puesto que f es continua sobre $[x, x + h]$, el teorema del valor extremo establece que hay números u y v en $[x, x + h]$ tales que $f(u) = m$ y $f(v) = M$, donde m y M son los valores mínimo y máximo absolutos de f sobre $[x, x + h]$ (Véase la figura 6.)

De acuerdo con la propiedad 8 de las integrales, tenemos

$$mh \leqslant \int_x^{x+h} f(t)\,dt \leqslant Mh$$

es decir,
$$f(u)h \leq \int_x^{x+h} f(t)\,dt \leq f(v)h$$

Dado que $h > 0$, podemos dividir esta desigualdad entre h:

$$f(u) \leq \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \leq f(v)$$

Ahora, utilizamos la ecuación 2 para remplazar la parte de en medio de esta desigualdad:

$$f(u) \leq \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \leq f(v) \quad \boxed{3}$$

TEC En Module 5.3 se proporciona evidencia visual para el TFC1.

La desigualdad 3 puede demostrarse de una manera similar a la del caso cuando $h < 0$. (Véase el ejercicio 71.)

Ahora sea $h \to 0$. Entonces $u \to x$ y $v \to x$, ya que u y v quedan entre x y $x + h$. Por tanto,

$$\lim_{h\to 0} f(u) = \lim_{u\to x} f(u) = f(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{h\to 0} f(v) = \lim_{v\to x} f(v) = f(x)$$

porque f es continua en x. De acuerdo con 3 y el teorema de la compresión concluimos que

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f(x) \quad \boxed{4}$$

Si $x = a$ o b, entonces la ecuación 4 puede interpretarse como un límite unilateral. Entonces el teorema 2.8.4 (modificado para límites unilaterales) demuestra que g es continua sobre $[a, b]$.

De acuerdo con la notación de Leibniz para derivadas, podemos expresar al TFC1 como

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x) \quad \boxed{5}$$

cuando f es continua. En términos generales, la ecuación 5 establece que si primero integramos f y luego derivamos el resultado, regresamos a la función original f.

V EJEMPLO 2 Encuentre la derivada de la función $g(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2}\,dt$.

SOLUCIÓN Puesto que $f(t) = \sqrt{1+t^2}$ es continua, la parte 1 del teorema fundamental del cálculo da

$$g'(x) = \sqrt{1+x^2}$$

EJEMPLO 3 Si bien una fórmula en la forma $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ puede parecer una forma extraña de definir una función, los libros de física, química y estadística están llenos de funciones semejantes. Por ejemplo, la **función de Fresnel**

$$S(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(\pi t^2/2)\,dt$$

recibe ese nombre en honor del físico francés Augustin Fresnel (1788-1827), que es famoso por sus trabajos en óptica. Esta función apareció por primera vez en la teoría de Fresnel de la difracción de la luz, pero a últimas fechas se ha aplicado al diseño de autopistas.

La parte 1 del teorema fundamental indica cómo derivar la función de Fresnel:

$$S'(x) = \operatorname{sen}(\pi x^2/2)$$

Esto significa que podemos aplicar todos los métodos del cálculo diferencial para analizar S (véase el ejercicio 65).

En la figura 7 se muestran las gráficas de $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x^2/2)$ y de la función de Fresnel $S(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Puede utilizarse una computadora para graficar S calculando el valor de esta integral para muchos valores de x. Evidentemente, parece que $S(x)$ es el área bajo la gráfica de f de 0 hasta x [hasta que $x \approx 1.4$ cuando $S(x)$ sea una diferencia de áreas]. La figura 8 muestra una gran parte de la gráfica de S.

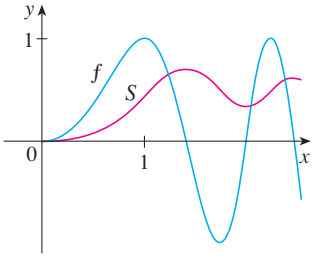


FIGURA 7
$f(x) = \operatorname{sen}(\pi x^2/2)$
$S(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(\pi t^2/2)\,dt$

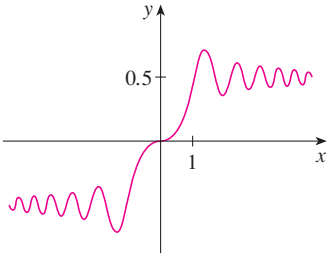


FIGURA 8
Función de Fresnel $S(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(\pi t^2/2)\,dt$

Si empezamos ahora por la gráfica de S de la figura 7 y pensamos qué aspecto debe tener su derivada, parece razonable que $S'(x) = f(x)$. [Por ejemplo, S es creciente cuando $f(x) > 0$ y decreciente cuando $f(x) < 0$]. De modo que esto da una confirmación visual de la parte 1 del teorema fundamental del cálculo.

EJEMPLO 4 Encuentre $\dfrac{d}{dx}\int_1^{x^4} \sec t\,dt$.

SOLUCIÓN En este caso debe ser cuidadoso al usar la regla de la cadena junto con el TFC1. Sea $u = x^4$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\int_1^{x^4} \sec t\,dt &= \frac{d}{dx}\int_1^{u} \sec t\,dt \\
&= \frac{d}{du}\left[\int_1^{u} \sec t\,dt\right]\frac{du}{dx} && \text{(Por la regla de la cadena)} \\
&= \sec u\,\frac{du}{dx} && \text{(por TFC1)} \\
&= \sec(x^4)\cdot 4x^3
\end{aligned}$$

En la sección 5.2 calculamos integrales a partir de la definición como un límite de las sumas de Riemann, y vimos que ese procedimiento es a veces largo y difícil. La segunda parte del teorema fundamental del cálculo, que se infiere con facilidad de la primera parte, representa un método mucho más simple para evaluar integrales.

Este teorema se abrevia mediante las siglas TFC2.

Teorema fundamental del cálculo, parte 2 Si f es continua sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

donde F *es* una antiderivada de f; es decir, una función tal que $F' = f$.

DEMOSTRACIÓN Sea $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. De acuerdo con la parte 1, sabemos que $g'(x) = f(x)$; es decir, g es una antiderivada de f. Si F es cualquier otra antiderivada de f sobre $[a, b]$, entonces, por el corolario 4.2.7, la diferencia entre F y g es una constante:

$$F(x) = g(x) + C \tag{6}$$

para $a < x < b$. Pero tanto F como g son continuas sobre $[a, b]$ y de este modo, al obtener los límites de ambos miembros de la ecuación 6, (cuando $x \to a^+$ y $x \to b^-$), vemos que también se cumple cuando $x = a$ y $x = b$.

Si hacemos $x = a$ en la fórmula para $g(x)$, obtenemos

$$g(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$$

Entonces, al aplicar la ecuación 6 con $x = b$ y $x = a$, tenemos

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= [g(b) + C] - [g(a) + C] \\ &= g(b) - g(a) = g(b) = \int_a^b f(t)\,dt \end{aligned}$$

La parte 2 del teorema fundamental establece que si conocemos una antiderivada F de f, entonces podemos evaluar $\int_a^b f(x)\,dx$ simplemente calculando la diferencia de los valores de F en los extremos del intervalo $[a, b]$. Sorprende mucho que $\int_a^b f(x)\,dx$, que fue definida mediante un procedimiento complicado que requiere todos los valores de $f(x)$ para $a \leq x \leq b$, pueda determinarse conociendo los valores de $F(x)$ en sólo dos puntos, a y b.

Aunque el teorema sorprende a primera vista, esto es posible cuando se le interpreta en términos físicos. Si $v(t)$ es la velocidad de un objeto y $s(t)$ es su posición en el tiempo t, entonces $v(t) = s'(t)$, así que s es una antiderivada de v. En la sección 5.1 se estudia un objeto que siempre se mueve en la dirección positiva y plantea una conjetura de que el área bajo la curva de la velocidad es igual a la distancia recorrida. Si lo expresamos mediante símbolos:

$$\int_a^b v(t)\,dt = s(b) - s(a)$$

Eso es exactamente lo que el TFC2 establece en este contexto.

V EJEMPLO 5 Evalúe la integral $\int_1^3 e^x\,dx$.

SOLUCIÓN La función $f(x) = e^x$ es continua en todo su dominio, y sabemos que una antiderivada es $F(x) = e^x$, de modo que la parte 2 del teorema fundamental da

$$\int_1^3 e^x\,dx = F(3) - F(1) = e^3 - e$$

Compare el cálculo en el ejemplo 5 con el mucho más difícil del ejemplo 3 de la sección 5.2

Observe que el TFC2 establece que podemos utilizar *cualquier* antiderivada F de f. De este modo podríamos usar la más sencilla, a saber $F(x) = e^x$, en lugar de $e^x + 7$ o de $e^x + C$.

A menudo se recurre a la notación

$$F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Así que la ecuación del TFC2 puede expresarse como

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big]_a^b \qquad \text{donde} \qquad F' = f$$

Otras notaciones comunes son $F(x)\,\big|_a^b$ y $[F(x)]_a^b$.

EJEMPLO 6 Determine el área bajo la parábola $y = x^2$ desde 0 hasta 1.

SOLUCIÓN Una antiderivada de $f(x) = x^2$ es $F(x) = \frac{1}{3}x^3$. El área requerida A se calcula aplicando la parte 2 del teorema fundamental:

$$A = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big]_0^1$$

$$= \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

Al aplicar el teorema fundamental se usa una antiderivada particular F de f. No es necesario usar la antiderivada más general.

Si comparamos el cálculo del ejemplo 6 con el del ejemplo 2 de la sección 5.1, veremos que el teorema fundamental proporciona un método *mucho* más corto.

EJEMPLO 7 Evalúe $\int_3^6 \frac{dx}{x}$.

SOLUCIÓN La integral dada es una forma abreviada de

$$\int_3^6 \frac{1}{x}\,dx$$

Una antiderivada de $f(x) = 1/x$ es $F(x) = \ln|x|$ y, dado que $3 \leqslant x \leqslant 6$, podemos escribir $F(x) = \ln x$. De tal manera que

$$\int_3^6 \frac{1}{x}\,dx = \ln x\Big]_3^6 = \ln 6 - \ln 3$$

$$= \ln\frac{6}{3} = \ln 2$$

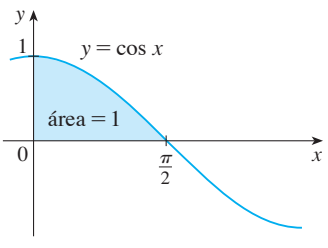


FIGURA 9

EJEMPLO 8 Calcule el área bajo la curva coseno desde 0 hasta b, donde $0 \leqslant b \leqslant \pi/2$.

SOLUCIÓN Puesto que una antiderivada de $f(x) = \cos x$ es $F(x) = \operatorname{sen} x$, tenemos

$$A = \int_0^b \cos x\,dx = \operatorname{sen} x\Big]_0^b = \operatorname{sen} b - \operatorname{sen} 0 = \operatorname{sen} b$$

En particular, al hacer $b = \pi/2$, hemos comprobado que el área bajo la curva coseno desde 0 hasta $\pi/2$ es $\operatorname{sen}(\pi/2) = 1$. (Véase la figura 9.)

Cuando el matemático francés Gilles de Roberval calculó por vez primera el área bajo las curvas seno y coseno en 1635, era una empresa que requería aplicar todo el ingenio del que fuera uno capaz. Si no tuviera la ventaja del teorema fundamental tendría que calcular un difícil límite de sumas mediante oscuras identidades trigonométricas (o bien, un sistema algebraico computarizado como el de ejercicio 29 de la sección 5.1). Fue mucho más difícil para Roberval puesto que el artificio de los límites no se había inventado aún en 1635. Pero ya después de los años de 1660-1670, cuando Barrow descubrió el teorema fundamental, y Newton y Leibniz lo explotaron, este problema se volvió muy fácil como puede verse en el ejemplo 8.

EJEMPLO 9 ¿Cuál es el error en el cálculo siguiente?

$$\int_{-1}^{3} \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1}\Big]_{-1}^{3} = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3}$$

SOLUCIÓN Para empezar, observe que este cálculo es erróneo porque la respuesta es negativa, ya que $f(x) = 1/x^2 \geqslant 0$ y la propiedad 6 de las integrales establece que $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$ cuando $f \geqslant 0$. El teorema fundamental del cálculo se aplica a funciones continuas. En este caso no puede aplicarse porque $f(x) = 1/x^2$ no es continua en $[-1, 3]$. De hecho, f tiene una discontinuidad infinita en $x = 0$, de modo que

$$\int_{-1}^{3} \frac{1}{x^2}\,dx \qquad \text{no existe}$$

La derivación y la integración como procesos inversos

Esta sección finaliza conjuntando las dos partes del teorema fundamental.

Teorema fundamental del cálculo Suponga que f es continua sobre $[a, b]$.

1. Si $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, entonces $g'(x) = f(x)$.
2. $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, donde F es cualquier antiderivada de f; es decir, $F' = f$.

La parte 1 puede reescribirse como

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

en la cual se afirma que si integra f y, a continuación deriva el resultado, regresa a la función original f. Puesto que $F'(x) = f(x)$, la parte 2 puede rescribirse así

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

En esta versión se afirma que si toma una función F, la derivamos y luego integramos el resultado, regresamos a la función original F, pero en la forma $F(b) - F(a)$. Tomadas juntas, las dos partes del teorema fundamental del cálculo expresan que la derivación y la integración son procesos inversos. Cada una deshace lo que hace la otra.

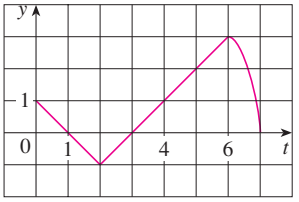
Sin duda, el teorema fundamental del cálculo es el más importante en este campo y, de hecho, alcanza el nivel de uno de los más grandes logros de la mente humana.

Antes de ser descubierto, desde los tiempos de Eudoxo y Arquímedes hasta la época de Galileo y Fermat, los problemas de hallar áreas, volúmenes y longitudes de curvas eran tan difíciles que sólo un genio podía afrontar el reto. Pero ahora, armados con el método sistemático que Newton y Leibniz desarrollaron como el teorema fundamental, en los próximos capítulos veremos que estos retadores problemas son accesibles para todos.

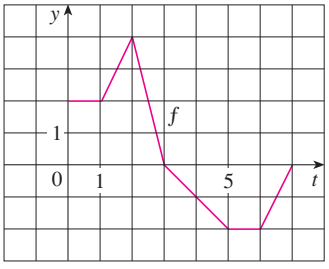
5.3 Ejercicios

1. Explique con exactitud qué se quiere decir con la proposición de que "la derivación y la integración son procesos inversos".

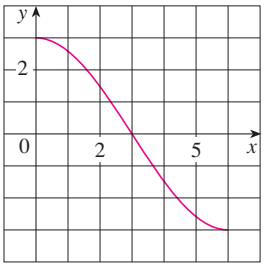
2. Sea $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, donde f es la función cuya gráfica se muestra.
a) Evalúe $g(x)$ para $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ y 6.
b) Estime $g(7)$.
c) ¿Dónde g tiene un valor máximo? ¿Dónde tiene un valor mínimo?
d) Trace una gráfica aproximada de g.



3. Sea $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, donde f es la función cuya gráfica se muestra.
a) Evalúe $g(0)$, $g(2)$, $g(3)$ y $g(6)$.
b) ¿Sobre qué intervalo es creciente g?
c) ¿Dónde g tiene un valor máximo?
d) Trace una gráfica aproximada de g.



4. Sea $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, donde f es la función cuya gráfica se muestra.
a) Evalúe $g(0)$ y $g(6)$.
b) Estime $g(x)$, para $x = 1, 2, 3, 4$ y 5.
c) ¿Sobre qué intervalo es creciente g?
d) ¿Dónde g tiene un valor máximo?
e) Trace una gráfica aproximada de g.
f) Utilice la gráfica del inciso e) para trazar la gráfica de $g'(x)$. Compárela con la gráfica de f.



5-6 Trace el área representada por $g(x)$. A continuación halle $g'(x)$ de dos maneras: a) aplicando la parte 1 del teorema fundamental y b) evaluando la integral utilizando la parte 2 y después derivando.

5. $g(x) = \int_1^x t^2\,dt$

6. $g(x) = \int_0^x (2 + \operatorname{sen} t)\,dt$

7-18 Use la parte 1 del teorema fundamental del cálculo para encontrar la derivada de cada una de las siguientes funciones.

7. $g(x) = \int_1^x \dfrac{1}{t^3 + 1}\,dt$

8. $g(x) = \int_3^x e^{t^2 - t}\,dt$

9. $g(s) = \int_5^s (t - t^2)^8\,dt$

10. $g(r) = \int_0^r \sqrt{x^2 + 4}\,dx$

11. $F(x) = \int_x^\pi \sqrt{1 + \sec t}\,dt$

$\left[\textit{Sugerencia: } \int_x^\pi \sqrt{1 + \sec t}\,dt = -\int_\pi^x \sqrt{1 + \sec t}\,dt\right]$

12. $G(x) = \int_x^1 \cos\sqrt{t}\,dt$

13. $h(x) = \int_1^{e^x} \ln t\,dt$

14. $h(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \dfrac{z^2}{z^4 + 1}\,dz$

15. $y = \int_0^{\tan x} \sqrt{t + \sqrt{t}}\,dt$

16. $y = \int_0^{x^4} \cos^2\theta\,d\theta$

17. $y = \int_{1-3x}^1 \dfrac{u^3}{1 + u^2}\,du$

18. $y = \int_{\operatorname{sen} x}^1 \sqrt{1 + t^2}\,dt$

19-44 Evalúe cada una de las siguientes integrales.

19. $\int_{-1}^{2} (x^3 - 2x)\,dx$

20. $\int_{-1}^{1} x^{100}\,dx$

21. $\int_{1}^{4} (5 - 2t + 3t^2)\,dt$

22. $\int_{0}^{1} \left(1 + \frac{1}{2}u^4 - \frac{2}{5}u^9\right) du$

23. $\int_{1}^{9} \sqrt{x}\,dx$

24. $\int_{1}^{8} x^{-2/3}\,dx$

25. $\int_{\pi/6}^{\pi} \operatorname{sen}\theta\,d\theta$

26. $\int_{-5}^{5} e\,dx$

27. $\int_{0}^{1} (u + 2)(u - 3)\,du$

28. $\int_{0}^{4} (4 - t)\sqrt{t}\,dt$

29. $\int_{1}^{9} \frac{x - 1}{\sqrt{x}}\,dx$

30. $\int_{0}^{2} (y - 1)(2y + 1)\,dy$

31. $\int_{0}^{\pi/4} \sec^2 t\,dt$

32. $\int_{0}^{\pi/4} \sec\theta \tan\theta\,d\theta$

33. $\int_{1}^{2} (1 + 2y)^2\,dy$

34. $\int_{0}^{3} (2 \operatorname{sen} x - e^x)\,dx$

35. $\int_{1}^{2} \frac{v^3 + 3v^6}{v^4}\,dv$

36. $\int_{1}^{18} \sqrt{\frac{3}{z}}\,dz$

37. $\int_{0}^{1} (x^e + e^x)\,dx$

38. $\int_{0}^{1} \cosh t\,dt$

39. $\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{8}{1 + x^2}\,dx$

40. $\int_{1}^{2} \frac{4 + u^2}{u^3}\,du$

41. $\int_{-1}^{1} e^{u+1}\,du$

42. $\int_{1/2}^{1/\sqrt{2}} \frac{4}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$

43. $\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx$ donde $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } 0 \leqslant x < \pi/2 \\ \cos x & \text{si } \pi/2 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$

44. $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$ donde $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } -2 \leqslant x \leqslant 0 \\ 4 - x^2 & \text{si } 0 < x \leqslant 2 \end{cases}$

45-48 ¿Qué es lo incorrecto en cada una de las siguientes ecuaciones?

45. $\int_{-2}^{1} x^{-4}\,dx = \left.\frac{x^{-3}}{-3}\right]_{-2}^{1} = -\frac{3}{8}$

46. $\int_{-1}^{2} \frac{4}{x^3}\,dx = \left.-\frac{2}{x^2}\right]_{-1}^{2} = \frac{3}{2}$

47. $\int_{\pi/3}^{\pi} \sec\theta \tan\theta\,d\theta = \sec\theta\Big]_{\pi/3}^{\pi} = -3$

48. $\int_{0}^{\pi} \sec^2 x\,dx = \tan x\Big]_{0}^{\pi} = 0$

49-52 Utilice una gráfica para dar una burda estimación del área de la región que está bajo la curva dada. Después, encuentre el área exacta.

49. $y = \sqrt[3]{x}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 27$

50. $y = x^{-4}, \quad 1 \leqslant x \leqslant 6$

51. $y = \operatorname{sen} x, \ 0 \leqslant x \leqslant \pi$

52. $y = \sec^2 x, \ 0 \leqslant x \leqslant \pi/3$

53-54 Evalúe la integral e interprétela como una diferencia de áreas. Ilustre mediante un dibujo.

53. $\int_{-1}^{2} x^3\,dx$

54. $\int_{\pi/6}^{2\pi} \cos x\,dx$

55-59 Determine la derivada de cada una de las siguientes funciones:

55. $g(x) = \int_{2x}^{3x} \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}\,du$

$\left[\textit{Sugerencia}: \int_{2x}^{3x} f(u)\,du = \int_{2x}^{0} f(u)\,du + \int_{0}^{3x} f(u)\,du \right]$

56. $g(x) = \int_{1-2x}^{1+2x} t \operatorname{sen} t\,dt$

57. $F(x) = \int_{x}^{x^2} e^{t^2}\,dt$

58. $F(x) = \int_{\sqrt{x}}^{2x} \arctan t\,dt$

59. $y = \int_{\cos x}^{\operatorname{sen} x} \ln(1 + 2v)\,dv$

---

60. Si $f(x) = \int_{0}^{x} (1 - t^2)e^{t^2}\,dt$, ¿sobre qué intervalos es creciente f?

61. ¿Sobre qué intervalo la curva

$$y = \int_{0}^{x} \frac{t^2}{t^2 + t + 2}\,dt$$

es cóncava hacia abajo?

62. Si $f(x) = \int_{0}^{\operatorname{sen} x} \sqrt{1 + t^2}\,dt$ y $g(y) = \int_{3}^{y} f(x)\,dx$, encuentre $g''(\pi/6)$.

63. Si $f(1) = 12$, f' es continua y $\int_{1}^{4} f'(x)\,dx = 17$, ¿cual es el valor de $f(4)$?

64. La **función error**

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{x} e^{-t^2}\,dt$$

se usa en probabilidad, estadística e ingeniería.

a) Demuestre que $\int_{a}^{b} e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,[\operatorname{erf}(b) - \operatorname{erf}(a)]$.

b) Demuestre que la función $y = e^{x^2}\operatorname{erf}(x)$ satisface la ecuación diferencial $y' = 2xy + 2/\sqrt{\pi}$.

65. La función S de Fresnel se definió en el ejemplo 3, y en las figuras 7 y 8 se trazaron sus gráficas.

a) ¿Sobre qué valores de x tiene valores máximos locales esta función?

b) ¿Sobre qué intervalos esta función es cóncava hacia arriba?

SAC c) Utilice una gráfica para resolver la siguiente ecuación correcta hasta dos cifras decimales.

$$\int_0^x \operatorname{sen}(\pi t^2/2)\,dt = 0.2$$

SAC **66.** La **función integral sinusoidal**

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$$

es importante en la ingeniería eléctrica. [El integrando $f(t) = (\operatorname{sen} t)/t$ no está definido cuando $t = 0$, pero sabemos que su límite es 1 cuando $t \to 0$. De modo que definimos $f(0) = 1$, y esto convierte a f en una función continua en todo su dominio].

a) Dibuje la gráfica de Si.

b) ¿Sobre qué valores de x tiene esta función valores máximos locales?

c) Encuentre las coordenadas del primer punto de inflexión a la derecha del origen.

d) ¿Tiene asíntotas horizontales esta función?

e) Resuelva la siguiente ecuación correcta hasta una cifra decimal.

$$\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt = 1$$

67-68 Sea $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, donde f es la función cuya gráfica se muestra.

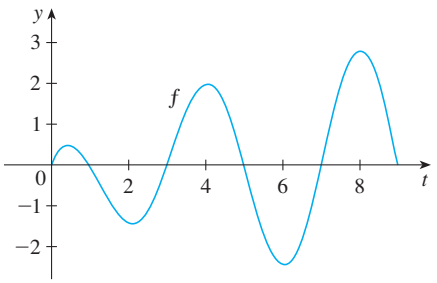
a) ¿Sobre qué valores de x se presentan los valores máximos y mínimos locales de g?

b) ¿Dónde alcanza g su valor máximo absoluto?

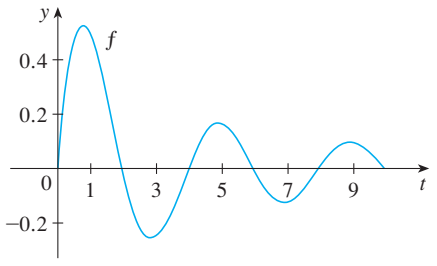
c) ¿Sobre qué intervalos es cóncava hacia abajo g?

d) Trace la gráfica de g.

67.



68.



69-70 Evalúe el límite reconociéndolo primero como una suma de Riemann para una función definida sobre [0, 1].

69. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^3}{n^4}$

70. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \sqrt{\frac{3}{n}} + \cdots + \sqrt{\frac{n}{n}}\right)$

71. Justifique 3 para el caso $h < 0$.

72. Si f es continua y g y h son funciones derivables, determine una fórmula para

$$\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt$$

73. a) Demuestre que $1 \leqslant \sqrt{1 + x^3} \leqslant 1 + x^3$ para $x \geqslant 0$.

b) Demuestre que $1 \leqslant \int_0^1 \sqrt{1 + x^3}\,dx \leqslant 1.25$.

74. a) Demuestre que $\cos(x^2) \geqslant \cos x$ para $0 \leqslant x \leqslant 1$.

b) Deduzca que $\int_0^{\pi/6} \cos(x^2)\,dx \geqslant \frac{1}{2}$.

75. Demuestre que

$$0 \leqslant \int_5^{10} \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}\,dx \leqslant 0.1$$

comparando el integrando con una función más simple.

76. Sea

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

y $\qquad g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

a) Encuentre una expresión para $g(x)$ similar a la correspondiente a $f(x)$.

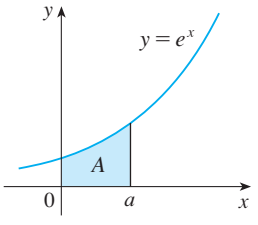
b) Trace las gráficas de f y g.

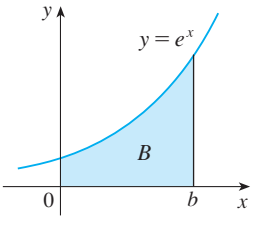
c) ¿Dónde es f derivable? ¿Dónde es g derivable?

77. Halle una función f y un número a tal que

$$6 + \int_a^x \frac{f(t)}{t^2}\,dt = 2\sqrt{x} \qquad \text{para toda } x > 0$$

78. El área B es tres veces el área A. Exprese b en términos de a.





79. Una compañía manufacturera tiene una pieza importante de un equipo que se deprecia a una tasa (continua) $f = f(t)$, donde t es el tiempo medido en meses desde que se le sometió a su más reciente reparación. Ya que cada vez que la máquina se somete a una reparación se incurre en un costo fijo, la compañía desea determinar el tiempo óptimo T (en meses) entre las reparaciones.

a) Explique por qué $\int_0^t f(s)\,ds$ representa la pérdida en valor de la máquina a lo largo del tiempo t a partir de la última reparación.

b) Sea $C = C(t)$ dada por

$$C(t) = \frac{1}{t}\left[A + \int_0^t f(s)\,ds\right]$$

¿Qué representa C y por que desearía la compañía minimizar C?

c) Demuestre que C tiene un valor mínimo en los números $t = T$ donde $C(T) = f(T)$.

80. Una compañía de alta tecnología compra un nuevo sistema de cómputo cuyo valor inicial es V. El sistema se depreciará a una tasa $f = f(t)$ y acumulará costos de mantenimiento a razón de $g = g(t)$, donde t es el tiempo medido en meses. La compañía desea determinar el tiempo óptimo para reemplazar el sistema.

a) Sea

$$C(t) = \frac{1}{t}\int_0^t [f(s) + g(s)]\,ds$$

Demuestre que los números críticos de C se presentan en los números t donde $C(t) = f(t) + g(t)$.

b) Suponga que

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{V}{15} - \dfrac{V}{450}t & \text{si } 0 < t \leq 30 \\ 0 & \text{si } t > 30 \end{cases}$$

y $$g(t) = \frac{Vt^2}{12\,900} \qquad t > 0$$

Determine la duración del tiempo T para que la depreciación total $D(t) = \int_0^t f(s)\,ds$ equivalga al valor inicial V.

c) Determine el valor mínimo absoluto de C sobre $[0, T]$.

d) Trace las gráficas de C y $f + g$ en el mismo sistema de coordenadas y compruebe el resultado del inciso a) en este caso.

5.4 Integrales indefinidas y el teorema del cambio neto

Ya vimos en la sección 5.3 que mediante la segunda parte del teorema fundamental del cálculo se obtiene un método muy eficaz para evaluar la integral definida de una función, si suponemos que puede encontrarse una antiderivada de la función. En esta sección se presenta una notación para la antiderivada, se repasan las fórmulas de las antiderivadas y se usan para evaluar integrales definidas. Asimismo, replanteamos el TFC2, de una manera que facilita más la aplicación a problemas relacionados con las ciencias y la ingeniería.

Integrales indefinidas

Ambas partes del teorema fundamental establecen relaciones entre antiderivadas e integrales definidas. La parte 1 establece que si f es continua, entonces $\int_a^x f(t)\,dt$ es una antiderivada de f. La parte 2 plantea que $\int_a^b f(x)\,dx$ puede determinarse evaluando $F(b) - F(a)$, donde F es una antiderivada de f.

Necesitamos una conveniente notación para las antiderivadas que nos facilite el trabajo con ellas. Debido a la relación dada por el teorema fundamental entre las antiderivadas y las integrales, por tradición se usa la notación $\int f(x)\,dx$ para una antiderivada de f y se llama **integral indefinida**. Así,

$$\int f(x)\,dx = F(x) \quad \text{significa que} \quad F'(x) = f(x)$$

Por ejemplo, podemos escribir

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C \qquad \text{porque} \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3} + C\right) = x^2$$

De este modo, consideramos la integral indefinida como la representante de toda una *familia* de funciones (es decir, una antiderivada para cada valor de la constante C).

Distinga con cuidado entre las integrales definidas y las indefinidas. Una integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ es un *número*, mientras que una integral indefinida $\int f(x)\,dx$ es una *función* (o una familia de funciones). La relación entre ellas la proporciona la parte 2 del teorema fundamental. Si f es continua sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int f(x)\,dx\Big]_a^b$$

La eficacia del teorema fundamental depende de que se cuente con una lista de antiderivadas de funciones. Por tanto, se presenta de nuevo la tabla de fórmulas de antiderivación de la sección 4.9, más otras cuantas, en la notación de las integrales indefinidas. Cualquiera de las fórmulas puede comprobarse al derivar la función del lado derecho y obtener el integrando. Por ejemplo,

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C \qquad \text{porque} \qquad \frac{d}{dx}(\tan x + C) = \sec^2 x$$

1 Tabla de integrales indefinidas

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx \qquad \int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int k\,dx = kx + C$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C \qquad \int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C \qquad \int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \tan^{-1} x + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{sen}^{-1} x + C$$

$$\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + C \qquad \int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x + C$$

De acuerdo con el teorema 4.9.1, la antiderivada más general *sobre un intervalo dado* se obtiene por la adición de una constante a una antiderivada particular. **Adoptamos la convención de que cuando se proporciona una fórmula para una integral indefinida general, es válida sólo sobre un intervalo**. Así, escribimos

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + C$$

con el entendido de que es válida sobre el intervalo $(0, \infty)$ o sobre el intervalo $(-\infty, 0)$. Esto se cumple a pesar del hecho de que la antiderivada general de la función $f(x) = 1/x^2$, $x \neq 0$, es

$$F(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x} + C_1 & \text{si } x < 0 \\ -\dfrac{1}{x} + C_2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

EJEMPLO 1 Encuentre la integral indefinida general

$$\int (10x^4 - 2\sec^2 x)\, dx$$

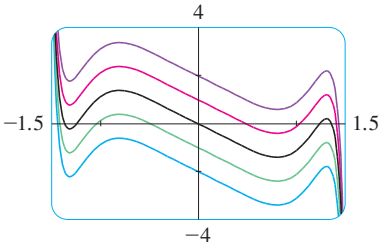


FIGURA 1

En la figura 1 se tiene la gráfica de la integral indefinida del ejemplo 1 para varios valores de C. Aquí, el valor de C es la intersección con el eje y.

SOLUCIÓN Si usamos nuestra convención y la tabla 1, tenemos

$$\begin{aligned} \int (10x^4 - 2\sec^2 x)\, dx &= 10\int x^4\, dx - 2\int \sec^2 x\, dx \\ &= 10\,\frac{x^5}{5} - 2\tan x + C \\ &= 2x^5 - 2\tan x + C \end{aligned}$$

Le conviene comprobar esta respuesta derivándola.

V EJEMPLO 2 Evalúe $\displaystyle\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta$.

SOLUCIÓN Esta integral indefinida no es inmediata utilizando la tabla 1, por lo que debemos aplicar las identidades trigonométricas para rescribir la función antes de integrar:

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta &= \int \left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\right)\left(\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right) d\theta \\ &= \int \csc\theta \cot\theta\, d\theta = -\csc\theta + C \end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Evalúe $\displaystyle\int_0^3 (x^3 - 6x)\, dx$.

SOLUCIÓN Al aplicar el TFC2 y la tabla 1, tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^3 (x^3 - 6x)\, dx &= \frac{x^4}{4} - 6\,\frac{x^2}{2}\Big]_0^3 \\ &= \left(\tfrac{1}{4}\cdot 3^4 - 3\cdot 3^2\right) - \left(\tfrac{1}{4}\cdot 0^4 - 3\cdot 0^2\right) \\ &= \tfrac{81}{4} - 27 - 0 + 0 = -6.75 \end{aligned}$$

Compare este cálculo con el del ejemplo 2b) de la sección 5.2.

V EJEMPLO 4 Determine $\int_0^2 \left(2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right) dx$ e interprete el resultado en términos de áreas.

SOLUCIÓN El teorema fundamental da

$$\begin{aligned}\int_0^2 \left(2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right) dx &= 2\frac{x^4}{4} - 6\frac{x^2}{2} + 3\tan^{-1}x \Big]_0^2 \\ &= \tfrac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 3\tan^{-1}x \Big]_0^2 \\ &= \tfrac{1}{2}(2^4) - 3(2^2) + 3\tan^{-1}2 - 0 \\ &= -4 + 3\tan^{-1}2\end{aligned}$$

Éste es el valor exacto de la integral. Si desea una aproximación decimal, utilice una calculadora para obtener un valor aproximado de $\tan^{-1}2$. Al hacerlo obtenemos

$$\int_0^2 \left(2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right) dx \approx -0.67855$$

La figura 2 es la gráfica del integrando del ejemplo 4. Sabemos por la sección 5.2 que el valor de la integral se puede interpretar como un área neta: la suma de las áreas marcadas con un signo de más menos el área marcada con un signo menos.

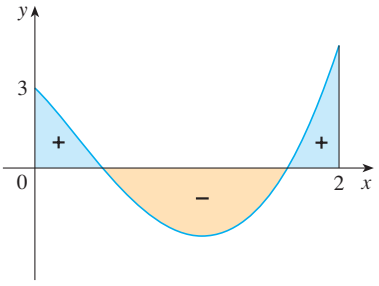


FIGURA 2

EJEMPLO 5 Evalúe $\int_1^9 \frac{2t^2 + t^2\sqrt{t} - 1}{t^2}\, dt$.

SOLUCIÓN En primer lugar, necesitamos escribir el integrando en una forma más sencilla, llevando a cabo la división:

$$\begin{aligned}\int_1^9 \frac{2t^2 + t^2\sqrt{t} - 1}{t^2}\, dt &= \int_1^9 (2 + t^{1/2} - t^{-2})\, dt \\ &= 2t + \frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{t^{-1}}{-1}\Big]_1^9 = 2t + \tfrac{2}{3}t^{3/2} + \frac{1}{t}\Big]_1^9 \\ &= \left(2\cdot 9 + \tfrac{2}{3}\cdot 9^{3/2} + \tfrac{1}{9}\right) - \left(2\cdot 1 + \tfrac{2}{3}\cdot 1^{3/2} + \tfrac{1}{1}\right) \\ &= 18 + 18 + \tfrac{1}{9} - 2 - \tfrac{2}{3} - 1 = 32\tfrac{4}{9}\end{aligned}$$

Aplicaciones

La parte 2 del teorema fundamental establece que si f es continua sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

donde F es cualquier antiderivada de f. Esto significa que $F' = f$, de forma que puede volver a escribirse la ecuación como

$$\int_a^b F'(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

Sabemos que $F'(x)$ representa la razón de cambio de $y = F(x)$ respecto a x y $F(b) - F(a)$ es el cambio en y cuando x cambia de a hacia b. [Observe que y podría, por ejemplo, incrementarse y luego decrecer para volver a incrementarse. Si bien y podría cambiar en ambas direcciones, $F(b) - F(a)$ representa el cambio *neto* en y]. De manera que podemos reformular verbalmente el TFC2 en los términos siguientes:

Teorema del cambio neto La integral de una razón de cambio es el cambio neto:

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Este principio puede aplicarse a todas las razones de cambio en las ciencias naturales y sociales que se discutieron en la sección 3.7. Enseguida se dan unos cuantos ejemplos de esta idea:

- Si $V(t)$ es el volumen de agua en un depósito, en el instante t, entonces su derivada $V'(t)$ es la razón a la cual fluye el agua hacia el depósito, en el instante t. Por eso,

$$\int_{t_1}^{t_2} V'(t)\,dt = V(t_2) - V(t_1)$$

es el cambio en la cantidad de agua en el depósito entre los instantes t_1 y t_2.

- Si $[C](t)$ es la concentración del producto de una reacción química en el instante t, entonces la rapidez de reacción es la derivada $d[C]/dt$. De tal manera,

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d[\mathrm{C}]}{dt}\,dt = [\mathrm{C}](t_2) - [\mathrm{C}](t_1)$$

es el cambio en la concentración de C, desde el instante t_1 al instante t_2.

- Si la masa de una varilla, medida desde el extremo izquierdo hasta un punto x, es $m(x)$, entonces la densidad lineal es $\rho(x) = m'(x)$. Por consiguiente,

$$\int_a^b \rho(x)\,dx = m(b) - m(a)$$

es la masa del segmento de la varilla entre $x = a$ y $x = b$.

- Si la rapidez de crecimiento de una población es dn/dt, entonces

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dn}{dt}\,dt = n(t_2) - n(t_1)$$

es el cambio neto en la población durante el periodo de tiempo desde t_1 hasta t_2. (La población aumenta cuando ocurren nacimientos y disminuye cuando tienen lugar algunas muertes. El cambio neto toma en cuenta tanto nacimientos como decesos.)

- Si $C(x)$ es el costo de producir x unidades de un artículo, entonces el costo marginal es la derivada $C'(x)$. De esa manera

$$\int_{x_1}^{x_2} C'(x)\,dx = C(x_2) - C(x_1)$$

es el incremento en el costo cuando la producción aumenta de x_1 unidades hasta x_2 unidades.

- Si un objeto se mueve a lo largo de una línea recta con función posición $s(t)$, entonces su velocidad es $v(t) = s'(t)$, de modo que

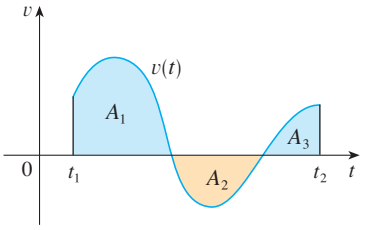
$$\boxed{2} \qquad \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = s(t_2) - s(t_1)$$

es el cambio neto de la posición, o *desplazamiento*, de la partícula durante el periodo de tiempo desde t_1 hasta t_2. En la sección 5.1 se infirió que esto era verdadero para el caso en que el objeto se mueve en la dirección positiva, pero ahora hemos demostrado que siempre es verdadero.

- Si queremos calcular la distancia recorrida durante el intervalo, tenemos que considerar los intervalos cuando $v(t) \geqslant 0$ (la partícula se mueve hacia la derecha) y también los intervalos cuando $v(t) \leqslant 0$ (la partícula se mueve hacia la izquierda). En ambos casos la distancia se calcula al integrar $|v(t)|$, la rapidez. Por consiguiente,

$$\boxed{3} \qquad \int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\,dt = \text{distancia total recorrida}$$

En la figura 3 se muestra cómo interpretar el desplazamiento y la distancia recorrida en términos de las áreas bajo una curva de velocidad.



$$\text{desplazamiento} = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = A_1 - A_2 + A_3$$

$$\text{distancia} = \int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\,dt = A_1 + A_2 + A_3$$

FIGURA 3

- La aceleración del objeto es $a(t) = v'(t)$, así que

$$\int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt = v(t_2) - v(t_1)$$

es el cambio en la velocidad, desde el instante t_1 hasta el instante t_2.

V EJEMPLO 6 Una partícula se mueve a lo largo de una recta de modo que su velocidad en el instante t es $v(t) = t^2 - t - 6$ (medida en metros por segundo).
a) Encuentre el desplazamiento de la partícula durante el periodo $1 \leqslant t \leqslant 4$.
b) Halle la distancia recorrida durante este periodo de tiempo.

SOLUCIÓN
a) Por la ecuación 2, el desplazamiento es

$$\begin{aligned} s(4) - s(1) &= \int_1^4 v(t)\,dt = \int_1^4 (t^2 - t - 6)\,dt \\ &= \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 6t\right]_1^4 = -\frac{9}{2} \end{aligned}$$

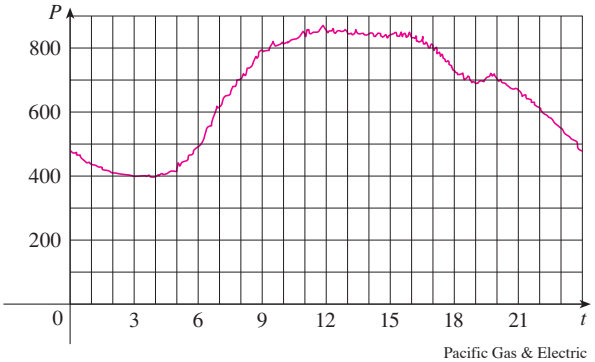
Esto significa que la partícula se desplaza 4.5 m hacia la izquierda.

b) Observe que $v(t) = t^2 - t - 6 = (t + 3)(t - 2)$ y, por eso, $v(t) \leqslant 0$ sobre el intervalo $[1, 3]$ y $v(t) \geqslant 0$ sobre $[3, 4]$. Así que, a partir de la ecuación 3, la distancia recorrida es

Para integrar el valor absoluto de $v(t)$, use la propiedad 5 de las integrales de la sección 5.2 para dividir la integral en dos partes, una donde $v(t) \leqslant 0$ y otra donde $v(t) \geqslant 0$.

$$\begin{aligned} \int_1^4 |v(t)|\,dt &= \int_1^3 [-v(t)]\,dt + \int_3^4 v(t)\,dt \\ &= \int_1^3 (-t^2 + t + 6)\,dt + \int_3^4 (t^2 - t - 6)\,dt \\ &= \left[-\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 6t\right]_1^3 + \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 6t\right]_3^4 \\ &= \frac{61}{6} \approx 10.17\,\text{m} \end{aligned}$$

EJEMPLO 7 En la figura 4 se muestra el consumo de energía eléctrica (potencia) en la ciudad de San Francisco un día del mes de septiembre (P se mide en megavatios y t en horas, a partir de la medianoche). Estime la energía que se utilizó ese día.



Pacific Gas & Electric

FIGURA 4

SOLUCIÓN La potencia es la razón de cambio de la energía: $P(t) = E'(t)$. De modo que, por el teorema del cambio neto,

$$\int_0^{24} P(t)\,dt = \int_0^{24} E'(t)\,dt = E(24) - E(0)$$

es la cantidad total de energía que se usó ese día. Haga una aproximación de la integral con la regla del punto medio con 12 subintervalos y $\Delta t = 2$:

$$\begin{aligned}\int_0^{24} P(t)\,dt &\approx [P(1) + P(3) + P(5) + \cdots + P(21) + P(23)]\,\Delta t \\ &\approx (440 + 400 + 420 + 620 + 790 + 840 + 850 \\ &\qquad + 840 + 810 + 690 + 670 + 550)(2) \\ &= 15\,840\end{aligned}$$

La energía usada fue de unos 15 840 megavatio-horas. ■

Una nota acerca de unidades

¿Cómo sabe qué unidades usar para la energía en el ejemplo 7? La integral $\int_0^{24} P(t)\,dt$ se define como el límite de las sumas de términos de la forma $P(t_i^*)\,\Delta t$. Ahora bien, $P(t_i^*)$ se mide en megavatios y Δt en horas, de modo que su producto se mide en megavatios-horas. Lo mismo es verdadero para el límite. En general, la unidad de medida para $\int_a^b f(x)\,dx$ es el producto de la unidad para $f(x)$ y la unidad para x.

5.4 Ejercicios

1-4 Verifique mediante derivación que cada una de las siguientes fórmulas es correcta.

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\,dx = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C$

2. $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C$

3. $\displaystyle\int \cos^3 x\,dx = \operatorname{sen} x - \tfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C$

4. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{a+bx}}\,dx = \frac{2}{3b^2}(bx - 2a)\sqrt{a+bx} + C$

5-18 Obtenga las siguientes integrales indefinidas generales.

5. $\displaystyle\int (x^2 + x^{-2})\,dx$

6. $\displaystyle\int \left(\sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^2}\right) dx$

7. $\int \left(x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x - 2\right) dx$

8. $\int (y^3 + 1.8y^2 - 2.4y)\, dy$

9. $\int (u + 4)(2u + 1)\, du$

10. $\int v(v^2 + 2)^2\, dv$

11. $\int \dfrac{x^3 - 2\sqrt{x}}{x}\, dx$

12. $\int \left(x^2 + 1 + \dfrac{1}{x^2 + 1}\right) dx$

13. $\int (\operatorname{sen} x + \operatorname{senh} x)\, dx$

14. $\int (\csc^2 t - 2e^t)\, dt$

15. $\int (\theta - \csc\theta \cot\theta)\, d\theta$

16. $\int \sec t\,(\sec t + \tan t)\, dt$

17. $\int (1 + \tan^2 \alpha)\, d\alpha$

18. $\int \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} x}\, dx$

19–20 Determine la integral indefinida general. Ilustre mediante una gráfica varios miembros de la familia en la misma pantalla.

19. $\int \left(\cos x + \frac{1}{2}x\right) dx$

20. $\int (e^x - 2x^2)\, dx$

21–46 Evalúe cada una de las siguientes integrales.

21. $\int_{-2}^{3} (x^2 - 3)\, dx$

22. $\int_{1}^{2} (4x^3 - 3x^2 + 2x)\, dx$

23. $\int_{-2}^{0} \left(\frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{4}t^3 - t\right) dt$

24. $\int_{0}^{3} (1 + 6w^2 - 10w^4)\, dw$

25. $\int_{0}^{2} (2x - 3)(4x^2 + 1)\, dx$

26. $\int_{-1}^{1} t(1 - t)^2\, dt$

27. $\int_{0}^{\pi} (5e^x + 3 \operatorname{sen} x)\, dx$

28. $\int_{1}^{2} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{4}{x^3}\right) dx$

29. $\int_{1}^{4} \left(\dfrac{4 + 6u}{\sqrt{u}}\right) du$

30. $\int_{0}^{4} \left(3\sqrt{t} - 2e^t\right) dt$

31. $\int_{0}^{1} x\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}\right) dx$

32. $\int_{1}^{4} \dfrac{\sqrt{y} - y}{y^2}\, dy$

33. $\int_{1}^{2} \left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{2}{x}\right) dx$

34. $\int_{0}^{1} (5x - 5^x)\, dx$

35. $\int_{0}^{1} (x^{10} + 10^x)\, dx$

36. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \csc^2\theta\, d\theta$

37. $\int_{0}^{\pi/4} \dfrac{1 + \cos^2\theta}{\cos^2\theta}\, d\theta$

38. $\int_{0}^{\pi/3} \dfrac{\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\theta \tan^2\theta}{\sec^2\theta}\, d\theta$

39. $\int_{1}^{64} \dfrac{1 + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

40. $\int_{-10}^{10} \dfrac{2e^x}{\operatorname{senh} x + \cosh x}\, dx$

41. $\int_{0}^{\sqrt{3}/2} \dfrac{dr}{\sqrt{1 - r^2}}$

42. $\int_{1}^{2} \dfrac{(x - 1)^3}{x^2}\, dx$

43. $\int_{0}^{1/\sqrt{3}} \dfrac{t^2 - 1}{t^4 - 1}\, dt$

44. $\int_{0}^{2} |2x - 1|\, dx$

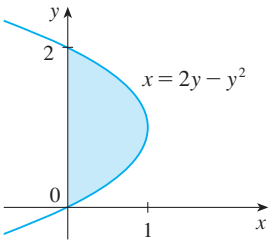
45. $\int_{-1}^{2} (x - 2|x|)\, dx$

46. $\int_{0}^{3\pi/2} |\operatorname{sen} x|\, dx$

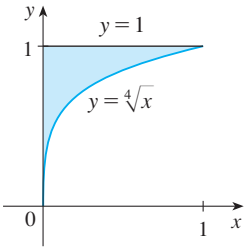
47. Use una gráfica para estimar las intersecciones con el eje x de la curva $y = 1 - 2x - 5x^4$. Luego utilice esta información para estimar el área de la región que se encuentra bajo la curva y arriba del eje x.

48. Repita el ejercicio 47 para la curva $y = (x^2 + 1)^{-1} - x^4$.

49. El área de la región que se encuentra a la derecha del eje y y a la izquierda de la parábola $x = 2y - y^2$ (el área sombreada de la figura) se expresa con la integral $\int_0^2 (2y - y^2)\, dy$. (Gire su cabeza en sentido de las manecillas del reloj y considere a la región que se encuentra bajo la curva $x = 2y - y^2$ desde $y = 0$ hasta $y = 2$.) Encuentre el área de la región.



50. Las fronteras de la región sombreada son el eje y, la recta $y = 1$ y la curva $y = \sqrt[4]{x}$. Encuentre el área de esta región escribiendo x como función de y e integrando respecto a esta última (como en el ejercicio 49).



51. Si $w'(t)$ es la rapidez de crecimiento de un niño en libras por año, ¿qué representa $\int_5^{10} w'(t)\, dt$?

52. La corriente en un alambre se define como la derivada de la carga: $I(t) = Q'(t)$. (Véase el ejemplo 3 de la sección 3.7.) ¿Qué representa $\int_a^b I(t)\, dt$?

53. Si se fuga aceite de un tanque con una rapidez de $r(t)$ galones por minuto en el instante t, ¿qué representa $\int_0^{120} r(t)\, dt$?

54. Una población de abejas se inicia con 100 ejemplares y se incrementa a razón de $n'(t)$ abejas por semana. ¿Qué representa $100 + \int_0^{15} n'(t)\, dt$?

55. En la sección 4.7 se definió la función ingreso marginal $R'(x)$ como la derivada de la función ingreso $R(x)$, donde x es el número de unidades vendidas. ¿Qué representa $\int_{1000}^{5000} R'(x)\,dx$?

56. Si $f(x)$ es la pendiente de un sendero a una distancia de x millas del principio del mismo, ¿qué representa $\int_3^5 f(x)\,dx$?

57. ¿Si x se mide en metros y $f(x)$ en newtons, ¿cuáles son las unidades para $\int_0^{100} f(x)\,dx$?

58. Si las unidades para x son pies y las unidades para $a(x)$ son libras por pie, ¿cuáles son las unidades para da/dx? ¿Qué unidades tiene $\int_2^8 a(x)\,dx$?

59-60 Se da la función velocidad (en metros por segundo) para una partícula que se mueve a lo largo de una recta. Encuentre a) el desplazamiento, y b) la distancia recorrida por la partícula durante el intervalo de tiempo dado.

59. $v(t) = 3t - 5, \quad 0 \leq t \leq 3$

60. $v(t) = t^2 - 2t - 8, \quad 1 \leq t \leq 6$

61-62 Se da la función aceleración (en m/s^2) y la velocidad inicial para una partícula que se desplaza a lo largo de una recta. Encuentre a) la velocidad en el instante t y b) la distancia recorrida durante el intervalo de tiempo dado.

61. $a(t) = t + 4, \quad v(0) = 5, \quad 0 \leq t \leq 10$

62. $a(t) = 2t + 3, \quad v(0) = -4, \quad 0 \leq t \leq 3$

---

63. Se da la densidad lineal de una varilla de longitud 4 m mediante $\rho(x) = 9 + 2\sqrt{x}$ medida en kilogramos por metro, donde x se mide en metros desde un extremo de la varilla. Encuentre la masa total de esta última.

64. Del fondo de un tanque de almacenamiento fluye agua con una rapidez de $r(t) = 200 - 4t$ litros por minuto, donde $0 \leq t \leq 50$. Encuentre la cantidad de agua que fluye del tanque durante los primeros 10 minutos.

65. La velocidad de un automóvil se leyó en su velocímetro a intervalos de 10 segundos y se registró en una tabla. Use la regla del punto medio para estimar la distancia recorrida por el vehículo.

t (s)	v (mi/h)	t (s)	v (mi/h)
0	0	60	56
10	38	70	53
20	52	80	50
30	58	90	47
40	55	100	45
50	51		

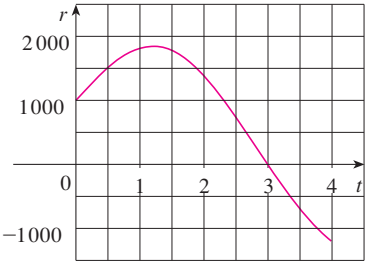
66. Suponga que un volcán hace erupción y en la tabla se proporcionan las lecturas de la cantidad a la que se expelen materiales sólidos hacia la atmósfera. El tiempo t se mide en segundos y las unidades para $r(t)$ son toneladas métricas por segundo.

t	0	1	2	3	4	5	6
$r(t)$	2	10	24	36	46	54	60

a) Dé estimaciones superiores e inferiores para la cantidad $Q(6)$ de materiales expelidos una vez que transcurren seis segundos.
b) Use la regla del punto medio para estimar $Q(6)$.

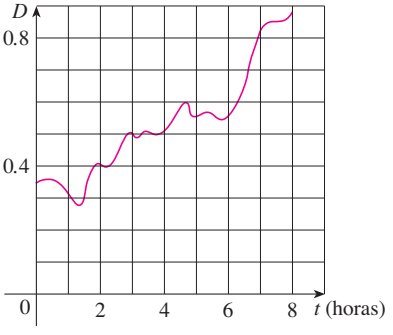
67. El costo marginal de fabricar x yardas de cierta tela es $C'(x) = 3 - 0.01x + 0.000006x^2$ (en dólares por yarda). Encuentre el incremento en el costo si el nivel de producción aumenta de 2 000 a 4 000 yardas.

68. Fluye agua hacia adentro y afuera de un tanque de almacenamiento. Se muestra una gráfica de la razón de cambio $r(t)$ del volumen de agua que hay en el tanque, en litros por día. Si la cantidad de agua que contiene el tanque en el instante $t = 0$ es 25 000 L, use la regla del punto medio para estimar la cantidad de agua cuatro días después.

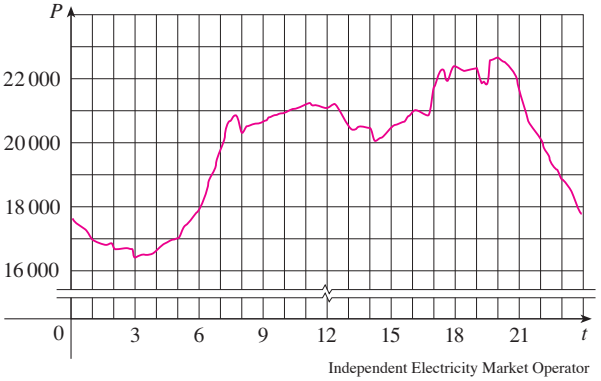


69. Una población de bacterias es de 4 000 en el tiempo $t = 0$ y su rapidez de crecimiento es $1000 \cdot 2^t$ bacterias por hora después de t horas ¿Cuál es la población después de una hora?

70. La siguiente figura muestra la gráfica del tráfico sobre un proveedor de servicios internet en línea de datos T1 desde la medianoche hasta las 8:00. D corresponde a los datos transmitidos, medidos en megabits por segundo. Utilice la regla del punto medio para estimar la cantidad total de datos transmitidos durante ese periodo de tiempo.



71. En la gráfica se muestra el consumo de energía en la provincia de Ontario, Canadá, para el 9 de diciembre de 2004 (P se mide en megavatios; t se mide en horas, comenzando a medianoche). Usando el hecho de que la potencia es la rapidez de cambio de la energía, estime la energía utilizada en ese día.



Independent Electricity Market Operator

72. El 7 de mayo de 1992 el trasbordador espacial *Endeavour* fue lanzado en la misión STS-49, cuya finalidad fue instalar un nuevo motor de impulso en el perigeo en un satélite Intelsat de comunicaciones. En la tabla se dan los datos de la velocidad del trasbordador entre el despegue y el desprendimiento de los cohetes auxiliares de combustible sólido.

a) Use una calculadora graficadora o una computadora para modelar estos datos con un polinomio de tercer grado.

b) Use el modelo del inciso a) para estimar la altura alcanzada por el *Endeavour*, 125 segundos después del despegue.

Suceso	Tiempo (s)	Velocidad (pies/s)
Lanzamiento	0	0
Inicio de la maniobra de giro alrededor del eje	10	185
Fin de la maniobra de giro alrededor del eje	15	319
Válvula de estrangulación a 89%	20	447
Válvula de estrangulación a 67%	32	742
Válvula de estrangulación a 104%	59	1 325
Presión dinámica máxima	62	1 445
Separación del cohete auxiliar de combustible sólido	125	4 151

REDACCIÓN DE PROYECTO NEWTON, LEIBNIZ Y LA INVENCIÓN DEL CÁLCULO

Los inventores del Cálculo fueron *sir* Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Pero las ideas básicas detrás de la integración fueron investigadas hace 2 500 años por los antiguos griegos, como Eudoxo y Arquímedes, y Pierre Fermat (1601-1665), Isaac Barrow, (1630-1677) y otros fueron los pioneros en hallar rectas tangentes. Barrow, el profesor de Newton en Cambridge, fue el primero en comprender la relación inversa entre la derivación y la integración. Lo que Newton y Leibniz hicieron fue usar esta relación, en la forma del teorema fundamental del cálculo, para convertir este último en una sistemática disciplina matemática. En este sentido es que se da a Newton y Leibniz el crédito por la invención del Cálculo.

Lea acerca de las colaboraciones de estos hombres en una o más de las referencias que se proporcionan en la bibliografía y escriba un informe sobre uno de los tres temas siguientes. Puede incluir detalles biográficos, pero el reporte debe concentrarse en una descripción, en cierto detalle, de los métodos y notaciones. En particular, consulte uno de los libros fuente, en los cuales se dan extractos de las publicaciones originales de Newton y Leibniz, traducidas del latín al inglés.

- El papel de Newton en el desarrollo del Cálculo.
- El papel de Leibniz en el desarrollo del Cálculo.
- La controversia entre los seguidores de Newton y los de Leibniz sobre la prioridad en la invención del cálculo.

Bibliografía

1. Carl Boyer y Uta Merzbach, *A History of Mathematics*, Nueva York: John Wiley, 1987, capítulo 19.
2. Carl Boyer, *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*, Nueva York: Dover, 1959, capítulo V.
3. C. H. Edwards, *The Historical Development of the Calculus*, Nueva York: Springer-Verlag, 1979, capítulos 8 y 9.

4. Howard Eves, *An Introduction to the History of Mathematics*, 6a. ed., Nueva York: Saunders, 1990, capítulo 11.
5. C. C. Gillispie, ed., *Dictionary of Scientific Biography*, Nueva York: Scribner's, 1974. Véase el artículo sobre Leibniz escrito por Joseph Hofmann, en el volumen VIII, y el artículo sobre Newton escrito por I. B. Cohen, en el volumen X.
6. Victor Katz, *A History of Mathematics: An Introduction*, Nueva York: Harper-Coffins, 1993, capítulo 12.
7. Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Nueva York: Oxford University Press, 1972, capítulo 17.

Libros fuente

1. John Fauvel y Jeremy Gray, eds., *The History of Mathematics: A Reader*, Londres: MacMillan Press, 1987 capítulos 12 y 13.
2. D. E. Smith, ed., *A Sourcebook in Mathematics*, Londres, MacMillan Press, 1987, capítulos 12 y 13.
3. D. J. Struik, ed., *A Sourcebook in Mathematics, 1200-1800*, Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1969; capítulo V.

5.5 Regla de sustitución

Debido a la existencia del teorema fundamental, es importante disponer de técnicas para hallar antiderivadas. Pero nuestras fórmulas de antiderivación no indican cómo evaluar integrales como

$$\boxed{1} \qquad \int 2x\sqrt{1 + x^2}\, dx$$

RP Para hallar esta integral, usaremos la estrategia para la resolución de problemas de *introducir algo adicional*. En este caso, el "algo adicional" es una nueva variable; cambiemos de una variable x a una variable u. Supongamos que hace que u sea el radicando de la integral en $\boxed{1}$, $u = 1 + x^2$. Entonces la diferencial de u es $du = 2x\, dx$. Observe que si la dx en la notación para una integral se interpretara como una diferencial, entonces en $\boxed{1}$ debe tenerse la diferencial $2x\, dx$ y, por consiguiente, desde un punto de vista formal y sin justificar este cálculo, podríamos escribir

En la sección 3.10 se definieron las diferenciales. Si $u = f(x)$, entonces $du = f'(x)\, dx$

$$\boxed{2} \qquad \int 2x\sqrt{1 + x^2}\, dx = \int \sqrt{1 + x^2}\, 2x\, dx = \int \sqrt{u}\, du$$

$$= \tfrac{2}{3}u^{3/2} + C = \tfrac{2}{3}(x^2 + 1)^{3/2} + C$$

Pero ahora podemos verificar que tenemos la respuesta correcta aplicando la regla de la cadena para derivar la función final de la ecuación 2:

$$\frac{d}{dx}\left[\tfrac{2}{3}(x^2 + 1)^{3/2} + C\right] = \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{3}{2}(x^2 + 1)^{1/2} \cdot 2x = 2x\sqrt{x^2 + 1}$$

En general, este método funciona siempre que se tiene una integral que pueda escribirse en la forma $\int f(g(x))\, g'(x)\, dx$. Observe que si $F' = f$, entonces

$$\boxed{3} \qquad \int F'(g(x))\, g'(x)\, dx = F(g(x)) + C$$

porque, por la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dx}\,[F(g(x))] = F'(g(x))\,g'(x)$$

Si hacemos el "cambio de variable" o la "sustitución" $u = g(x)$, entonces, a partir de la ecuación 3, tenemos

$$\int F'(g(x))\,g'(x)\,dx = F(g(x)) + C = F(u) + C = \int F'(u)\,du$$

o bien, si se escribe $F' = f$ se obtiene

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

Por tanto, hemos probado la siguiente regla:

4 Regla de sustitución Si $u = g(x)$ es una función derivable cuyo rango es un intervalo I y f es continua sobre I, entonces

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

Note que la regla de sustitución para la integración se probó aplicando la regla de la cadena para la derivación. Asimismo, observe que, si $u = g(x)$, entonces $du = g'(x)\,dx$, de modo que una manera de recordar la regla de sustitución es pensar en dx y du de 4 como diferenciales.

Así pues, la regla de sustitución establece: **es permitido operar con *dx* y *du* después de los signos de integral como si fueran diferenciales**.

EJEMPLO 1 Encuentre $\int x^3 \cos(x^4 + 2)\,dx$.

SOLUCIÓN Hacemos la sustitución $u = x^4 + 2$ porque su diferencial es $du = 4x^3\,dx$, la cual, aparte del factor constante 4, aparece en la integral. De este modo, con $x^3\,dx = \frac{1}{4}\,du$ y la regla de sustitución, tenemos

$$\begin{aligned}\int x^3 \cos(x^4 + 2)\,dx &= \int \cos u \cdot \tfrac{1}{4}\,du = \tfrac{1}{4}\int \cos u\,du \\ &= \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} u + C \\ &= \tfrac{1}{4}\operatorname{sen}(x^4 + 2) + C\end{aligned}$$

Compruebe derivando la respuesta.

Note que en la etapa final tuvimos que regresar a la variable original x.

La idea detrás de la regla de sustitución es remplazar una integral relativamente complicada por una más sencilla. Esto se lleva a cabo pasando de la variable original x a una nueva variable u que sea función de x. Así, en el ejemplo 1 reemplazamos la integral $\int x^3 \cos(x^4 + 2)\,dx$ con la integral más sencilla $\frac{1}{4}\int \cos u\,du$.

El reto principal en la aplicación de la regla de sustitución es pensar en una sustitución apropiada. Procure elegir u como alguna función en el integrando cuya diferencial también esté presente (excepto para un factor constante). Este fue el caso en el ejemplo 1. Si no es posible, escoja u como alguna parte complicada del integrando (tal vez la función interna de una función compuesta). Encontrar la sustitución correcta conlleva algo de arte. No es raro que la conjetura sea errónea si su primer supuesto no funciona, intente con otro.

EJEMPLO 2 Evalúe $\int \sqrt{2x+1}\,dx$.

SOLUCIÓN 1 Sea $u = 2x + 1$. Entonces $du = 2\,dx$, de modo que $dx = \frac{1}{2}\,du$. De esta forma, la regla de sustitución da

$$\begin{aligned}\int \sqrt{2x+1}\,dx &= \int \sqrt{u}\cdot \tfrac{1}{2}\,du = \tfrac{1}{2}\int u^{1/2}\,du \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \tfrac{1}{3}u^{3/2} + C \\ &= \tfrac{1}{3}(2x+1)^{3/2} + C\end{aligned}$$

SOLUCIÓN 2 Otra posible sustitución es $u = \sqrt{2x+1}$. Entonces

$$du = \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} \qquad \text{así que} \qquad dx = \sqrt{2x+1}\,du = u\,du$$

(O bien, observe que $u^2 = 2x + 1$, de manera que $2u\,du = 2\,dx$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\int \sqrt{2x+1}\,dx &= \int u\cdot u\,du = \int u^2\,du \\ &= \frac{u^3}{3} + C = \tfrac{1}{3}(2x+1)^{3/2} + C\end{aligned}$$

V EJEMPLO 3 Encuentre $\int \dfrac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$.

SOLUCIÓN Sea $u = 1 - 4x^2$. Entonces $du = -8x\,dx$, de manera que $x\,dx = -\frac{1}{8}\,du$ y

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx &= -\tfrac{1}{8}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = -\tfrac{1}{8}\int u^{-1/2}\,du \\ &= -\tfrac{1}{8}\left(2\sqrt{u}\right) + C = -\tfrac{1}{4}\sqrt{1-4x^2} + C\end{aligned}$$

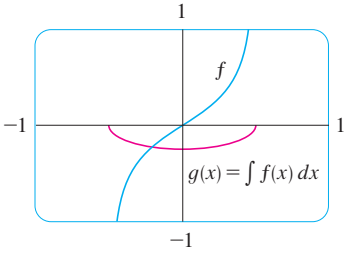


FIGURA 1

$f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-4x^2}}$

$g(x) = \int f(x)\,dx = -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}$

La respuesta para el ejemplo 3 puede comprobarse por derivación; pero, en lugar de ello, hágalo de manera visual con una gráfica. En la figura 1 se usó una computadora para trazar las gráficas del integrando $f(x) = x/\sqrt{1-4x^2}$ y de su integral indefinida $g(x) = -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}$ (tomando el caso $C = 0$). Note que $g(x)$ decrece cuando $f(x)$ es negativa, crece cuando $f(x)$ es positiva y tiene su valor mínimo cuando $f(x) = 0$. De modo que parece razonable, a partir de la evidencia gráfica, que g sea una antiderivada de f.

EJEMPLO 4 Calcule $\int e^{5x}\,dx$.

SOLUCIÓN Si hacemos $u = 5x$, entonces $du = 5\,dx$, de modo que $dx = \frac{1}{5}\,du$. Por tanto,

$$\int e^{5x}\,dx = \tfrac{1}{5}\int e^u\,du = \tfrac{1}{5}e^u + C = \tfrac{1}{5}e^{5x} + C$$

NOTA Con cierta experiencia, podríamos evaluar integrales como los ejemplos 1-4 sin pasar por la molestia de hacer una sustitución explícita. Reconociendo el patrón en la ecuación 3, donde el integrando en el lado izquierdo es el producto de la derivada de una función externa y la derivada de la función interna, podríamos trabajar

el ejemplo 1 como sigue:

$$\int x^3 \cos(x^4 + 2)\, dx = \int \cos(x^4 + 2) \cdot x^3\, dx = \tfrac{1}{4}\int \cos(x^4 + 2) \cdot (4x^3)\, dx$$

$$= \tfrac{1}{4}\int \cos(x^4 + 2) \cdot \frac{d}{dx}(x^4 + 2)\, dx = \tfrac{1}{4}\operatorname{sen}(x^4 + 2) + C$$

Del mismo modo, la solución para el ejemplo 4 podría expresarse como:

$$\int e^{5x}\, dx = \tfrac{1}{5}\int 5e^{5x}\, dx = \tfrac{1}{5}\int \frac{d}{dx}(e^{5x})\, dx = \tfrac{1}{5}e^{5x} + C$$

El siguiente ejemplo, sin embargo, es más complicado y es aconsejable una sustitución explícita.

EJEMPLO 5 Obtenga $\int \sqrt{1 + x^2}\, x^5\, dx$.

SOLUCIÓN Una sustitución apropiada es más evidente si factorizamos x^5 como $x^4 \cdot x$. Sea $u = 1 + x^2$. Entonces $du = 2x\, dx$, de manera que $x\, dx = \frac{1}{2}\, du$. También $x^2 = u - 1$, así que $x^4 = (u - 1)^2$:

$$\int \sqrt{1 + x^2}\, x^5\, dx = \int \sqrt{1 + x^2}\, x^4 \cdot x\, dx$$

$$= \int \sqrt{u}\,(u - 1)^2 \cdot \tfrac{1}{2}\, du = \tfrac{1}{2}\int \sqrt{u}\,(u^2 - 2u + 1)\, du$$

$$= \tfrac{1}{2}\int (u^{5/2} - 2u^{3/2} + u^{1/2})\, du$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{2}{7}u^{7/2} - 2 \cdot \tfrac{2}{5}u^{5/2} + \tfrac{2}{3}u^{3/2}\right) + C$$

$$= \tfrac{1}{7}(1 + x^2)^{7/2} - \tfrac{2}{5}(1 + x^2)^{5/2} + \tfrac{1}{3}(1 + x^2)^{3/2} + C$$

V EJEMPLO 6 Obtenga $\int \tan x\, dx$.

SOLUCIÓN En primer lugar, escribimos la tangente en términos de seno y coseno:

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx$$

Esto sugiere que debemos sustituir $u = \cos x$, ya que $du = -\operatorname{sen} x\, dx$ y, como consecuencia, $\operatorname{sen} x\, dx = -du$:

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx = -\int \frac{1}{u}\, du$$

$$= -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C$$

Puesto que $-\ln|\cos x| = \ln(|\cos x|^{-1}) = \ln(1/|\cos x|) = \ln|\sec x|$, el resultado del ejemplo 6 también puede escribirse como

$$\int \tan x\, dx = \ln|\sec x| + C \qquad \boxed{5}$$

Integrales definidas

Cuando se evalúa una integral *definida* por sustitución, pueden aplicarse dos métodos. Uno consiste en evaluar primero la integral indefinida y, enseguida, aplicar el teorema fundamental. Por ejemplo, si se usa el resultado del ejemplo 2, se tiene

$$\begin{aligned}\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx &= \int \sqrt{2x+1}\,dx\Big]_0^4 \\ &= \tfrac{1}{3}(2x+1)^{3/2}\Big]_0^4 = \tfrac{1}{3}(9)^{3/2} - \tfrac{1}{3}(1)^{3/2} \\ &= \tfrac{1}{3}(27-1) = \tfrac{26}{3}\end{aligned}$$

El otro método, que suele ser preferible, es cambiar los límites de integración cuando se cambia la variable.

En esta regla se afirma que, cuando se usa una sustitución en una integral definida, debe poner todo en términos de la nueva variable u, no sólo x y dx, sino también los límites de integración. Los nuevos límites de integración son los valores de u que corresponden a $x = a$ y $x = b$.

6 Regla de sustitución para integrales definidas Si g' es continua sobre $[a, b]$ y f es continua sobre el rango de $u = g(x)$, entonces

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

DEMOSTRACIÓN Sea F una antiderivada de f. Entonces, por 3, $F(g(x))$ es una antiderivada de $f(g(x))g'(x)$, de modo que, de acuerdo con la parte 2 del teorema fundamental, tenemos

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = F(g(x))\Big]_a^b = F(g(b)) - F(g(a))$$

Pero, si se aplica el TFC2 una segunda vez, también resulta

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du = F(u)\Big]_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b)) - F(g(a))$$

EJEMPLO 7 Evalúe $\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx$ usando 6.

SOLUCIÓN Si usamos la sustitución a partir de la solución 1 del ejemplo 2, se tiene $u = 2x + 1$ y $dx = \frac{1}{2}\,du$. Para encontrar los nuevos límites de integración, notamos que

$$\text{cuando } x = 0,\ u = 2(0) + 1 = 1 \qquad \text{y} \qquad \text{cuando } x = 4,\ u = 2(4) + 1 = 9$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx &= \int_1^9 \tfrac{1}{2}\sqrt{u}\,du \\ &= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{3}u^{3/2}\Big]_1^9 \\ &= \tfrac{1}{3}(9^{3/2} - 1^{3/2}) = \tfrac{26}{3}\end{aligned}$$

Observe que al usar 6 *no* se regresa a la variable x después de integrar. Sencillamente evaluamos la expresión en u en los valores apropiados de u.

La integral dada en el ejemplo 8 es una abreviación para

$$\int_1^2 \frac{1}{(3-5x)^2}\,dx$$

EJEMPLO 8 Evalúe $\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$.

SOLUCIÓN Sea $u = 3 - 5x$. Entonces $du = -5\,dx$, de modo que $dx = -\frac{1}{5}\,du$. Cuando $x = 1$, $u = -2$ y cuando $x = 2$, $u = -7$. Así que

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2} &= -\frac{1}{5}\int_{-2}^{-7} \frac{du}{u^2} \\ &= -\frac{1}{5}\left[-\frac{1}{u}\right]_{-2}^{-7} = \frac{1}{5u}\Big]_{-2}^{-7} \\ &= \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{14}\end{aligned}$$

Puesto que la función $f(x) = (\ln x)/x$ en el ejemplo 9 es positiva para $x > 1$, la integral representa el área de la región sombreada en la figura 2.

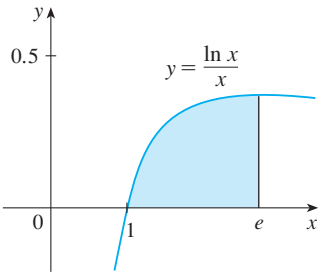


FIGURA 2

V EJEMPLO 9 Calcule $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$.

SOLUCIÓN Sea $u = \ln x$ porque su diferencial $du = dx/x$ se presenta en la integral. Cuando $x = 1$, $u = \ln 1 = 0$; cuando $x = e$, $u = \ln e = 1$. De modo que

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_0^1 u\,du = \frac{u^2}{2}\Big]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Simetría

En el teorema siguiente se usa la regla de sustitución para las integrales definidas, 6, a fin de simplificar el cálculo de integrales de funciones que poseen propiedades de simetría.

7 Integrales de funciones simétricas Suponga que f es continua sobre $[-a, a]$

a) Si f es par $[f(-x) = f(x)]$, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.

b) Si f es impar $[f(-x) = -f(x)]$, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

DEMOSTRACIÓN Separemos la integral en dos:

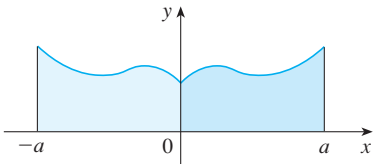
$$\boxed{8} \qquad \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = -\int_0^{-a} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$$

En la primera integral de la extrema derecha hacemos la sustitución $u = -x$. Entonces $du = -dx$, y cuando $x = -a$, $u = a$. Por consiguiente,

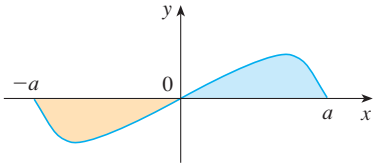
$$-\int_0^{-a} f(x)\,dx = -\int_0^a f(-u)\,(-du) = \int_0^a f(-u)\,du$$

con lo que la ecuación 8 resulta

$$\boxed{9} \qquad \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_0^a f(-u)\,du + \int_0^a f(x)\,dx$$



a) f par, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$



b) f impar, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

FIGURA 3

a) Si f es par, entonces $f(-u) = f(u)$, así que la ecuación 9 da

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

b) Si f es impar, entonces $f(-u) = -f(u)$, por lo que la ecuación 9 da

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0$$

La figura 3 ilustra el teorema 7. Para el caso en que f es positiva y par, en el inciso a) se hace ver que el área bajo $y = f(x)$ desde $x = -a$ hasta $x = a$ es el doble del área desde $x = 0$ hasta $x = a$, debido a la simetría. Recuerde que una integral $\int_a^b f(x)\,dx$ puede expresarse como el área arriba del eje x y bajo $y = f(x)$ menos el área bajo el eje x y arriba de la curva. Por esto, en el inciso b) se evidencia que el área es 0 porque las áreas se cancelan.

V EJEMPLO 10 Dado que $f(x) = x^6 + 1$ satisface $f(-x) = f(x)$, es par y, por consiguiente,

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2} (x^6 + 1)\,dx &= 2\int_{0}^{2} (x^6 + 1)\,dx \\ &= 2\left[\tfrac{1}{7}x^7 + x\right]_0^2 = 2\left(\tfrac{128}{7} + 2\right) = \tfrac{284}{7}\end{aligned}$$

EJEMPLO 11 Dado que $f(x) = (\tan x)/(1 + x^2 + x^4)$ satisface $f(-x) = -f(x)$, es impar y, entonces,

$$\int_{-1}^{1} \frac{\tan x}{1 + x^2 + x^4}\,dx = 0$$

5.5 Ejercicios

1-6 Evalúe cada una de las siguientes integrales efectuando la sustitución dada.

1. $\int e^{-x}\,dx, \quad u = -x$
2. $\int x^3(2 + x^4)^5\,dx, \quad u = 2 + x^4$
3. $\int x^2\sqrt{x^3 + 1}\,dx, \quad u = x^3 + 1$
4. $\int \dfrac{dt}{(1 - 6t)^4}, \quad u = 1 - 6t$
5. $\int \cos^3\theta \operatorname{sen}\theta\,d\theta, \quad u = \cos\theta$
6. $\int \dfrac{\sec^2(1/x)}{x^2}\,dx, \quad u = 1/x$

7-48 Evalúe cada una de las siguientes integrales indefinidas

7. $\int x \operatorname{sen}(x^2)\,dx$
8. $\int x^2 e^{x^3} dx$
9. $\int (1 - 2x)^9\,dx$
10. $\int (3t + 2)^{2.4}\,dt$
11. $\int (x + 1)\sqrt{2x + x^2}\,dx$
12. $\int \sec^2 2\theta\,d\theta$
13. $\int \dfrac{dx}{5 - 3x}$
14. $\int u\sqrt{1 - u^2}\,du$
15. $\int \operatorname{sen}\pi t\,dt$
16. $\int e^x \cos(e^x)\,dx$
17. $\int \dfrac{e^u}{(1 - e^u)^2}\,du$
18. $\int \dfrac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$
19. $\int \dfrac{a + bx^2}{\sqrt{3ax + bx^3}}\,dx$
20. $\int \dfrac{z^2}{z^3 + 1}\,dz$
21. $\int \dfrac{(\ln x)^2}{x}\,dx$
22. $\int \cos^4\theta \operatorname{sen}\theta\,d\theta$
23. $\int \sec^2\theta \tan^3\theta\,d\theta$
24. $\int \sqrt{x} \operatorname{sen}(1 + x^{3/2})\,dx$

25. $\int e^x \sqrt{1 + e^x}\, dx$

26. $\int \dfrac{dx}{ax + b} \quad (a \neq 0)$

27. $\int (x^2 + 1)(x^3 + 3x)^4\, dx$

28. $\int e^{\cos t} \operatorname{sen} t\, dt$

29. $\int 5^t \operatorname{sen}(5^t)\, dt$

30. $\int \dfrac{\tan^{-1} x}{1 + x^2}\, dx$

31. $\int e^{\tan x} \sec^2 x\, dx$

32. $\int \dfrac{\operatorname{sen}(\ln x)}{x}\, dx$

33. $\int \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\, dx$

34. $\int \dfrac{\cos(\pi/x)}{x^2}\, dx$

35. $\int \sqrt{\cot x}\, \csc^2 x\, dx$

36. $\int \dfrac{2^t}{2^t + 3}\, dt$

37. $\int \operatorname{senh}^2 x \cosh x\, dx$

38. $\int \dfrac{dt}{\cos^2 t \sqrt{1 + \tan t}}$

39. $\int \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{1 + \cos^2 x}\, dx$

40. $\int \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x}\, dx$

41. $\int \cot x\, dx$

42. $\int \operatorname{sen} t \sec^2(\cos t)\, dt$

43. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2}\, \operatorname{sen}^{-1} x}$

44. $\int \dfrac{x}{1 + x^4}\, dx$

45. $\int \dfrac{1 + x}{1 + x^2}\, dx$

46. $\int x^2 \sqrt{2 + x}\, dx$

47. $\int x(2x + 5)^8\, dx$

48. $\int x^3 \sqrt{x^2 + 1}\, dx$

49–52 Evalúe cada una de las siguientes integrales indefinidas. Ilustre y compruebe que su respuesta es razonable, dibujando la función y su antiderivada (tome $C = 0$).

49. $\int x(x^2 - 1)^3\, dx$

50. $\int \tan^2\theta \sec^2\theta\, d\theta$

51. $\int e^{\cos x} \operatorname{sen} x\, dx$

52. $\int \operatorname{sen} x \cos^4 x\, dx$

53–73 Evalúe cada una de las siguientes integrales definidas

53. $\int_0^1 \cos(\pi t/2)\, dt$

54. $\int_0^1 (3t - 1)^{50}\, dt$

55. $\int_0^1 \sqrt[3]{1 + 7x}\, dx$

56. $\int_0^3 \dfrac{dx}{5x + 1}$

57. $\int_0^{\pi} \sec^2(t/4)\, dt$

58. $\int_{1/6}^{1/2} \csc \pi t \cot \pi t\, dt$

59. $\int_1^2 \dfrac{e^{1/x}}{x^2}\, dx$

60. $\int_0^1 x e^{-x^2}\, dx$

61. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (x^3 + x^4 \tan x)\, dx$

62. $\int_0^{\pi/2} \cos x \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)\, dx$

63. $\int_0^{13} \dfrac{dx}{\sqrt[3]{(1 + 2x)^2}}$

64. $\int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2}\, dx$

65. $\int_0^a x\sqrt{x^2 + a^2}\, dx \quad (a > 0)$

66. $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} x^4 \operatorname{sen} x\, dx$

67. $\int_1^2 x\sqrt{x - 1}\, dx$

68. $\int_0^4 \dfrac{x}{\sqrt{1 + 2x}}\, dx$

69. $\int_e^{e^4} \dfrac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

70. $\int_0^{1/2} \dfrac{\operatorname{sen}^{-1} x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$

71. $\int_0^1 \dfrac{e^z + 1}{e^z + z}\, dz$

72. $\int_0^{T/2} \operatorname{sen}(2\pi t/T - \alpha)\, dt$

73. $\int_0^1 \dfrac{dx}{(1 + \sqrt{x})^4}$

74. Verifique que $f(x) = \operatorname{sen}\sqrt[3]{x}$ es una función impar y utilice este hecho para demostrar que

$$0 \leqslant \int_{-2}^{3} \operatorname{sen}\sqrt[3]{x}\, dx \leqslant 1$$

75–76 Utilice una gráfica para dar una estimación aproximada del área de la región que se encuentra bajo la curva dada. Luego encuentre el área exacta

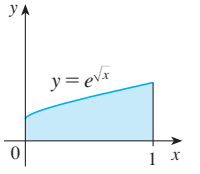
75. $y = \sqrt{2x + 1}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

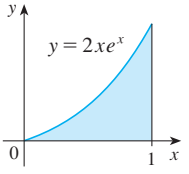
76. $y = 2\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$

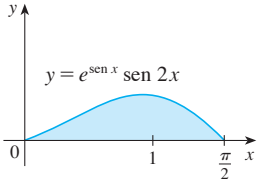
77. Evalúe $\int_{-2}^{2} (x + 3)\sqrt{4 - x^2}\, dx$ expresándola como una suma de dos integrales e interprete una de ellas en términos de un área.

78. Evalúe $\int_0^1 x\sqrt{1 - x^4}\, dx$ haciendo una sustitución e interprete la integral resultante en términos de un área.

79. ¿Cuáles de las áreas siguientes son iguales? ¿Por qué?







80. Un modelo de rapidez del metabolismo basal, en kcal/h de un hombre joven es $R(t) = 85 - 0.18\cos(\pi t/12)$, donde t es el tiempo en horas a partir de las 5:00. ¿Cuál es el metabolismo basal total de este hombre, $\int_0^{24} R(t)\, dt$, en un periodo de 24 horas?

81. Un tanque de almacenamiento de petróleo se rompe en $t = 0$, y el petróleo se fuga del tanque con una rapidez de $r(t) = 100e^{-0.01t}$ litros por minuto. ¿Cuánto petróleo se escapa durante la primera hora?

82. Una población de bacterias se inicia con 400 y crece con una rapidez de $r(t) = (450.268)\, e^{1.12567t}$ bacterias por hora. ¿Cuántas habrá después de tres horas?

83. La respiración es cíclica y un ciclo respiratorio completo —desde el principio de la inhalación hasta el final de la exhalación— requiere alrededor de 5 s. El gasto máximo de aire que entra en los pulmones es de más o menos 0.5 L/s. Esto explica en parte por qué a menudo se ha usado la función $f(t) = \frac{1}{2}\,\text{sen}\,(2\pi t/5)$ para modelar el gasto de aire hacia los pulmones. Úselo para hallar el volumen de aire inhalado en los pulmones en el tiempo t.

84. Alabama Instruments Company ha montado una línea de producción para fabricar una calculadora nueva. El índice de producción de estas calculadoras después de t semanas es

$$\frac{dx}{dt} = 5\,000\left(1 - \frac{100}{(t + 10)^2}\right) \text{ calculadoras/semana}$$

(Note que la producción se aproxima a 5 000 por semana a medida que avanza el tiempo, pero que la producción inicial es más baja debido a que los trabajadores no están familiarizados con las nuevas técnicas). Encuentre la cantidad de calculadoras producidas desde el principio de la tercera semana hasta el final de la cuarta.

85. Si f es continua y $\int_0^4 f(x)\,dx = 10$, encuentre $\int_0^2 f(2x)\,dx$.

86. Si f es continua y $\int_0^9 f(x)\,dx = 4$, encuentre $\int_0^3 xf(x^2)\,dx$.

87. Si f es continua sobre $\mathbb{R}$, demuestre que

$$\int_a^b f(-x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(x)\,dx$$

Para el caso donde $f(x) \geqslant 0$ y $0 < a < b$, dibuje un diagrama para interpretar geométricamente esta ecuación como una igualdad de áreas.

88. Si f es continua sobre $\mathbb{R}$, demuestre que

$$\int_a^b f(x + c)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x)\,dx$$

Para el caso donde $f(x) \geqslant 0$, dibuje un diagrama para interpretar geométricamente esta ecuación como una igualdad de áreas.

89. Si a y b son números positivos, demuestre que

$$\int_0^1 x^a(1 - x)^b\,dx = \int_0^1 x^b(1 - x)^a\,dx$$

90. Si f es continua sobre $[0, \pi]$, utilice la sustitución $u = \pi - x$ para demostrar que

$$\int_0^\pi xf(\text{sen}\,x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\text{sen}\,x)\,dx$$

91. Mediante el ejercicio 90, calcule la integral

$$\int_0^\pi \frac{x\,\text{sen}\,x}{1 + \cos^2 x}\,dx$$

92. a) Si f es continua, demuestre que

$$\int_0^{\pi/2} f(\cos x)\,dx = \int_0^{\pi/2} f(\text{sen}\,x)\,dx$$

b) Utilice el inciso a) para evaluar $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx$ y $\int_0^{\pi/2} \text{sen}^2 x\,dx$.

5 Repaso

Verificación de conceptos

1. a) Escriba una expresión para una suma de Riemann de una función f. Explique el significado de la notación que use.
b) Si $f(x) \geqslant 0$, ¿cuál es la interpretación geométrica de una suma de Riemann? Ilustre su respuesta con un diagrama.
c) Si $f(x)$ toma tanto valores positivos como negativos, ¿cuál es la interpretación geométrica de una suma de Riemann? Ilustre su respuesta con un diagrama.

2. a) Escriba la definición de la integral definida de una función continua, desde $x = a$ hasta $x = b$.
b) ¿Cuál es la interpretación geométrica de $\int_a^b f(x)\,dx$ si $f(x) \geqslant 0$?
c) ¿Cuál es la interpretación geométrica de $\int_a^b f(x)\,dx$ si $f(x)$ toma valores tanto positivos como negativos? Ilustre su respuesta con un diagrama.

3. Enuncie las dos partes del teorema fundamental del cálculo.

4. a) Enuncie el teorema del cambio neto.
b) Si $r(t)$ es la rapidez con la que el agua fluye hacia un depósito, ¿qué representa $\int_{t_1}^{t_2} r(t)\,dt$?

5. Suponga que una partícula se mueve hacia adelante y hacia atrás a lo largo de una recta con una velocidad $v(t)$, medida en pies por segundo, y una aceleración $a(t)$.
a) ¿Cuál es el significado de $\int_{60}^{120} v(t)\,dt$?
b) ¿Cuál es el significado de $\int_{60}^{120} |v(t)|\,dt$?
c) ¿Cuál es el significado de $\int_{60}^{120} a(t)\,dt$?

6. a) Explique el significado de la integral indefinida $\int f(x)\,dx$.
b) ¿Cuál es la relación entre la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ y la integral indefinida $\int f(x)\,dx$?

7. Explique con exactitud qué significa la afirmación "la derivación y la integración son procesos inversos".

8. Enuncie la regla de sustitución. En la práctica, ¿cómo puede usarla?

Exámen rápido Verdadero-Falso

Determine si la proposición es verdadera o falsa. Si es verdadera, explique por qué. Si es falsa, explique por qué o dé un ejemplo que refute la proposición.

1. Si f y g son continuas sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

2. Si f y g son continuas sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b [f(x)g(x)]\,dx = \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)\,dx\right)$$

3. Si f es continua sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b 5f(x)\,dx = 5\int_a^b f(x)\,dx$$

4. Si f es continua sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b xf(x)\,dx = x\int_a^b f(x)\,dx$$

5. Si f es continua sobre $[a, b]$ y $f(x) \geqslant 0$, entonces

$$\int_a^b \sqrt{f(x)}\,dx = \sqrt{\int_a^b f(x)\,dx}$$

6. Si f' es continua sobre $[1, 3]$, entonces $\int_1^3 f'(v)\,dv = f(3) - f(1)$.

7. Si f y g son continuas y $f(x) \geqslant g(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx$$

8. *Si* f y g son derivables y $f(x) \geqslant g(x)$ para $a < x < b$, entonces $f'(x) \geqslant g'(x)$ para $a < x < b$.

9. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(x^5 - 6x^9 + \frac{\operatorname{sen} x}{(1 + x^4)^2}\right)dx = 0$

10. $\displaystyle\int_{-5}^{5}(ax^2 + bx + c)\,dx = 2\int_0^5 (ax^2 + c)\,dx$

11. Toda función continua es derivable.

12. Toda función continua tiene antiderivada.

13. $\displaystyle\int_0^3 e^{x^2}\,dx = \int_0^5 e^{x^2}\,dx + \int_5^3 e^{x^2}\,dx$

14. Si $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$, entonces $f(x) = 0$ para $0 \leqslant x \leqslant 1$.

15. *Si* f es continua sobre $[a, b]$, entonces

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^b f(x)\,dx\right) = f(x)$$

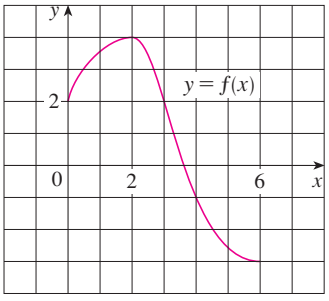
16. $\int_0^2 (x - x^3)\,dx$ representa el área bajo la curva $y = x - x^3$ de $x = 0$ a $x = 2$.

17. $\displaystyle\int_{-2}^{1}\frac{1}{x^4}\,dx = -\frac{3}{8}$

18. Si f tiene una discontinuidad en $x = 0$, entonces $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ no existe.

Ejercicios

1. Utilice la gráfica dada de f para hallar la suma de Riemann con seis subintervalos. Tome los puntos muestra como a) los puntos extremos de la izquierda y b) los puntos medios. En cada caso dibuje un diagrama y explique qué representa la suma de Riemann.



2. a) Evalúe la suma de Riemann para

$$f(x) = x^2 - x \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2$$

con cuatro subintervalos; tomando los puntos extremos de la derecha como puntos muestra. Con ayuda de un diagrama explique qué representa la suma de Riemann.

b) Utilice la definición de integral definida (con los puntos extremos de la derecha) para calcular el valor de la integral

$$\int_0^2 (x^2 - x)\,dx$$

c) Utilice el teorema fundamental para comprobar su respuesta al inciso b).

d) Dibuje un diagrama para explicar el significado geométrico de la integral del inciso b).

Se requiere calculadora graficadora o computadora SAC Se requiere sistema algebraico computarizado

3. Evalúe

$$\int_0^1 \left(x + \sqrt{1 - x^2}\right) dx$$

interpretándola en términos de áreas.

4. Exprese

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sen} x_i \, \Delta x$$

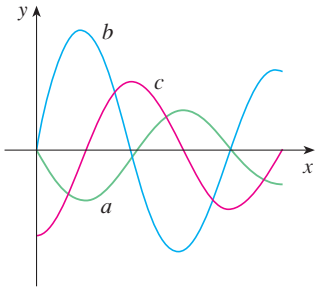
como una integral definida sobre el intervalo $[0, \pi]$ y evalúe la integral.

5. Si $\int_0^6 f(x)\,dx = 10$ y $\int_0^4 f(x)\,dx = 7$, encuentre $\int_4^6 f(x)\,dx$.

SAC **6.** a) Escriba $\int_1^5 (x + 2x^5)\,dx$ como un límite de sumas de Riemann, tomando los puntos extremos de la derecha como los puntos muestra. Utilice un sistema algebraico computarizado para evaluar la suma y calcular el límite.

b) Use el teorema fundamental para comprobar la respuesta al inciso a).

7. En la figura siguiente se muestran las gráficas de f, f' y $\int_0^x f(t)\,dt$. Identifique cada gráfica y explique el porqué de su elección.



8. Evalúe cada una de las siguientes integrales:

a) $\int_0^1 \frac{d}{dx}\left(e^{\arctan x}\right) dx$ b) $\frac{d}{dx}\int_0^1 e^{\arctan x}\,dx$

c) $\frac{d}{dx}\int_0^x e^{\arctan t}\,dt$

9–38 Evalúe cada una de las siguientes integrales.

9. $\int_1^2 (8x^3 + 3x^2)\,dx$

10. $\int_0^T (x^4 - 8x + 7)\,dx$

11. $\int_0^1 (1 - x^9)\,dx$

12. $\int_0^1 (1 - x)^9\,dx$

13. $\int_1^9 \frac{\sqrt{u} - 2u^2}{u}\,du$

14. $\int_0^1 \left(\sqrt[4]{u} + 1\right)^2 du$

15. $\int_0^1 y(y^2 + 1)^5\,dy$

16. $\int_0^2 y^2\sqrt{1 + y^3}\,dy$

17. $\int_1^5 \frac{dt}{(t - 4)^2}$

18. $\int_0^1 \operatorname{sen}(3\pi t)\,dt$

19. $\int_0^1 v^2 \cos(v^3)\,dv$

20. $\int_{-1}^1 \frac{\operatorname{sen} x}{1 + x^2}\,dx$

21. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{t^4 \tan t}{2 + \cos t}\,dt$

22. $\int_0^1 \frac{e^x}{1 + e^{2x}}\,dx$

23. $\int \left(\frac{1 - x}{x}\right)^2 dx$

24. $\int_1^{10} \frac{x}{x^2 - 4}\,dx$

25. $\int \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 4x}}\,dx$

26. $\int \frac{\csc^2 x}{1 + \cot x}\,dx$

27. $\int \operatorname{sen} \pi t \cos \pi t\,dt$

28. $\int \operatorname{sen} x \cos(\cos x)\,dx$

29. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

30. $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$

31. $\int \tan x \ln(\cos x)\,dx$

32. $\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^4}}\,dx$

33. $\int \frac{x^3}{1 + x^4}\,dx$

34. $\int \operatorname{senh}(1 + 4x)\,dx$

35. $\int \frac{\sec\theta \tan\theta}{1 + \sec\theta}\,d\theta$

36. $\int_0^{\pi/4} (1 + \tan t)^3 \sec^2 t\,dt$

37. $\int_0^3 |x^2 - 4|\,dx$

38. $\int_0^4 |\sqrt{x} - 1|\,dx$

39–40 Evalúe la integral indefinida. Ilustre y compruebe que su respuesta es razonable trazando las gráficas de la función y de su antiderivada (tome $C = 0$)

39. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \operatorname{sen} x}}\,dx$

40. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 1}}\,dx$

41. Use una gráfica para dar una estimación aproximada del área de la región que se encuentra bajo la curva $y = x\sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 4$. Luego, encuentre el área exacta.

42. Grafique la función $f(x) = \cos^2 x \operatorname{sen} x$ y use esa gráfica para inferir el valor de la integral $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$. Después, evalúe la integral para confirmar su conjetura.

43–48 Encuentre la derivada de la función.

43. $F(x) = \int_0^x \frac{t^2}{1 + t^3}\,dt$

44. $F(x) = \int_x^1 \sqrt{t + \operatorname{sen} t}\,dt$

45. $g(x) = \int_0^{x^4} \cos(t^2)\,dt$

46. $g(x) = \int_1^{\operatorname{sen} x} \frac{1 - t^2}{1 + t^4}\,dt$

47. $y = \int_{\sqrt{x}}^x \frac{e^t}{t}\,dt$

48. $y = \int_{2x}^{3x+1} \operatorname{sen}(t^4)\,dt$

49–50 Mediante la propiedad 8 de las integrales, estime el valor de cada una de las siguientes de ellas.

49. $\int_1^3 \sqrt{x^2 + 3}\,dx$

50. $\int_3^5 \frac{1}{x + 1}\,dx$

51-54 Utilice las propiedades de las integrales para verificar cada una de las siguientes desigualdades.

51. $\int_0^1 x^2 \cos x\, dx \leq \frac{1}{3}$

52. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

53. $\int_0^1 e^x \cos x\, dx \leq e - 1$

54. $\int_0^1 x \operatorname{sen}^{-1} x\, dx \leq \pi/4$

55. Use la regla del punto medio con $n = 6$ para obtener un valor aproximado de $\int_0^3 \operatorname{sen}(x^3)\, dx$.

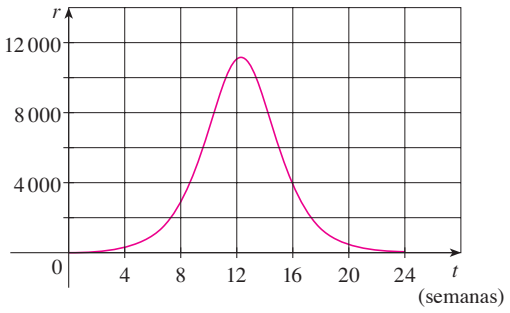
56. Una partícula se mueve a lo largo de una recta con la función velocidad $v(t) = t^2 - t$, donde v se mide en metros por segundo. Encuentre a) el desplazamiento y b) la distancia recorrida por la partícula durante el intervalo $[0, 5]$.

57. Sea $r(t)$ la rapidez a la cual se consume el petróleo del mundo, donde t se mide en años y empieza en $t = 0$ el 1 de enero de 2000, y $r(t)$ se mide en barriles por año. ¿Qué representa $\int_0^8 r(t)\, dt$?

58. Se utiliza una pistola de radar para registrar la rapidez de un corredor en los tiempos que se enlistan en la tabla siguiente. Utilice la regla del punto medio para estimar la distancia del corredor cubierta durante esos cinco segundos.

t (s)	v (m/s)	t (s)	v (m/s)
0	0	3.0	10.51
0.5	4.67	3.5	10.67
1.0	7.34	4.0	10.76
1.5	8.86	4.5	10.81
2.0	9.73	5.0	10.81
2.5	10.22		

59. Una población de abejas aumentó en una proporción de $r(t)$ abejas por semana, donde la gráfica de r es como se muestra. Use la regla del punto medio junto con seis subintervalos para estimar el aumento en la población de abejas durante las primeras 24 semanas.



60. Sea

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } -3 \leq x \leq 0 \\ -\sqrt{1 - x^2} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Evalúe $\int_{-3}^{1} f(x)\, dx$ mediante la interpretación de la integral como una diferencia de áreas.

61. Si f es continua y $\int_0^2 f(x)\, dx = 6$, evalúe $\int_0^{\pi/2} f(2 \operatorname{sen}\theta) \cos\theta\, d\theta$.

62. En la sección 5.3 se introdujo la función de Fresnel $S(x) = \int_0^x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi t^2\right) dt$. En su teoría de la difracción de las ondas luminosas, Fresnel también usó la función

$$C(x) = \int_0^x \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi t^2\right) dt$$

a) ¿Sobre cuáles intervalos es creciente C?
b) ¿Sobre cuáles intervalos es cóncava hacia arriba C?
SAC c) Use una gráfica para resolver la siguiente ecuación, con una aproximación de dos cifras decimales:

$$\int_0^x \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi t^2\right) dt = 0.7$$

SAC d) Grafique C y S en la misma pantalla. ¿Cómo se relacionan estas gráficas?

63. Estime el valor del número c tal que el área bajo la curva $y = \operatorname{senh} cx$ entre $x = 0$ y $x = 1$ es igual a 1.

64. Suponga que en un inicio la temperatura en una varilla larga y delgada que se encuentra a lo largo del eje x es $C/(2a)$ si $|x| \leq a$ y 0 si $|x| > a$. Puede demostrarse que si la difusión de calor de la varilla es k, entonces la temperatura de esa varilla en el punto x en el instante t, es

$$T(x, t) = \frac{C}{a\sqrt{4\pi kt}} \int_0^a e^{-(x-u)^2/(4kt)}\, du$$

Para hallar la distribución de temperaturas que se produce a partir de un punto caliente inicial concentrado en el origen, necesitamos calcular

$$\lim_{a \to 0} T(x, t)$$

Use la Regla de l'Hospital para hallar este límite.

65. Si f es una función continua tal que

$$\int_1^x f(t)\, dt = (x - 1)e^{2x} + \int_1^x e^{-t} f(t)\, dt$$

para toda x, encuentre una fórmula explícita para $f(x)$.

66. Suponga que h es una función tal que $h(1) = -2$, $h'(1) = 2$, $h''(1) = 3$, $h(2) = 6$, $h'(2) = 5$, $h''(2) = 13$ y h'' es continua en todo su dominio. Evalúe $\int_1^2 h''(u)\, du$.

67. Si f' es continua sobre $[a, b]$, demuestre que

$$2\int_a^b f(x) f'(x)\, dx = [f(b)]^2 - [f(a)]^2$$

68. Determine $\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_2^{2+h} \sqrt{1 + t^3}\, dt$.

69. Si f es continua sobre $[0, 1]$, demuestre que

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 f(1 - x)\, dx$$

70. Evalúe

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left[\left(\frac{1}{n}\right)^9 + \left(\frac{2}{n}\right)^9 + \left(\frac{3}{n}\right)^9 + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^9 \right]$$

71. Suponga que f es continua, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f'(x) > 0$ y $\int_0^1 f(x)\, dx = \frac{1}{3}$. Halle el valor de la integral $\int_0^1 f^{-1}(y)\, dy$.

Problemas adicionales

Antes de ver la solución del siguiente ejemplo, cúbrala e intente resolver el problema por usted mismo.

EJEMPLO 1 Evalúe $\lim_{x \to 3} \left(\frac{x}{x-3} \int_3^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt \right)$.

SOLUCIÓN Empiece por tener un panorama preliminar de los ingredientes de la función. ¿Qué sucede con el primer factor, $x/(x-3)$, cuando x tiende a 3? El numerador tiende a 3 y el denominador tiende a 0, de modo que

$$\frac{x}{x-3} \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to 3^+ \quad \text{y} \quad \frac{x}{x-3} \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to 3^-$$

El segundo factor tiende a $\int_3^3 (\operatorname{sen} t)/t\, dt$, lo cual es 0. No resulta claro qué sucede a la función como un todo. (Uno de los factores aumenta, y el otro disminuye.) De modo que, ¿cómo proceder?

RP En la página 75 se analizan los principios para la resolución de problemas.

Uno de los principios para la resolución de problemas es *intentar reconocer algo conocido*. ¿Existe una parte de la función que recuerde algo que ya ha visto? Bien, la integral

$$\int_3^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt$$

tiene a x como su límite superior de integración, y ese tipo de integral se presenta en la parte 1 del teorema fundamental del cálculo:

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\, dt = f(x)$$

Esto sugiere que podría relacionarse con la derivación.

Una vez que empiece a pensar en la derivación, el denominador $(x-3)$ le recuerda algo más que debe serle conocido: una de las formas de la definición de la derivada en el capítulo 2 es

$$F'(a) = \lim_{x \to a} \frac{F(x) - F(a)}{x - a}$$

y con $a = 3$ esto se convierte en

$$F'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{F(x) - F(3)}{x - 3}$$

De modo que, ¿cuál es la función F en esta situación? Note que si definimos

$$F(x) = \int_3^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt$$

entonces $F(3) = 0$. ¿Qué puede decirse acerca del factor x en el numerador? Esto es una situación irregular, de modo que sáquelo como factor y conjunte el cálculo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 3} \left(\frac{x}{x-3} \int_3^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt \right) &= \lim_{x \to 3} x \cdot \lim_{x \to 3} \frac{\displaystyle\int_3^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt}{x-3} \\ &= 3 \lim_{x \to 3} \frac{F(x) - F(3)}{x - 3} \\ &= 3F'(3) = 3 \frac{\operatorname{sen} 3}{3} \qquad \text{(TFC1)} \\ &= \operatorname{sen} 3 \end{aligned}$$

Otro enfoque es usar la regla de l'Hospital.

Problemas

1. Si $x \operatorname{sen} \pi x = \int_0^{x^2} f(t)\,dt$, donde f es una función continua, encuentre $f(4)$.

2. Encuentre el valor mínimo del área bajo la curva $y = x + 1/x$ desde $x = a$ hasta $x = a + 1.5$ para toda $a > 0$.

3. Si $\int_0^4 e^{(x-2)^4}\,dx = k$, encuentre el valor de $\int_0^4 xe^{(x-2)^4}\,dx$.

4. a) Trace la gráfica de varios miembros de la familia de funciones $f(x) = (2cx - x^2)/c^3$ para $c > 0$ y vea las regiones limitadas por estas curvas y el eje x. Haga una conjetura en cuanto a cómo se relacionan las áreas de estas regiones.

b) Pruebe su conjetura del inciso a).

c) Vea de nuevo las gráficas del inciso a) y úselas para trazar la curva descrita por los vértices (los puntos más altos) de la familia de funciones. ¿Puede conjeturar qué tipo de curva es ésta?

d) Halle una ecuación para la curva que trazó en el inciso c).

5. Si $f(x) = \int_0^{g(x)} \dfrac{1}{\sqrt{1 + t^3}}\,dt$, donde $g(x) = \int_0^{\cos x} [1 + \operatorname{sen}(t^2)]\,dt$, encuentre $f'(\pi/2)$.

6. Si $f(x) = \int_0^x x^2 \operatorname{sen}(t^2)\,dt$, halle $f'(x)$.

7. Evalúe el $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x} \int_0^x (1 - \tan 2t)^{1/t}\,dt$.

8. En la figura pueden verse dos regiones en el primer cuadrante: $A(t)$ es el área bajo la curva $y = \operatorname{sen}(x^2)$ desde 0 hasta t, y $B(t)$ es el área del triángulo con vértices O, P y $(t, 0)$. Calcule $\lim_{t \to 0^+} A(t)/B(t)$.

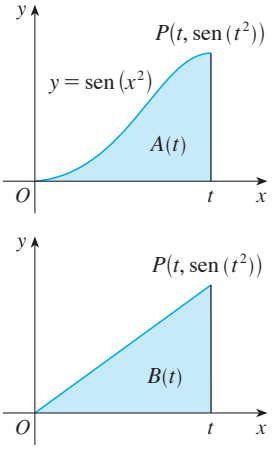


FIGURA PARA EL PROBLEMA 8

9. Encuentre el intervalo $[a, b]$ para el cual el valor de la integral $\int_a^b (2 + x - x^2)\,dx$ es un máximo.

10. Utilice una integral para estimar la suma $\sum_{i=1}^{10\,000} \sqrt{i}$.

11. a) Evalúe $\int_0^n [\![x]\!]\,dx$, donde n es un entero positivo.

b) Evalúe $\int_a^b [\![x]\!]\,dx$, donde a y b son números reales con $0 \leq a < b$.

12. Encuentre $\dfrac{d^2}{dx^2} \int_0^x \left(\int_1^{\operatorname{sen} t} \sqrt{1 + u^4}\,du \right) dt$.

13. Suponga que los coeficientes de la polinomial cúbica $P(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ satisfacen la ecuación

$$a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} + \frac{d}{4} = 0$$

Demuestre que la ecuación $P(x) = 0$ tiene una raíz entre 0 y 1. ¿Puede generalizar este resultado para un polinomio de grado n-ésimo?

14. En un evaporador se usa un disco circular y se hace girar en un plano vertical. Si debe estar parcialmente sumergido en el líquido de modo que se maximice el área humedecida expuesta del disco, demuestre que el centro de éste debe hallarse a una altura $r/\sqrt{1 + \pi^2}$ arriba de la superficie del líquido.

15. Demuestre que si f es continua, entonces $\int_0^x f(u)(x - u)\,du = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)\,dt \right) du$.

16. En la figura se muestra una región que consta de todos los puntos dentro de un cuadrado que están más cerca del centro que de los lados del cuadrado. Encuentre el área de la región.

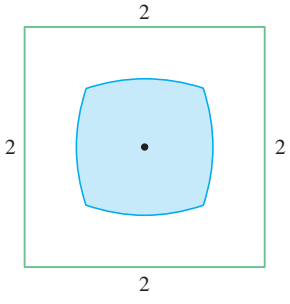


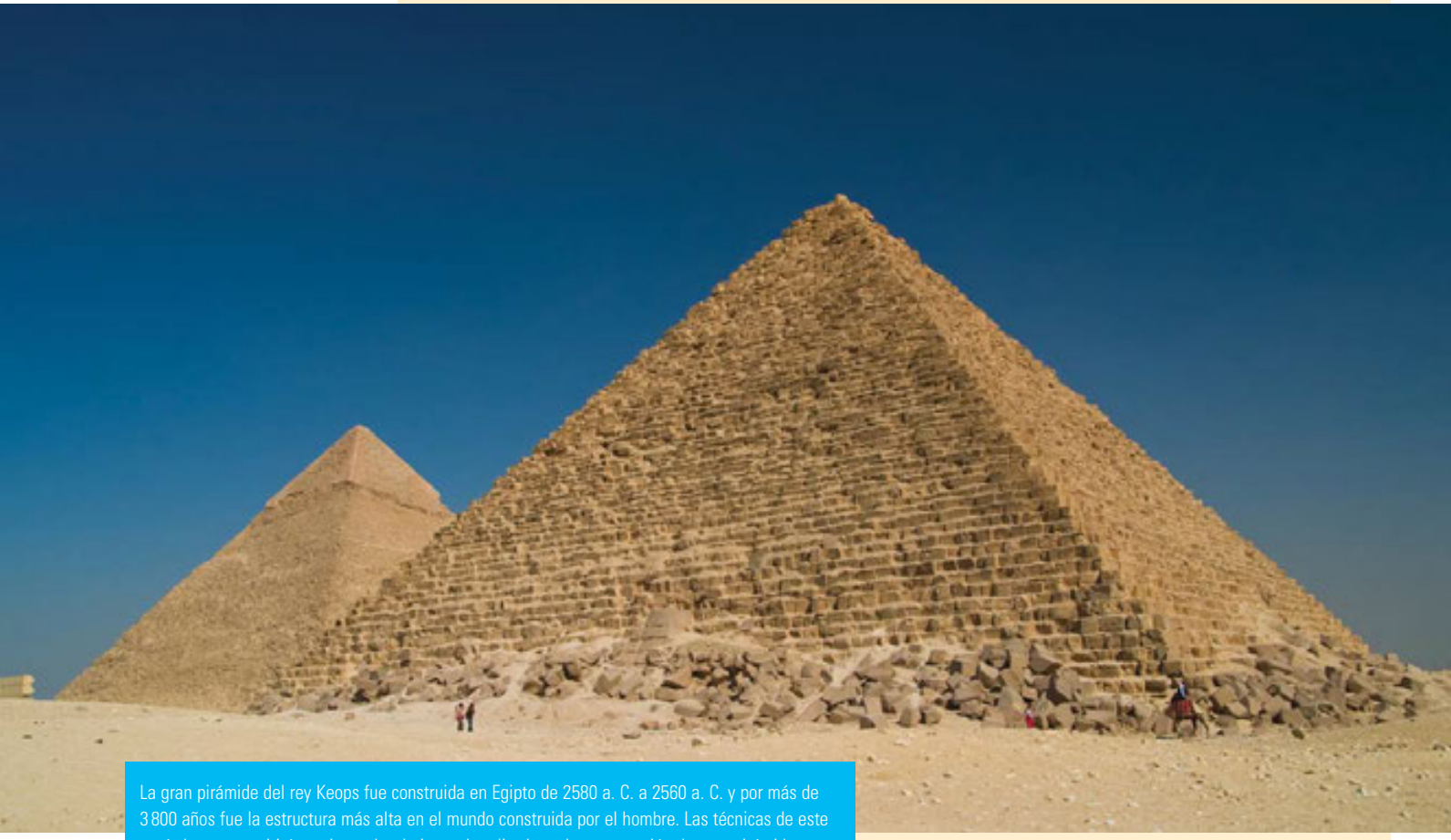
FIGURA PARA EL PROBLEMA 16

17. Evalúe $\lim_{n \to \infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+n}} \right)$.

18. Para cualquier número c, sea $f_c(x)$ el más pequeño de los dos números $(x - c)^2$ y $(x - c - 2)^2$. Entonces, definimos $g(c) = \int_0^1 f_c(x)\,dx$. Encuentre los valores máximo y mínimo de $g(c)$ si $-2 \leq c \leq 2$.

Se requiere calculadora graficadora o computadora

6 Aplicaciones de la integración



La gran pirámide del rey Keops fue construida en Egipto de 2580 a. C. a 2560 a. C. y por más de 3 800 años fue la estructura más alta en el mundo construida por el hombre. Las técnicas de este capítulo nos permitirán estimar el trabajo total realizado en la construcción de esta pirámide y, por tanto, hacer una conjetura de cuántos obreros fueron necesarios para construirla.

© Ziga Camernik / Shutterstock

En este capítulo exploramos algunas de las aplicaciones de la integral definida utilizándola para calcular áreas entre curvas, volúmenes de sólidos y el trabajo realizado por una fuerza variable. El tema común es el siguiente método general, que es similar al que utilizamos para encontrar áreas bajo las curvas: descomponemos una cantidad Q en un gran número de pequeñas partes. Después aproximamos cada una de estas partes por una cantidad de la forma $f(x_i^*)\,\Delta x$ y así aproximamos Q mediante una suma de Riemann. Luego, tomamos el límite y expresamos Q como una integral. Por último, evaluamos la integral mediante el teorema fundamental del cálculo o la regla del punto medio.

6.1 Áreas entre curvas

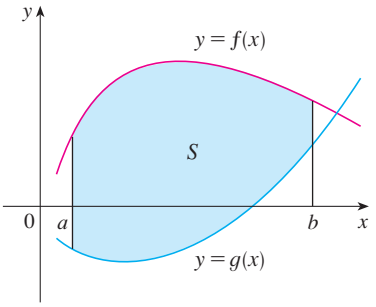


FIGURA 1
$S = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$

En el capítulo 5 se definen y calculan áreas de regiones que están bajo las gráficas de funciones. Aquí usamos integrales para calcular las áreas de regiones que quedan entre las gráficas de dos funciones.

Considere la región S que se ubica entre dos curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ y entre las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, donde f y g son funciones continuas y $f(x) \geq g(x)$ para toda x en $[a, b]$. (Véase la figura 1.)

De la misma manera, como lo hicimos para áreas bajo curvas en la sección 5.1, dividimos S en n franjas con igual anchura, y luego calculamos el valor aproximado de la i-ésima franja mediante un rectángulo de base Δx y altura $f(x_i^*) - g(x_i^*)$. (Véase la figura 2. Si lo desea, podríamos tomar todos los puntos muestra como extremos derechos, en cuyo caso $x_i^* = x_i$). Por tanto, la suma de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} [f(x_i^*) - g(x_i^*)]\,\Delta x$$

es una aproximación a lo que intuimos que es el área de S.

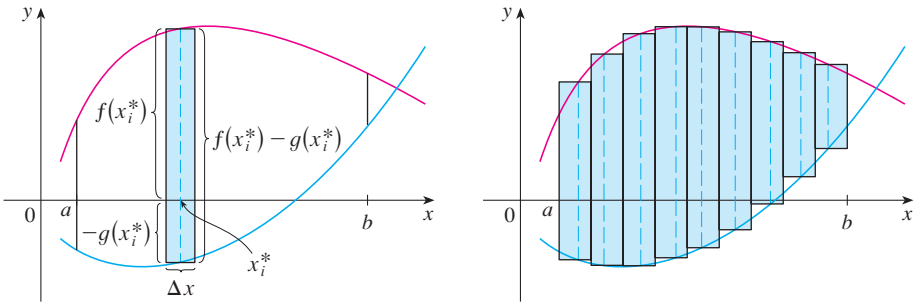


FIGURA 2
a) Rectángulo representativo b) Rectángulos de aproximación

Al parecer, esta aproximación es mejor cuando $n \to \infty$. Por tanto, definimos el **área** A de S como el valor límite de la suma de áreas de estos rectángulos de aproximación.

$$\boxed{1} \qquad A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i^*) - g(x_i^*)]\,\Delta x$$

Identificamos el límite en $\boxed{1}$ como la integral definida de $f - g$; por tanto, tenemos la fórmula siguiente para el área.

$\boxed{2}$ El área A de la región limitada por las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$ y las rectas $x = a$, $x = b$, donde f y g son continuas y $f(x) \geq g(x)$ para toda x en $[a, b]$, es

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

Observe que en el caso especial donde $g(x) = 0$, S es la región bajo la gráfica de f, y nuestra definición general del área $\boxed{1}$ se reduce a la definición anterior (definición 2 de la sección 5.1).

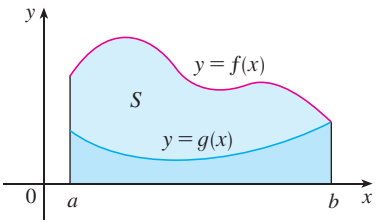


FIGURA 3

$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

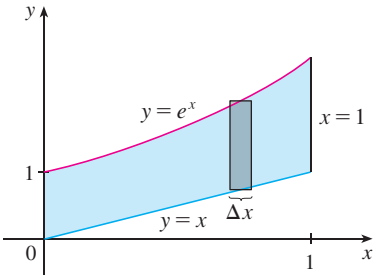


FIGURA 4

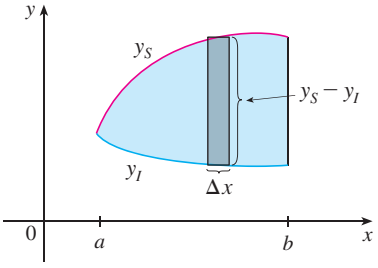


FIGURA 5

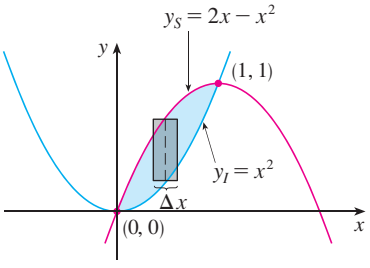


FIGURA 6

En el caso donde f y g son positivas, podemos ver en la figura 3 por qué 2 es cierta:

$$A = [\text{área bajo } y = f(x)] - [\text{área bajo } y = g(x)]$$
$$= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

EJEMPLO 1 Determine el área de la región acotada por arriba por $y = e^x$, por abajo por $y = x$ y a los lados por $x = 0$ y $x = 1$.

SOLUCIÓN La región se muestra en la figura 4. La curva que limita la parte superior es $y = e^x$, y la curva del límite inferior es $y = x$. De este modo usamos la fórmula del área 2 con $f(x) = e^x$, $g(x) = x$, $a = 0$ y $b = 1$.

$$A = \int_0^1 (e^x - x)\,dx = e^x - \tfrac{1}{2}x^2\Big]_0^1$$
$$= e - \tfrac{1}{2} - 1 = e - 1.5$$

En la figura 4 se toma un rectángulo representativo de aproximación cuyo ancho es Δx como recordatorio del procedimiento por medio del cual se define el área 1. En general, cuando planteamos una integral para determinar un área, es útil elaborar un croquis de la región para identificar la curva superior y_S, la curva inferior y_I y el rectángulo representativo de aproximación como en la figura 5. Por consiguiente, el área de un rectángulo representativo es $(y_S - y_I)$ y la ecuación

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (y_S - y_I)\,\Delta x = \int_a^b (y_S - y_I)\,dx$$

resume el procedimiento de sumar (en el sentido de límite) las áreas de todos los rectángulos representativos.

Observe que, en la figura 5, el límite o frontera izquierda se reduce a un punto, en tanto que, en la figura 3, la frontera derecha se reduce a un punto. En el ejemplo siguiente, ambos límites se reducen a un punto, de modo que el primer paso es determinar a y b.

V EJEMPLO 2 Calcule el área de la región encerrada por las parábolas $y = x^2$ y $y = 2x - x^2$.

SOLUCIÓN Primero determinamos los puntos de intersección de las parábolas resolviendo en forma simultánea sus ecuaciones. El resultado es $x^2 = 2x - x^2$, o $2x^2 - 2x^2 = 0$. Así, $2x(x - 1) = 0$, de modo que $x = 0$ o 1. Los puntos de intersección son $(0, 0)$ y $(1, 1)$.

Según la figura 6, los límites superior e inferior son

$$y_S = 2x - x^2 \qquad \text{y} \qquad y_I = x^2$$

El área de un rectángulo representativo es

$$(y_S - y_I)\,\Delta x = (2x - x^2 - x^2)\,\Delta x$$

por lo que la región se sitúa entre $x = 0$ y $x = 1$. De modo que el área total es

$$A = \int_0^1 (2x - 2x^2)\,dx = 2\int_0^1 (x - x^2)\,dx$$

$$= 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

Algunas veces es difícil, o hasta imposible, determinar los puntos donde se cortan exactamente las dos curvas. Como se muestra en el ejemplo siguiente, con la ayuda de una calculadora para graficar o de una computadora, podemos encontrar valores aproximados de los puntos de intersección, y luego proceder como antes.

EJEMPLO 3 Calcule el área aproximada de la región acotada por las curvas $y = x/\sqrt{x^2 + 1}$ y $y = x^4 - x$.

SOLUCIÓN Si tratáramos de determinar exactamente los puntos de intersección, habría que resolver la ecuación

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = x^4 - x$$

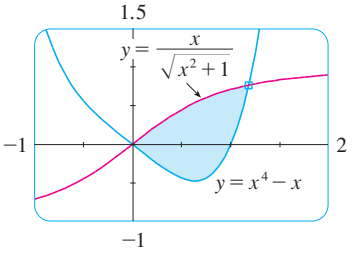


FIGURA 7

Esta ecuación parece muy difícil como para resolverla de manera exacta (de hecho, es imposible), de modo que recurrimos a una calculadora para graficar o a una computadora para trazar las gráficas de las dos curvas de la figura 7. Un punto de intersección está en el origen. Haciendo un acercamiento con el zoom en el otro punto de intersección hallamos que $x \approx 1.18$. (Si se requiere mayor precisión, podríamos aplicar el método de Newton o un buscador de raíces, si se cuenta con un instrumento para graficar.) En estos términos, una aproximación al área entre las curvas es

$$A \approx \int_0^{1.18} \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - (x^4 - x) \right] dx$$

Para integrar el primer término utilizamos la sustitución $u = x^2 + 1$. Entonces, $du = 2x\,dx$, y cuando $x = 1.18$, $u \approx 2.39$. Así que

$$\begin{aligned} A &\approx \tfrac{1}{2} \int_1^{2.39} \frac{du}{\sqrt{u}} - \int_0^{1.18} (x^4 - x)\,dx \\ &= \sqrt{u}\,\Big]_1^{2.39} - \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^2}{2} \right]_0^{1.18} \\ &= \sqrt{2.39} - 1 - \frac{(1.18)^5}{5} + \frac{(1.18)^2}{2} \\ &\approx 0.785 \end{aligned}$$

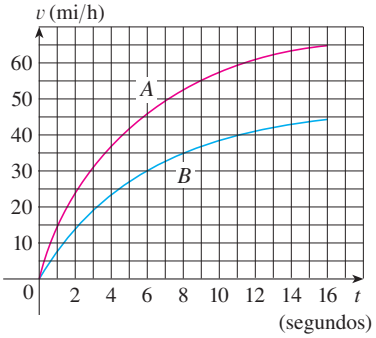


FIGURA 8

EJEMPLO 4 En la figura 8 se muestran las curvas de velocidad para dos automóviles, A y B, que parten juntos y se desplazan a lo largo de la misma carretera. ¿Qué representa el área entre las curvas? Aplique la regla del punto medio para estimarla.

SOLUCIÓN De acuerdo con la sección 5.4, el área bajo la curva A de la velocidad representa la distancia que recorre el vehículo A durante los primeros 16 segundos. Del mismo modo, el área bajo la curva B es la distancia que recorre el automóvil B durante ese tiempo. Así, el área entre estas curvas, que es la diferencia de las áreas bajo las curvas, es la distancia entre los vehículos después de 16 segundos. Tomamos las velocidades de la gráfica y las convertimos en pies por segundo (1 millas/h $= \frac{5\,280}{3\,600}$ pie/s).

t	0	2	4	6	8	10	12	14	16
v_A	0	34	54	67	76	84	89	92	95
v_B	0	21	34	44	51	56	60	63	65
$v_A - v_B$	0	13	20	23	25	28	29	29	30

Aplicamos la regla del punto medio con $n = 4$ intervalos, de modo que $\Delta t = 4$. Los puntos medios de los intervalos son $\bar{t}_1 = 2, \bar{t}_2 = 6, \bar{t}_3 = 10$ y $\bar{t}_4 = 14$. Estimamos la distancia entre los automóviles después de 16 segundos como se indica a continuación:

$$\int_0^{16} (v_A - v_B)\,dt \approx \Delta t\,[13 + 23 + 28 + 29]$$
$$= 4(93) = 372 \text{ pies}$$

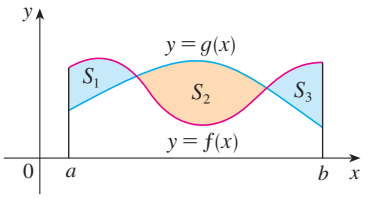


FIGURA 9

Si se pide determinar el área entre las curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ donde $f(x) \geq g(x)$ para algunos valores de x, pero $g(x) \geq f(x)$ para otros valores de x, entonces dividimos la región dada S en varias regiones $S_1, S_2, \ldots$ con áreas $A_1, A_2, \ldots$ como se ilustra en la figura 9. Después definimos el área de la región S como la suma de las áreas de las regiones más pequeñas $S_1, S_2, \ldots$, es decir, $A = A_1 + A_2 + \cdots$. Puesto que

$$|f(x) - g(x)| = \begin{cases} f(x) - g(x) & \text{cuando } f(x) \geq g(x) \\ g(x) - f(x) & \text{cuando } g(x) \geq f(x) \end{cases}$$

tenemos la expresión siguiente para A.

3 El área entre las curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ y entre $x = a$ y $x = b$ es

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$$

Al evaluar la integral en 3, aún podemos dividir en integrales que corresponderían a $A_1, A_2, \ldots$

V EJEMPLO 5 Calcule el área de la región acotada por las curvas $y = \text{sen } x$, $y = \cos x$, $x = 0$ y $x = \pi/2$.

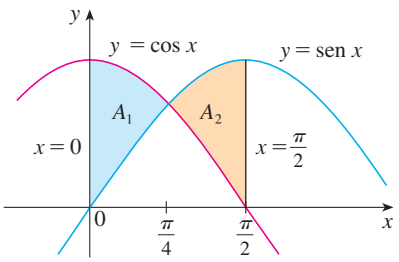


FIGURA 10

SOLUCIÓN Los puntos de intersección se presentan cuando sen $x = \cos x$, es decir, cuando $x = \pi/4$ (puesto que $0 \leq x \leq \pi/2$). La región se ilustra en la figura 10. Observe que $\cos x \geq \text{sen } x$ cuando $0 \leq x \leq \pi/4$, pero sen $x \geq \cos x$ cuando $\pi/4 \leq x \leq \pi/2$. Por tanto, el área requerida es

$$A = \int_0^{\pi/2} |\cos x - \text{sen } x|\,dx = A_1 + A_2$$
$$= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \text{sen } x)\,dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\text{sen } x - \cos x)\,dx$$
$$= [\text{sen } x + \cos x]_0^{\pi/4} + [-\cos x - \text{sen } x]_{\pi/4}^{\pi/2}$$
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 0 - 1\right) + \left(-0 - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$= 2\sqrt{2} - 2$$

En este ejemplo en particular podríamos haber ahorrado algo de trabajo observando que la región es simétrica respecto a $x = \pi/4$, así que

$$A = 2A_1 = 2\int_0^{\pi/4} (\cos x - \text{sen } x)\,dx$$

Algunas regiones se manejan mejor si se considera a x como una función de y. Si una región está acotada con curvas de ecuaciones $x = f(y)$, $x = g(y)$, $y = c$ y $y = d$, donde f y g son continuas y $f(y) \geq g(y)$ para $c \leq y \leq d$ (véase la figura 11), entonces su área es

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]\, dy$$

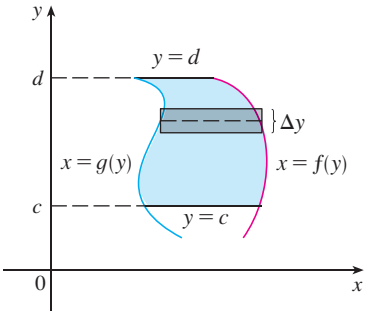


FIGURA 11

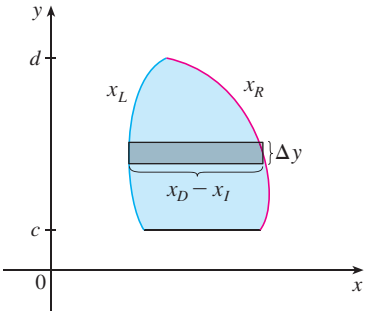


FIGURA 12

Si escribimos x_D para el límite derecho y x_I para el límite izquierdo, entonces, según la figura 12, tenemos

$$A = \int_c^d (x_D - x_I)\, dy$$

He aquí un rectángulo representativo de aproximación con dimensiones $x_D - x_L$ y Δy.

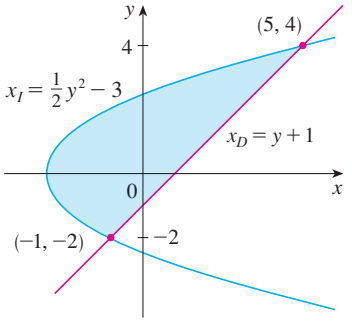


FIGURA 13

EJEMPLO 6 Calcule el área definida mediante la recta $y = x - 1$ y la parábola $y^2 = 2x + 6$.

SOLUCIÓN Al resolver las dos ecuaciones, los puntos de intersección son $(-1, -2)$ y $(5, 4)$. Al resolver la ecuación de la parábola y determinar x observamos que, según la figura 13, las curvas que limitan a la izquierda y a la derecha son

$$x_I = \tfrac{1}{2}y^2 - 3 \qquad \text{y} \qquad x_D = y + 1$$

Es necesario integrar entre los valores de y adecuados, $y = -2$ y $y = 4$; por consiguiente,

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{4} (x_D - x_I)\, dy = \int_{-2}^{4} \left[(y + 1) - \left(\tfrac{1}{2}y^2 - 3\right)\right] dy \\ &= \int_{-2}^{4} \left(-\tfrac{1}{2}y^2 + y + 4\right) dy \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{y^3}{3}\right) + \frac{y^2}{2} + 4y \Big]_{-2}^{4} \\ &= -\tfrac{1}{6}(64) + 8 + 16 - \left(\tfrac{4}{3} + 2 - 8\right) = 18 \end{aligned}$$

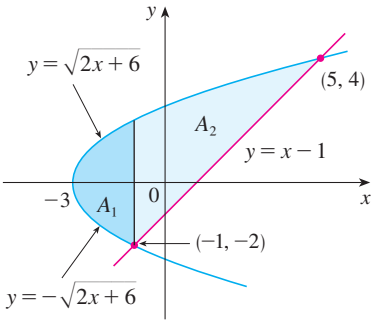


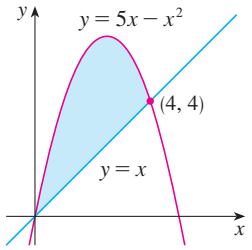
FIGURA 14

NOTA Pudimos haber calculado el área del ejemplo 6 integrando respecto a x; en lugar de y, pero el cálculo es más complicado, ya que significaría dividir la región en dos y determinar las áreas A_1 y A_2 de la figura 14. El método aplicado en el ejemplo 6 es *mucho* más fácil.

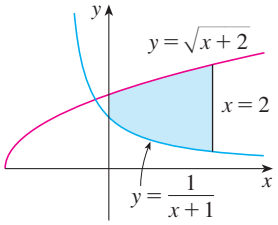
6.1 Ejercicios

1-4 Determine el área de cada una de las regiones sombreadas.

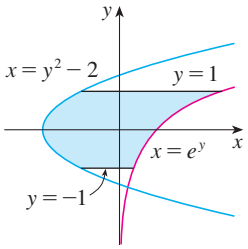
1.



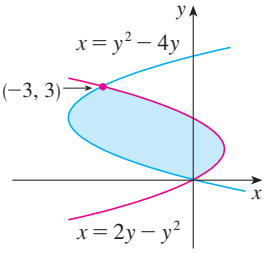
2.



3.



4.



5-12 Dibuje las regiones encerradas por cada una de las curvas dadas. Decida si integra respecto a x o y. Trace un rectángulo representativo de aproximación e indique su altura y su ancho. Luego determine el área de la región.

5. $y = e^x, \quad y = x^2 - 1, \quad x = -1, \quad x = 1$

6. $y = \operatorname{sen} x, \quad y = x, \quad x = \pi/2, \quad x = \pi$

7. $y = (x - 2)^2, \quad y = x$

8. $y = x^2 - 2x, \quad y = x + 4$

9. $y = 1/x, \quad y = 1/x^2, \quad x = 2$

10. $y = \operatorname{sen} x, \quad y = 2x/\pi, \quad x \geqslant 0$

11. $x = 1 - y^2, \quad x = y^2 - 1$

12. $4x + y^2 = 12, \quad x = y$

13-28 Trace cada una de las regiones encerradas y su área.

13. $y = 12 - x^2, \quad y = x^2 - 6$

14. $y = x^2, \quad y = 4x - x^2$

15. $y = e^x, \quad y = xe^x, \quad x = 0$

16. $y = \cos x, \quad y = 2 - \cos x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

17. $x = 2y^2, \quad x = 4 + y^2$

18. $y = \sqrt{x - 1}, \quad x - y = 1$

19. $y = \cos \pi x, \quad y = 4x^2 - 1$

20. $x = y^4, \quad y = \sqrt{2 - x}, \quad y = 0$

21. $y = \tan x, \quad y = 2 \operatorname{sen} x, \quad -\pi/3 \leqslant x \leqslant \pi/3$

22. $y = x^3, \quad y = x$

23. $y = \cos x, \quad y = \operatorname{sen} 2x, \quad x = 0, \quad x = \pi/2$

24. $y = \cos x, \quad y = 1 - \cos x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$

25. $y = \sqrt{x}, \quad y = \frac{1}{2}x, \quad x = 9$

26. $y = |x|, \quad y = x^2 - 2$

27. $y = 1/x, \quad y = x, \quad y = \frac{1}{4}x, \quad x > 0$

28. $y = \frac{1}{4}x^2, \quad y = 2x^2, \quad x + y = 3, \quad x \geqslant 0$

29-30 Utilice el cálculo para encontrar el área de cada uno de los siguientes triángulos definidos por los vértices dados.

29. (0, 0), (3, 1), (1, 2)

30. (2, 0), (0, 2) (−1, 1)

31-32 Evalúe cada una de las siguientes integrales e interprétela como el área de una región. Dibuje la región.

31. $\int_0^{\pi/2} |\operatorname{sen} x - \cos 2x| \, dx$

32. $\int_{-1}^{1} |3^x - 2^x| \, dx$

33-36 Por medio de una gráfica, encuentre un valor aproximado de las coordenadas x de los puntos de intersección entre las curvas dadas. Luego estime (en forma aproximada) el área de cada una de las siguientes regiones definida por las curvas.

33. $y = x \operatorname{sen}(x^2), \quad y = x^4$

34. $y = \dfrac{x}{(x^2 + 1)^2}, \quad y = x^5 - x, \quad x \geqslant 0$

35. $y = 3x^2 - 2x, \quad y = x^3 - 3x + 4$

36. $y = e^x, \quad y = 2 - x^2$

37-40 Grafique cada una de las siguientes regiones entre las curvas dadas y utilice su calculadora para calcular el área con una aproximación de cinco decimales.

37. $y = \dfrac{2}{1 + x^4}, \quad y = x^2$

38. $y = e^{1-x^2}, \quad y = x^4$

39. $y = \tan^2 x, \quad y = \sqrt{x}$

40. $y = \cos x, \quad y = x + 2 \operatorname{sen}^4 x$

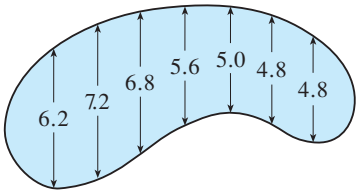
41. Utilice un sistema algebraico computarizado para encontrar el área exacta encerrada por las curvas $y = x^5 - 6x^3 + 4x$ y $y = x$.

42. Trace la región en el plano xy definida por las desigualdades $x - 2y^2 \geq 0$, $1 - x - |y| \geq 0$ y determine su área.

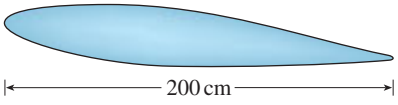
43. Los automóviles de carreras de Chris y Kelly están lado a lado al inicio de la carrera. En la tabla se proporcionan las velocidades de cada vehículo (en millas por hora) durante los primeros 10 segundos de la competencia. Aplique la regla del punto medio para estimar cuánto se adelanta Kelly durante los 10 primeros segundos.

t	v_C	v_K	t	v_C	v_K
0	0	0	6	69	80
1	20	22	7	75	86
2	32	37	8	81	93
3	46	52	9	86	98
4	54	61	10	90	102
5	62	71			

44. Los anchos, en metros, de una piscina en forma de riñón se midieron a intervalos de 2 metros, como se indica en la figura. Mediante la regla del punto medio, estime el área de la piscina.



45. Se muestra la sección transversal de un ala de avión. Las mediciones del grosor del ala, en centímetros, en intervalos de 20 centímetros son 5.8, 20.3, 26.7, 29.0, 27.6, 27.3, 23.8, 20.5, 15.1, 8.7 y 2.8. Aplique la regla del punto medio para estimar el área de la sección transversal del ala.



46. La tasa de nacimientos de una población es $b(t) = 2\,200e^{0.024t}$ personas por cada año y la de decesos es $d(t) = 1\,460e^{0.018t}$ personas por cada año. Halle el área entre estas curvas para $0 \leq t \leq 10$. ¿Qué representa el área?

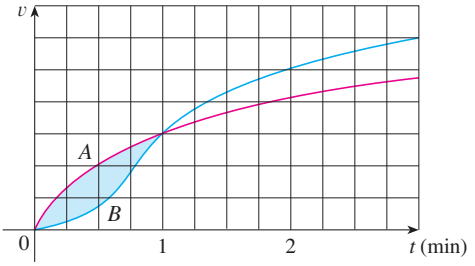
47. Dos automóviles, A y B, se encuentran lado a lado al inicio de la carrera, y aceleran a partir del reposo. En la figura se muestran las gráficas de sus funciones velocidad.

a) ¿Cuál vehículo tiene ventaja después de un minuto? Explique.

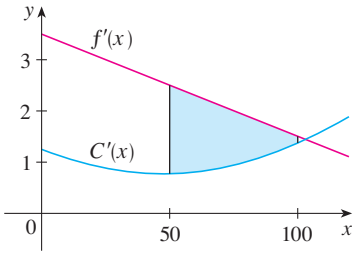
b) ¿Cuál es el significado del área de la región sombreada?

c) ¿Cuál es el automóvil que tiene ventaja después de dos minutos? Explique.

d) Estime el tiempo en el cual los vehículos van de nuevo lado a lado.



48. En la figura se muestran las gráficas de la función ingreso marginal f' y la función costo marginal C' para un fabricante. [Recuerde de la sección 4.8 que $f(x)$ y $C(x)$ representan los ingresos y el costo cuando se fabrican x unidades. Suponga que f y C se miden en miles de dólares.] ¿Cuál es el significado del área de la región sombreada? Estime el valor de esta cantidad mediante la regla del punto medio.



49. La curva cuya ecuación es $y^2 = x^2(x + 3)$ se denomina curva **cúbica de Tschirnhausen**. Si trazamos la gráfica de esta curva, podremos ver que una parte de ella forma un bucle. Encuentre el área definida por este bucle.

50. Encuentre el área de la región definida por la parábola $y = x^2$, la recta tangente a esta parábola en $(1, 1)$ y el eje x.

51. Determine el número b tal que la recta $y = b$ divide a la región delimitada por las curvas $y = x^2$ y $y = 4$ en dos regiones de igual área.

52. a) Calcule el número a tal que la recta $x = a$ biseca el área bajo la curva $y = 1/x^2$, $1 \leq x \leq 4$.

b) Determine el numero b tal que la recta $y = b$ biseca el área del inciso a).

53. Calcule los valores de c tales que el área de la región delimitada por las parábolas $y = x^2 - c^2$ y $y = c^2 - x^2$ es 576.

54. Suponga que $0 < c < \pi/2$. ¿Para qué valor de c el área de la región que encierran las curvas $y = \cos x$, $y = \cos(x - c)$, y $x = 0$ es igual al área de la región encerrada por las curvas $y = \cos(x - c)$, $x = \pi$ y $y = 0$?

55. ¿Para qué valores de m la recta $y = mx$ y la curva $y = x/(x^2 + 1)$ encierran una región? Calcule el área de la región.

PROYECTO DE APLICACIÓN EL ÍNDICE GINI

¿Cómo es posible medir la distribución del ingreso entre los habitantes de un determinado país? Una de esas medidas es el *índice Gini*, nombrado así en honor del economista italiano Corrado Gini, quien lo ideó en 1912.

Primero clasificamos todos los hogares de un país de acuerdo con el ingreso y después calculamos el porcentaje de hogares cuyo ingreso sea a lo sumo un porcentaje dado del ingreso total del país. Definimos una **curva de Lorenz** $y = L(x)$ sobre el intervalo $[0, 1]$ ubicando el punto $(a/100, b/100)$ sobre la curva si la parte inferior $a\%$ de los hogares recibe a lo más $b\%$ del ingreso total. Por ejemplo, en la figura 1, el punto (0.4, 0.12) está sobre la curva de Lorenz para los Estados Unidos en 2008 porque 40% más pobre de la población recibió sólo 12% del ingreso total. Asimismo, la parte inferior 80% de la población recibió 50% del ingreso total, por lo que el punto (0.8, 0.5) está sobre la curva de Lorenz. (La curva de Lorenz es así nombrada en honor del economista estadounidense Max Lorenz).

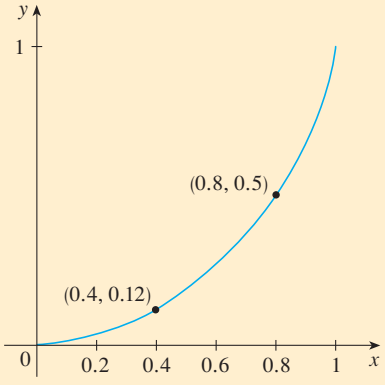


FIGURA 1
Curva de Lorenz para EU en 2008

La figura 2 muestra algunas curvas típicas de Lorenz. Todas pasan por los puntos (0, 0) y (1, 1) y son cóncavas hacia arriba. En el caso extremo $L(x) = x$, la sociedad es perfectamente igualitaria: los más pobres $a\%$ de la población recibe $a\%$ del ingreso total y así todo el mundo recibe el mismo ingreso. El área entre una curva de Lorenz $y = L(x)$ y la recta $y = x$ mide cuánto la distribución del ingreso difiere de una igualdad absoluta. El **índice de Gini** (a veces llamado **coeficiente de Gini** o **coeficiente de desigualdad**) es el área entre la curva de Lorenz y la recta $y = x$ (sombreada en la figura 3) dividida entre el área bajo $y = x$.

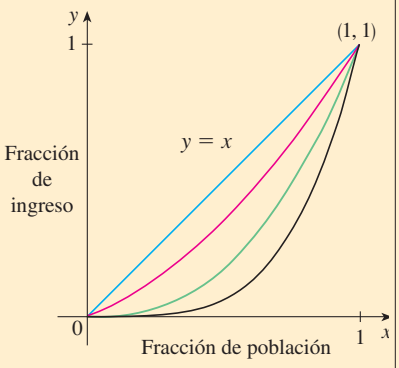


FIGURA 2

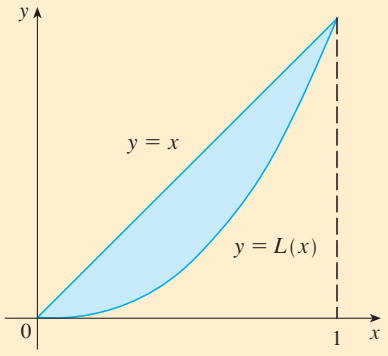


FIGURA 3

1. a) Demuestre que el índice de Gini, G, es dos veces el área entre la curva de Lorenz y la recta $y = x$, es decir,

$$G = 2\int_0^1 [x - L(x)]\,dx$$

b) ¿Cuál es el valor de G para una sociedad perfectamente igualitaria (todo el mundo tiene el mismo ingreso)? ¿Cuál es el valor de G para una sociedad perfectamente totalitaria (una sola persona recibe todos los ingresos)?

2. La siguiente tabla (obtenida de los datos facilitados por la Oficina de Censo de EU) muestra los valores de la función de Lorenz de distribución del ingreso en los Estados Unidos para el año 2008.

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$L(x)$	0.000	0.034	0.120	0.267	0.500	1.000

a) ¿Qué porcentaje del ingreso total de EU fue recibido por 20% más rico de la población en 2008?

b) Utilice una calculadora o computadora para ajustar los datos de la tabla a una función cuadrática. Grafique los puntos dato y la función cuadrática. ¿Es el modelo cuadrático un ajuste razonable?

c) Utilice el modelo cuadrático para la función de Lorenz para estimar el índice de Gini para Estados Unidos en el año 2008.

3. La siguiente tabla proporciona valores para la función de Lorenz en las décadas de 1970, 1980, 1990 y 2000. Utilice el método del problema 2 para estimar el índice de Gini para Estados Unidos durante esos años y compare con su respuesta al problema 2c). ¿Nota usted una tendencia?

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
1970	0.000	0.041	0.149	0.323	0.568	1.000
1980	0.000	0.042	0.144	0.312	0.559	1.000
1990	0.000	0.038	0.134	0.293	0.530	1.000
2000	0.000	0.036	0.125	0.273	0.503	1.000

SAC **4.** A menudo, un modelo potencia proporciona un ajuste más preciso que un modelo cuadrático para una función de Lorenz. Si tiene usted un equipo de cómputo con Maple o Mathematica, ajuste una función potencia ($y = ax^k$) a los datos en el problema 2 y utilícelo para estimar el índice Gini para Estados Unidos en 2008. Compare con su respuesta a los incisos b) y c) del problema 2.

6.2 Volúmenes

Cuando tratamos de calcular el volumen de un sólido, enfrentamos el mismo tipo de problema que al determinar áreas. Intuitivamente sabemos lo que significa un volumen, pero es necesario precisar la idea usando el cálculo, a fin de dar una definición exacta de volumen.

Empezamos con un tipo simple de sólido llamado **cilindro** (o mejor dicho un *cilindro recto*). Como se ilustra en la figura 1a), un cilindro está limitado por una región plana B_1, que se llama **base**, y una región congruente B_2 en un plano paralelo. El cilindro consiste en todos los puntos sobre los segmentos de recta que son perpendiculares a la base y unen a B_1 con B_2. Si el área de la base es A y la altura del cilindro (la distancia desde B_1 hasta B_2) es h, entonces el volumen V del cilindro se define como

$$V = Ah$$

En particular, si la base es un círculo de radio r, entonces el cilindro es un cilindro circular cuyo volumen es $V = \pi r^2 h$ [véase la figura 1b)], y si la base es un rectángulo de largo l y ancho w, entonces el cilindro es una caja rectangular (también se le llama *paralelepípedo rectangular*) cuyo volumen es $V = lwh$ [véase la figura 1c)].

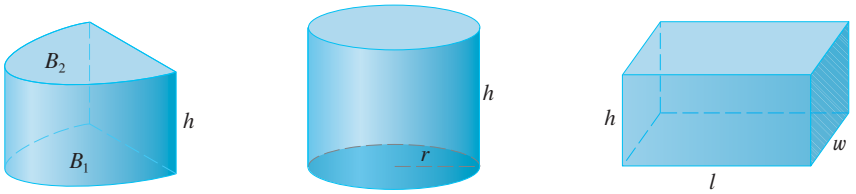


FIGURA 1

a) Cilindro $V = Ah$ b) Cilindro circular $V = \pi r^2 h$ c) Caja rectangular $V = lwh$

En el caso de un sólido S que no es un cilindro, primero "cortamos" a S en piezas y hacemos que cada pieza se aproxime a un cilindro, para después estimar el volumen de S sumando los volúmenes de los cilindros. El valor del volumen exacto de S se obtiene a través un proceso de límite en el que el número de piezas se hace cada vez más grande.

Iniciamos cortando a S con un plano y obteniendo una región plana que se denomina **sección transversal** de S. Sea $A(x)$ el área de la sección transversal de S en un plano P_x perpendicular al eje x, y que pasa por el punto x, donde $a \leq x \leq b$. (Véase la figura 2. Imagine que corta a S con un cuchillo a través de x y calcule el área de esta rebanada.) El área de la sección transversal $A(x)$ variará cuando x se incrementa desde a hasta b.

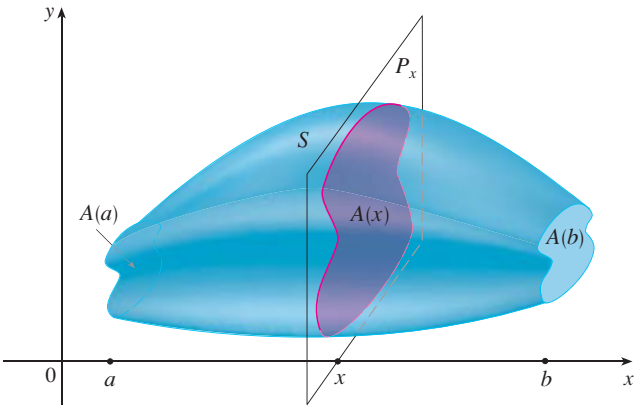


FIGURA 2

Dividimos S en n "rebanadas" del mismo ancho Δx mediante los planos $P_{x_1}, P_{x_2}, \ldots$ (Para rebanar el sólido imagine que está rebanando una hogaza de pan.) Si elegimos puntos muestra x_i^* en $[x_{i-1}, x_i]$, podemos tener un valor aproximado de la i-ésima rebanada S_i, (la parte de S que queda entre los planos $P_{x_{i-1}}$ y P_{x_i}) por un cilindro cuya base tiene un área $A(x_i^*)$ y "altura" Δx. (Véase la figura 3.)

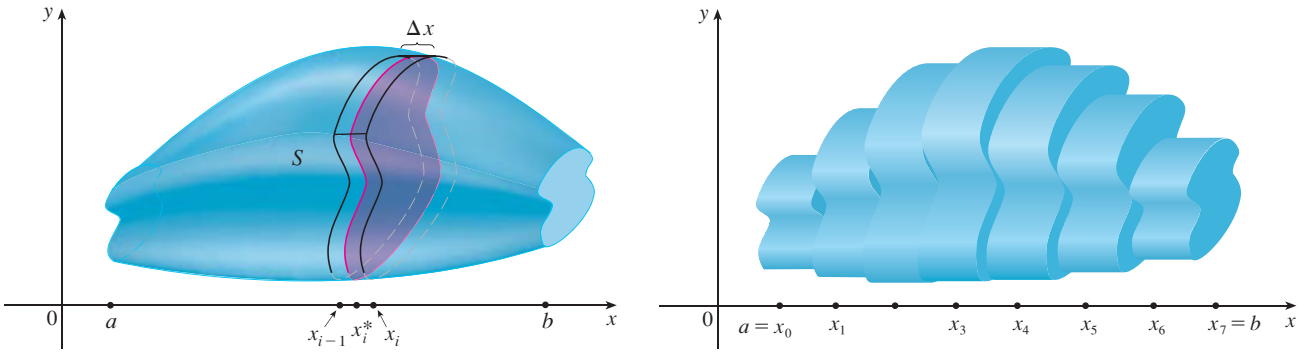


FIGURA 3

El volumen de este cilindro es $A(x_i^*)\,\Delta x$, de modo que una aproximación a la concepción intuitiva del volumen de la i-ésima rebanada S_i es:

$$V(S_i) \approx A(x_i^*)\,\Delta x$$

Al sumar los volúmenes de estas rebanadas, obtenemos un valor aproximado del volumen total (es decir, a lo que pensamos intuitivamente que es un volumen):

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\,\Delta x$$

Esta aproximación parece ser cada vez mejor cuando $n \to \infty$. (Suponga que las rebanadas son cada vez más delgadas). Por tanto, *definimos* al volumen como el límite de estas sumas cuando $n \to \infty$. Pero aquí reconocemos el límite de las sumas de Riemann como una integral definida y, por tanto, se tiene la siguiente definición.

Puede demostrarse que esta definición es independiente de dónde se ubique S respecto al eje x. En otras palabras, no importa cómo corte las rebanadas mediante planos paralelos; siempre obtendrá la misma respuesta para V.

Definición de volumen Sea S un sólido que está entre $x = a$ y $x = b$. Si el área de la sección transversal de S en el plano P_x, a través de x y perpendicular al eje x, es $A(x)$, donde A es una función continua, entonces el **volumen** de S es

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\,\Delta x = \int_a^b A(x)\,dx$$

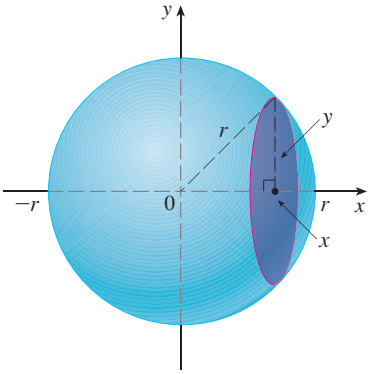


FIGURA 4

Cuando aplicamos la fórmula del volumen $V = \int_a^b A(x)\,dx$ es importante recordar que $A(x)$ es el área de una sección transversal que se obtiene al cortar a través de x con un plano perpendicular al eje x.

Observe que, en el caso de un cilindro, el área de la sección transversal es constante: $A(x) = A$ para toda x. De este modo, la definición de volumen da $V = \int_a^b A\,dx = A(b - a)$; esto concuerda con la fórmula $V = Ah$.

EJEMPLO 1 Demuestre que el volumen de una esfera de radio r es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

SOLUCIÓN Si colocamos la esfera de modo que su centro esté en el origen (véase la figura 4), entonces el plano P_x corta la esfera en un círculo cuyo radio (según el teorema

de Pitágoras), es $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. De este modo, el área de la sección transversal es

$$A(x) = \pi y^2 = \pi(r^2 - x^2)$$

Si aplicamos la definición del volumen con $a = -r$ y $b = r$, tenemos

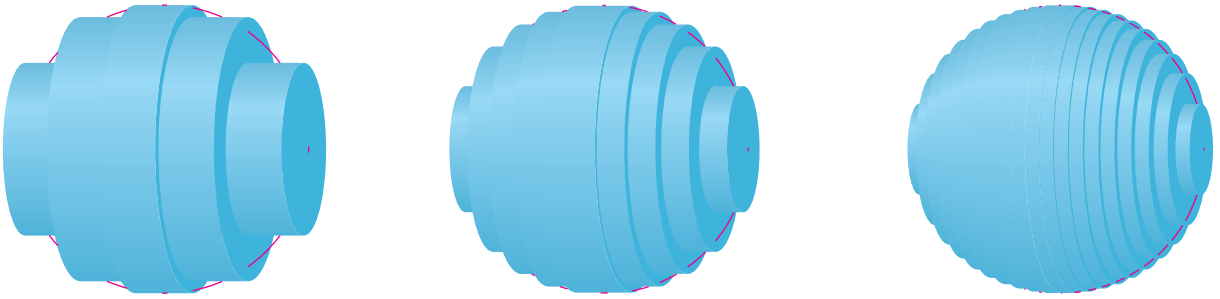
$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^{r} A(x)\,dx = \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2)\,dx \\ &= 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2)\,dx \qquad \text{(El integrando es una función par.)} \\ &= 2\pi\left[r^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^r = 2\pi\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) \\ &= \tfrac{4}{3}\pi r^3 \end{aligned}$$

En la figura 5 se ilustra la definición de volumen cuando el sólido es una esfera de radio $r = 1$. De acuerdo con el resultado del ejemplo 1, sabemos que el volumen de la esfera es $\frac{4}{3}\pi$, que es aproximadamente 4.18879. En este caso, las rebanadas son cilindros circulares, o *discos*, y las tres partes de la figura 5 muestran las interpretaciones geométricas de las sumas de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} A(\bar{x}_i)\,\Delta x = \sum_{i=1}^{n} \pi(1^2 - \bar{x}_i^2)\,\Delta x$$

cuando $n = 5$, 10 y 20 si elegimos los puntos muestra x_i^* como los puntos medios $\bar{x}_i$. Observe que, cuando incrementamos la cantidad de cilindros de aproximación, las sumas correspondientes de Riemann se vuelven más cercanas al volumen real.

TEC En Visual 6.2A se muestra una animación de la figura 5.



a) Mediante 5 discos, $V \approx 4.2726$ b) Mediante 10 discos, $V \approx 4.2097$ c) Mediante 20 discos, $V \approx 4.1940$

FIGURA 5 Aproximación al volumen de una esfera con radio 1

V EJEMPLO 2 Determine el volumen de un sólido que se obtiene al girar la región bajo la curva $y = \sqrt{x}$ respecto al eje x desde 0 hasta 1. Ilustre la definición de volumen dibujando un cilindro de aproximación representativo.

SOLUCIÓN La región se muestra en la figura 6a). Si giramos alrededor del eje x, obtenemos el sólido que se ilustra en la figura 6b). Cuando cortamos a través de punto x obtenemos un disco de radio $\sqrt{x}$. El área de esta sección transversal es

$$A(x) = \pi\left(\sqrt{x}\right)^2 = \pi x$$

y el volumen del cilindro de aproximación (un disco con espesor Δx) es

$$A(x)\,\Delta x = \pi x\,\Delta x$$

El sólido está entre $x = 0$ y $x = 1$, de modo que el volumen es

$$V = \int_0^1 A(x)\,dx = \int_0^1 \pi x\,dx = \pi \frac{x^2}{2}\Big]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

¿Obtuvimos una respuesta razonable en el ejemplo 2? Como verificación de nuestro trabajo, remplacemos la región dada por un cuadrado de base [0, 1] y altura 1. Si giramos el cuadrado, obtendremos un cilindro de radio 1, altura 1 y volumen $\pi \cdot 1^2 \cdot 1 = \pi$. Ya calculamos que el sólido dado tiene la mitad de este volumen, así que esto parece casi correcto.

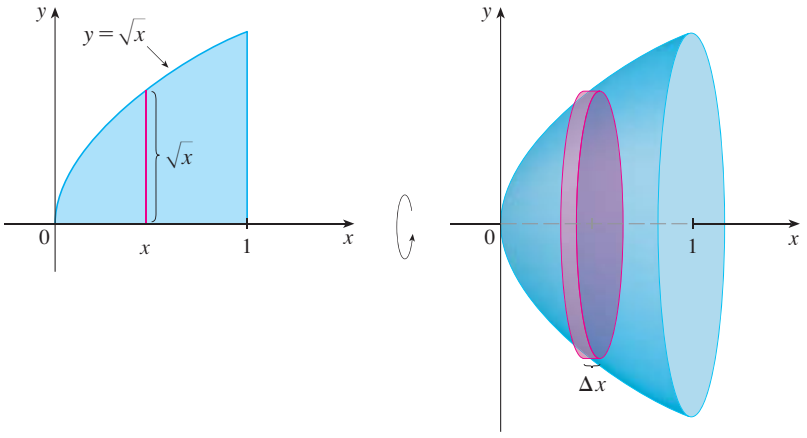


FIGURA 6 a) b)

V EJEMPLO 3 Calcule el volumen del sólido generado al rotar la región limitada por $y = x^3$, $y = 8$ y $x = 0$ respecto al eje y.

SOLUCIÓN La región se ilustra en la figura 7a) y el sólido resultante se muestrea en la figura 7b). Puesto que la región gira alrededor del eje y, tiene sentido "rebanar" el sólido en forma perpendicular al eje y, y, por tanto, integrar respecto a y. Si cortamos a una altura y, obtenemos un disco de radio x, donde $x = \sqrt[3]{y}$, de manera que el área de una sección transversal a través de y es

$$A(y) = \pi x^2 = \pi\left(\sqrt[3]{y}\right)^2 = \pi y^{2/3}$$

y el volumen del cilindro de aproximación ilustrado en la figura 7b) es

$$A(y)\,\Delta y = \pi y^{2/3}\,\Delta y$$

Puesto que el sólido está entre $y = 0$ y $y = 8$, su volumen es

$$V = \int_0^8 A(y)\,dy = \int_0^8 \pi y^{2/3}\,dy = \pi\left[\tfrac{3}{5}y^{5/3}\right]_0^8 = \frac{96\pi}{5}$$

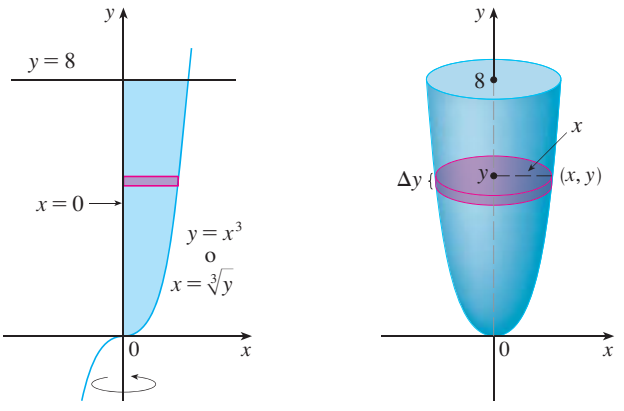


FIGURA 7 a) b)

EJEMPLO 4 La región $\mathcal{R}$ encerrada por las curvas $y = x$ y $y = x^2$ gira alrededor del eje x. Calcule el volumen del sólido resultante.

SOLUCIÓN Las curvas $y = x$ y $y = x^2$ se cortan en los puntos (0, 0) y (1, 1). La región entre ellas, el sólido de revolución y una sección transversal perpendicular al eje x se muestran en la figura 8. Una sección transversal en el plano P_x tiene la forma de una *rondana* (un aro anular) de radio interior x^2 y radio exterior x, de modo que determinamos el área de la sección transversal restando el área del círculo interno del área del círculo externo:

TEC Visual 6.2B muestra cómo se forman los sólidos de revolución.

$$A(x) = \pi x^2 - \pi(x^2)^2 = \pi(x^2 - x^4)$$

Por tanto, tenemos

$$V = \int_0^1 A(x)\,dx = \int_0^1 \pi(x^2 - x^4)\,dx$$

$$= \pi\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{15}$$

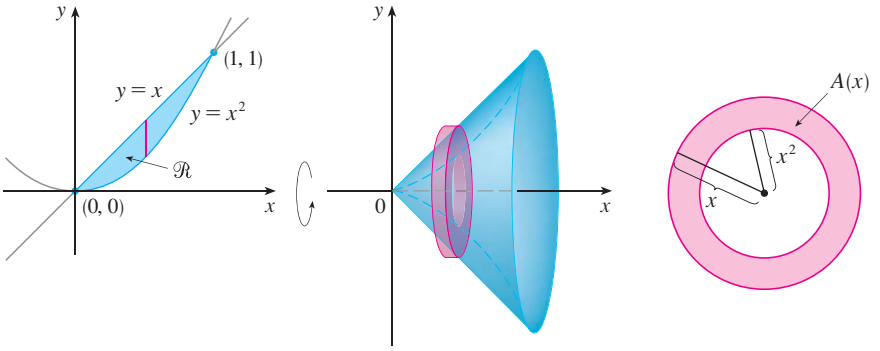


FIGURA 8 a) b) c)

EJEMPLO 5 Calcule el volumen del sólido obtenido al girar la región del ejemplo 4 alrededor de la recta $y = 2$.

SOLUCIÓN El sólido y la sección transversal se muestran en la figura 9. Otra vez, la sección transversal es una rondana, pero ahora el radio interior es $2 - x$, y el radio externo es $2 - x^2$.

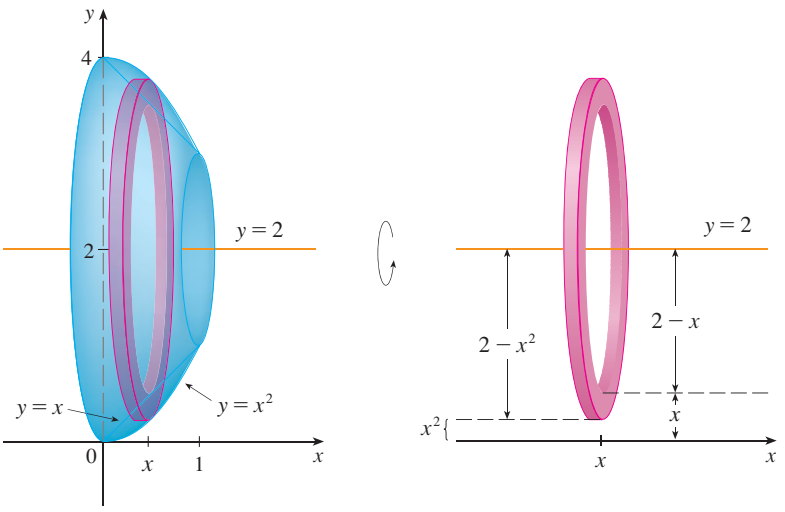


FIGURA 9

El área de la sección transversal es

$$A(x) = \pi(2 - x^2)^2 - \pi(2 - x)^2$$

y el volumen de S es

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 A(x)\,dx \\ &= \pi \int_0^1 [(2 - x^2)^2 - (2 - x)^2]\,dx \\ &= \pi \int_0^1 (x^4 - 5x^2 + 4x)\,dx \\ &= \pi \left[\frac{x^5}{5} - 5\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} \right]_0^1 \\ &= \frac{8\pi}{15} \end{aligned}$$

Los sólidos de los ejemplos 1 a 5 reciben el nombre de **sólidos de revolución** porque se generan haciendo girar una región alrededor de una recta. En general, determinamos el volumen de un sólido de revolución usando la fórmula básica definiendo

$$V = \int_a^b A(x)\,dx \quad \text{o bien} \quad V = \int_c^d A(y)\,dy$$

y calculamos el área de la sección transversal $A(x)$ o $A(y)$ mediante uno de los métodos siguientes:

- Si la sección transversal es un disco (como en los ejemplos 1 a 3) determinamos el radio del disco (en términos de x o y) y usamos

$$A = \pi(\text{radio})^2$$

- Si la sección transversal es una rondana (como en los ejemplos 4 y 5), determinamos el radio interior r_{in} y el radio exterior r_{ext} a partir de un dibujo (como en las figuras 8, 9 y 10) y calculamos el área de la rondana efectuando la diferencia entre el área del disco interno y el área del disco externo:

$$A = \pi(\text{radio exterior})^2 - \pi(\text{radio interior})^2$$

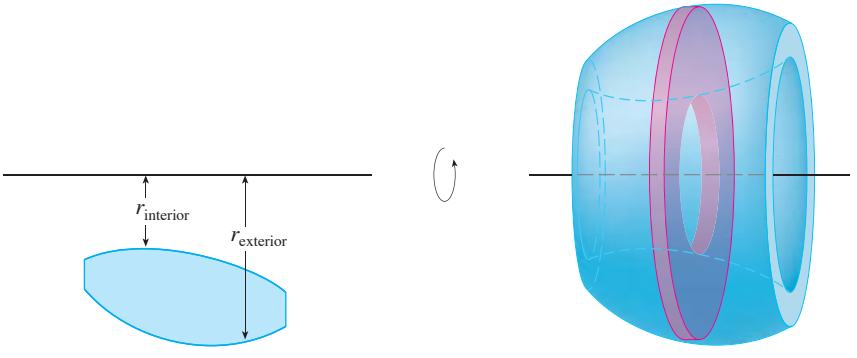


FIGURA 10

El ejemplo siguiente ilustra el procedimiento.

EJEMPLO 6 Calcule el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar la región del ejemplo 4 alrededor de la recta $x = -1$.

SOLUCIÓN En la figura 11 se ilustra una sección transversal horizontal. Es una rondana con radio interior $1 + y$ y radio exterior $1 + \sqrt{y}$, por lo que el área de la sección transversal es

$$\begin{aligned} A(y) &= \pi(\text{radio exterior})^2 - \pi(\text{radio interior})^2 \\ &= \pi\left(1 + \sqrt{y}\right)^2 - \pi(1 + y)^2 \end{aligned}$$

El volumen es

$$V = \int_0^1 A(y)\,dy = \pi \int_0^1 \left[\left(1 + \sqrt{y}\right)^2 - (1 + y)^2\right] dy$$

$$= \pi \int_0^1 \left(2\sqrt{y} - y - y^2\right) dy = \pi\left[\frac{4y^{3/2}}{3} - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

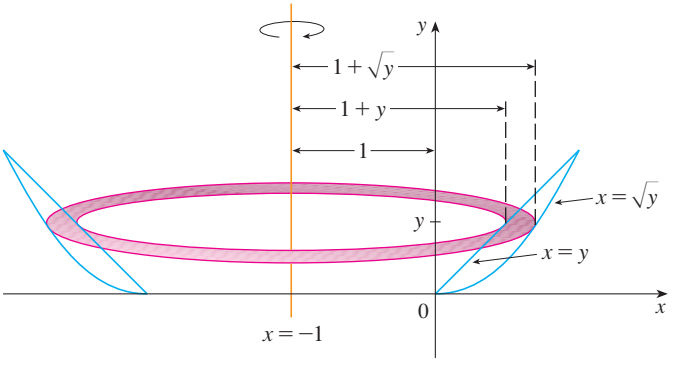


FIGURA 11

Ahora determinaremos los volúmenes de tres sólidos que *no* son sólidos de revolución.

EJEMPLO 7 En la figura 12 se muestra un sólido con una base circular de radio 1. Las secciones transversales paralelas, pero perpendiculares a la base, son triángulos equiláteros. Determine el volumen del sólido.

TEC En Visual 6.2C se muestra una animación de la figura 12.

SOLUCIÓN Consideremos la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. El sólido, su base y una sección transversal representativa a una distancia x desde el origen se ilustran en la figura 13.

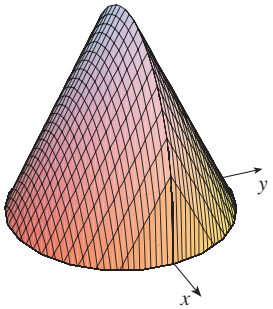
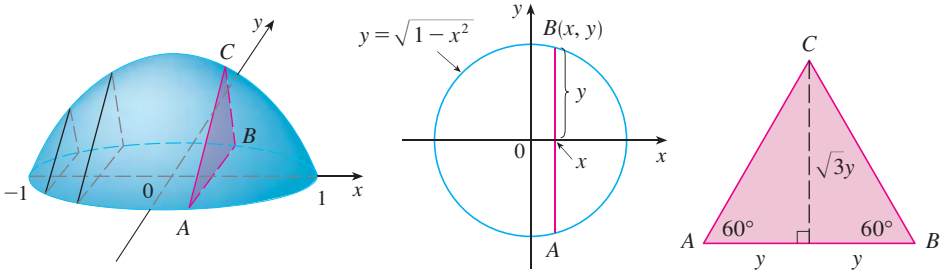


FIGURA 12
Imagen generada mediante computadora del sólido del ejemplo 7



a) El sólido b) Su base c) Una sección transversal

FIGURA 13

Puesto que B está sobre la circunferencia, tenemos $y = \sqrt{1 - x^2}$, y, de esa manera, la base del triángulo ABC es $|AB| = 2\sqrt{1 - x^2}$. Dado que el triángulo es equilátero,

según la figura 13c), su altura es $\sqrt{3}\,y = \sqrt{3}\sqrt{1-x^2}$. Por tanto, el área de la sección transversal es

$$A(x) = \tfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{3}\sqrt{1-x^2} = \sqrt{3}\,(1-x^2)$$

y el volumen del sólido es

$$V = \int_{-1}^{1} A(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{3}\,(1-x^2)\,dx$$

$$= 2\int_{0}^{1} \sqrt{3}\,(1-x^2)\,dx = 2\sqrt{3}\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

V EJEMPLO 8 Calcule el volumen de una pirámide cuya base es un cuadrado de lado L y cuya altura es h.

SOLUCIÓN Colocamos el origen O en el vértice de la pirámide y el eje x a lo largo de su eje central, como se ilustra en la figura 14. Cualquier plano P_x que pase por x y sea perpendicular al eje x corta a la pirámide en un cuadrado de lado s. Podemos expresar s en función de x observando por triángulos semejantes de la figura 15 que

$$\frac{x}{h} = \frac{s/2}{L/2} = \frac{s}{L}$$

y, de este modo, $s = Lx/h$. [Otro método es observar que la recta OP tiene pendiente $L/(2h)$ y, así, su ecuación es $y = Lx/(2h)$]. Por eso, el área de la sección transversal es

$$A(x) = s^2 = \frac{L^2}{h^2}x^2$$

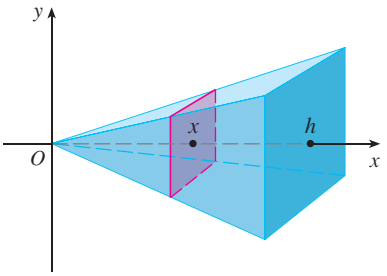


FIGURA 14

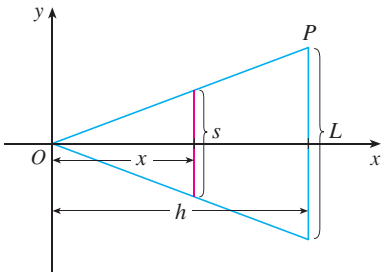


FIGURA 15

La pirámide se ubica entre $x = 0$ y $x = h$, por lo que su volumen es

$$V = \int_0^h A(x)\,dx = \int_0^h \frac{L^2}{h^2}x^2\,dx = \frac{L^2}{h^2}\frac{x^3}{3}\Big]_0^h = \frac{L^2h}{3}$$

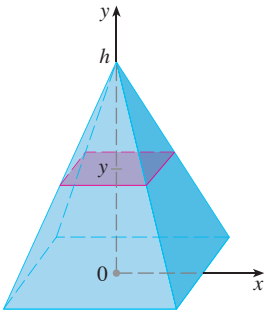
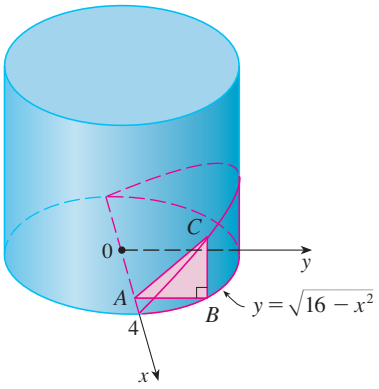


FIGURA 16

NOTA No era necesario colocar el vértice de la pirámide en el origen en el ejemplo 8. Se hizo así para que las ecuaciones resultaran más sencillas. Si en lugar de eso hubiéramos colocado el centro de la base en el origen y el vértice en el eje y positivo, como en la figura 16, habríamos obtenido la integral

$$V = \int_0^h \frac{L^2}{h^2}(h-y)^2\,dy = \frac{L^2h}{3}$$



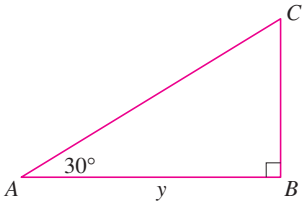


FIGURA 17

EJEMPLO 9 De un cilindro circular de radio 4, definido mediante dos planos, se corta una cuña. Un plano es perpendicular al eje del cilindro. El otro corta al primero en un ángulo de 30° a lo largo del diámetro del cilindro. Determine el volumen de la cuña.

SOLUCIÓN Si hacemos coincidir el eje x con el diámetro en el lugar donde se encuentran los planos, entonces la base del sólido es un semicírculo delimitado por la ecuación $y = \sqrt{16 - x^2}$, $-4 \leq x \leq 4$. Una sección transversal perpendicular al eje x a una distancia x del origen es un triángulo ABC, según se muestra en la figura 17, cuya base es $y = \sqrt{16 - x^2}$ y cuya altura es $|BC| = y \tan 30° = \sqrt{16 - x^2}/\sqrt{3}$. Por tanto, el área de la sección transversal es

$$A(x) = \tfrac{1}{2}\sqrt{16 - x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{16 - x^2} = \frac{16 - x^2}{2\sqrt{3}}$$

y el volumen es

$$V = \int_{-4}^{4} A(x)\,dx = \int_{-4}^{4} \frac{16 - x^2}{2\sqrt{3}}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\int_{0}^{4} (16 - x^2)\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[16x - \frac{x^3}{3}\right]_0^4$$

$$= \frac{128}{3\sqrt{3}}$$

En el ejercicio 64 se proporciona otro método.

6.2 Ejercicios

1-18 Encuentre el volumen del sólido obtenido al hacer girar la región delimitada por las curvas dadas alrededor de la recta especificada. Grafique la región, el sólido y un disco o arandela representativos.

1. $y = 2 - \frac{1}{2}x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$; alrededor del eje x

2. $y = 1 - x^2$, $y = 0$; alrededor del eje x

3. $y = \sqrt{x - 1}$, $y = 0$, $x = 5$; alrededor del eje x

4. $y = \sqrt{25 - x^2}$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$; alrededor del eje x

5. $x = 2\sqrt{y}$, $x = 0$, $y = 9$; alrededor del eje y

6. $y = \ln x$, $y = 1$, $y = 2$, $x = 0$; alrededor del eje y

7. $y = x^3$, $y = x$, $x \geq 0$; alrededor del eje x

8. $y = \frac{1}{4}x^2$, $y = 5 - x^2$; alrededor del eje x

9. $y^2 = x$, $x = 2y$; alrededor del eje y

10. $y = \frac{1}{4}x^2$, $x = 2$, $y = 0$; alrededor del eje y

11. $y = x^2$, $x = y^2$; alrededor de $y = 1$

12. $y = e^{-x}$, $y = 1$, $x = 2$; alrededor de $y = 2$

13. $y = 1 + \sec x$, $y = 3$; alrededor de $y = 1$

14. $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, $0 \leq x \leq \pi/4$; alrededor de $y = -1$

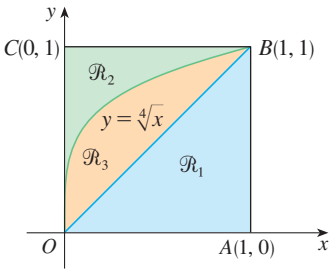
15. $y = x^3$, $y = 0$, $x = 1$; alrededor de $x = 2$

16. $xy = 1$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$; alrededor de $x = -1$

17. $x = y^2$, $x = 1 - y^2$; alrededor de $x = 3$

18. $y = x$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$; alrededor de $x = 1$

19-30 Refiérase a la figura y calcule el volumen generado al hacer girar cada una de las regiones dadas alrededor de la recta especificada.



19. $\mathcal{R}_1$ alrededor de OA

20. $\mathcal{R}_1$ alrededor de OC

21. $\mathcal{R}_1$ alrededor de AB

22. $\mathcal{R}_1$ alrededor de BC

23. $\mathcal{R}_2$ alrededor de OA

24. $\mathcal{R}_2$ alrededor de OC

25. $\mathcal{R}_2$ alrededor de AB

26. $\mathcal{R}_2$ alrededor de BC

27. $\mathcal{R}_3$ alrededor de OA

28. $\mathcal{R}_3$ alrededor de OC

29. $\mathcal{R}_3$ alrededor de AB

30. $\mathcal{R}_3$ alrededor de BC

31-34 Plantee una integral para el volumen del sólido obtenido al hacer girar cada una de las regiones delimitadas por las curvas dadas, alrededor de la recta especificada. Después utilice su calculadora para evaluar la integral con una aproximación a cinco cifras decimales.

31. $y = e^{-x^2},\ y = 0,\ x = -1,\ x = 1$

a) Alrededor del eje x b) Alrededor de $y = -1$

32. $y = 0,\ y = \cos^2 x,\ 2\pi/2 \leq x \leq \pi/2$

a) Alrededor del eje x b) Alrededor de $y = 1$

33. $x^2 + 4y^2 = 4$

a) Alrededor de $y = 2$ b) Alrededor de $x = 2$

34. $y = x^2,\ x^2 + y^2 = 1,\ y \geq 0$

a) Alrededor del eje x b) Alrededor del eje y

35-36 Utilice una gráfica para encontrar las coordenadas x aproximadas de los puntos de intersección de las curvas dadas. Luego utilice su calculadora para estimar (en forma aproximada) el volumen del sólido obtenido al hacer girar alrededor del eje x la región limitada por estas curvas.

35. $y = 2 + x^2 \cos x,\quad y = x^4 + x + 1$

36. $y = 3 \operatorname{sen}(x^2),\quad y = e^{x/2} + e^{-2x}$

SAC **37-38** Mediante un sistema algebraico computarizado, calcule el volumen exacto del sólido obtenido al rotar la región delimitada por estas curvas alrededor de la recta especificada.

37. $y = \operatorname{sen}^2 x,\ y = 0,\ 0 \leq x \leq \pi;$ alrededor de $y = -1$

38. $y = x,\ y = xe^{1-x/2},$ alrededor de $y = 3$

39-42 Cada una de las siguientes integrales representa el volumen de un sólido. Describa el sólido.

39. $\pi \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx$

40. $\pi \int_{-1}^{1} (1 - y^2)^2\, dy$

41. $\pi \int_0^1 (y^4 - y^8)\, dy$

42. $\pi \int_0^{\pi/2} [(1 + \cos x)^2 - 1^2]\, dx$

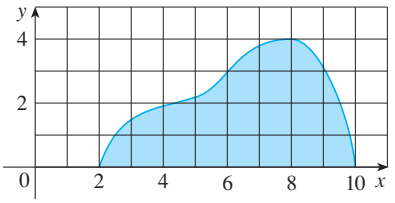
---

43. El estudio de tomografía por medio de computadora proporciona vistas transversales separadas a distancias iguales de un órgano del cuerpo humano, las cuales dan información que, de no ser por este medio, sólo se obtendría mediante una intervención quirúrgica. Suponga que este estudio de tomografía en un hígado humano muestra secciones transversales separadas 1.5 cm. El hígado mide 15 cm de largo, y las áreas de las secciones transversales, en centímetros cuadrados, son 0, 18, 58, 79, 94, 106, 117, 128, 63, 39 y 0. Aplique la regla del punto medio para estimar el volumen del hígado.

44. Se corta un tronco de árbol de 10 m de largo a intervalos de 1 m, y las áreas de las secciones transversales A (a una distancia x del extremo del tronco) se proporcionan en la tabla. Mediante la regla del punto medio $n = 5$, estime el volumen del tronco.

x (m)	A (m^2)	x (m)	A (m^2)
0	0.68	6	0.53
1	0.65	7	0.55
2	0.64	8	0.52
3	0.61	9	0.50
4	0.58	10	0.48
5	0.59		

45. a) Si la región que se muestra en la figura se gira respecto al eje x para formar un sólido, aplique la regla del punto medio con $n = 4$ para estimar el volumen del sólido.



b) Estime el volumen si se gira la región respecto al eje y. Una vez más aplique la regla del punto medio con $n = 4$.

SAC **46.** a) Se obtiene un modelo para la forma de un huevo de un ave mediante el giro, respecto al eje x, de la región bajo la gráfica de

$$f(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d)\sqrt{1 - x^2}$$

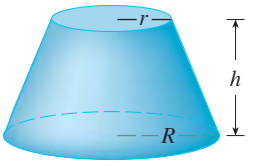
Utilice un sistema algebraico computarizado para encontrar el volumen de un huevo como éste.

b) Para un pato de cuello rojo, $a = -0.06$, $b = 0.04$, $c = 0.1$ y $d = 0.54$. Grafique f y encuentre el volumen de un huevo de esta especie.

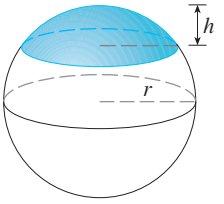
47-59 Calcule el volumen de cada uno de los sólidos S descritos.

47. Un cono circular recto cuya altura es h y el radio de la base es r.

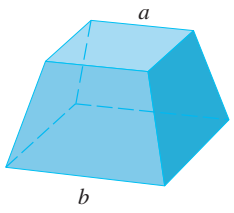
48. Un cono truncado circular recto cuya altura es h, base inferior de radio R, y radio de la parte superior r.



49. Un casquete de una esfera con radio r y altura h.



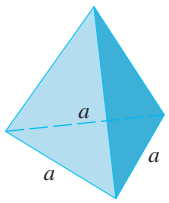
50. Una pirámide truncada con base cuadrada de lado b, cuadrado superior de lado a y altura h



¿Qué sucede si $a = b$? ¿Qué sucede si $a = 0$?

51. Una pirámide de altura h y base rectangular con dimensiones b y $2b$.

52. Una pirámide de altura h y base en forma de triángulo equilátero con lado a (tetraedro).



53. Un tetraedro con tres caras mutuamente perpendiculares y tres aristas recíprocamente perpendiculares con distancias 3, 4 y 5 cm.

54. La base de S es un disco circular de radio r. Las secciones transversales paralelas perpendiculares a la base son cuadradas.

55. La base de S es una región elíptica limitada por la curva $9x^2 + 4y^2 = 36$. Las secciones transversales son perpendiculares al eje x y son triángulos rectángulos isósceles con hipotenusa en la base.

56. La base de S es la región triangular con vértices (0, 0), (1, 0) y (0, 1). Las secciones transversales perpendiculares al eje y son triángulos equiláteros.

57. La base de S es la misma que en el ejercicio 56, pero las secciones transversales perpendiculares al eje x son cuadradas.

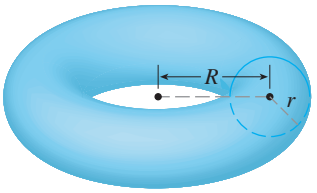
58. La base de S es la región encerrada por la parábola $y = 1 - x^2$ y el eje x. Las secciones transversales perpendiculares al eje y son cuadradas.

59. La base de S es la misma que la del ejercicio 58, pero las secciones transversales perpendiculares al eje x son triángulos isósceles con altura igual a la base.

---

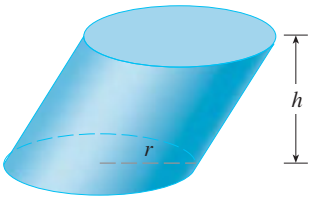
60. La base de S es un disco circular de radio r. Las secciones transversales paralelas perpendiculares a la base son triángulos isósceles de altura h y el lado desigual en la base.
a) Plantee una integral para el volumen de S.
b) De acuerdo con la interpretación de la integral como un área, calcule el volumen de S.

61. a) Plantee una integral para el volumen de un *toro* sólido (el sólido en forma de dona mostrado en la figura) de radio r y R.
b) Mediante la interpretación de la integral como un área, calcule el volumen del toro.

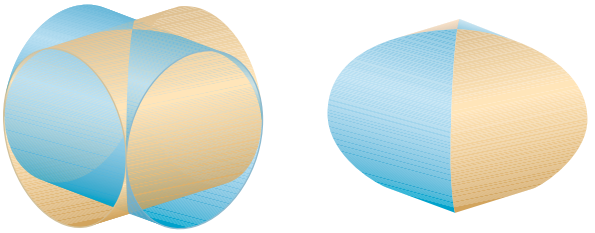


62. Resuelva el ejemplo 9 tomando secciones transversales paralelas a la línea de intersección de los dos planos.

63. a) El principio de Cavalieri establece que si una familia de planos paralelos da áreas iguales de secciones transversales para dos sólidos S_1 y S_2, entonces los volúmenes de S_1 y S_2 son iguales. Demuestre este principio.
b) Mediante el principio de Cavalieri determine el volumen del cilindro oblicuo que se muestra en la figura.



64. Determine el volumen común a dos cilindros circulares, ambos de radio r, si los ejes de los cilindros se cortan en ángulos rectos.



65. Calcule el volumen común a dos esferas, cada una de radio r, si el centro de cada esfera está sobre la superficie de la otra esfera.

66. Un tazón tiene la forma de un hemisferio con diámetro igual a 30 cm. Una pesada pelota de 10 cm de diámetro se coloca dentro del tazón, y se vierte agua en éste hasta que alcanza una altura de h centímetros. Calcule el volumen de agua que hay en el recipiente.

67. Se abre un agujero de radio r en un cilindro de radio $R > r$ en ángulos rectos al eje del cilindro. Plantee una integral, pero no la evalúe, para determinar el volumen cortado.

68. Un agujero de radio r se taladra en el centro de una esfera de radio $R > r$. Calcule el volumen de la parte restante de la esfera.

69. Algunos de los iniciadores del cálculo, como Kepler o Newton, se inspiraron en el problema de determinar volúmenes de barriles

de vino. (De hecho, Kepler publicó un libro *Stereometria doliorum* en 1615, en el que se tratan los métodos para determinar volúmenes de los barriles). A menudo se aproximan la forma de sus lados mediante parábolas.

a) Se genera un barril de altura h y radio máximo R al girar alrededor del eje x la parábola $y = R - cx^2$, $-h/2 \leq x \leq h/2$, donde c es una constante positiva. Demuestre que el radio de cada extremo del barril es $r = R - d$, donde $d = ch^2/4$.

b) Demuestre que el volumen encerrado por el barril es

$$V = \tfrac{1}{3}\pi h\left(2R^2 + r^2 - \tfrac{2}{5}d^2\right)$$

70. Suponga que una región $\mathcal{R}$ tiene un área A que se localiza por arriba del eje x. Cuando $\mathcal{R}$ gira alrededor del eje x, genera un sólido de volumen V_1. Cuando $\mathcal{R}$ gira alrededor de la recta $y = -k$, (donde k es un número positivo), genera un sólido de volumen V_2. Exprese V_2 en función de V_1, k y A.

6.3 Volúmenes mediante cascarones cilíndricos

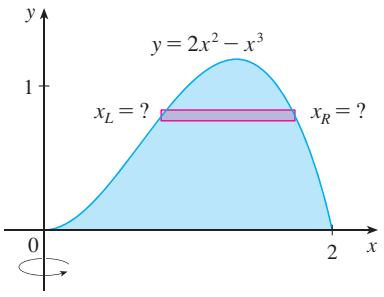


FIGURA 1

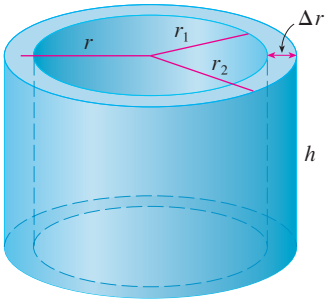


FIGURA 2

Algunos problemas relacionados con volúmenes son muy difíciles de manejar con los métodos de las secciones anteriores. Por ejemplo, consideremos el problema de determinar el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar la región limitada por $y = 2x^2 - x^3$ y $y = 0$ alrededor del eje y. (Véase la figura 1). Si cortamos en forma perpendicular al eje y, obtendremos una rondana. Pero para calcular los radios interior y exterior de la rondana, tenemos que resolver la ecuación cúbica $y = 2x^2 - x^3$ para encontrar x en función de y, y esto no es fácil.

Por fortuna, hay un sistema llamado **método de los cascarones cilíndricos**, que es más fácil de usar en tal caso. En la figura 2 se ilustra un cascarón cilíndrico de radio interior r_1, radio exterior r_2 y altura h. Su volumen V se calcula restando el volumen V_1 del cilindro interior del volumen V_2 que corresponde al cilindro exterior:

$$\begin{aligned} V &= V_2 - V_1 \\ &= \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h = \pi(r_2^2 - r_1^2)h \\ &= \pi(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)h \\ &= 2\pi \frac{r_2 + r_1}{2} h(r_2 - r_1) \end{aligned}$$

Si hacemos $\Delta r = r_2 - r_1$ (el espesor del cascarón) y $r = \frac{1}{2}(r_2 + r_1)$ (el radio promedio del cascarón) entonces esta fórmula del volumen de un cascarón cilíndrico se transforma en

$$\boxed{1} \qquad \boxed{V = 2\pi r h\, \Delta r}$$

que puede recordarse como

$$V = [\text{circunferencia}][\text{altura}][\text{espesor}]$$

Ahora, sea S el sólido que se obtiene al hacer girar alrededor del eje y a la región limitada por $y = f(x)$ [donde $f(x) \geqslant 0$, $y = 0$, $x = a$ y $x = b$, donde $b > a \geqslant 0$. (Véase la figura 3.)

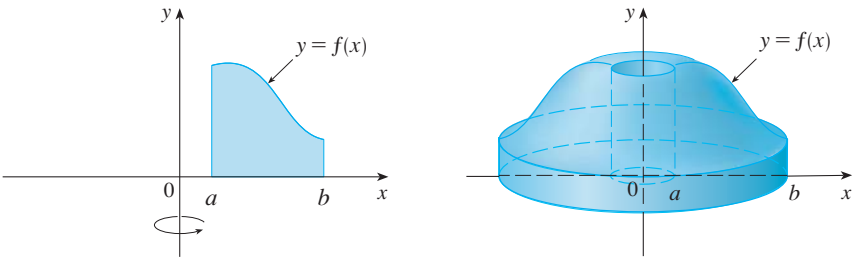


FIGURA 3

Dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de igual anchura Δx y sea $\bar{x}_i$, el punto medio del i-ésimo subintervalo. Si el rectángulo de base $[x_{i-1}, x_i]$ y altura $f(\bar{x}_i)$ se hace girar alrededor del eje y, entonces el resultado es un cascarón cilíndrico cuyo radio promedio es $\bar{x}_i$, altura $f(\bar{x}_i)$ y espesor Δx (véase la figura 4), de modo que, por la fórmula 1, su volumen es

$$V_i = (2\pi\bar{x}_i)[f(\bar{x}_i)]\,\Delta x$$

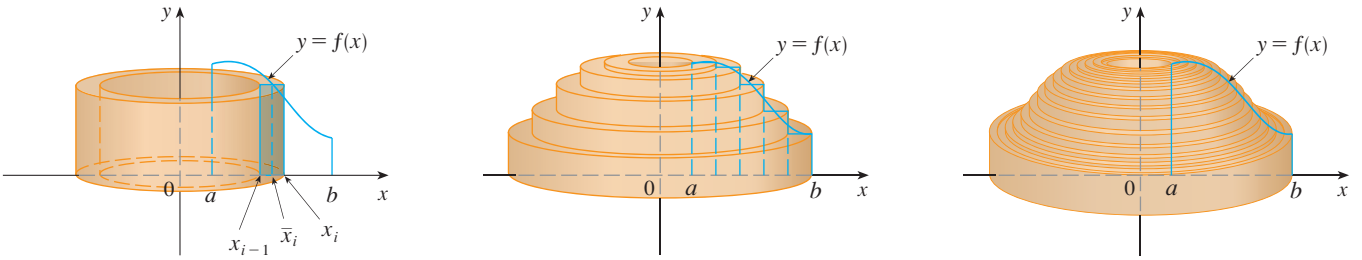


FIGURA 4

Por tanto, un volumen aproximado V de S se obtiene mediante la suma de los volúmenes de estos cascarones:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} 2\pi\bar{x}_i f(\bar{x}_i)\,\Delta x$$

Esta aproximación mejora cuando $n \to \infty$. Pero, de acuerdo con la definición de integral, sabemos que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi\bar{x}_i f(\bar{x}_i)\,\Delta x = \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx$$

Así, lo siguiente parece plausible:

2 El volumen del sólido de la figura 3, que se obtiene al hacer girar alrededor del eje y la región bajo la curva $y = f(x)$ desde a hasta b, es

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx \qquad \text{donde } 0 \leqslant a < b$$

El argumento de usar cascarones cilíndricos hace que la fórmula 2 parezca razonable, pero posteriormente podremos comprobarlo (véase el ejercicio 67 de la sección 7.1).

La mejor manera de recordar la fórmula 2 es pensar en el cascarón representativo, cortado y aplanado como en la figura 5, con radio x, circunferencia $2\pi x$, altura $f(x)$ y espesor Δx o dx:

$$\int_a^b \underbrace{(2\pi x)}_{\text{circunferencia}} \underbrace{[f(x)]}_{\text{altura}} \underbrace{dx}_{\text{espesor}}$$

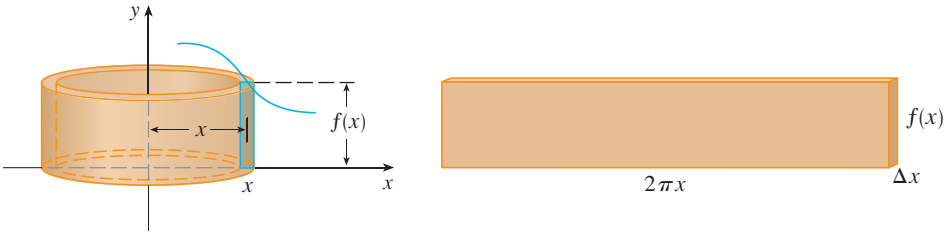


FIGURA 5

Este tipo de razonamiento es útil en otras situaciones, como cuando hacemos girar alrededor de rectas distintas del eje y.

EJEMPLO 1 Determine el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar alrededor del eje y la región delimitada por $y = 2x^2 - x^3$ y $y = 0$.

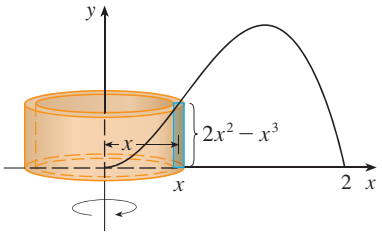


FIGURA 6

SOLUCIÓN En el dibujo de la figura 6, podemos ver que un cascarón representativo tiene radio x, circunferencia $2\pi x$ y altura $f(x) = 2x^2 - x^3$. También, según el método del cascaron, el volumen es

$$V = \int_0^2 (2\pi x)(2x^2 - x^3)\,dx = 2\pi \int_0^2 (2x^3 - x^4)\,dx$$

$$= 2\pi\left[\tfrac{1}{2}x^4 - \tfrac{1}{5}x^5\right]_0^2 = 2\pi\left(8 - \tfrac{32}{5}\right) = \tfrac{16}{5}\pi$$

Puede verificarse que el método del cascarón cilíndrico proporciona la misma respuesta que las "rebanadas".

En la figura 7 se observa una imagen generada mediante computadora del sólido cuyo volumen se calcula en el ejemplo 1.

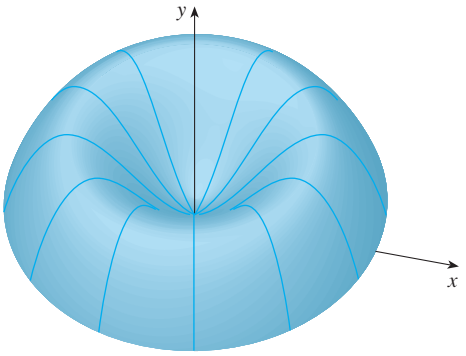


FIGURA 7

NOTA Al comparar la solución del ejemplo 1 con las observaciones del comienzo de esta sección, es claro que el método de los cascarones cilíndricos es mucho más sencillo que el método en el que se utilizan rondanas para este problema. No es necesario encontrar las coordenadas del máximo local y no tiene que resolverse la ecuación de la curva, ni dar x en función de y. Sin embargo, en otros ejemplos, pueden ser más sencillos los métodos de la sección anterior.

V EJEMPLO 2 Calcule el volumen del sólido obtenido al hacer girar alrededor del eje y la región entre $y = x$ y $y = x^2$.

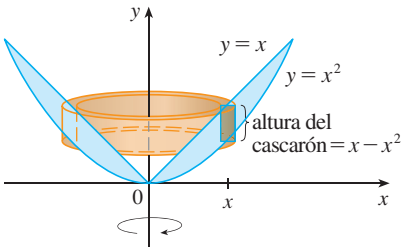


FIGURA 8

SOLUCIÓN La región y un cascarón representativo se ilustran en la figura 8. El cascarón tiene radio x, circunferencia $2\pi x$ y altura $x - x^2$. Así que el volumen es

$$V = \int_0^1 (2\pi x)(x - x^2)\,dx = 2\pi \int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx$$

$$= 2\pi\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}$$

Como se muestra en el ejemplo siguiente, el método del cascarón cilíndrico funciona muy bien si hace girar alrededor del eje x. Simplemente dibujamos un diagrama para identificar el radio y la altura del cascarón.

V EJEMPLO 3 Mediante un cascarón cilíndrico calcule el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar alrededor del eje x la región bajo la curva $y = \sqrt{x}$ desde 0 hasta 1.

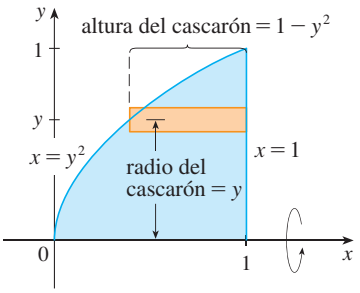


FIGURA 9

SOLUCIÓN Este problema se resolvió usando discos en el ejemplo 2 de la sección 6.2. Para usar cascarones, llamemos a la curva $y = \sqrt{x}$ (en la figura en este ejemplo) como $x = y^2$ en la figura 9. Por lo que toca a la rotación alrededor del eje x, un cascarón representativo tiene radio y, circunferencia $2\pi y$ y altura $1 - y^2$. Así, el volumen es

$$V = \int_0^1 (2\pi y)(1 - y^2)\,dy = 2\pi \int_0^1 (y - y^3)\,dy$$

$$= 2\pi \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

En este problema, el método del disco fue más simple.

V EJEMPLO 4 Determine el volumen del sólido que se obtiene al girar alrededor de la recta $x = 2$ la región limitada por $y = x - x^2$ y $y = 0$.

SOLUCIÓN En la figura 10 se ilustra la región y un cascaron cilíndrico formado por la rotación alrededor de la recta $x = 2$. El radio es $2 - x$, circunferencia $2\pi(2 - x)$ y altura $x - x^2$.

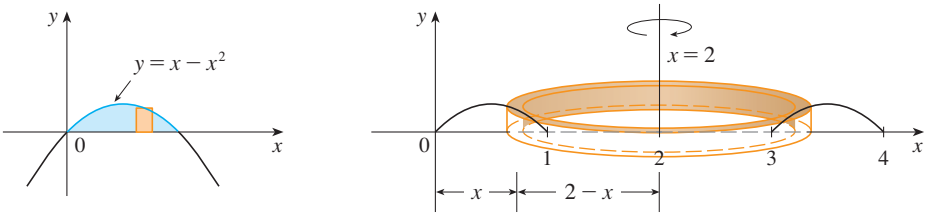


FIGURA 10

El volumen del sólido dado es

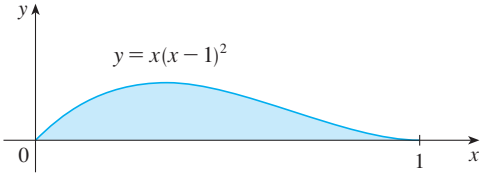
$$V = \int_0^1 2\pi(2 - x)(x - x^2)\,dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx$$

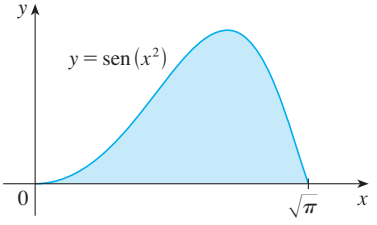
$$= 2\pi \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

6.3 Ejercicios

1. Sea S el sólido que se genera al girar alrededor del eje y la región que se ilustra en la figura. Explique por qué es inconveniente usar los cortes por rebanadas para determinar el volumen V de S. Dibuje un cascarón representativo de aproximación. ¿Cuáles son la circunferencia y la altura? Mediante cascarones encuentre V.



2. Sea S el sólido que se genera al girar alrededor del eje y la región que se ilustra en la figura. Dibuje un cascarón cilíndrico representativo y determine su circunferencia y altura. Mediante cascarones calcule el volumen de S. ¿Cree usted que este método es mejor que el de las rebanadas? Explique.



volumen que se genera al hacer girar alrededor del eje y, cada una de las regiones definidas por las curvas dadas.

3. $y = \sqrt[3]{x}, \quad y = 0, \quad x = 1$

4. $y = x^3, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 2$

5. $y = e^{-x^2}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$

6. $y = 4x - x^2, \quad y = x$

7. $y = x^2, \quad y = 6x - 2x^2$

---

8. Sea V el volumen del sólido que se obtiene cuando la región limitada por $y = \sqrt{x}$ y $y = x^2$ gira alrededor del eje y. Calcule V cortando rebanadas y formando cascarones cilíndricos. En ambos casos, elabore un diagrama para explicar su método.

9-14 Mediante el método de los cascarones cilíndricos determine el volumen de cada uno de los siguientes sólidos que se obtienen al hacer girar alrededor del eje x la región que delimitan las curvas dadas.

9. $xy = 1, \quad x = 0, \quad y = 1, \quad y = 3$

10. $y = \sqrt{x}, \quad x = 0, \quad y = 2$

11. $y = x^3, \quad y = 8, \quad x = 0$

12. $x = 4y^2 - y^3, \quad x = 0$

13. $x = 1 + (y - 2)^2, \quad x = 2$

14. $x + y = 3, \quad x = 4 - (y - 1)^2$

15-20 Mediante el método de los cascarones cilíndricos determine el volumen generado cuando gira cada una de las siguientes regiones que definen las curvas dadas, alrededor del eje especificado.

15. $y = x^4, \ y = 0, \ x = 1;$ alrededor $x = 2$

16. $y = \sqrt{x}, \ y = 0, \ x = 1;$ alrededor $x = -1$

17. $y = 4x - x^2, \ y = 3;$ alrededor $x = 1$

18. $y = x^2, \ y = 2 - x^2;$ alrededor $x = 1$

19. $y = x^3, \ y = 0, \ x = 1;$ alrededor $y = 1$

20. $x = y^2 + 1, \ x = 2;$ alrededor $y = -2$

21-26

a) Plantee una integral para el volumen del sólido que se genera al hacer rotar la región que definen las curvas dadas alrededor del eje especificado.

b) Utilice su calculadora para evaluar la integral con una aproximación de cinco decimales.

21. $y = xe^{-x}, \ y = 0, \ x = 2;$ alrededor del eje y

22. $y = \tan x, \ y = 0, \ x = \pi/4;$ alrededor de $x = \pi/2$

23. $y = \cos^4 x, \ y = -\cos^4 x, \ -\pi/2 \leq x \leq \pi/2;$ alrededor de $x = \pi$

24. $y = x, \ y = 2x/(1 + x^3);$ alrededor de $x = -1$

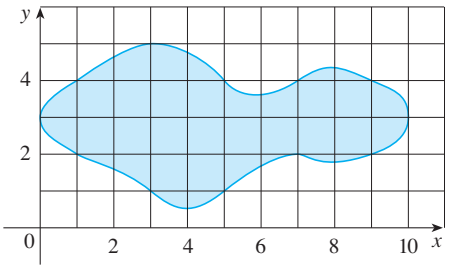
25. $x = \sqrt{\operatorname{sen} y}, \ 0 \leq y \leq \pi, \ x = 0;$ alrededor de $y = 4$

26. $x^2 - y^2 = 7, \ x = 4;$ alrededor de $y = 5$

---

27. Aplique la regla del punto medio con $n = 5$ para estimar el volumen obtenido cuando la región bajo la curva $y = \sqrt{1 + x^3}, \ 0 \leq x \leq 1$, gira alrededor del eje y.

28. Si la región que se ilustra en la figura gira alrededor del eje y para formar un sólido, aplique la regla del punto medio con $n = 5$ para estimar el volumen del sólido.



29-32 Cada una de las siguientes integrales representa el volumen de un sólido. Describa el sólido.

29. $\int_0^3 2\pi x^5 \, dx$

30. $2\pi \int_0^2 \dfrac{y}{1 + y^2} \, dy$

31. $\int_0^1 2\pi(3 - y)(1 - y^2) \, dy$

32. $\int_0^{\pi/4} 2\pi(\pi - x)(\cos x - \operatorname{sen} x) \, dx$

33-34 Por medio de una gráfica, estime las coordenadas x de los puntos donde se cortan las curvas dadas. Luego con esa información estime el volumen del sólido obtenido cuando giran alrededor del eje y la región delimitada por estas curvas.

33. $y = e^x, \quad y = \sqrt{x} + 1$

34. $y = x^3 - x + 1, \quad y = -x^4 + 4x - 1$

SAC **35-36** Use un sistema algebraico computarizado para calcular el volumen exacto del sólido obtenido al girar la región que definen las curvas dadas alrededor de la recta especificada.

35. $y = \operatorname{sen}^2 x, \ y = \operatorname{sen}^4 x, \ 0 \leq x \leq \pi;$ alrededor de $x = \pi/2$

36. $y = x^3 \operatorname{sen} x, \ y = 0, \ 0 \leq x \leq \pi;$ alrededor de $x = -1$

37-43 La región delimitada por las curvas dadas gira alrededor del eje especificado. Determine el volumen del sólido resultante, por medio de cualquier método.

37. $y = -x^2 + 6x - 8, \ y = 0;$ alrededor del eje y

38. $y = -x^2 + 6x - 8, \ y = 0;$ alrededor del eje x

39. $y^2 - x^2 = 1, \ y = 2;$ alrededor del eje x

40. $y^2 - x^2 = 1, \ y = 2;$ alrededor del eje y

41. $x^2 + (y - 1)^2 = 1$; alrededor del eje y

42. $x = (y - 3)^2$, $x = 4$; alrededor de $y = 1$

43. $x = (y - 1)^2$, $x - y = 1$; alrededor de $x = -1$

44. Sea T la región triangular con vértices (0, 0), (1, 0) y (1, 2), y sea V el volumen del sólido generado cuando T gira alrededor de la recta $x = a$, donde $a > 1$. Exprese a en términos de V.

45-47 Mediante cascarones cilíndricos, calcule el volumen del sólido.

45. Una esfera de radio r

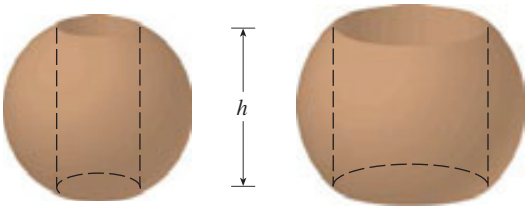
46. El toro sólido del ejercicio 67 de la sección 6.2

47. Un cono circular recto de altura h y base de radio r

46. Suponga que usted fabrica anillos para servilletas perforando agujeros de diferentes diámetros en dos bolas de madera (las cuales también tienen diámetros distintos). Usted descubre que ambos anillos para las servilletas tienen la misma altura h, como se muestra en la figura.

a) Intuya cuál anillo contiene más madera.

b) Verifique su conjetura: mediante cascarones cilíndricos calcule el volumen de un anillo para servilleta generado al perforar un agujero con radio r a través del centro de una esfera de radio R y exprese la respuesta en función de h.



6.4 Trabajo

El término *trabajo* se utiliza en el lenguaje cotidiano para expresar el esfuerzo que se requiere para ejecutar una tarea. En física, el trabajo tiene un significado técnico que depende de la idea de *fuerza*. Intuitivamente podemos pensar en una fuerza como algo que provoca un impulso o un jalón sobre un objeto; por ejemplo, el empuje horizontal de un libro hacia el otro lado de la mesa, o bien, el jalón hacia abajo que ejerce la gravedad de la Tierra sobre una pelota. En general, si un objeto se desplaza en línea recta con función posición $s(t)$, entonces la **fuerza** F sobre el objeto (en la misma dirección) está dada por la segunda ley de Newton del movimiento como el producto de su masa m por su aceleración, es decir:

$$F = m\frac{d^2s}{dt^2} \tag{1}$$

En el sistema métrico SI, la masa se mide en kilogramos (kg), el desplazamiento en metros (m), el tiempo en segundos (s) y la fuerza en newtons ($\text{N} = \text{kg}\cdot\text{m/s}^2$). Así, una fuerza de 1 N que actúa sobre una masa de 1 kg produce una aceleración de m/s^2. En el sistema usual de Estados Unidos, la unidad fundamental que se ha elegido como la unidad de fuerza es la libra.

En el caso de aceleración constante, la fuerza F también es constante, y el trabajo realizado esta definido como el producto de la fuerza F por la distancia d que el objeto recorre:

$$W = Fd \qquad \text{trabajo} = \text{fuerza} \times \text{distancia} \tag{2}$$

Si F se mide en newtons y d en metros, entonces la unidad de W es un newton-metro, llamada joule (J). Si F se mide en libras y d en pies, entonces la unidad de W es libra-pie (lb-pie), que es de casi 1.36 J.

V EJEMPLO 1

a) ¿Qué tanto trabajo se realiza al levantar un libro de 1.2 kg desde el suelo y colocarlo en un escritorio que tiene 0.7 m de altura? Utilice el hecho de que la aceleración debida a la gravedad es $g = 9.8\,\text{m/s}^2$.

b) ¿Cuánto trabajo se efectúa al levantar desde el suelo un peso de 20 lb a una altura de 6 pies?

SOLUCIÓN

a) La fuerza ejercida es igual y opuesta a la que ejerce la gravedad, de modo que con la ecuación 1 se obtiene

$$F = mg = (1.2)(9.8) = 11.76\,\text{N}$$

por lo que la ecuación 2 proporciona el trabajo realizado como

$$W = Fd = (11.76)(0.7) \approx 8.2\,\text{J}$$

b) En este caso, la fuerza es $F = 20\,\text{lb}$, de modo que el trabajo realizado es

$$W = Fd = 20 \cdot 6 = 120 \text{ pies-lb}$$

Observe que en el inciso b), a diferencia del inciso a), no tuvimos que multiplicar por g porque ya conocíamos el *peso* (el cual es una fuerza) y no la masa del objeto.

La ecuación 2 define el trabajo siempre y cuando la fuerza sea constante, pero, ¿qué sucede si la fuerza es variable? Supongamos que el objeto se desplaza a lo largo del eje x en la dirección positiva, desde $x = a$ hasta $x = b$, y que en cada punto x entre a y b actúa una fuerza $f(x)$ sobre el objeto, donde f es una función continua. Dividamos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos con puntos extremos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ e igual ancho Δx. Elijamos un punto muestra x_i^* en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Entonces la fuerza en el punto es $f(x_i^*)$. Si n es grande, entonces Δx es pequeña, y puesto que f es continua, los valores de f no cambian mucho sobre el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. En otras palabras, f es casi constante sobre el intervalo, por lo que el trabajo W_i que se realiza al desplazar la partícula desde x_{i-1} hasta x_i se obtiene aproximadamente mediante la ecuación 2:

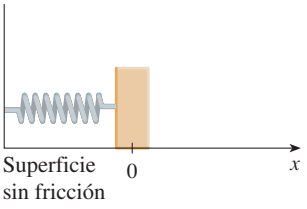
$$W_i \approx f(x_i^*)\Delta x$$

Así, podemos dar un valor aproximado del trabajo total con

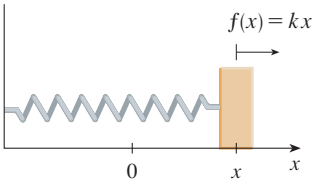
$$\boxed{3} \qquad W \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

Parece que esta aproximación es mejor a medida que incrementamos a n. Por tanto, definimos el **trabajo realizado al mover el objeto desde *a* hasta *b*** como el límite de esta cantidad cuando $n \to \infty$. Puesto que el lado derecho de 3 es una suma de Riemann, su límite es una integral definida, así que

$$\boxed{4} \qquad \boxed{W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx}$$



a) Posición natural del resorte



b) Posición del resorte estirado

FIGURA 1
Ley de Hooke

EJEMPLO 2 Cuando una partícula se ubica a una distancia x pies del origen, una fuerza de $x^2 + 2x$ libras actúa sobre ella. ¿Cuánto trabajo se efectúa al moverla desde $x = 1$ hasta $x = 3$?

SOLUCIÓN

$$W = \int_1^3 (x^2 + 2x)\,dx = \frac{x^3}{3} + x^2\Big]_1^3 = \frac{50}{3}$$

El trabajo realizado es $16\frac{2}{3}$ pies-lb.

En el ejemplo siguiente aplicamos una ley de la física: la **ley de Hooke** establece que la fuerza requerida para mantener un resorte estirado x unidades más de su longitud natural es proporcional a x:

$$f(x) = kx$$

donde k es una constante positiva (que se denomina **constante del resorte**). La ley de Hooke se cumple siempre que x no sea demasiado grande (véase la figura 1).

V EJEMPLO 3 Se requiere una fuerza de 40 N para sostener un resorte que está estirado desde su posición natural de 10 cm a una longitud de 15 cm. ¿Cuánto trabajo se hace al estirar el resorte de 15 a 18 cm?

SOLUCIÓN De acuerdo con la ley de Hooke, la fuerza que se requiere para mantener el resorte estirado x metros más allá de su longitud natural es $f(x) = kx$. Cuando el resorte se estira de 10 a 15 cm, la cantidad estirada es 5 cm = 0.05 m. Esto quiere decir que $f(0.05) = 40$, de modo que

$$0.05k = 40 \qquad k = \frac{40}{0.05} = 800$$

Así, $f(x) = 800x$ y el trabajo realizado para estirar el resorte de 15 a 18 cm es

$$W = \int_{0.05}^{0.08} 800x\,dx = 800\,\frac{x^2}{2}\Big]_{0.05}^{0.08}$$
$$= 400[(0.08)^2 - (0.05)^2] = 1.56\,\text{J}$$

V EJEMPLO 4 Un cable de 200 lb mide 100 pies de largo y cuelga verticalmente desde lo alto de un edificio. ¿Cuánto trabajo se requiere para subir el cable hasta la parte superior del edificio?

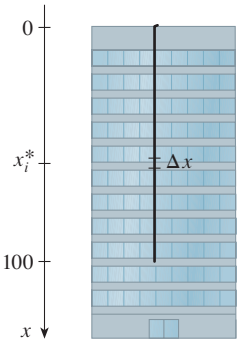


FIGURA 2

SOLUCIÓN En este caso no hay una fórmula para la función fuerza, pero podemos aplicar un razonamiento similar al que originó la definición 4.

Colocamos el origen en lo alto del edificio y el eje x señalando hacia abajo como se ilustra en la figura 2. Dividimos el cable en pequeños segmentos de longitud Δx. Si x_i^* es un punto en el i-ésimo intervalo, entonces todos los puntos del intervalo se levantan casi la misma cantidad, digamos, x_i^*. El cable pesa 2 libras por cada pie, de modo que el peso del i-ésimo segmento es $2\Delta x$. Así, el trabajo realizado en el i-ésimo segmento, en pies-libras, es

$$\underbrace{(2\,\Delta x)}_{\text{fuerza}} \cdot \underbrace{x_i^*}_{\text{distancia}} = 2x_i^*\,\Delta x$$

Obtenemos el trabajo total que se realizó sumando todas las aproximaciones y haciendo que la cantidad de segmentos sea grande (de modo que $\Delta x \to 0$):

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2x_i^*\,\Delta x = \int_0^{100} 2x\,dx$$
$$= x^2\Big]_0^{100} = 10\,000 \text{ pies-libras}$$

Si hubiéramos colocado el origen en la parte inferior del cable y el eje x hacia arriba, habríamos obtenido

$$W = \int_0^{100} 2(100 - x)\,dx$$

lo cual aporta la misma respuesta.

EJEMPLO 5 Un depósito tiene la forma de un cono circular invertido de altura igual a 10 m y radio de la base de 4 m. Se llena con agua hasta alcanzar una altura de 8 m. Calcule el trabajo que se requiere para vaciar el agua mediante bombeo por la parte superior del depósito. (La densidad del agua es 1000 kg/m³.)

SOLUCIÓN Midamos profundidades desde la parte superior del recipiente introduciendo una recta vertical de coordenadas como en la figura 3. El agua se extiende desde una profundidad de 2 m hasta una profundidad de 10 m y, también, dividimos el intervalo [2, 10] en n subintervalos con extremos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ y elegimos x_i^* en el i-ésimo subintervalo. De este modo el agua se divide en n capas. La i-ésima capa es aproximadamente un cilindro circular de radio r_i y altura Δx. Podemos calcular r_i a partir de triángulos semejantes y con ayuda de la figura 4 como se indica a continuación:

$$\frac{r_i}{10 - x_i^*} = \frac{4}{10} \qquad r_i = \tfrac{2}{5}(10 - x_i^*)$$

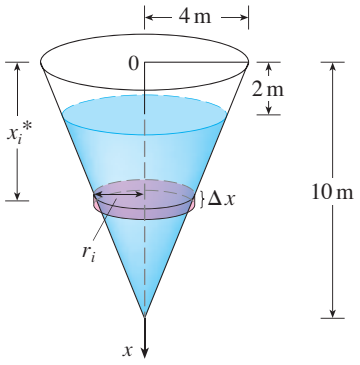


FIGURA 3

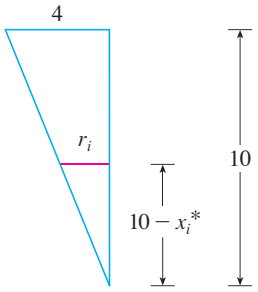


FIGURA 4

Así, un volumen aproximado de la i-ésima capa de agua es

$$V_i \approx \pi r_i^2 \, \Delta x = \frac{4\pi}{25}(10 - x_i^*)^2 \, \Delta x$$

de modo que su masa es

$$m_i = \text{densidad} \times \text{volumen}$$

$$\approx 1000 \cdot \frac{4\pi}{25}(10 - x_i^*)^2 \, \Delta x = 160\pi(10 - x_i^*)^2 \, \Delta x$$

La fuerza necesaria para subir esta capa debe superar a la fuerza de gravedad, y de este modo

$$F_i = m_i g \approx (9.8)160\pi(10 - x_i^*)^2 \, \Delta x$$
$$= 1568\pi(10 - x_i^*)^2 \, \Delta x$$

Cada partícula en la capa debe viajar una distancia de aproximadamente x_i^*. El trabajo W_i realizado para subir esta capa hasta lo alto del depósito es aproximadamente el producto de la fuerza F_i por la distancia x_i^*:

$$W_i \approx F_i x_i^* \approx 1568\pi x_i^*(10 - x_i^*)^2 \, \Delta x$$

Para encontrar el trabajo total en el vaciado del tanque, sumamos las contribuciones de cada una de las n capas y después tomamos el límite cuando $n \to \infty$:

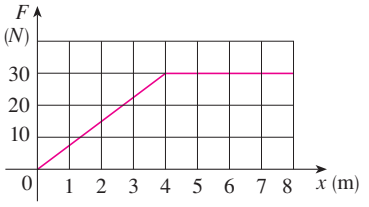
$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 1568\pi x_i^*(10 - x_i^*)^2 \, \Delta x = \int_2^{10} 1568\pi x(10 - x)^2 \, dx$$

$$= 1568\pi \int_2^{10} (100x - 20x^2 + x^3) \, dx = 1568\pi \left[50x^2 - \frac{20x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right]_2^{10}$$

$$= 1568\pi\left(\tfrac{2048}{3}\right) \approx 3.4 \times 10^6 \text{ J}$$

6.4 Ejercicios

1. Un gorila de 360 lb trepa a un árbol a una altura de 20 pies. Encuentre el trabajo realizado si el gorila alcanza esa altura en
   a) 10 segundos b) 5 segundos
2. ¿Cuánto trabajo se realiza cuando un elevador levanta una roca de 200 kg a una altura de 3 m?
3. Una fuerza variable de $5x^{-2}$ libras mueve un objeto a lo largo de una línea recta cuando está a x pies del origen. Calcule el trabajo realizado para mover el objeto desde $x = 1$ pie a $x = 10$ pies.
4. Cuando una partícula se localiza a una distancia de x metros desde el origen, una fuerza de $\cos(\pi x/3)$ newtons actúa sobre ella. ¿Cuánto trabajo se realiza al mover la partícula desde $x = 1$ hasta $x = 2$? Interprete su respuesta considerando el trabajo realizado desde $x = 1$ hasta $x = 1.5$ y desde $x = 1.5$ hasta $x = 2$.
5. Se muestra la gráfica de una función fuerza (en newtons) que se incrementa a su máximo valor y luego permanece constante. ¿Cuánto trabajo realiza la fuerza al mover un objeto a una distancia de 8 m?



6. La tabla muestra los valores de una función fuerza $f(x)$, donde x se mide en metros y $f(x)$ en newtons. Aplique la regla del punto medio para estimar el trabajo que realiza la fuerza al mover un objeto desde $x = 4$ hasta $x = 20$.

x	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$f(x)$	5	5.8	7.0	8.8	9.6	8.2	6.7	5.2	4.1

7. Se requiere una fuerza de 10 lb para mantener estirado un resorte 4 pulg más de su longitud natural. ¿Cuánto trabajo se realiza al estirar el resorte desde su longitud natural hasta 6 pulg más de su longitud natural?

8. Un resorte tiene una longitud natural de 20 cm. Si se requiere una fuerza de 25 N para mantenerlo estirado a una longitud de 30 cm, ¿cuánto trabajo se requiere para estirarlo desde 20 hasta 25 cm?

9. Suponga que se necesitan 2 J de trabajo para estirar un resorte desde su longitud natural de 30 cm hasta una longitud de 42 cm.
a) ¿Cuánto trabajo se requiere para estirarlo desde 35 hasta 40 cm?
b) ¿Cuánto más allá de su longitud natural, una fuerza de 30 N mantendrá el resorte estirado?

10. Si el trabajo que se requiere para estirar un resorte 1 pie más de su longitud natural es 12 lb-pie, ¿cuánto trabajo se requiere para estirar al resorte 9 pulg más de su longitud natural?

11. Un resorte tiene una longitud natural de 20 cm. Compare el trabajo W_1 invertido en alargar un resorte desde 20 hasta 30 cm con el trabajo W_2 realizado en estirarlo desde 30 hasta 40 cm. ¿Cómo se relacionan W_2 y W_1?

12. Si se necesitan 6 J de trabajo para estirar un resorte de 10 a 12 cm y otros 10 J para estirarlo de 12 a 14 cm, ¿cuál es la longitud natural del resorte?

13–20 Muestre cómo obtener un valor aproximado del trabajo requerido mediante una suma de Riemann. Luego exprese el trabajo como una integral y evalúela.

13. Una pesada soga de 50 pies de largo pesa 0.5 lb/pie y está colgando por un lado de un edificio de 120 pies de altura.
a) ¿Cuánto trabajo se efectúa al jalar la soga por la parte superior del edificio?
b) ¿Cuánto trabajo se realiza al jalar la mitad de la soga a la parte superior del edificio?

14. Una cadena que está en el suelo mide 10 m de largo y su masa es de 80 kg. ¿Cuánto trabajo se efectúa para subir un extremo de la cadena a una altura de 6 m?

15. Un cable que pesa 2 lb/pie se usa para subir 800 lb de carbón por el tiro de una mina de 500 m de profundidad. Calcule el trabajo realizado.

16. Un cubo que pesa 4 lb y una soga de peso insignificante se usan para extraer agua de un pozo de 80 pies de profundidad. El cubo se llena con 40 lb de agua y se jala hacia arriba con una rapidez de 2 pies/s, pero el agua se sale por un agujero que tiene el cubo, con una rapidez de 0.2 lb/s. Calcule el trabajo hecho al jalar el cubo hasta la boca del pozo.

17. Un cubo de 10 kg, pero con un agujero, se sube desde el suelo hasta una altura de 12 m con rapidez constante por medio de una soga que pesa 0.8 kg/m. Al principio, el cubo contiene 36 kg de agua, pero el agua se sale con rapidez constante y termina de salirse justo cuando el cubo llega a los 12 m de altura. ¿Cuánto trabajo se realizó?

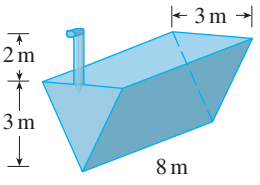
18. Una cadena de 10 pies de largo pesa 25 lb y cuelga de un techo. Calcule el trabajo hecho al subir el extremo inferior de la cadena al techo de modo que esté al mismo nivel que el extremo superior.

19. Un acuario que mide 2 m de largo, 1 m de ancho y 1 m de profundidad está lleno con agua. Determine el trabajo que se requiere para extraer por bombeo la mitad del agua de dicho acuario. (Recuerde que la densidad del agua es de 1000 kg/m^3).

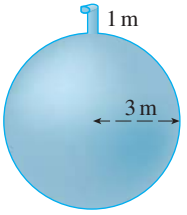
20. Una piscina circular tiene un diámetro de 24 pies, los lados miden 5 pies de altura y la profundidad del agua es de 4 pies. ¿Cuánto trabajo se requiere para extraer por bombeo toda el agua por uno de los lados? (Recuerde que el peso del agua es de 62.5 lb/pies^3.)

21–24 Cada uno de los siguientes tanques está lleno con agua. Determine el trabajo necesario para que, mediante bombeo, el agua salga por el tubo de descarga. En los ejercicios 23 y 24 utilice el hecho de que el peso del agua es de 62.5 lb/pies^3.

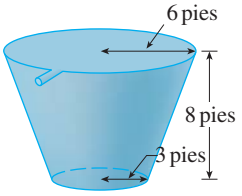
21.



22.

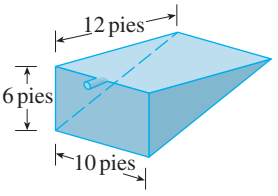


23.



Cono truncado

24.

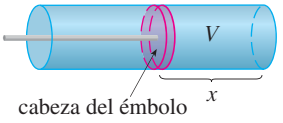


25. Suponga que en el caso del depósito del ejercicio 21, la bomba se descompone después de que se ha realizado un trabajo de 4.7×10^5 J. ¿Cuál es la profundidad del agua que queda en el depósito?

26. Resuelva el ejercicio 22 suponiendo que el tanque está lleno a la mitad de aceite con densidad de 900 kg/m^3.

27. Cuando el gas se expande en un cilindro de radio r, la presión en cualquier momento dado es una función del volumen: $P = P(V)$. La fuerza que ejerce el gas sobre el émbolo (véase la figura) es el producto de la presión por el área: $F = \pi r^2 P$. Demuestre que el trabajo que realiza el gas cuando el volumen se expande desde el volumen V_1 al volumen V_2 es

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P\, dV$$



28. En un motor de vapor, la presión P y el volumen V del vapor cumple con la ecuación $PV^{1.4} = k$, donde k es una constante. (Esto es válido en el caso de la expansión adiabática, es decir, la expansión en la cual no hay transferencia de calor entre el cilindro y sus alrededores.) Refiérase al ejercicio 27 para calcular el trabajo realizado por el motor durante un ciclo cuando el vapor inicia a una presión de $160\,\text{lb/pulg}^2$ y un volumen de $100\,\text{pulg}^3$ y se expande a un volumen de $800\,\text{pulg}^3$.

29. a) La ley de Newton de gravitación establece que dos cuerpos con masas m_1 y m_2 se atraen entre sí con una fuerza

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

donde r es la distancia entre los cuerpos y G es la constante gravitacional. Si uno de los cuerpos esta fijo, determine el trabajo necesario para llevar al otro desde $r = a$ hasta $r = b$.

b) Calcule el trabajo requerido para lanzar un satélite de 1000 kg en dirección vertical hasta una órbita a 1000 km de altura. Puede suponer que la masa de la Tierra es de 5.98×10^{24} kg y está concentrada en su centro. Tome el radio de la Tierra como 6.37×10^6 m y $G = 6.67 \times 10^{-11}\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$.

30. La gran pirámide del rey Keops fue construida de piedra caliza en Egipto durante un periodo de tiempo de 20 años, desde 2580 a. C. a 2560 a. C. Su base es un cuadrado con una longitud del lado de 756 pies, y su altura cuando se construyó fue de 481 pies. (Fue la estructura hecha por el hombre más alta del mundo por más de 3 800 años.) La densidad de la piedra caliza es aproximadamente $150\,\text{lb/m}^3$.

a) Estime el trabajo total realizado en la construcción de la pirámide.

b) Si cada obrero trabajó 10 horas al día durante 20 años, 340 días al año, e hizo 200 lbs-pie/h de trabajo al levantar los bloques de piedra caliza de su lugar, aproximadamente, ¿cuántos obreros se necesitaron para construir la pirámide?



© Vladimir Korostyshevskiy / Shutterstock

6.5 Valor promedio de una función

Es fácil calcular el valor promedio de una cantidad finita de números $y_1, y_2, \ldots, y_n$:

$$y_{\text{prom}} = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}$$

Pero, ¿de qué manera calcular la temperatura promedio durante un día, si hay gran cantidad de lecturas de temperatura? En la figura 1 se muestra la gráfica de una función temperatura $T(t)$, donde t se mide en horas y T en °C, y una conjetura de la temperatura promedio, T_{prom}.

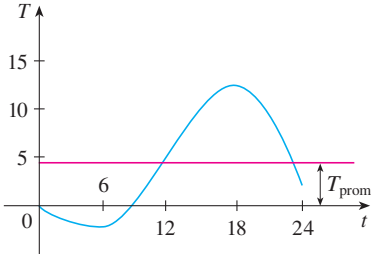


FIGURA 1

En general, tratemos de calcular el valor promedio de una función $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$. Empezamos por dividir el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos iguales, cada uno de ellos de longitud $\Delta x = (b - a)/n$. Luego escogemos los puntos $x_1^*, \ldots, x_n^*$ en subintervalos sucesivos y calculamos el promedio de los números $f(x_1^*), \ldots, f(x_n^*)$:

$$\frac{f(x_1^*) + \cdots + f(x_n^*)}{n}$$

(Por ejemplo, si f representa una función temperatura y $n = 24$, esto quiere decir que tomamos lecturas de la temperatura cada hora y luego promediamos.) Puesto que $\Delta x = (b - a)/n$, podemos escribir $n = (b - a)/\Delta x$, y el valor promedio es

$$\frac{f(x_1^*) + \cdots + f(x_n^*)}{\dfrac{b-a}{\Delta x}} = \frac{1}{b-a}\left[f(x_1^*)\,\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\,\Delta x\right]$$

$$= \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

Si incrementamos n, podríamos calcular el valor promedio de un gran número de valores muy poco separados. (Por ejemplo, podríamos promediar lecturas de temperatura tomadas cada minuto o hasta cada segundo.) El valor límite es

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

por la definición de integral definida.

Por tanto, definimos el **valor promedio de f** sobre el intervalo $[a, b]$ como

$$f_{\text{prom}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Para una función positiva, podemos pensar esta definición como

$$\frac{\text{área}}{\text{ancho}} = \text{altura promedio}$$

V EJEMPLO 1 Determine el valor promedio de la función $f(x) = 1 + x^2$ sobre el intervalo $[-1, 2]$.

SOLUCIÓN Con $a = -1$ y $b = 2$ tenemos

$$f_{\text{prom}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{2-(-1)}\int_{-1}^{2} (1 + x^2)\,dx$$
$$= \frac{1}{3}\left[x + \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = 2$$

Si $T(t)$ es la temperatura en el tiempo t, podemos preguntarnos si existe un momento específico en el que la temperatura es la misma que la temperatura promedio. Para la función temperatura dibujada en la figura 1, existen dos momentos: justo antes del mediodía y antes de la medianoche. En general, ¿hay un número c en el cual el valor de f es exactamente igual al valor promedio de la función, es decir, $f(c) = f_{\text{prom}}$? El teorema siguiente dice que esto es válido para funciones continuas.

Teorema del valor medio para integrales Si f es continua sobre $[a, b]$, entonces existe un número c en $[a, b]$ tal que

$$f(c) = f_{\text{prom}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

es decir,

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

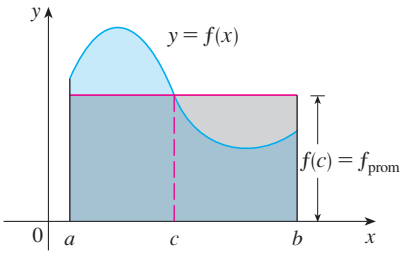


FIGURA 2

Siempre puede cortarse una parte de lo alto de una montaña (dos dimensiones) hasta una cierta altura, y usarla para rellenar con eso los valles, de tal modo que la montaña se vuelva completamente plana.

El teorema del valor medio para integrales es una consecuencia del teorema del valor medio para las derivadas y del teorema fundamental del cálculo. La demostración se esboza en el ejercicio 25.

La interpretación geométrica del teorema del valor medio para integrales es que, para funciones *positivas* f, hay un número c tal que el rectángulo con base $[a, b]$ y altura $f(c)$ tiene la misma área que la región bajo la gráfica de f desde a hasta b. (Véase la figura 2 y la interpretación más clara en la nota al margen).

V EJEMPLO 2 Puesto que $f(x) = 1 + x^2$ es continua sobre el intervalo $[-1, 2]$, el teorema del valor medio para integrales establece que hay un número c en $[-1, 2]$ tal que

$$\int_{-1}^{2} (1 + x^2)\,dx = f(c)[2 - (-1)]$$

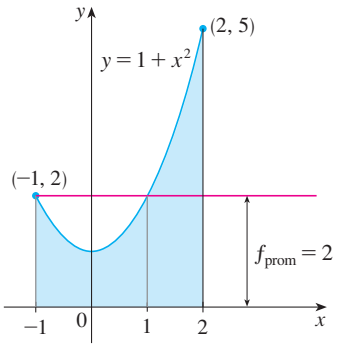


FIGURA 3

En este caso particular podemos hallar c en forma explícita. Según el ejemplo 1, sabemos que $f_{\text{prom}} = 2$, de modo que el valor de c cumple con

$$f(c) = f_{\text{prom}} = 2$$

Por tanto, $\quad 1 + c^2 = 2 \quad$ de modo que $\quad c^2 = 1$

Por consiguiente, sucede en este caso que hay dos números $c = \pm 1$ en el intervalo $[-1, 2]$ que funcionan en el teorema del valor medio para integrales.

Los ejemplos 1 y 2 se ilustran mediante la figura 3.

V EJEMPLO 3 Demuestre que la velocidad promedio de un automóvil en un intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ es la misma que el promedio de sus velocidades durante el viaje.

SOLUCIÓN Si $s(t)$ es el desplazamiento del automóvil en el tiempo t, entonces, por definición, la velocidad promedio del automóvil en el intervalo es

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Por otro lado, el valor promedio de la función velocidad sobre el intervalo es

$$v_{\text{prom}} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} s'(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{t_2 - t_1}[s(t_2) - s(t_1)] \qquad \text{(según del teorema del cambio neto)}$$

$$= \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \text{velocidad promedio}$$

6.5 Ejercicios

1-8 Determine el valor promedio de la función en el intervalo dado.

1. $f(x) = 4x - x^2, \quad [0, 4]$

2. $f(x) = \operatorname{sen} 4x, \quad [-\pi, \pi]$

3. $g(x) = \sqrt[3]{x}, \quad [1, 8]$

4. $g(t) = \dfrac{t}{\sqrt{3 + t^2}}, \quad [1, 3]$

5. $f(t) = e^{\operatorname{sen} t}\cos t, \quad [0, \pi/2]$

6. $f(\theta) = \sec^2(\theta/2), \quad [0, \pi/2]$

7. $h(x) = \cos^4 x \operatorname{sen} x, \quad [0, \pi]$

8. $h(u) = (3 - 2u)^{-1}, \quad [-1, 1]$

9-12
a) Calcule el valor promedio de f sobre el intervalo dado.
b) Encuentre c tal que $f_{\text{prom}} = f(c)$.
c) Grafique f y el rectángulo cuya área es la misma que el área bajo la gráfica de f.

9. $f(x) = (x - 3)^2, \quad [2, 5]$

10. $f(x) = 1/x, \quad [1, 3]$

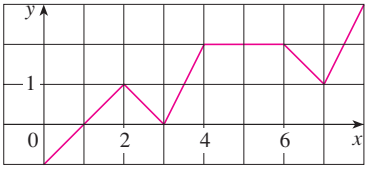
11. $f(x) = 2\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x, \quad [0, \pi]$

12. $f(x) = 2x/(1 + x^2)^2, \quad [0, 2]$

13. Si f es continua y $\int_1^3 f(x)\,dx = 8$, demuestre que f toma el valor de 4 por lo menos una vez sobre el intervalo $[1, 3]$.

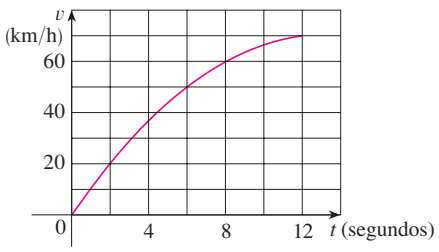
14. Determine los números b tales que el valor promedio de $f(x) = 2 + 6x - 3x^2$ sobre el intervalo $[0, b]$ es igual a 3.

15. Encuentre el valor promedio de f sobre $[0, 8]$.



Se requiere calculadora graficadora o computadora **1.** Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

16. Se muestra la gráfica de velocidad de un automóvil que acelera.



a) Utilice la regla del punto medio para estimar la velocidad promedio del automóvil durante los primeros 12 segundos.
b) ¿En qué momento la velocidad instantánea fue igual a la velocidad promedio?

17. En una cierta ciudad la temperatura (en °F) t horas después de las 9:00 se modeló mediante la función

$$T(t) = 50 + 14 \operatorname{sen} \frac{t}{12}$$

Calcule la temperatura promedio durante el periodo de 9:00 hasta 21:00.

18. La velocidad v de la sangre que fluye en un vaso sanguíneo con radio R y longitud l a una distancia r del eje central es

$$v(r) = \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2)$$

donde P es la diferencia de presión entre los extremos del vaso y η es la viscosidad de la sangre (véase el ejemplo 7 en la sección 3.7). Encuentre la velocidad promedio (respecto a r) sobre el intervalo $0 \leq r \leq R$. Compare la velocidad promedio con la velocidad máxima.

19. La densidad lineal de una varilla de 8 m de longitud es $12/\sqrt{x+1}$ kg/m, donde x se mide en metros desde un extremo de la varilla. Determine la densidad promedio de la varilla.

20. a) Una taza de café tiene una temperatura de 95 °C y le toma 30 minutos enfriarse a 61 °C en una habitación con una temperatura de 20 °C. Utilice la ley del enfriamiento de Newton (sección 3.8) para demostrar que la temperatura del café después de t minutos es

$$T(t) = 20 + 75e^{-kt}$$

donde $k \approx 0.02$.
b) ¿Cuál es la temperatura promedio del café durante la primera media hora?

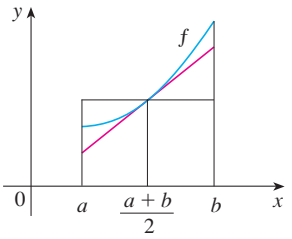
21. En el ejemplo 1 en la sección 3.8 modelamos la población mundial en la segunda mitad del siglo XX por la ecuación $P(t) = 2\,560e^{0.017185t}$. Utilice esta ecuación para estimar la población mundial promedio durante este periodo de tiempo.

22. Si un cuerpo en caída libre parte del reposo, entonces su desplazamiento está dado por $s = \frac{1}{2}gt^2$. Sea la velocidad v_T después de un tiempo T. Demuestre que si calculamos el promedio de las velocidades respecto a t, obtenemos $v_{\text{prom}} = \frac{1}{2}v_T$; pero si calculamos el promedio de las velocidades respecto a s, obtenemos $v_{\text{prom}} = \frac{2}{3}v_T$.

23. Utilice el resultado del ejercicio 83 en la sección 5.5 para calcular el volumen promedio de aire inhalado en los pulmones en un ciclo respiratorio.

24. Utilice el diagrama para mostrar que si f es cóncava hacia arriba sobre $[a, b]$, entonces

$$f_{\text{prom}} > f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

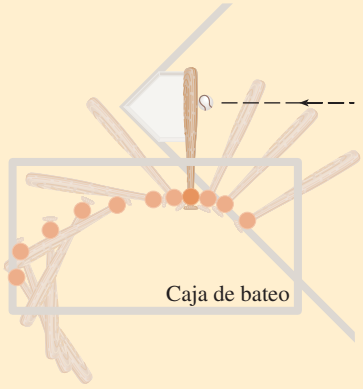


25. Demuestre el teorema del valor medio para integrales aplicando el teorema del valor medio para derivadas (véase la sección 4.2) a la función $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

26. Si $f_{\text{prom}}[a, b]$ denota el valor promedio de f sobre el intervalo $[a, b]$ y $a < c < b$, demuestre que

$$f_{\text{prom}}[a, b] = \frac{c-a}{b-a} f_{\text{prom}}[a, c] + \frac{b-c}{b-a} f_{\text{prom}}[c, b]$$

PROYECTO DE APLICACIÓN EL CÁLCULO Y EL BEISBOL



Vista aérea de la posición de un bate de beisbol, que se muestra cada quincuagésimo de segundo durante un típico *swing*.

En este proyecto exploramos tres de las muchas aplicaciones del cálculo al beisbol. Las interacciones físicas del juego, especialmente la colisión de la pelota y el bate, son bastante complejas, y sus modelos se examinan en detalle en un libro de Robert Adair, *The Physics of Baseball*, 3a. ed. (Nueva York, 2002).

1. Puede sorprenderle saber que el contacto durante la colisión de una pelota de beisbol y el bate dura sólo aproximadamente una milésima de segundo. Aquí estimamos la fuerza promedio sobre el bate durante esta colisión, calculando primero el cambio de momento de la bola.

El *momento* p de un objeto es el producto de su masa m y su velocidad v, es decir, $p = mv$. Supongamos que sobre un objeto que se mueve a lo largo de una línea recta, actúa una fuerza $F = F(t)$ que es una función continua del tiempo.

a) Demuestre que el cambio de momento durante un intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$ es igual a la integral de F de t_0 a t_1; es decir, demuestre que

$$p(t_1) - p(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} F(t)\,dt$$

Esta integral se llama *impulso* de la fuerza en el intervalo de tiempo.

b) Un lanzador lanza una bola rápida a 90 millas/h a un bateador, que conecta un *hit* en línea directamente de regreso hacia el lanzador. La pelota está en contacto con el bate 0.001 s y abandona el bate con una velocidad 110 millas/h. Una pelota de beisbol pesa 5 oz y, en el sistema de unidades de EU, su masa se mide en slugs: $m = w/g$, donde $g = 32$ pies/s^2.

i) Encuentre el cambio en el momento de la bola.

ii) Determine la fuerza promedio sobre el bate.

2. En este problema calculamos el trabajo necesario para que un lanzador arroje una bola rápida a 90 millas/h, considerando primero la energía cinética.

La *energía cinética* C de un objeto de masa m y velocidad v está dada por $C = \frac{1}{2}mv^2$. Suponga que un objeto de masa m se está moviendo en línea recta, y actúa sobre él una fuerza $F = F(s)$ que depende de su posición s. De acuerdo con la segunda ley de Newton

$$F(s) = ma = m\frac{dv}{dt}$$

donde a y v denotan la aceleración y la velocidad del objeto.

a) Demuestre que el trabajo de mover el objeto desde una posición s_0 a una posición s_1 es igual al cambio de energía cinética del objeto; es decir, demuestre que

$$W = \int_{s_0}^{s_1} F(s)\,ds = \tfrac{1}{2}mv_1^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2$$

donde $v_0 = v(s_0)$ y $v_1 = v(s_1)$ son las velocidades del objeto en las posiciones s_0 y s_1. *Sugerencia:* por la regla de la cadena,

$$m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = mv\frac{dv}{ds}$$

b) ¿Cuántas pie-libras de trabajo se requieren para lanzar una pelota de beisbol a una velocidad de 90 millas/h?

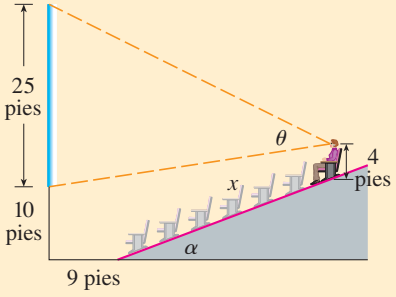
Se requiere calculadora graficadora o computadora

3. a) Un jardinero atrapa una pelota de beisbol a 280 pies del plato de *home* y la arroja directamente al cátcher con una velocidad inicial de 100 pies/s. Suponga que la velocidad $v(t)$ de la bola después de t segundos satisface la ecuación diferencial $dv/dt = -\frac{1}{10}v$ debido a la resistencia del aire. ¿Cuánto tarda la bola en llegar a *home*? (Desprecie cualquier movimiento vertical de la bola).

b) El mánager del equipo se pregunta si la bola llegará a home antes apoyándose en un jugador de cuadro. El parador en corto puede colocarse entre el jardinero y el plato de *home*, captura la pelota lanzada por el jardinero, gira y tira la pelota al cátcher con una velocidad inicial de 105 pies/s. El mánager registra el tiempo de intervención del parador en corto (capturar, girar, tirar) en medio segundo. ¿A qué distancia del *home* debe posicionarse el parador en corto para minimizar el tiempo total de llegada de la pelota al *home*? ¿El mánager debería alentar a un tiro directo o un tiro con relevo? ¿Qué sucede si el parador en corto puede lanzar a 115 pies/s?

c) ¿A qué velocidad debe lanzar el parador en corto para que su lanzamiento de relevo iguale el tiempo que el de un tiro directo?

PROYECTO DE APLICACIÓN SAC DÓNDE SENTARSE EN EL CINE



Una sala de cine tiene una pantalla que está colocada 10 pies arriba del piso y mide 25 pies de altura. La primera fila de asientos está ubicada a 9 pies de la pantalla, y las filas están separadas 3 pies. El piso de la zona de asientos está inclinado un ángulo de $\alpha = 20°$ por arriba de la horizontal, y la distancia inclinada hasta donde usted está sentado es x. La sala tiene 21 filas de asientos, de modo que $0 \leq x \leq 60$. Suponga que decide que el mejor lugar para sentarse es la fila donde el ángulo θ que subtiende la pantalla a sus ojos es un máximo. Suponga también que sus ojos están 4 pies por arriba del piso, según se ilustra en la figura. (En el ejercicio 74 de la sección 4.7 se estudia una versión más sencilla de este problema, en el que el piso es horizontal, pero este proyecto plantea una situación más complicada y requiere tecnología.)

1. Demuestre que

$$\theta = \arccos\left(\frac{a^2 + b^2 - 625}{2ab}\right)$$

donde

$$a^2 = (9 + x\cos\alpha)^2 + (31 - x\,\text{sen}\,\alpha)^2$$

y

$$b^2 = (9 + x\cos\alpha)^2 + (x\,\text{sen}\,\alpha - 6)^2$$

2. Mediante una gráfica de θ como una función de x estime el valor de x que maximiza θ. ¿En cuál fila debe sentarse? ¿Cuál es el ángulo de visión θ en esta fila?

3. Utilice un sistema algebraico computarizado para derivar θ y calcular un valor numérico para la raíz de la ecuación $d\theta/dx = 0$. ¿Este valor confirma su resultado del problema 2?

4. Mediante una gráfica de θ estime el valor promedio de θ en el intervalo $0 \leq x \leq 60$. Luego utilice su sistema algebraico computarizado para calcular el valor promedio. Compare con los valores máximos y mínimos de θ.

SAC Se requiere un sistema algebraico computarizado

6 Repaso

Verificación de conceptos

1. a) Trace dos curvas representativas $y = f(x)$ y $y = g(x)$, donde $f(x) \geqslant g(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$. Muestre cómo aproximar al área entre estas curvas mediante una suma de Riemann, y dibuje los rectángulos correspondientes de aproximación. Luego plantee una expresión para el área exacta.
   b) Explique cómo cambia la situación si las curvas tienen ecuaciones $x = f(y)$ y $x = g(y)$, donde $f(y) \geqslant g(y)$ para $c \leqslant y \leqslant d$.

2. Suponga que Susana corre más rápido que Katy en la competencia de los 1500 m. ¿Cuál es el significado físico del área entre sus curvas de velocidad durante el primer minuto de la competencia?

3. a) Suponga que S es un sólido con áreas de sección transversal conocidas. Explique cómo obtener un valor aproximado del volumen de S mediante una suma de Riemann. Escriba una expresión para el volumen exacto.
   b) Si S es un sólido de revolución, ¿cómo se determinan las áreas de las secciones transversales?

4. a) ¿Cuál es el volumen de un cascarón cilíndrico?
   b) Explique cómo utilizar los cascarones cilíndricos para calcular el volumen de un sólido de revolución.
   c) ¿Por qué preferiría usted usar el método de cálculo mediante cascarones en lugar del método de las rebanadas o discos?

5. Suponga que empuja usted un libro al otro lado de una mesa de 6 m de largo ejerciendo una fuerza $f(x)$ en cada punto desde $x = 0$ hasta $x = 6$. ¿Qué representa $\int_0^6 f(x)\,dx$? Si $f(x)$ se mide en newtons, ¿cuáles son las unidades para la integral?

6. a) ¿Cuál es el valor promedio de una función f sobre un intervalo $[a, b]$?
   b) ¿Qué establece el teorema del valor medio para integrales? ¿Cuál es su interpretación geométrica?

Ejercicios

1-6 Encuentre el área de la región limitada por cada una de las siguientes curvas.

1. $y = x^2, \quad y = 4x - x^2$
2. $y = 1/x, \quad y = x^2, \quad y = 0, \quad x = e$
3. $y = 1 - 2x^2, \quad y = |x|$
4. $x + y = 0, \quad x = y^2 + 3y$
5. $y = \operatorname{sen}(\pi x/2), \quad y = x^2 - 2x$
6. $y = \sqrt{x}, \quad y = x^2, \quad x = 2$

7-11 Encuentre el volumen del sólido obtenido al rotar cada una de las siguientes regiones limitadas por las curvas dadas alrededor del eje especificado.

7. $y = 2x, \ y = x^2$; alrededor del eje x
8. $x = 1 + y^2, \ y = x - 3$; alrededor del eje y
9. $x = 0, \ x = 9 - y^2$; alrededor de $x = -1$
10. $y = x^2 + 1, \ y = 9 - x^2$; alrededor de $y = -1$
11. $x^2 - y^2 = a^2, \ x = a + h$ (donde $a > 0, h > 0$); alrededor del eje y

12-14 Configure, pero no evalúe, una integral para el volumen del sólido obtenido al rotar la región limitada por cada una de las siguientes curvas dadas sobre el eje especificado.

12. $y = \tan x, \ y = x, \ x = \pi/3$; alrededor del eje y
13. $y = \cos^2 x, \ |x| \leqslant \pi/2, \ y = \frac{1}{4}$; alrededor de $x = \pi/2$
14. $y = \sqrt{x}, \ y = x^2$; alrededor de $y = 2$

15. Encuentre los volúmenes de los sólidos obtenidos mediante la rotación de la región limitada por la curvas $y = x$ y $y = x^2$ alrededor de las siguientes rectas.
    a) El eje x b) El eje y c) $y = 2$

16. Sea $\mathcal{R}$ la región en el primer cuadrante limitada por las curvas $y = x^3$ y $y = 2x - x^2$. Calcule las siguientes cantidades
    a) El área de $\mathcal{R}$
    b) El volumen obtenido al rotar $\mathcal{R}$ alrededor del eje x
    c) El volumen obtenido al rotar $\mathcal{R}$ en torno al eje y

17. Sea $\mathcal{R}$ la región limitada por las curvas $y = \tan(x^2)$, $x = 1$ y $y = 0$. Utilice la regla del punto medio con $n = 4$ para estimar las siguientes cantidades.
    a) El área de $\mathcal{R}$
    b) El volumen obtenido al rotar $\mathcal{R}$ alrededor del eje x

18. Sea $\mathcal{R}$ la región limitada por las curvas $y = 1 - x^2$ y $y = x^6 - x + 1$. Estime las siguientes cantidades.
    a) Las coordenadas x de los puntos de intersección de las curvas
    b) El área de $\mathcal{R}$
    c) El volumen generado cuando $\mathcal{R}$ rota alrededor del eje x
    d) El volumen generado cuando $\mathcal{R}$ rota alrededor del eje y

19-22 Cada una de las siguientes integrales representa el volumen de un sólido. Describa el sólido.

19. $\int_0^{\pi/2} 2\pi x \cos x \, dx$
20. $\int_0^{\pi/2} 2\pi \cos^2 x \, dx$

Se requiere calculadora graficadora o computadora

21. $\int_0^{\pi} \pi(2 - \operatorname{sen} x)^2\, dx$ **22.** $\int_0^{4} 2\pi(6 - y)(4y - y^2)\, dy$

23. La base de un sólido es un disco circular con radio 3. Encuentre el volumen del sólido si las secciones transversales paralelas y perpendiculares a la base son triángulos rectángulos isósceles con hipotenusa ubicada a lo largo de la base.

24. La base de un sólido es la región limitada por las parábolas $y = x^2$ y $y = 2 - x^2$. Encuentre el volumen del sólido si las secciones transversales perpendiculares al eje x son cuadrados y uno de sus lados coincide con la base.

25. La altura de un monumento es de 20 m. Un corte transversal horizontal a una distancia de x metros desde la parte superior es un triángulo equilátero con $\frac{1}{4}x$ metros de lado. Encuentre el volumen del monumento.

26. a) La base de un sólido es un cuadrado con vértices en (1, 0), (0, 1), (−1, 0) y (0, −1). Cada sección transversal perpendicular al eje x es un semicírculo. Encuentre el volumen del sólido.

b) Muestre que, cortando el sólido de la parte a), podemos rearmarlo para formar un cono y así calcular su volumen más fácilmente.

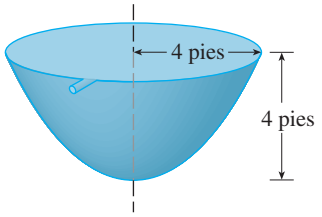
27. Se requiere una fuerza de 30 N para mantener estirado un resorte desde su longitud natural de 12 a 15 cm de longitud. ¿Cuánto trabajo se realiza al estirar el resorte desde 12 hasta 20 cm?

28. Un ascensor de 1600 lb está suspendido por un cable de 200 pies que pesa 10 lb/pie. ¿Cuánto trabajo es necesario para elevar el ascensor una distancia de 30 pies desde el sótano hasta el tercer piso?

29. Un tanque lleno de agua tiene la forma de un paraboloide de revolución, como se muestra en la figura; es decir, su forma se obtiene haciendo girar una parábola alrededor de un eje vertical.

a) Si su altura es de 4 pies y el radio en la parte superior es de 4 pies, encuentre el trabajo necesario para bombear el agua fuera del tanque.

b) Después de que se han realizado 4 000 lbs-pie de trabajo, ¿cuál es la profundidad del agua restante en el tanque?



30. Encuentre el valor promedio de la función $f(t) = t \operatorname{sen}(t^2)$ sobre el intervalo [0, 10].

31. Si f es una función continua, ¿cuál es el límite cuando $h \to 0$ del valor promedio de f sobre el intervalo $[x, x + h]$?

32. Sea $\mathcal{R}_1$ la región limitada por $y = x^2$, $y = 0$ y $x = b$, donde $b > 0$. Sea $\mathcal{R}_2$ la región limitada por $y = x^2$, $x = 0$ y $y = b^2$.

a) ¿Existe un valor de b tal que $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ tienen la misma área?

b) ¿Existe un valor de b tal que $\mathcal{R}_1$ barre el mismo volumen cuando gira alrededor del eje x que alrededor del eje y?

c) ¿Hay un valor de b tal que $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ barren el mismo volumen cuando giran alrededor del eje x?

d) ¿Existe un valor de b tal que $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ barren el mismo volumen cuando giran alrededor del eje y?

Problemas adicionales

1. a) Encuentre una función f continua positiva tal que el área bajo la gráfica de f desde 0 hasta t es $A(t) = t^3$ para toda $t > 0$.

b) Un sólido se genera al hacer girar alrededor del eje x la región bajo la curva $y = f(x)$, donde f es una función positiva y $x \geqslant 0$. El volumen generado por la parte de la curva desde $x = 0$ hasta $x = b$ es b^2 para toda $b > 0$. Determine la función f.

2. Existe una recta que pasa por el origen que divide la región definida por la parábola $y = x - x^2$ y el eje x en dos regiones de igual área. ¿Cuál es la pendiente de la recta?

3. En la figura se ilustra una recta horizontal $y = c$ que corta a la curva $y = 8x - 27x^3$. Encuentre el número c tal que las áreas de las regiones sombreadas sean iguales.

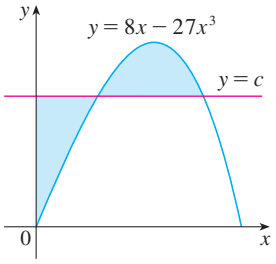


FIGURA PARA EL PROBLEMA 3

4. Un vaso cilíndrico de vidrio, de radio r y altura L, se llena con agua y luego se ladea hasta que el agua que queda en el recipiente cubre exactamente la base.

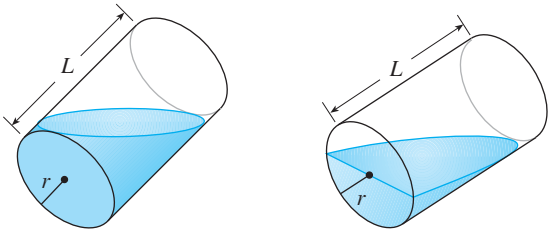
a) Determine una manera de "rebanar" el agua en secciones transversales, rectangulares y paralelas, y luego plantee una integral definida para determinar el volumen del agua en el vaso.

b) Encuentre una manera para obtener "rebanadas" de agua que sean secciones transversales y paralelas, pero que sean trapezoides, y luego plantee una integral definida para obtener el volumen del agua.

c) Calcule el volumen de agua en el vaso evaluando una de las integrales de los incisos a) o b).

d) Calcule el volumen del agua en el vaso a partir de consideraciones puramente geométricas.

e) Suponga que el recipiente se ladea hasta que el agua cubra exactamente la mitad de la base. ¿En qué dirección puede usted "rebanar" el agua en secciones transversales triangulares? ¿Y en secciones transversales rectangulares? ¿Y en secciones transversales que son segmentos de círculos? Determine el volumen de agua en el vaso.



5. a) Demuestre el volumen de un segmento de altura h de una esfera de radio r es

$$V = \tfrac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$$

(Véase la figura)

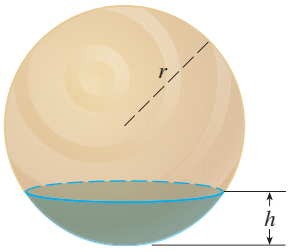


FIGURA PARA EL PROBLEMA 5

b) Demuestre que si una esfera de radio 1 se corta mediante un plano a una distancia x desde el centro de tal manera que el volumen de un segmento es el doble del volumen del otro, entonces x es una solución de la ecuación

$$3x^3 - 9x + 2 = 0$$

donde $0 < x < 1$. Utilice el método de Newton para determinar una x con una aproximación de cuatro cifras decimales.

c) Utilice la fórmula para el volumen de un segmento de una esfera para demostrar que la profundidad x en la cual una esfera flotante de radio r se hunde en el agua es una raíz de la ecuación

$$x^3 - 3rx^2 + 4r^3s = 0$$

donde s es el peso específico de la esfera. Suponga que una esfera de madera de radio igual a 0.5 m tiene peso específico de 0.75. Calcule la profundidad, con una aproximación de cuatro cifras decimales, a la cual la esfera se hunde.

SAC Se requiere sistema algebraico computarizado

d) Un tazón semiesférico tiene radio de 5 pulg y le entra agua a razón de 0.2 pulg^3/s.

i) ¿Qué tan rápido sube el nivel de agua en el tazón en el instante en que el agua tiene 3 pulg de profundidad?

ii) En un cierto instante, el agua tiene 4 pulg de profundidad. ¿Qué tiempo se requiere para llenar con agua el tazón?

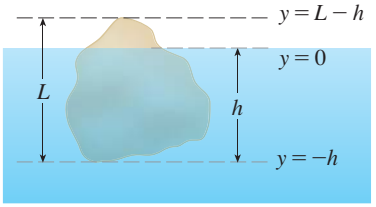


FIGURA PARA EL PROBLEMA 6

6. El principio de Arquímedes establece que la fuerza de flotación de un objeto parcial o totalmente sumergido en un líquido es igual al peso del líquido que desaloja el objeto. Por tanto, en el caso de un objeto de densidad ρ_0, que flota parcialmente sumergido en un líquido de densidad ρ_f la fuerza de flotación es $F = \rho_f g \int_{-h}^{0} A(y)\,dy$, donde g es la aceleración debida a la gravedad y $A(y)$ es el área de una sección transversal representativa del objeto (véase la figura). El peso del objeto está dado por

$$W = \rho_0 g \int_{-h}^{L-h} A(y)\,dy$$

a) Demuestre que el porcentaje del volumen del objeto por arriba de la superficie del líquido es

$$100\,\frac{\rho_f - \rho_0}{\rho_f}$$

b) La densidad del hielo es 917 kg/m^3, y la densidad del agua de mar es de 1 030 kg/m^3. ¿Qué porcentaje del volumen de un iceberg sobresale del agua?

c) Un cubo de hielo flota en un vaso lleno con agua hasta el borde. ¿Se derramará el agua cuando se derrita el cubo de hielo?

d) Una esfera de radio 0.4 m y de peso insignificante flota en un enorme lago de agua dulce. ¿Qué tanto trabajo se requiere para sumergir del todo la esfera? La densidad del agua es de 1 000 kg/m^3.

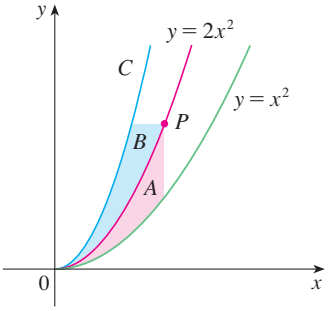


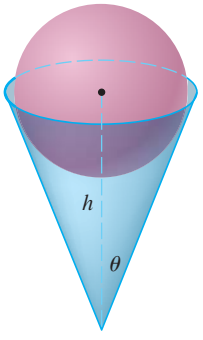
FIGURA PARA EL PROBLEMA 9

7. El agua que se encuentra en un tazón abierto se evapora con una rapidez proporcional al área de la superficie del agua. (Esto quiere decir la rapidez de decremento del volumen es proporcional al área de la superficie.) Demuestre que la profundidad del agua disminuye a una rapidez constante, sin importar la forma del tazón.

8. Una esfera de radio 1 se sobrepone a una esfera más pequeña de radio r de tal manera su intersección es una circunferencia de radio r (En otras palabras, cuando ambas se cortan, el resultado es un gran círculo de la esfera menor). Determine r de modo el volumen en el interior de la esfera pequeña y el volumen incluyendo el exterior de la esfera mayor sea tan grande como sea posible.

9. En la figura se ilustra una curva C con la propiedad de que para todo punto P en la mitad sobre la curva $y = 2x^2$, las zonas A y B son iguales. Determine una ecuación para C.

10. Un vaso de papel lleno con agua tiene la forma de un cono de altura h y ángulo semivertical θ (véase la figura). Una pelota se coloca con todo cuidado en el vaso, con lo que se desplaza una parte del agua y se derrama. ¿Cuál es el radio de la pelota que ocasiona que se derrame el volumen máximo de agua?



11. Una clepsidra o reloj de agua es un recipiente de vidrio con un pequeño agujero en el fondo a través del cual el agua puede salir. El reloj se calibra para que mida el tiempo, colocando marcas en el recipiente que corresponden a los niveles de agua en tiempos con igual separación. Sea $x = f(y)$ continua en el intervalo $[0, b]$ y suponga que el recipiente se formó al hacer girar la gráfica de f alrededor del eje y. Sea V el volumen de agua y h la altura del nivel de agua en el tiempo t.

a) Determine V en función de h.

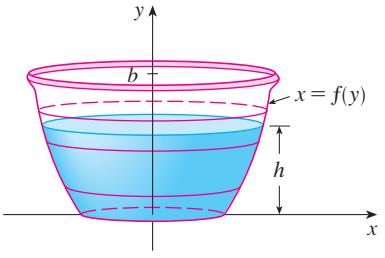
b) Demuestre que

$$\frac{dV}{dt} = [f(h)]^2 \frac{dh}{dt}$$

c) Suponga que A es el área del agujero en el fondo del recipiente. De la ley de Torricelli se infiere que la razón de cambio del volumen del agua es

$$\frac{dV}{dt} = kA\sqrt{h}$$

donde k es una constante negativa. Determine una fórmula para la función f tal que dh/dt es una constante C. ¿Cuál es la ventaja de tener $dh/dt = C$?



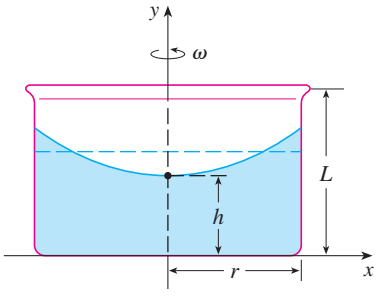


FIGURA PARA EL PROBLEMA 12

12. Un recipiente cilíndrico de radio r y altura L está lleno en parte con un líquido cuyo volumen es V. Si se hacemos girar el recipiente alrededor del eje de simetría con rapidez angular constante ω, entonces el recipiente inducirá un movimiento rotatorio en el líquido alrededor del mismo eje. A la larga, el líquido estará girando a la misma rapidez angular que el recipiente. La superficie del líquido será convexa, como se señala en la figura, porque la fuerza centrifuga en las partículas del líquido aumenta con la distancia desde el eje del recipiente. Puede demostrarse que la superficie del líquido es un paraboloide de revolución generado al hacer girar la parábola

$$y = h + \frac{\omega^2 x^2}{2g}$$

alrededor del eje y, donde g es la aceleración de la gravedad.

a) Determine h como una función de ω.

b) ¿A qué rapidez angular la superficie del líquido tocará el fondo? ¿A qué rapidez se derramara el agua por el borde?

c) Suponga que el radio del recipiente es 2 pies, la altura es 7 pies y que el recipiente y el líquido giran a la misma rapidez angular constante. La superficie del líquido está a 5 pies por abajo de la parte superior del depósito en el eje central y a 4 pies por abajo de la parte superior del recipiente a un 1 pie del eje central.

i) Determine la rapidez angular del recipiente y el volumen del líquido.

ii) ¿Qué tanto por abajo de la parte superior el recipiente está el líquido en la pared del recipiente?

13. Considere la gráfica de una polinomial cúbica que corta transversalmente la parábola $y = x^2$ cuando $x = 0$, $x = a$, y $x = b$, donde $0 < a < b$. Si las dos regiones entre las curvas tienen la misma área, ¿cómo se relaciona b con a?

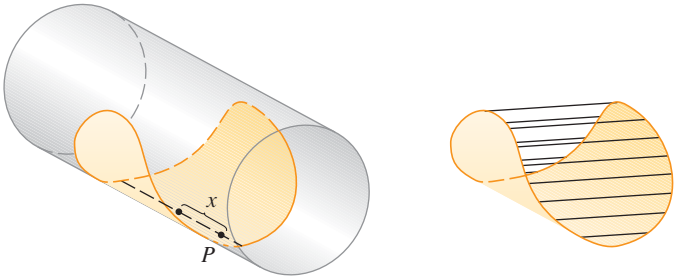
SAC **14.** Suponga que se planea hacer un taco con una tortilla de 8 pulg de diámetro, de modo que la tortilla parezca que está rodeando en parte un cilindro circular. Llene la tortilla hasta la orilla (y no más) con carne, queso y otros ingredientes. El problema es decidir cómo curvar la tortilla para maximizar el volumen de comida que pueda contener.

a) Empiece por colocar un cilindro circular de radio r a lo largo del diámetro de la tortilla y rodee con esta el cilindro. Sea x la distancia desde el centro de la tortilla hasta el punto P en el diámetro (véase la figura). Demuestre que el área de la sección transversal del taco lleno en el plano que pasa por P y es perpendicular al eje del cilindro es

$$A(x) = r\sqrt{16 - x^2} - \tfrac{1}{2}r^2 \operatorname{sen}\left(\frac{2}{r}\sqrt{16 - x^2}\right)$$

y escriba una expresión para el volumen del taco lleno.

b) Determine (aproximadamente) el valor de r que maximiza el volumen del taco. (Recurra a un enfoque grafico con su SAC.)



15. Si la recta tangente en un punto P sobre la curva $y = x^3$ corta transversalmente otra vez la curva en Q, sea A el área de la región limitada por la curva y el segmento de recta PQ. Sea B el área de la región definida de la misma manera iniciando con Q, en lugar de P. ¿Cuál es la correspondencia entre A y B?

7 Técnicas de integración



Fotografía de Omega Centauri que contiene varios millones de estrellas y es el cúmulo globular más grande en nuestra galaxia. Los astrónomos utilizan estereografía estelar para determinar la densidad real de las estrellas en un cúmulo estelar de la densidad (en dos dimensiones) que puede ser analizada en una fotografía. En la sección 7.8 se le pedirá evaluar una integral para estimar la densidad aparente a partir de la densidad real.

© 2010 Thomas V. Davis, www.tvdavisastropics.com

Con el teorema fundamental del cálculo, podemos integrar una función si conocemos una antiderivada; esto es, una integral indefinida. Aquí resumimos las integrales más importantes que hemos aprendido hasta ahora.

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C \qquad \int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C \qquad \int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$$

$$\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + C \qquad \int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x + C$$

$$\int \tan x\,dx = \ln|\sec x| + C \qquad \int \cot x\,dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C, \quad a > 0$$

En este capítulo desarrollamos técnicas para utilizar estas fórmulas básicas de integración para obtener integrales indefinidas de funciones más complicadas. En la sección 5.5, aprendimos el más importante método de integración, la regla de sustitución. La otra técnica general, la integración por partes, se presenta en la sección 7.1. Después aprenderemos métodos especiales para clases de funciones particulares, como funciones trigonométricas y funciones racionales.

La integración no es tan sencilla como la derivación. No existen reglas que garanticen absolutamente la obtención de una integral indefinida de una función, así que discutiremos una estrategia para la integración en la sección 7.5.

7.1 Integración por partes

Cada regla de derivación tiene una correspondiente regla de integración. Por ejemplo, a la regla de sustitución para la integración, le corresponde la regla de la cadena para la derivación. La regla de integración que le corresponde a la derivación de un producto, se llama *integración por partes*.

La regla del producto establece que si f y g son funciones derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

En la notación para integrales indefinidas, esta ecuación se convierte en

$$\int [f(x)g'(x) + g(x)f'(x)]\,dx = f(x)g(x)$$

o bien,

$$\int f(x)g'(x)\,dx + \int g(x)f'(x)\,dx = f(x)g(x)$$

Podemos reacomodar esta ecuación como

$$\boxed{\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx} \quad 1$$

La fórmula 1 se llama **fórmula para la integración por partes**. Tal vez sea más fácil recordarla en la siguiente notación: sea $u = f(x)$ y $v = g(x)$. Entonces, las diferenciales son $du = f'(x)\,dx$ y $dv = g'(x)\,dx$, así que, por la regla de sustitución, la fórmula para la integración por partes se transforma en

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du} \quad 2$$

EJEMPLO 1 Encuentre $\int x \operatorname{sen} x\,dx$.

SOLUCIÓN CON LA FÓRMULA 1 Supongamos que elegimos $f(x) = x$ y $g'(x) = \operatorname{sen} x$. Entonces $f'(x) = 1$ y $g(x) = -\cos x$. (Para g podemos elegir *cualquier* antiderivada de g'.) Así, utilizando la fórmula 1, tenemos

$$\begin{aligned}\int x \operatorname{sen} x\,dx &= f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx \\ &= x(-\cos x) - \int (-\cos x)\,dx \\ &= -x\cos x + \int \cos x\,dx \\ &= -x\cos x + \operatorname{sen} x + C\end{aligned}$$

Es muy aconsejable verificar derivando la respuesta. Si lo hacemos, obtendremos $x \operatorname{sen} x$, como es de esperarse.

Es útil utilizar el patrón

$u = \square \qquad dv = \square$
$du = \square \qquad v = \square$

CON LA FÓRMULA 2 Sea

$$u = x \qquad dv = \operatorname{sen} x\, dx$$

Entonces $$du = dx \qquad v = -\cos x$$

así que

$$\int x \operatorname{sen} x\, dx = \int \overbrace{x}^{u}\ \overbrace{\operatorname{sen} x\, dx}^{dv} = \overbrace{x}^{u}\ \overbrace{(-\cos x)}^{v} - \int \overbrace{(-\cos x)}^{v}\ \overbrace{dx}^{du}$$

$$= -x \cos x + \int \cos x\, dx$$

$$= -x \cos x + \operatorname{sen} x + C$$

NOTA Nuestro objetivo al utilizar la integración por partes es obtener una integral más sencilla que la original. Así, en el ejemplo 1, la original es $\int x \operatorname{sen} x\, dx$ y la expresamos en términos de la integral más sencilla $\int \cos x\, dx$. Si hubiéramos elegido $u = \operatorname{sen} x$ y $dv = x\, dx$, entonces $du = \cos x\, dx$ y $v = x^2/2$, por lo que la integral por partes da

$$\int x \operatorname{sen} x\, dx = (\operatorname{sen} x)\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int x^2 \cos x\, dx$$

Aunque esto es cierto, $\int x^2 \cos x\, dx$ es una integral más difícil que la que queremos resolver. En general, cuando decidimos escoger u y dv, usualmente tratamos de elegir $u = f(x)$ de manera que resulte fácil de derivar (o al menos no tan complicada), y que $dv = g'(x)\, dx$ sea fácil de integrar para obtener v.

V EJEMPLO 2 Evalúe $\int \ln x\, dx$.

SOLUCIÓN Aquí no tenemos opciones para u y dv. Sea

$$u = \ln x \qquad dv = dx$$

Entonces $$du = \frac{1}{x}\, dx \qquad v = x$$

Integrando por partes obtenemos

$$\int \ln x\, dx = x \ln x - \int x \frac{dx}{x}$$

$$= x \ln x - \int dx$$

$$= x \ln x - x + C$$

Se acostumbra escribir $\int 1\, dx$ como $\int dx$.

Verifique su respuesta derivando.

La integración por partes es eficaz en este ejemplo porque la derivada de la función $f(x) = \ln x$ es más sencilla que f.

V EJEMPLO 3 Encuentre $\int t^2 e^t\, dt$.

SOLUCIÓN Observe que t^2 resulta más sencilla cuando la derivamos (mientras que e^t no cambia si la derivamos o la integramos), así que elegimos

$$u = t^2 \qquad dv = e^t\, dt$$

Entonces $$du = 2t\, dt \qquad v = e^t$$

La integración por partes nos da

$$\boxed{3} \qquad \int t^2 e^t\,dt = t^2 e^t - 2\int te^t\,dt$$

La integral que hemos obtenido, $\int te^t\,dt$, es más sencilla que la original; pero aún no está resuelta porque no tiene solución inmediata. Es necesario utilizar la integración por partes por segunda vez, haciendo $u = t$ y $dv = e^t\,dt$. Entonces $du = dt$, $v = e^t$ y

$$\begin{aligned}\int te^t\,dt &= te^t - \int e^t\,dt \\ &= te^t - e^t + C\end{aligned}$$

Poniendo esto en la ecuación 3, obtenemos

$$\begin{aligned}\int t^2 e^t\,dt &= t^2 e^t - 2\int te^t\,dt \\ &= t^2 e^t - 2(te^t - e^t + C) \\ &= t^2 e^t - 2te^t + 2e^t + C_1 \qquad \text{donde } C_1 = -2C\end{aligned}$$

V EJEMPLO 4 Evalúe $\int e^x \operatorname{sen} x\,dx$.

En el ejercicio 50 del apéndice H, se da un método más fácil, utilizando números complejos.

SOLUCIÓN Ni e^x ni sen x se simplifican cuando se derivan, pero de cualquier manera intentamos eligiendo $u = e^x$ y $dv = \operatorname{sen} x\,dx$. Entonces $du = e^x\,dx$ y $v = -\cos x$, así que la integración por partes da

$$\boxed{4} \qquad \int e^x \operatorname{sen} x\,dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\,dx$$

La integral que obtenemos, $\int e^x \cos x\,dx$, no es más sencilla que la original, pero al menos no es más difícil. Habiendo tenido éxito en el ejemplo anterior al integrar por partes dos veces, perseveramos e integramos por partes nuevamente. Esta vez utilizamos $u = e^x$ y $dv = \cos x\,dx$. Entonces $du = e^x\,dx$, $v = \operatorname{sen} x$ y

$$\boxed{5} \qquad \int e^x \cos x\,dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\,dx$$

La figura 1 ilustra el ejemplo 4 con la gráficas de $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$ y $F(x) = \frac{1}{2}e^x(\operatorname{sen} x - \cos x)$. Como verificación visual de nuestro trabajo, note que $f(x) = 0$ cuando F tiene un máximo o un mínimo.

A primera vista parece que no hemos avanzado mucho, porque hemos llegado a $\int e^x \operatorname{sen} x\,dx$, que es de donde partimos. Sin embargo, si sustituimos la expresión para $\int e^x \cos x\,dx$ de la ecuación 5 en la ecuación 4 obtenemos

$$\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\,dx$$

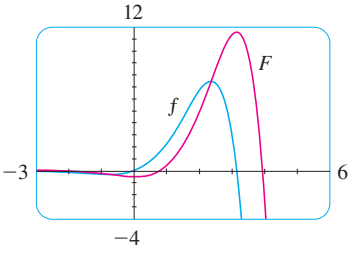


FIGURA 1

Esto puede verse como una ecuación que se resuelve para la integral incógnita. Sumando $\int e^x \operatorname{sen} x\,dx$ a ambos lados, obtenemos

$$2\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x$$

Dividiendo entre 2 y sumando la constante de integración, resulta

$$\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = \tfrac{1}{2}e^x(\operatorname{sen} x - \cos x) + C$$

Si combinamos la fórmula para la integración por partes con la parte 2 del teorema fundamental del cálculo, podemos evaluar integrales definidas por partes. Evaluando ambos lados de la fórmula 1 entre a y b, suponiendo que f' y g' son continuas, y utilizando el teorema fundamental del cálculo, obtenemos

$$\boxed{6} \qquad \int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\,dx$$

EJEMPLO 5 Calcule $\int_0^1 \tan^{-1}x\,dx$.

SOLUCIÓN Sea

$$u = \tan^{-1}x \qquad dv = dx$$

Entonces $$du = \frac{dx}{1+x^2} \qquad v = x$$

Así que la fórmula 6 da

$$\begin{aligned}\int_0^1 \tan^{-1}x\,dx &= x\tan^{-1}x\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx \\ &= 1\cdot\tan^{-1}1 - 0\cdot\tan^{-1}0 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx \\ &= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx\end{aligned}$$

Ya que $\tan^{-1}x \geqslant 0$ para $x \geqslant 0$, la integral del ejemplo 5 puede interpretarse como el área de la región que se muestra en la figura 2.

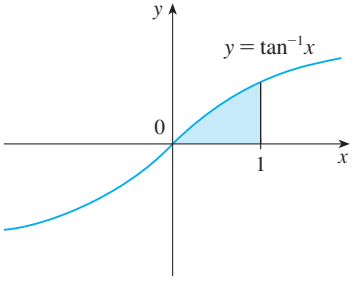


FIGURA 2

Para evaluar esta integral utilizamos la sustitución $t = 1 + x^2$ (ya que u tiene otra connotación en este ejemplo). Entonces $dt = 2x\,dx$, así que $x\,dx = \frac{1}{2}\,dt$. Cuando $x = 0$, $t = 1$; cuando $x = 1$, $t = 2$; así que

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx &= \tfrac{1}{2}\int_1^2 \frac{dt}{t} = \tfrac{1}{2}\ln|t|\Big]_1^2 \\ &= \tfrac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \tfrac{1}{2}\ln 2\end{aligned}$$

Por tanto, $$\int_0^1 \tan^{-1}x\,dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$$

EJEMPLO 6 Demuestre la siguiente fórmula de reducción

$$\boxed{7} \qquad \int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\frac{1}{n}\cos x\operatorname{sen}^{n-1}x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2}x\,dx$$

La ecuación 7 se llama *fórmula de reducción* porque el exponente n se *reduce* a $n-1$ y $n-2$.

donde $n \geqslant 2$ es un número entero.

SOLUCIÓN Sea

$$u = \operatorname{sen}^{n-1}x \qquad dv = \operatorname{sen} x\,dx$$

Entonces $$du = (n-1)\operatorname{sen}^{n-2}x\cos x\,dx \qquad v = -\cos x$$

así que la integración por partes da

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x \cos^2 x\,dx$$

Dado que $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ tenemos

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx - (n-1)\int \operatorname{sen}^n x\,dx$$

Como en el ejemplo 4, resolvemos esta ecuación para la integral deseada tomando el último término del lado derecho y pasándolo al lado izquierdo:

$$n\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx$$

o bien

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\frac{1}{n}\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx$$

La fórmula de reducción 7 es útil porque, al utilizarla repetidamente, podemos expresar $\int \operatorname{sen}^n x\,dx$ en términos de $\int \operatorname{sen} x\,dx$ (si n es impar) o $\int (\operatorname{sen} x)^0\,dx = \int dx$ (si n es par).

7.1 Ejercicios

1-2 Evalúe las siguientes integrales utilizando integración por partes con las elecciones de u y dv indicadas.

1. $\int x^2 \ln x\,dx; \quad u = \ln x,\ dv = x^2\,dx$

2. $\int \theta \cos\theta\,d\theta; \quad u = \theta,\ dv = \cos\theta\,d\theta$

3-36 Evalúe las siguientes integrales.

3. $\int x \cos 5x\,dx$

4. $\int ye^{0.2y}\,dy$

5. $\int te^{-3t}\,dt$

6. $\int (x-1)\operatorname{sen}\pi x\,dx$

7. $\int (x^2+2x)\cos x\,dx$

8. $\int t^2 \operatorname{sen}\beta t\,dt$

9. $\int \ln \sqrt[3]{x}\,dx$

10. $\int \operatorname{sen}^{-1} x\,dx$

11. $\int \arctan 4t\,dt$

12. $\int p^5 \ln p\,dp$

13. $\int t \sec^2 2t\,dt$

14. $\int s2^s\,ds$

15. $\int (\ln x)^2\,dx$

16. $\int t \operatorname{senh} mt\,dt$

17. $\int e^{2\theta} \operatorname{sen} 3\theta\,d\theta$

18. $\int e^{-\theta}\cos 2\theta\,d\theta$

19. $\int z^3 e^z\,dz$

20. $\int x \tan^2 x\,dx$

21. $\int \dfrac{xe^{2x}}{(1+2x)^2}\,dx$

22. $\int (\operatorname{arcsen} x)^2\,dx$

23. $\int_0^{1/2} x\cos\pi x\,dx$

24. $\int_0^1 (x^2+1)e^{-x}\,dx$

25. $\int_0^1 t\cosh t\,dt$

26. $\int_4^9 \dfrac{\ln y}{\sqrt{y}}\,dy$

27. $\int_1^3 r^3 \ln r\,dr$

28. $\int_0^{2\pi} t^2 \operatorname{sen} 2t\,dt$

Se requiere calculadora graficadora o computadora

1. Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

29. $\int_0^1 \frac{y}{e^{2y}}\,dy$

30. $\int_1^{\sqrt{3}} \arctan(1/x)\,dx$

31. $\int_0^{1/2} \cos^{-1}x\,dx$

32. $\int_1^2 \frac{(\ln x)^2}{x^3}\,dx$

33. $\int \cos x\,\ln(\operatorname{sen} x)\,dx$

34. $\int_0^1 \frac{r^3}{\sqrt{4+r^2}}\,dr$

35. $\int_1^2 x^4(\ln x)^2\,dx$

36. $\int_0^t e^s \operatorname{sen}(t-s)\,ds$

37-42 Empiece eligiendo una sustitución y después utilice integración por partes para evaluar las siguientes integrales.

37. $\int \cos\sqrt{x}\,dx$

38. $\int t^3 e^{-t^2}\,dt$

39. $\int_{\sqrt{\pi/2}}^{\sqrt{\pi}} \theta^3 \cos(\theta^2)\,d\theta$

40. $\int_0^{\pi} e^{\cos t} \operatorname{sen} 2t\,dt$

41. $\int x\,\ln(1+x)\,dx$

42. $\int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx$

43-46 Evalúe las siguientes integrales indefinidas. Ilustre y verifique que su respuesta sea razonable, graficando la funciones y su antiderivada (tome $C = 0$).

43. $\int xe^{-2x}\,dx$

44. $\int x^{3/2}\ln x\,dx$

45. $\int x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$

46. $\int x^2 \operatorname{sen} 2x\,dx$

---

47. a) Utilice la fórmula de reducción del ejemplo 6 para demostrar que

$$\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C$$

b) Utilice el inciso a) y la fórmula de reducción para evaluar $\int \operatorname{sen}^4 x\,dx$.

48. a) Demuestre la fórmula de reducción

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1}x \operatorname{sen} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x\,dx$$

b) Utilice el inciso a) para evaluar $\int \cos^2 x\,dx$.
c) Use los incisos a) y b) para evaluar $\int \cos^4 x\,dx$.

49. a) Utilice la fórmula de reducción del ejemplo 6 para demostrar que

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2}x\,dx$$

donde $n \geqslant 2$ es un entero.
b) Utilice el inciso a) para evaluar $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 x\,dx$ y $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^5 x\,dx$.
c) Utilice el inciso a) para demostrar que, para potencias impares del seno,

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1}x\,dx = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\cdots\cdot(2n+1)}$$

50. Demuestre que, para funciones pares del seno,

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n}x\,dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot 2n}\,\frac{\pi}{2}$$

51-54 Utilice la integración por partes para demostrar las siguientes fórmulas de reducción.

51. $\int (\ln x)^n\,dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}\,dx$

52. $\int x^n e^x\,dx = x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x\,dx$

53. $\int \tan^n x\,dx = \frac{\tan^{n-1}x}{n-1} - \int \tan^{n-2}x\,dx \quad (n \neq 1)$

54. $\int \sec^n x\,dx = \frac{\tan x\,\sec^{n-2}x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2}x\,dx \quad (n \neq 1)$

---

55. Utilice el ejercicio 51 para encontrar $\int (\ln x)^3\,dx$.

56. Use el ejercicio 52 para encontrar $\int x^4 e^x\,dx$.

57-58 Encuentre las siguientes áreas de la región limitada por las curvas dadas.

57. $y = x^2\ln x,\quad y = 4\ln x$

58. $y = x^2e^{-x},\quad y = xe^{-x}$

59-60 Utilice una gráfica para aproximar la coordenada x de los puntos de intersección de las curvas dadas. Después encuentre (aproximadamente) el área de la región limitada por las curvas.

59. $y = \operatorname{arcsen}(\frac{1}{2}x),\quad y = 2 - x^2$

60. $y = x\ln(x+1),\quad y = 3x - x^2$

61-63 Utilice el método de los cascarones cilíndricos para encontrar el volumen generado al rotar la región limitada por las curvas dadas alrededor de los ejes especificados.

61. $y = \cos(\pi x/2),\ y = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant 1$; alrededor del eje y

62. $y = e^x,\ y = e^{-x},\ x = 1$; alrededor del eje y

63. $y = e^{-x},\ y = 0,\ x = -1,\ x = 0$; alrededor de $x = 1$

---

64. Calcule el volumen generado al rotar la región limitada por las curvas $y = \ln x$, $y = 0$ y $x = 2$ alrededor de cada eje.
a) el eje y b) el eje x

65. Calcule el valor promedio de $f(x) = x \sec^2 x$ sobre el intervalo $[0, \pi/4]$.

66. Al acelerar, un cohete quema combustible de manera que su masa disminuye con el tiempo. Supongamos que la masa inicial del cohete al despegar (incluyendo su combustible) es m, el combustible se consume con una rapidez r, y los gases de escape son expulsados con velocidad constante v_e (respecto al cohete). Un modelo para la velocidad del cohete en el tiempo t está dado por la ecuación

$$v(t) = -gt - v_e \ln \frac{m - rt}{m}$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad y t no es demasiado grande. Si $g = 9.8\,\text{m/s}^2$, $m = 30\,000\,\text{kg}$, $r = 160\,\text{kg/s}$ y $v_e = 3\,000\,\text{m/s}$, encuentre la altura del cohete un minuto después del despegue.

67. Una partícula se mueve a lo largo de una línea recta a una velocidad $v(t) = t^2 e^{-t}$ metros por segundo después de t segundos. ¿Qué tan lejos llegará después de t segundos?

68. Si $f(0) = g(0) = 0$ y f'' y g'' son continuas, demuestre que

$$\int_0^a f(x)g''(x)\,dx = f(a)g'(a) - f'(a)g(a) + \int_0^a f''(x)g(x)\,dx$$

69. Suponga que $f(1) = 2, f(4) = 7, f'(1) = 5, f'(4) = 3$ y f'' es continua. Encuentre el valor de $\int_1^4 xf''(x)\,dx$.

70. a) Utilice integración por partes para demostrar que

$$\int f(x)\,dx = xf(x) - \int xf'(x)\,dx$$

b) Si f y g son funciones inversas y f' es continua, demuestre que

$$\int_a^b f(x)\,dx = bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\,dy$$

[*Sugerencia:* utilice el inciso a) y haga la sustitución $y = f(x)$.]

c) En el caso donde f y g son funciones positivas y $b > a > 0$, dibuje un diagrama para dar una interpretación geométrica del inciso b).

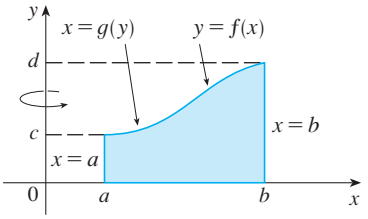
d) Utilice el inciso b) para evaluar $\int_1^e \ln x\,dx$.

71. Utilizando cascarones cilíndricos, obtuvimos la fórmula 6.3.2, $V = \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx$, pero ahora podemos utilizar integración por partes para demostrarla por medio del método de las rebanadas de la sección 6.2, al menos para el caso en el que f es uno a uno y, por tanto, tiene una función inversa g. Recurra a la figura para demostrar que

$$V = \pi b^2 d - \pi a^2 c - \int_c^d \pi[g(y)]^2\,dy$$

Haga la sustitución $y = f(x)$ y después utilice integración por partes sobre la integral resultante, para demostrar que

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx$$



72. Sea $I_n = \int_0^{\pi/2} \text{sen}^n x\,dx$.

a) Demuestre que $I_{2n+2} \leq I_{2n+1} \leq I_{2n}$.

b) Utilice el ejercicio 50 para demostrar que

$$\frac{I_{2n+2}}{I_{2n}} = \frac{2n+1}{2n+2}$$

c) Use los incisos a) y b) para demostrar que

$$\frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leq 1$$

y deducir que $\lim_{n\to\infty} I_{2n+1}/I_{2n} = 1$.

d) Utilice el inciso c) y los ejercicios 49 y 50 para demostrar que

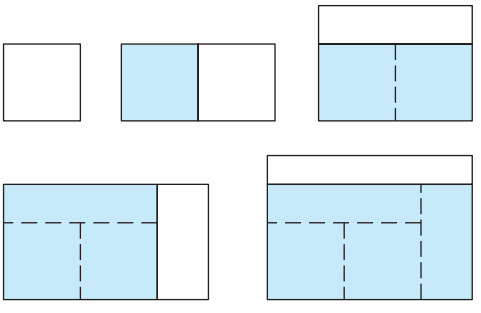
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$$

Usualmente, esta fórmula se expresa como el producto infinito

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots$$

y se conoce como el *producto de Wallis*.

e) Construimos rectángulos como los siguientes: empezamos con un cuadrado de área 1 y le adjuntamos alternativamente rectángulos de área 1 junto al rectángulo anterior o encima de éste (véase la figura). Encuentre el límite de las razones del ancho y la altura de estos rectángulos.



7.2 Integrales trigonométricas

En esta sección utilizaremos identidades trigonométricas para integrar ciertas combinaciones de funciones trigonométricas. Empezamos con las potencias del seno y el coseno.

EJEMPLO 1 Evalúe $\int \cos^3 x\, dx$.

SOLUCIÓN No es útil sustituir simplemente $u = \cos x$, ya que entonces $du = -\operatorname{sen} x\, dx$. Para integrar potencias del coseno, necesitamos un sen x como factor extra. Del mismo modo, una potencia del seno requiere un cos x como factor adicional. Debido a esto, podemos separar un factor coseno y convertir el factor restante $\cos^2 x$ en una expresión que involucre al seno, utilizando la identidad $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$:

$$\cos^3 x = \cos^2 x \cdot \cos x = (1 - \operatorname{sen}^2 x)\cos x$$

Con esto podemos evaluar la integral sustituyendo $u = \operatorname{sen} x$, $du = \cos x\, dx$ y, así

$$\int \cos^3 x\, dx = \int \cos^2 x \cdot \cos x\, dx = \int (1 - \operatorname{sen}^2 x)\cos x\, dx$$

$$= \int (1 - u^2)\, du = u - \tfrac{1}{3}u^3 + C$$

$$= \operatorname{sen} x - \tfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C$$

En general, intentamos escribir una integral que involucra potencias de seno y coseno en una forma en la que haya sólo un factor seno (y el resto de la expresión en términos del coseno) o sólo un factor coseno (y el resto de la expresión en términos del seno). La identidad $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ posibilita esta conversión entre potencias pares del seno y el coseno, una en términos de otra.

V EJEMPLO 2 Encuentre $\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x\, dx$.

SOLUCIÓN Podríamos convertir $\cos^2 x$ a $1 - \operatorname{sen}^2 x$, pero se tendría una expresión en términos de sen x sin ningún factor extra cos x. En cambio, si separamos un solo factor seno y reescribimos el factor restante $\operatorname{sen}^4 x$ en términos de cos x:

$$\operatorname{sen}^5 x \cos^2 x = (\operatorname{sen}^2 x)^2 \cos^2 x \operatorname{sen} x = (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x \operatorname{sen} x$$

En la figura 1 se muestra la gráfica del integrando $\operatorname{sen}^5 x \cos^2 x$ del ejemplo 2 y su integral indefinida (con $C = 0$). ¿Cuál es cuál?

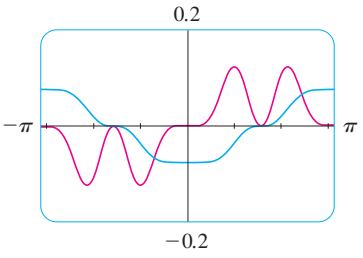


FIGURA 1

Sustituyendo $u = \cos x$, tenemos $du = -\operatorname{sen} x\, dx$, así que

$$\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x\, dx = \int (\operatorname{sen}^2 x)^2 \cos^2 x \operatorname{sen} x\, dx$$

$$= \int (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x \operatorname{sen} x\, dx$$

$$= \int (1 - u^2)^2 u^2 (-du) = -\int (u^2 - 2u^4 + u^6)\, du$$

$$= -\left(\frac{u^3}{3} - 2\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7}\right) + C$$

$$= -\tfrac{1}{3}\cos^3 x + \tfrac{2}{5}\cos^5 x - \tfrac{1}{7}\cos^7 x + C$$

En los ejemplos anteriores, una potencia impar del seno o el coseno nos permiten separar un factor y el resto convertirlo en una potencia par. Si el integrando contiene potencias pares del seno y el coseno, esta estrategia falla. En este caso, podemos aprovechar las siguientes identidades del ángulo medio (veánse las ecuaciones 17b y 17a en el apéndice D):

$$\operatorname{sen}^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x) \qquad \text{y} \qquad \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

V EJEMPLO 3 Evalúe $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x\, dx$.

El ejemplo 3 muestra que el área de la región en la figura 2 es $\pi/2$.

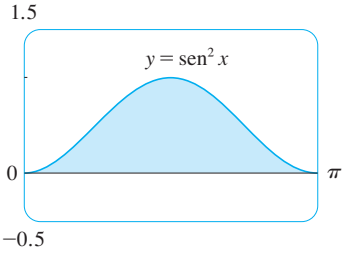


FIGURA 2

SOLUCIÓN Si escribimos $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$, no se facilita la evaluación de la integral. Sin embargo, utilizando la fórmula del ángulo medio para $\operatorname{sen}^2 x$, tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x\, dx &= \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} (1 - \cos 2x)\, dx \\ &= \left[\tfrac{1}{2}\left(x - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right)\right]_0^{\pi} \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\pi - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2\pi\right) - \tfrac{1}{2}\left(0 - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 0\right) = \tfrac{1}{2}\pi\end{aligned}$$

Observe que hicimos mentalmente la sustitución $u = 2x$ cuando integramos $\cos 2x$. En el ejercicio 47 de la sección 7.1, vimos otro método para evaluar esta integral.

EJEMPLO 4 Encuentre $\int \operatorname{sen}^4 x\, dx$.

SOLUCIÓN Esta integral podría evaluarse utilizando la fórmula de reducción para $\int \operatorname{sen}^n x\, dx$ (ecuación 7.1.7) junto con el ejemplo 3 (como en el ejercicio 47 de la sección 7.1), pero un mejor método es expresar $\operatorname{sen}^4 x = (\operatorname{sen}^2 x)^2$ y utilizar la fórmula del ángulo medio:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^4 x\, dx &= \int (\operatorname{sen}^2 x)^2\, dx \\ &= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 dx \\ &= \tfrac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)\, dx\end{aligned}$$

Ya que vuelve a aparecer $\cos^2 2x$, usamos otra vez la fórmula del ángulo medio

$$\cos^2 2x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 4x)$$

lo cual da

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^4 x\, dx &= \tfrac{1}{4}\int \left[1 - 2\cos 2x + \tfrac{1}{2}(1 + \cos 4x)\right] dx \\ &= \tfrac{1}{4}\int \left(\tfrac{3}{2} - 2\cos 2x + \tfrac{1}{2}\cos 4x\right) dx \\ &= \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{3}{2}x - \operatorname{sen} 2x + \tfrac{1}{8}\operatorname{sen} 4x\right) + C\end{aligned}$$

Para resumir, proporcionamos una guía para evaluar integrales de la forma $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx$, donde $m \geqslant 0$ y $n \geqslant 0$ son números enteros.

Estrategia para la evaluación de $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx$

a) Si la potencia del coseno es impar ($n = 2k + 1$), extraemos un factor coseno y utilizamos $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ para expresar los factores restantes en términos del seno:

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^{2k+1} x\, dx = \int \operatorname{sen}^m x\, (\cos^2 x)^k \cos x\, dx$$
$$= \int \operatorname{sen}^m x\, (1 - \operatorname{sen}^2 x)^k \cos x\, dx$$

Después sustituimos $u = \operatorname{sen} x$.

b) Si la potencia del seno es impar ($m = 2k + 1$), extraemos un factor seno y usamos $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ para expresar los factores restantes en términos del coseno:

$$\int \operatorname{sen}^{2k+1} x \cos^n x\, dx = \int (\operatorname{sen}^2 x)^k \cos^n x \operatorname{sen} x\, dx$$
$$= \int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x \operatorname{sen} x\, dx$$

Después sustituimos $u = \cos x$. [Observe que si la potencia de ambos, seno y coseno, es impar, puede utilizarse a) o b).]

c) Si las potencias de ambos, seno y coseno, son pares, utilizamos las identidades del ángulo medio

$$\operatorname{sen}^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x) \qquad \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

Algunas veces es útil utilizar la identidad

$$\operatorname{sen} x \cos x = \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$$

Podemos aplicar una estrategia similar para evaluar integrales de la forma $\int \tan^m x \sec^n x\, dx$. Dado que $(d/dx) \tan x = \sec^2 x$, podemos separar un factor $\sec^2 x$ y convertir la potencia restante (par) de la secante a una expresión que involucra la tangente, utilizando la identidad $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$. O bien, puesto que $(d/dx) \sec x = \sec x \tan x$, podemos separar un factor $\sec x \tan x$ y convertir la potencia restante (par) de la tangente a secante.

V EJEMPLO 5 Evalúe $\int \tan^6 x \sec^4 x\, dx$.

SOLUCIÓN Si separamos un factor $\sec^2 x$, podemos expresar el factor restante $\sec^2 x$ en términos de la tangente utilizando la identidad $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$. Entonces, podemos evaluar la integral sustituyendo $u = \tan x$ y $du = \sec^2 x\, dx$:

$$\int \tan^6 x \sec^4 x\, dx = \int \tan^6 x \sec^2 x \sec^2 x\, dx$$
$$= \int \tan^6 x\, (1 + \tan^2 x) \sec^2 x\, dx$$
$$= \int u^6 (1 + u^2)\, du = \int (u^6 + u^8)\, du$$
$$= \frac{u^7}{7} + \frac{u^9}{9} + C$$
$$= \tfrac{1}{7} \tan^7 x + \tfrac{1}{9} \tan^9 x + C$$

EJEMPLO 6 Encuentre $\int \tan^5\theta \sec^7\theta \, d\theta$.

SOLUCIÓN Si separamos un factor $\sec^2\theta$, como en el ejemplo anterior, nos queda un factor $\sec^5\theta$ que no se convierte con facilidad a tangente. Sin embargo, si separamos un factor $\sec\theta \tan\theta$, podemos convertir la potencia restante de la tangente en una expresión que involucra sólo a la secante, por medio de la identidad $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$. Así, la integral puede evaluarse sustituyendo $u = \sec\theta$, de modo que $du = \sec\theta \tan\theta \, d\theta$:

$$\begin{aligned}
\int \tan^5\theta \sec^7\theta \, d\theta &= \int \tan^4\theta \sec^6\theta \sec\theta \tan\theta \, d\theta \\
&= \int (\sec^2\theta - 1)^2 \sec^6\theta \sec\theta \tan\theta \, d\theta \\
&= \int (u^2 - 1)^2 u^6 \, du \\
&= \int (u^{10} - 2u^8 + u^6) \, du \\
&= \frac{u^{11}}{11} - 2\frac{u^9}{9} + \frac{u^7}{7} + C \\
&= \tfrac{1}{11}\sec^{11}\theta - \tfrac{2}{9}\sec^9\theta + \tfrac{1}{7}\sec^7\theta + C
\end{aligned}$$

Los ejemplos anteriores muestran estrategias para evaluar integrales de la forma $\int \tan^m x \sec^n x \, dx$ para los dos casos que aquí se resumen.

Estrategia para la evaluación de $\int \tan^m x \sec^n x \, dx$

a) Si la potencia de la secante es par ($n = 2k$, $k \geqslant 2$), extraemos un factor $\sec^2 x$ y utilizamos $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ para expresar los factores restantes en términos de $\tan x$:

$$\begin{aligned}
\int \tan^m x \sec^{2k} x \, dx &= \int \tan^m x (\sec^2 x)^{k-1} \sec^2 x \, dx \\
&= \int \tan^m x (1 + \tan^2 x)^{k-1} \sec^2 x \, dx
\end{aligned}$$

Después sustituimos $u = \tan x$.

b) Si la potencia de la tangente es impar ($m = 2k + 1$), extraemos un factor $\sec x \tan x$ y utilizamos $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ para expresar los factores restantes en términos de $\sec x$:

$$\begin{aligned}
\int \tan^{2k+1} x \sec^n x \, dx &= \int (\tan^2 x)^k \sec^{n-1} x \sec x \tan x \, dx \\
&= \int (\sec^2 x - 1)^k \sec^{n-1} x \sec x \tan x \, dx
\end{aligned}$$

Después sustituimos $u = \sec x$.

Para otros casos, no hay guías claras. Podemos necesitar identidades, integración por partes y, ocasionalmente, un poco de ingenio. Algunas veces será necesario integrar $\tan x$

utilizando la fórmula establecida en (5.5.5):

$$\int \tan x\,dx = \ln|\sec x| + C$$

También necesitamos la integral indefinida de la secante:

La fórmula 1 fue descubierta por James Gregory en 1668 (véase su biografía en la página 199). Gregory utilizó esta fórmula para resolver un problema en la elaboración de tablas náuticas.

1
$$\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

Podríamos verificar la fórmula 1 derivando el lado derecho, o como sigue. Primero multiplicamos el numerador y el denominador por $\sec x + \tan x$:

$$\int \sec x\,dx = \int \sec x \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}\,dx$$

$$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}\,dx$$

Si sustituimos $u = \sec x + \tan x$, entonces $du = (\sec x \tan x + \sec^2 x)\,dx$, por lo que la integral resulta $\int (1/u)\,du = \ln|u| + C$. Así, tenemos

$$\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

EJEMPLO 7 Encuentre $\int \tan^3 x\,dx$.

SOLUCIÓN Aquí sólo aparece $\tan x$, así que utilizamos $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ para reescribir un factor $\tan^2 x$ en términos de $\sec^2 x$:

$$\int \tan^3 x\,dx = \int \tan x \tan^2 x\,dx = \int \tan x\,(\sec^2 x - 1)\,dx$$

$$= \int \tan x \sec^2 x\,dx - \int \tan x\,dx$$

$$= \frac{\tan^2 x}{2} - \ln|\sec x| + C$$

En la primera integral sustituimos mentalmente $u = \tan x$, de modo que $du = \sec^2 x\,dx$.

Si aparece una potencia par de la tangente con una potencia impar de la secante, es útil expresar el integrando completamente en términos de la sec x. Las potencias de la sec x pueden requerir integración por partes, como se ve en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 8 Encuentre $\int \sec^3 x\,dx$.

SOLUCIÓN Aquí, podemos integrar por partes con

$$u = \sec x \qquad dv = \sec^2 x\,dx$$
$$du = \sec x \tan x\,dx \qquad v = \tan x$$

$$\text{Entonces } \int \sec^3 x\,dx = \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x\,dx$$
$$= \sec x \tan x - \int \sec x\,(\sec^2 x - 1)\,dx$$
$$= \sec x \tan x - \int \sec^3 x\,dx + \int \sec x\,dx$$

Utilizando la fórmula 1 y resolviendo para la integral requerida, obtenemos

$$\int \sec^3 x\,dx = \tfrac{1}{2}\big(\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|\big) + C$$

Integrales como la del ejemplo anterior podrían parecer muy complejas, pero ocurren con frecuencia en aplicaciones de la integración, como se verá en el capítulo 8. Integrales en la forma $\int \cot^m x \csc^n x\,dx$ pueden determinarse mediante métodos similares utilizando la identidad $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$.

Finalmente, podemos hacer uso de otro conjunto de identidades trigonométricas:

2 Para evaluar las integrales a) $\int \operatorname{sen} mx \cos nx\,dx$, b) $\int \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\,dx$ o c) $\int \cos mx \cos nx\,dx$, utilizamos la identidad correspondiente:

Estas identidades producto se discuten en el apéndice D.

a) $\operatorname{sen} A \cos B = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(A - B) + \operatorname{sen}(A + B)]$

b) $\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \tfrac{1}{2}[\cos(A - B) - \cos(A + B)]$

c) $\cos A \cos B = \tfrac{1}{2}[\cos(A - B) + \cos(A + B)]$

EJEMPLO 9 Evalúe $\int \operatorname{sen} 4x \cos 5x\,dx$.

SOLUCIÓN Esta integral podría evaluarse utilizando integración por partes, pero es más fácil utilizar la identidad en la ecuación 2a) como sigue:

$$\int \operatorname{sen} 4x \cos 5x\,dx = \int \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(-x) + \operatorname{sen} 9x]\,dx$$
$$= \tfrac{1}{2}\int (-\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 9x)\,dx$$
$$= \tfrac{1}{2}\big(\cos x - \tfrac{1}{9}\cos 9x\big) + C$$

7.2 Ejercicios

1-49 Evalúe las siguientes integrales.

1. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x\,dx$

2. $\int \operatorname{sen}^3\theta \cos^4\theta\,d\theta$

3. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^7\theta \cos^5\theta\,d\theta$

4. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^5 x\,dx$

5. $\int \operatorname{sen}^2(\pi x) \cos^5(\pi x)\,dx$

6. $\int \dfrac{\operatorname{sen}^3(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$

7. $\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\,d\theta$

8. $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(\tfrac{1}{3}\theta)\,d\theta$

9. $\int_0^{\pi} \cos^4(2t)\,dt$

10. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 t \cos^4 t\,dt$

11. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\,dx$

12. $\int_0^{\pi/2} (2 - \operatorname{sen}\theta)^2\,d\theta$

13. $\int t \operatorname{sen}^2 t\,dt$

14. $\int \cos\theta \cos^5(\operatorname{sen}\theta)\,d\theta$

15. $\int \dfrac{\cos^5\alpha}{\sqrt{\operatorname{sen}\alpha}}\,d\alpha$

16. $\int x \operatorname{sen}^3 x\,dx$

17. $\int \cos^2 x \tan^3 x\, dx$

18. $\int \cot^5\theta \operatorname{sen}^4\theta\, d\theta$

19. $\int \dfrac{\cos x + \operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} x}\, dx$

20. $\int \cos^2 x \operatorname{sen} 2x\, dx$

21. $\int \tan x \sec^3 x\, dx$

22. $\int \tan^2\theta \sec^4\theta\, d\theta$

23. $\int \tan^2 x\, dx$

24. $\int (\tan^2 x + \tan^4 x)\, dx$

25. $\int \tan^4 x \sec^6 x\, dx$

26. $\int_0^{\pi/4} \sec^4\theta \tan^4\theta\, d\theta$

27. $\int_0^{\pi/3} \tan^5 x \sec^4 x\, dx$

28. $\int \tan^5 x \sec^3 x\, dx$

29. $\int \tan^3 x \sec x\, dx$

30. $\int_0^{\pi/4} \tan^4 t\, dt$

31. $\int \tan^5 x\, dx$

32. $\int \tan^2 x \sec x\, dx$

33. $\int x \sec x \tan x\, dx$

34. $\int \dfrac{\operatorname{sen}\phi}{\cos^3\phi}\, d\phi$

35. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cot^2 x\, dx$

36. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot^3 x\, dx$

37. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot^5\phi \csc^3\phi\, d\phi$

38. $\int \csc^4 x \cot^6 x\, dx$

39. $\int \csc x\, dx$

40. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \csc^3 x\, dx$

41. $\int \operatorname{sen} 8x \cos 5x\, dx$

42. $\int \cos \pi x \cos 4\pi x\, dx$

43. $\int \operatorname{sen} 5\theta \operatorname{sen}\theta\, d\theta$

44. $\int \dfrac{\cos x + \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} 2x}\, dx$

45. $\int_0^{\pi/6} \sqrt{1 + \cos 2x}\, dx$

46. $\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 - \cos 4\theta}\, d\theta$

47. $\int \dfrac{1 - \tan^2 x}{\sec^2 x}\, dx$

48. $\int \dfrac{dx}{\cos x - 1}$

49. $\int x \tan^2 x\, dx$

50. Si $\int_0^{\pi/4} \tan^6 x \sec x\, dx = I$, exprese el valor de $\int_0^{\pi/4} \tan^8 x \sec x\, dx$. en términos de I.

51–54 Evalúe las siguientes integrales indefinidas. Ilustre y verifique que su respuesta es razonable, graficando el integrando y su antiderivada (tome $C = 0$).

51. $\int x \operatorname{sen}^2(x^2)\, dx$

52. $\int \operatorname{sen}^5 x \cos^3 x\, dx$

53. $\int \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 6x\, dx$

54. $\int \sec^4 \dfrac{x}{2}\, dx$

55. Encuentre el valor promedio de la función $f(x) = \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x$ sobre el intervalo $[-\pi, \pi]$.

56. Evalúe $\int \operatorname{sen} x \cos x\, dx$ por cuatro métodos:
a) la sustitución $u = \cos x$
b) la sustitución $u = \operatorname{sen} x$
c) la identidad $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$
d) integración por partes
Explique las aparentes diferencias en las respuestas.

57–58 Encuentre el área de la región limitada por las curvas dadas.

57. $y = \operatorname{sen}^2 x, \quad y = \cos^2 x, \quad -\pi/4 \leq x \leq \pi/4$

58. $y = \operatorname{sen}^3 x, \quad y = \cos^3 x, \quad \pi/4 \leq x \leq 5\pi/4$

59–60 Utilice la gráfica del integrando para intuir el valor de la integral. Después use el método de esta sección para probar que su intuición es correcta.

59. $\int_0^{2\pi} \cos^3 x\, dx$

60. $\int_0^2 \operatorname{sen} 2\pi x \cos 5\pi x\, dx$

61–64 Encuentre el volumen obtenido al rotar la región limitada por las curvas dadas alrededor del eje especificado.

61. $y = \operatorname{sen} x, \ y = 0, \ \pi/2 \leq x \leq \pi$; alrededor del eje x

62. $y = \operatorname{sen}^2 x, \ y = 0, \ 0 \leq x \leq \pi$; alrededor del eje x

63. $y = \operatorname{sen} x, \ y = \cos x, \ 0 \leq x \leq \pi/4$; alrededor de $y = 1$

64. $y = \sec x, \ y = \cos x, \ 0 \leq x \leq \pi/3$; alrededor de $y = -1$

65. Una partícula se mueve sobre una línea recta de acuerdo con la función velocidad $v(t) = \operatorname{sen} \omega t \cos^2 \omega t$. Encuentre su posición $s = f(t)$ si $f(0) = 0$.

66. La electricidad doméstica se suministra en la forma de corriente alterna que varía de $155\,V$ a $-155\,V$ con una frecuencia de 60 ciclos por segundo (Hz). El voltaje está dado por la ecuación

$$E(t) = 155 \operatorname{sen}(120\pi t)$$

donde t es el tiempo en segundos. Los voltímetros leen el voltaje RMS (media cuadrática), que es la raíz cuadrada del valor promedio de $[E(t)]^2$ sobre un ciclo.
a) Calcule el voltaje RMS de la corriente doméstica.
b) Muchas estufas eléctricas requieren un voltaje RMS de $220\,V$. Encuentre la correspondiente amplitud A necesaria para el voltaje $E(t) = A \operatorname{sen}(120\pi t)$.

67-69 Demuestre las siguientes fórmulas, donde m y n son enteros positivos.

67. $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \cos nx\, dx = 0$

68. $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \pi & \text{si } m = n \end{cases}$

69. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \pi & \text{si } m = n \end{cases}$

70. Una *serie finita de Fourier* está dada por la suma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \operatorname{sen} nx$$
$$= a_1 \operatorname{sen} x + a_2 \operatorname{sen} 2x + \cdots + a_N \operatorname{sen} Nx$$

Demuestre que el m-ésimo coeficiente a_m está dado por la fórmula

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} mx\, dx$$

7.3 Sustitución trigonométrica

En la determinación del área de un círculo o una elipse, surge una integral de la forma $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$, donde $a > 0$. Si fuese $\int x\sqrt{a^2 - x^2}\, dx$, la sustitución $u = a^2 - x^2$ sería eficaz; pero, tal como está, $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ es más difícil. Si cambiamos la variable de x a θ por la sustitución $x = a \operatorname{sen} \theta$, entonces la identidad $1 - \operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta$ nos permite eliminar el signo de la raíz porque

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{a^2(1 - \operatorname{sen}^2\theta)} = \sqrt{a^2 \cos^2\theta} = a\,|\cos\theta|$$

Observe la diferencia entre la sustitución $u = a^2 - x^2$ (en la que la nueva variable es una función de la variable anterior) y la sustitución $x = a \operatorname{sen} \theta$ (la variable anterior es una función de la nueva).

En general, podemos hacer una sustitución de la forma $x = g(t)$ al usar a la inversa la regla de sustitución. A fin de simplificar los cálculos, suponemos que g tiene una función inversa; es decir, g es uno a uno. En este caso, si se reemplazan u por x, y x por t en la regla de sustitución (ecuación 5.5.4), obtenemos

$$\int f(x)\, dx = \int f(g(t))g'(t)\, dt$$

Este tipo de sustitución se llama *sustitución inversa*.

Puede hacerse la sustitución inversa $x = a \operatorname{sen} \theta$ siempre que ésta defina una función uno a uno. Esto puede llevarse a cabo restringiendo θ al intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$.

En la siguiente tabla se listan las sustituciones trigonométricas que son eficaces para las expresiones con radicales debido a las identidades trigonométricas especificadas. En cada caso, la restricción sobre θ se impone para asegurar que la función que define la sustitución es uno a uno. (Éstos son los mismos intervalos empleados en la sección 1.6 al definir las funciones inversas.)

Tabla de sustituciones trigonométricas

Expresión	Sustitución	Identidad
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \operatorname{sen} \theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$	$1 - \operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \tan \theta, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$	$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec \theta, \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ o $\pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$	$\sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$

V EJEMPLO 1 Evalúe $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx$.

SOLUCIÓN Sea $x = 3\,\text{sen}\,\theta$, donde $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Entonces $dx = 3\cos\theta\,d\theta$ y

$$\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-9\,\text{sen}^2\theta} = \sqrt{9\cos^2\theta} = 3|\cos\theta| = 3\cos\theta$$

(Observe que $\theta \geqslant 0$ porque $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$.) Así, la regla de la sustitución inversa da

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx &= \int \frac{3\cos\theta}{9\,\text{sen}^2\theta}\,3\cos\theta\,d\theta \\ &= \int \frac{\cos^2\theta}{\text{sen}^2\theta}\,d\theta = \int \cot^2\theta\,d\theta \\ &= \int (\csc^2\theta - 1)\,d\theta \\ &= -\cot\theta - \theta + C\end{aligned}$$

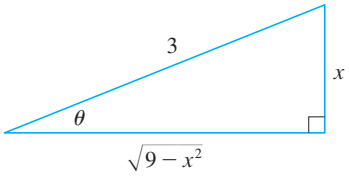


FIGURA 1
$\text{sen}\,\theta = \frac{x}{3}$

Puesto que ésta es una integral indefinida, debemos regresar a la variable original x. Esto puede hacerse ya sea por medio de identidades trigonométricas para expresar $\cot\theta$ en términos de $\text{sen}\,\theta = x/3$ o dibujando un diagrama como el de la figura 1, donde θ se interpreta como un ángulo de un triángulo rectángulo. Ya que $\theta = x/3$, denotamos x al lado opuesto y a 3 como la hipotenusa. Entonces el teorema de Pitágoras da la longitud del lado adyacente $\sqrt{9-x^2}$, así que podemos simplificar leyendo simplemente el valor de $\cot\theta$ en la figura como:

$$\cot\theta = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$$

(Aunque $\theta > 0$ en el diagrama, esta expresión para $\cot\theta$ es válida aun cuando $\theta < 0$.) Dado que $\text{sen}\,\theta = x/3$, tenemos $\theta = \text{sen}^{-1}(x/3)$, así que

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - \text{sen}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

V EJEMPLO 2 Encuentre el área encerrada por la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

SOLUCIÓN Resolviendo la ecuación para y, obtenemos

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2-x^2}{a^2} \quad \text{o bien} \quad y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

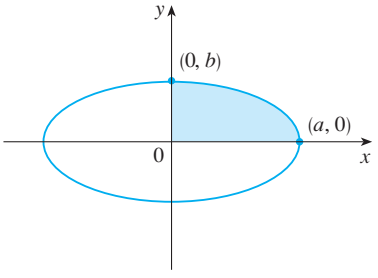


FIGURA 2
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Ya que la elipse es simétrica respecto a ambos ejes, el área total A es cuatro veces el área en el primer cuadrante (figura 2). La parte de la elipse en el primer cuadrante está dada por la función

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \qquad 0 \leqslant x \leqslant a$$

y, por tanto

$$\tfrac{1}{4}A = \int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

Para evaluar esta integral sustituimos $x = a \operatorname{sen} \theta$. Entonces $dx = a \cos \theta \, d\theta$. Para cambiar los límites de integración observamos que, cuando $x = 0$, $\operatorname{sen} \theta = 0$; así que $\theta = 0$; cuando $x = a$, $\operatorname{sen} \theta = 1$, así que $\theta = \pi/2$. Además,

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{a^2 \cos^2\theta} = a\,|\cos \theta| = a \cos \theta$$

ya que $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Por tanto,

$$\begin{aligned} A &= 4\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = 4\frac{b}{a}\int_0^{\pi/2} a \cos\theta \cdot a \cos\theta \, d\theta \\ &= 4ab\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \, d\theta = 4ab\int_0^{\pi/2} \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)\, d\theta \\ &= 2ab\left[\theta + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\right]_0^{\pi/2} = 2ab\left(\frac{\pi}{2} + 0 - 0\right) = \pi ab \end{aligned}$$

Hemos demostrado que el área de una elipse con semiejes a y b es πab. En particular, tomando $a = b = r$, se demuestra la famosa fórmula del área de un círculo de radio r, πr^2.

NOTA Dado que la del ejemplo 2 es una integral definida, cambiamos los límites de integración, y no tuvimos que regresar a la variable x.

V EJEMPLO 3 Encuentre $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2 + 4}}\, dx$.

SOLUCIÓN Sea $x = 2 \tan \theta$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. Entonces $dx = 2 \sec^2\theta \, d\theta$ y

$$\sqrt{x^2 + 4} = \sqrt{4(\tan^2\theta + 1)} = \sqrt{4 \sec^2\theta} = 2\,|\sec \theta| = 2 \sec \theta$$

Así, tenemos

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 + 4}} = \int \frac{2 \sec^2\theta \, d\theta}{4 \tan^2\theta \cdot 2 \sec \theta} = \frac{1}{4}\int \frac{\sec \theta}{\tan^2\theta}\, d\theta$$

Para evaluar esta integral trigonométrica, ponemos todo en términos de sen θ y cos θ:

$$\frac{\sec \theta}{\tan^2\theta} = \frac{1}{\cos \theta} \cdot \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen}^2\theta}$$

Por tanto, haciendo la sustitución $u = \operatorname{sen} \theta$, tenemos

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 + 4}} &= \frac{1}{4}\int \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta = \frac{1}{4}\int \frac{du}{u^2} \\ &= \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{u}\right) + C = -\frac{1}{4 \operatorname{sen} \theta} + C \\ &= -\frac{\csc \theta}{4} + C \end{aligned}$$

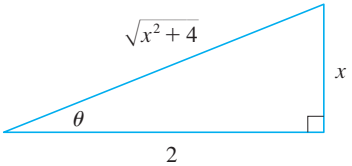


FIGURA 3
$\tan \theta = \dfrac{x}{2}$

Utilizamos la figura 3 para determinar que $\csc \theta = \sqrt{x^2 + 4}/x$ y, por tanto,

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 + 4}} = -\frac{\sqrt{x^2 + 4}}{4x} + C$$

EJEMPLO 4 Encuentre $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$.

SOLUCIÓN Aquí podría utilizarse la sustitución trigonométrica $x = 2\tan\theta$ (como en el ejemplo 3), pero es más simple la sustitución directa $u = x^2 + 4$, porque $du = 2x\,dx$, y

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \sqrt{u} + C = \sqrt{x^2+4} + C$$

NOTA En el ejemplo 4 se ilustra el hecho de que, aun cuando sean posibles las sustituciones trigonométricas, no necesariamente dan la solución más fácil. Por eso, hay que buscar la opción de solución más sencilla.

EJEMPLO 5 Evalúe $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$, donde $a > 0$.

SOLUCIÓN 1 Sea $x = a\,\text{sen}\,\theta$, donde $0 < \theta < \pi/2$ o bien $\pi < \theta < 3\pi/2$. Entonces $dx = a\sec\theta\tan\theta\,d\theta$ y

$$\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2(\sec^2\theta - 1)} = \sqrt{a^2\tan^2\theta} = a\,|\tan\theta| = a\tan\theta$$

Por tanto,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{a\sec\theta\tan\theta}{a\tan\theta}\,d\theta = \int \sec\theta\,d\theta = \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C$$

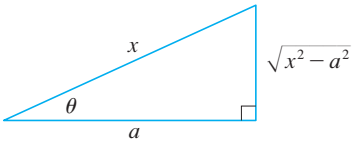


FIGURA 4
$\sec\theta = \frac{x}{a}$

El triángulo de la figura 4 da $\tan\theta = \sqrt{x^2-a^2}/a$, así que tenemos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| + C$$
$$= \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| - \ln a + C$$

Escribiendo $C_1 = C - \ln a$, tenemos

1 $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C_1$$

SOLUCIÓN 2 Para $x > 0$, también puede utilizarse la sustitución hiperbólica $x = a\cosh t$. Con la identidad $\cosh^2 y - \text{senh}^2\,y = 1$, tenemos

$$\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2(\cosh^2 t - 1)} = \sqrt{a^2\,\text{senh}^2 t} = a\,\text{senh}\,t$$

Dado que $dx = a\,\text{senh}\,t\,dt$, obtenemos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{a\,\text{senh}\,t\,dt}{a\,\text{senh}\,t} = \int dt = t + C$$

Puesto que $\cosh t = x/a$, tenemos $t = \cosh^{-1}(x/a)$ y

2 $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Aunque las fórmulas 1 y 2 parecen muy diferentes, en realidad son equivalentes por la fórmula 3.11.4.

NOTA Como se ve en el ejemplo 5, las sustituciones hiperbólicas pueden utilizarse en vez de las sustituciones trigonométricas y, algunas veces, conducen a respuestas más simples; pero por lo general, se utilizan trigonométricas porque sus identidades son más conocidas que las hiperbólicas.

Como se muestra en el ejemplo 6, a veces es buena idea utilizar la sustitución trigonométrica cuando se presenta $(x^2 + a^2)^{n/2}$ en una integral, donde n es cualquier entero. Lo mismo es verdadero cuando aparece $(a^2 - x^2)^{n/2}$ o $(x^2 - a^2)^{n/2}$.

EJEMPLO 6 Encuentre $\int_0^{3\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{(4x^2 + 9)^{3/2}}\, dx$.

SOLUCIÓN Primero observe que $(4x^2 + 9)^{3/2} = \left(\sqrt{4x^2 + 9}\right)^3$, así que lo adecuado es la sustitución trigonométrica. Aunque $\sqrt{4x^2 + 9}$ no es realmente una de las expresiones de la tabla de sustituciones trigonométricas, se convierte en una de ellas si hacemos la sustitución preliminar $u = 2x$. Cuando combinamos esto con la sustitución de la tangente, se tiene $x = \frac{3}{2}\tan\theta$, lo cual da $dx = \frac{3}{2}\sec^2\theta\, d\theta$ y

$$\sqrt{4x^2 + 9} = \sqrt{9\tan^2\theta + 9} = 3\sec\theta$$

Cuando $x = 0$, $\tan\theta = 0$, así que $\theta = 0$; cuando $x = 3\sqrt{3}/2$, $\tan\theta = \sqrt{3}$, así que $\theta = \pi/3$.

$$\begin{aligned}\int_0^{3\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{(4x^2 + 9)^{3/2}}\, dx &= \int_0^{\pi/3} \frac{\frac{27}{8}\tan^3\theta}{27\sec^3\theta}\,\frac{3}{2}\sec^2\theta\, d\theta \\ &= \frac{3}{16}\int_0^{\pi/3} \frac{\tan^3\theta}{\sec\theta}\, d\theta = \frac{3}{16}\int_0^{\pi/3} \frac{\operatorname{sen}^3\theta}{\cos^2\theta}\, d\theta \\ &= \frac{3}{16}\int_0^{\pi/3} \frac{1 - \cos^2\theta}{\cos^2\theta}\operatorname{sen}\theta\, d\theta\end{aligned}$$

Ahora sustituimos $u = \cos\theta$, así que $du = -\operatorname{sen}\theta\, d\theta$. Cuando $\theta = 0$, $u = 1$; cuando $\theta = \pi/3$, $u = \frac{1}{2}$; por tanto,

$$\begin{aligned}\int_0^{3\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{(4x^2 + 9)^{3/2}}\, dx &= -\frac{3}{16}\int_1^{1/2} \frac{1 - u^2}{u^2}\, du \\ &= \frac{3}{16}\int_1^{1/2} (1 - u^{-2})\, du = \frac{3}{16}\left[u + \frac{1}{u}\right]_1^{1/2} \\ &= \frac{3}{16}\left[\left(\tfrac{1}{2} + 2\right) - (1 + 1)\right] = \frac{3}{32}\end{aligned}$$

EJEMPLO 7 Evalúe $\int \frac{x}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}\, dx$.

SOLUCIÓN Podemos transformar el integrando en una función para la cual es apropiada la sustitución trigonométrica, completando el cuadrado bajo el signo de raíz:

$$\begin{aligned}3 - 2x - x^2 &= 3 - (x^2 + 2x) = 3 + 1 - (x^2 + 2x + 1) \\ &= 4 - (x + 1)^2\end{aligned}$$

Esto sugiere que hagamos la sustitución $u = x + 1$. Entonces $du = dx$ y $x = u - 1$, así que

$$\int \frac{x}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}\, dx = \int \frac{u - 1}{\sqrt{4 - u^2}}\, du$$

La figura 5 muestra la gráfica del integrando en el ejemplo 7 y su integral indefinida (con $C = 0$). ¿Cuál es cuál?

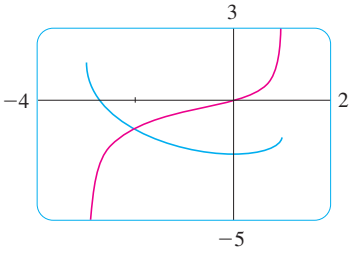


FIGURA 5

Ahora sustituimos $u = 2 \operatorname{sen} \theta$ y se obtiene $du = 2 \cos \theta \, d\theta$ y $\sqrt{4 - u^2} = 2 \cos \theta$; así que

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}\,dx &= \int \frac{2 \operatorname{sen} \theta - 1}{2 \cos \theta} 2 \cos \theta \, d\theta \\ &= \int (2 \operatorname{sen} \theta - 1)\, d\theta \\ &= -2 \cos \theta - \theta + C \\ &= -\sqrt{4 - u^2} - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{u}{2}\right) + C \\ &= -\sqrt{3 - 2x - x^2} - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x + 1}{2}\right) + C\end{aligned}$$

7.3 Ejercicios

1-3 Evalúe las siguientes integrales utilizando la sustitución trigonométrica indicada. Dibuje y etiquete el triángulo rectángulo asociado.

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4 - x^2}}$ $\quad x = 2 \operatorname{sen} \theta$

2. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 4}}\,dx$ $\quad x = 2 \tan \theta$

3. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x}\,dx$ $\quad x = 2 \sec \theta$

4-30 Evalúe las siguientes integrales.

4. $\displaystyle\int_0^1 x^3\sqrt{1 - x^2}\,dx$

5. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{t^3\sqrt{t^2 - 1}}\,dt$

6. $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{36 - x^2}}\,dx$

7. $\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}}, \quad a > 0$

8. $\displaystyle\int \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2 - 16}}$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 16}}$

10. $\displaystyle\int \frac{t^5}{\sqrt{t^2 + 2}}\,dt$

11. $\displaystyle\int \sqrt{1 - 4x^2}\,dx$

12. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{5 - u^2}}$

13. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^3}\,dx$

14. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$

15. $\displaystyle\int_0^a x^2\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$

16. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}/3}^{2/3} \frac{dx}{x^5\sqrt{9x^2 - 1}}$

17. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 7}}\,dx$

18. $\displaystyle\int \frac{dx}{[(ax)^2 - b^2]^{3/2}}$

19. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x}\,dx$

20. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\,dx$

21. $\displaystyle\int_0^{0.6} \frac{x^2}{\sqrt{9 - 25x^2}}\,dx$

22. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^2 + 1}\,dx$

23. $\displaystyle\int \sqrt{5 + 4x - x^2}\,dx$

24. $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 6t + 13}}$

25. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + x + 1}}\,dx$

26. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(3 + 4x - 4x^2)^{3/2}}\,dx$

27. $\displaystyle\int \sqrt{x^2 + 2x}\,dx$

28. $\displaystyle\int \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 2x + 2)^2}\,dx$

29. $\displaystyle\int x\sqrt{1 - x^4}\,dx$

30. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 t}}\,dt$

31. a) Utilice una sustitución trigonométrica para demostrar que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C$$

b) Utilice la sustitución hiperbólica $x = a \operatorname{senh} t$ para demostrar que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Estas fórmulas están conectadas a la fórmula 3.11.3.

32. Evalúe

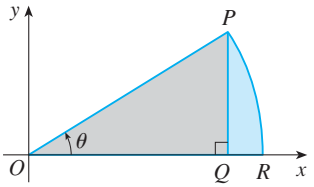
$$\int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}}\,dx$$

a) por sustitución trigonométrica.
b) por la sustitución hiperbólica $x = a \operatorname{senh} t$.

33. Encuentre el valor promedio de $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}/x$, $1 \leqslant x \leqslant 7$.

34. Determine el área de la región limitada por la hipérbola $9x^2 - 4y^2 = 36$ y la recta $x = 3$.

35. Demuestre la fórmula $A = \frac{1}{2}r^2\theta$ para el área de un sector de un círculo de radio r y ángulo central θ. [*Sugerencia*: suponga que $0 < \theta < \pi/2$ y coloque el centro del círculo en el origen de manera que se ocupe la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$. Así, A es la suma del área del triángulo POQ y el área de la región PQR en la figura.]



36. Evalúe la integral

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2 - 2}}$$

Grafique el integrando y su integral indefinida en la misma pantalla y verifique que su respuesta sea razonable.

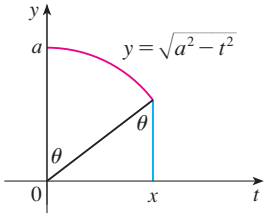
37. Encuentre el volumen del sólido obtenido al rotar la región delimitada por la curvas $y = 9/(x^2 + 9)$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 3$.

38. Determine el volumen del sólido obtenido al rotar alrededor de la recta $x = 1$, la región bajo la curva $y = x\sqrt{1 - x^2}$, para $0 \leq x \leq 1$.

39. a) Utilice una sustitución trigonométrica para verificar que

$$\int_0^x \sqrt{a^2 - t^2}\, dt = \tfrac{1}{2}a^2 \operatorname{sen}^{-1}(x/a) + \tfrac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2}$$

b) Utilice la figura para dar una interpretación trigonométrica de ambos términos del lado derecho de la ecuación del inciso a).



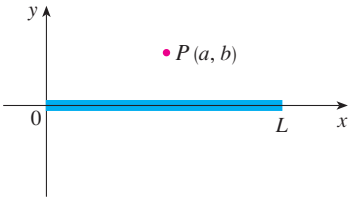
40. La parábola $y = \frac{1}{2}x^2$ divide al disco $x^2 + y^2 \leq 8$ en dos partes. Encuentre las áreas de ambas partes.

41. Un toro se genera al rotar la circunferencia $x^2 + (y - R)^2 = r^2$ alrededor del eje x. Encuentre el volumen encerrado por el toro.

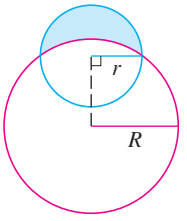
42. Una varilla cargada de longitud L produce un campo eléctrico en un punto $P(a, b)$ dado por

$$E(P) = \int_{-a}^{L-a} \frac{\lambda b}{4\pi\varepsilon_0(x^2 + b^2)^{3/2}}\, dx$$

donde λ es la densidad de carga por unidad de longitud de la varilla y ε_0 es la permitividad del espacio libre (véase la figura). Evalúe la integral para determinar una expresión para el campo eléctrico $E(P)$.



43. Encuentre el área de la región sombreada (llamada *luna*) limitada por los arcos de circunferencia de radios r y R (véase la figura).



44. Un tanque de almacenamiento de agua tiene la forma de un cilindro de 10 pies de diámetro. Está montado de manera que las secciones transversales circulares quedan verticales. Si la profundidad del agua es de 7 pies, ¿qué porcentaje de la capacidad total se está utilizando?

7.4 Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales

En esta sección mostraremos cómo integrar cualquier función racional (una razón de polinomios) al expresarla como una suma de fracciones simples, llamadas *fracciones parciales*, que ya sabemos cómo integrar. Para ilustrar el método, observe que al tomar el denominador común de las fracciones $2/(x - 1)$ y $1/(x + 2)$, obtenemos

$$\frac{2}{x - 1} - \frac{1}{x + 2} = \frac{2(x + 2) - (x - 1)}{(x - 1)(x + 2)} = \frac{x + 5}{x^2 + x - 2}$$

Ahora, si invertimos el procedimiento, vemos cómo integrar la función del lado derecho

de esta ecuación:

$$\int \frac{x+5}{x^2+x-2}\,dx = \int \left(\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right) dx$$
$$= 2\ln|x-1| - \ln|x+2| + C$$

Para ver cómo funciona en general el método de fracciones parciales, consideremos la función racional

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P y Q son funciones polinomiales. Es posible expresar f como una suma de fracciones simples, siempre que el grado de P sea menor que el grado de Q. A una función racional de este estilo se le llama *propia*. Recuerde que si

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde $a_n \neq 0$, entonces el grado de P es n y lo expresamos como $\text{gr}(P) = n$.

Si f es *impropia*, esto es, $\text{gr}(P) \geqslant \text{gr}(Q)$, entonces debemos tomar el paso preliminar de dividir P entre Q (por división larga) hasta obtener el residuo $R(x)$ de manera que $\text{gr}(R) < \text{gr}(Q)$. El enunciado de la división es

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \qquad 1$$

donde S y R también son funciones polinomiales.

Como se ilustra en los siguientes ejemplos, algunas veces este paso preliminar es todo lo que se necesita.

V EJEMPLO 1 Encuentre $\int \frac{x^3+x}{x-1}\,dx$.

SOLUCIÓN Dado que el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, primero ejecutamos la división larga. Esto nos permite escribir

$$\begin{array}{r} x^2+x+2 \\ x-1\,\overline{)\,x^3+x} \\ \underline{x^3-x^2} \\ x^2+x \\ \underline{x^2-x} \\ 2x \\ \underline{2x-2} \\ 2 \end{array}$$

$$\int \frac{x^3+x}{x-1}\,dx = \int \left(x^2+x+2+\frac{2}{x-1}\right) dx$$
$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + 2\ln|x-1| + C$$

El siguiente paso es factorizar el denominador $Q(x)$ tanto como sea posible. Puede demostrarse que cualquier polinomio Q puede factorizarse como un producto de factores lineales (de la forma $ax+b$) y factores cuadráticos irreductibles (de la forma ax^2+bx+c, donde $b^2-4ac<0$). Por ejemplo, si $Q(x) = x^4 - 16$, podríamos factorizar como

$$Q(x) = (x^2-4)(x^2+4) = (x-2)(x+2)(x^2+4)$$

El tercer paso es expresar la función racional propia $R(x)/Q(x)$ (de la ecuación 1) como una suma de **fracciones parciales** de la forma

$$\frac{A}{(ax+b)^i} \quad \text{o bien} \quad \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^j}$$

Existe un teorema que garantiza que esto siempre es posible. Enseguida se explican los detalles de los cuatro posibles casos.

CASO 1 El denominador $Q(x)$ es un producto de factores lineales distintos.
Esto significa que podemos escribir

$$Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2)\cdots(a_kx + b_k)$$

donde no hay factores repetidos (y ningún factor es un múltiplo constante de otro). En este caso, el teorema de fracciones parciales establece que existen constantes $A_1, A_2, \ldots, A_k$ tales que

$$\boxed{2} \qquad \frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{A_k}{a_kx + b_k}$$

Estas constantes pueden determinarse como en el siguiente ejemplo.

V EJEMPLO 2 Evalúe $\displaystyle\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x}\,dx$.

SOLUCIÓN Ya que el grado del numerador es menor que el grado del denominador, no necesitamos dividir, así que pasamos a factorizar el denominador como

$$2x^3 + 3x^2 - 2x = x(2x^2 + 3x - 2) = x(2x - 1)(x + 2)$$

Puesto que el denominador tiene tres factores lineales diferentes, la descomposición en fracciones parciales del integrando 2 tiene la forma

$$\boxed{3} \qquad \frac{x^2 + 2x - 1}{x(2x - 1)(x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x - 1} + \frac{C}{x + 2}$$

Después de este ejemplo, se proporciona otro método para determinar A, B y C.

Para determinar los valores de A, B y C, multiplicamos ambos lados de esta ecuación por el común denominador, $x(2x - 1)(x + 2)$ para obtener

$$\boxed{4} \qquad x^2 + 2x - 1 = A(2x - 1)(x + 2) + Bx(x + 2) + Cx(2x - 1)$$

Al desarrollar el lado derecho de la ecuación 4 y escribirlo en la forma polinomial estándar, obtenemos

$$\boxed{5} \qquad x^2 + 2x - 1 = (2A + B + 2C)x^2 + (3A + 2B - C)x - 2A$$

Las formas polinomiales de la ecuación 5 son idénticas, así que sus coeficientes deben ser iguales. El coeficiente de x^2 del lado derecho, $2A + B + 2C$, debe ser igual al coeficiente de x^2 del lado izquierdo, 1. Del mismo modo, los coeficientes de x son iguales y los términos constantes son iguales. Esto plantea el siguiente sistema de ecuaciones para A, B y C:

$$\begin{aligned} 2A + \ B + 2C &= 1 \\ 3A + 2B - \ C &= 2 \\ -2A \qquad\quad &= -1 \end{aligned}$$

Resolviendo, obtenemos $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{5}$ y $C = -\frac{1}{10}$, así que

$$\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x}\,dx = \int \left[\frac{1}{2}\frac{1}{x} + \frac{1}{5}\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{10}\frac{1}{x+2}\right] dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\ln|x| + \tfrac{1}{10}\ln|2x-1| - \tfrac{1}{10}\ln|x+2| + K$$

Podríamos verificar nuestro trabajo llevando los términos a un denominador común y luego sumándolos.

La figura 1 muestra las gráficas del integrando del ejemplo 2 y su integral indefinida (con $K = 0$). ¿Cuál es cuál?

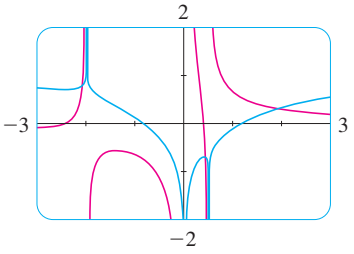


FIGURA 1

En la integración del término de en medio hicimos mentalmente la sustitución $u = 2x - 1$, lo cual da $du = 2\,dx$ y $dx = \frac{1}{2}\,du$.

NOTA Podemos utilizar un método alternativo para encontrar los coeficientes A, B y C del ejemplo 2. La ecuación 4 es una identidad y, por tanto, es verdadera para todo valor de x. Elegimos valores para x que simplifiquen la ecuación. Si hacemos $x = 0$ en la ecuación 4, entonces el segundo y tercer términos del lado derecho desaparecen y la ecuación se reduce a $-2A = -1$, o $A = \frac{1}{2}$. Del mismo modo, $x = \frac{1}{2}$ da $5B/4 = \frac{1}{4}$ y $x = -2$ da $10C = -1$, así que $B = \frac{1}{5}$ y $C = -\frac{1}{10}$. (Se podría objetar la validez de la ecuación 3 para $x = 0$, $\frac{1}{2}$ o bien -2, así que, ¿por qué la ecuación 4 es válida para estos valores? De hecho, la ecuación 4 es verdadera para todos los valores de x, aun $x = 0$, $\frac{1}{2}$ y -2. Véase el argumento en el ejercicio 71.)

EJEMPLO 3 Encuentre $\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$, donde $a \neq 0$.

SOLUCIÓN El método de fracciones parciales da

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a}$$

y, por tanto,

$$A(x + a) + B(x - a) = 1$$

Utilizando el método de la nota anterior, hacemos $x = a$ en esta ecuación y obtenemos $A(2a) = 1$, así que $A = 1/(2a)$. Si ponemos $x = -a$, obtenemos $B(-2a) = 1$, así que $B = -1/(2a)$. De este modo

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\int \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2a}\left(\ln|x-a| - \ln|x+a|\right) + C$$

Puesto que $\ln x - \ln y = \ln(x/y)$, podemos escribir la integral como

$$\boxed{6} \qquad \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

En los ejercicios 57-58 se muestran las formas de uso de la fórmula 6.

CASO II *$Q(x)$* **es un producto de factores lineales, algunos de los cuales se repiten.**
Suponga que el primer factor lineal $(a_1x + b_1)$ se repite r veces; esto es, $(a_1x + b_1)^r$ aparece en la factorización de $Q(x)$. Entonces, en lugar del término simple $A_1/(a_1x + b_1)$ de la

ecuación 2, usaríamos

$$\frac{A_1}{a_1x+b_1}+\frac{A_2}{(a_1x+b_1)^2}+\cdots+\frac{A_r}{(a_1x+b_1)^r} \tag{7}$$

Como ejemplo, podríamos escribir

$$\frac{x^3-x+1}{x^2(x-1)^3}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{(x-1)^2}+\frac{E}{(x-1)^3}$$

pero preferimos trabajar un ejemplo simple en más detalle.

EJEMPLO 4 Encuentre $\int \frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}\,dx$.

SOLUCIÓN El primer paso es dividir. El resultado de la división larga es

$$\frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}=x+1+\frac{4x}{x^3-x^2-x+1}$$

El segundo paso es factorizar el denominador $Q(x)=x^3-x^2-x+1$. Puesto que $Q(1)=0$, sabemos que $x-1$ es un factor y obtenemos

$$\begin{aligned}x^3-x^2-x+1&=(x-1)(x^2-1)=(x-1)(x-1)(x+1)\\&=(x-1)^2(x+1)\end{aligned}$$

Puesto que el factor lineal $x-1$ se presenta dos veces, la descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{4x}{(x-1)^2(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}$$

Multiplicando por el mínimo común denominador $(x-1)^2(x+1)$, obtenemos

$$\begin{aligned}4x&=A(x-1)(x+1)+B(x+1)+C(x-1)^2\\&=(A+C)x^2+(B-2C)x+(-A+B+C)\end{aligned} \tag{8}$$

Otro método para encontrar los coeficientes:
Sea $x=1$ en (8): $B=2$.
Sea $x=-1$: $C=-1$.
Sea $x=0$: $A=B+C=1$.

Ahora, igualando coeficientes:

$$\begin{aligned}A\quad\ +\ C&=0\\B-2C&=4\\-A+B+\ C&=0\end{aligned}$$

Resolviendo, obtenemos $A=1$, $B=2$ y $C=-1$, así que

$$\begin{aligned}\int\frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}\,dx&=\int\left[x+1+\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}-\frac{1}{x+1}\right]dx\\&=\frac{x^2}{2}+x+\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}-\ln|x+1|+K\\&=\frac{x^2}{2}+x-\frac{2}{x-1}+\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+K\end{aligned}$$

CASO III $Q(x)$ **contiene factores cuadráticos irreductibles, de los que ninguno se repite.**
Si $Q(x)$ tiene el factor $ax^2 + bx + c$ donde $b^2 - 4ac < 0$, entonces, además de las fracciones parciales de las ecuaciones 2 y 7, la expresión para $R(x)/Q(x)$ tendrá un término de la forma

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} \tag{9}$$

donde A y B son constantes que han de determinarse. Por ejemplo, la función dada por $f(x) = x/[(x - 2)(x^2 + 1)(x^2 + 4)]$ tiene una descomposición por fracciones parciales de la forma

$$\frac{x}{(x - 2)(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} + \frac{Dx + E}{x^2 + 4}$$

El término dado en 9 puede integrarse completando el trinomio cuadrado (si es necesario) y utilizando la fórmula

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \tag{10}$$

V EJEMPLO 5 Evalúe $\displaystyle\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x}\,dx$.

SOLUCIÓN Dado que $x^3 + 4x = x(x^2 + 4)$ no puede factorizarse más, escribimos

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2 + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}$$

Multiplicando por $x(x^2 + 4)$, tenemos

$$\begin{aligned} 2x^2 - x + 4 &= A(x^2 + 4) + (Bx + C)x \\ &= (A + B)x^2 + Cx + 4A \end{aligned}$$

Igualando coeficientes, obtenemos

$$A + B = 2 \qquad C = -1 \qquad 4A = 4$$

Así $A = 1$, $B = 1$ y $C = -1$, así que

$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{x - 1}{x^2 + 4}\right) dx$$

Para integrar el segundo término, lo repartimos en dos:

$$\int \frac{x - 1}{x^2 + 4}\,dx = \int \frac{x}{x^2 + 4}\,dx - \int \frac{1}{x^2 + 4}\,dx$$

Hacemos la sustitución $u = x^2 + 4$ en la primera de estas integrales, de modo que $du = 2x\,dx$. La segunda integral se evalúa por medio de la fórmula 10 con $a = 2$:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2 + 4)}\,dx &= \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{x}{x^2 + 4}\,dx - \int \frac{1}{x^2 + 4}\,dx \\ &= \ln|x| + \tfrac{1}{2}\ln(x^2 + 4) - \tfrac{1}{2}\tan^{-1}(x/2) + K \end{aligned}$$

EJEMPLO 6 Evalúe $\int \frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3}\,dx$

SOLUCIÓN Ya que el grado del numerador *no es menor que* el grado del denominador, primero dividimos para obtener

$$\frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3} = 1 + \frac{x - 1}{4x^2 - 4x + 3}$$

Observe que la cuadrática $4x^2 - 4x + 3$ es irreductible porque su discriminante es $b^2 - 4ac = -32 < 0$. Esto significa que no puede factorizarse, así que no necesitamos utilizar la técnica de fracciones parciales.

Para integrar la función dada, completamos el cuadrado en el denominador:

$$4x^2 - 4x + 3 = (2x - 1)^2 + 2$$

Esto sugiere que podemos hacer la sustitución $u = 2x - 1$. Entonces $du = 2dx$ y $x = \frac{1}{2}(u + 1)$, así que

$$\begin{aligned}
\int \frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3}\,dx &= \int \left(1 + \frac{x - 1}{4x^2 - 4x + 3}\right) dx \\
&= x + \tfrac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{2}(u + 1) - 1}{u^2 + 2}\,du = x + \tfrac{1}{4}\int \frac{u - 1}{u^2 + 2}\,du \\
&= x + \tfrac{1}{4}\int \frac{u}{u^2 + 2}\,du - \tfrac{1}{4}\int \frac{1}{u^2 + 2}\,du \\
&= x + \tfrac{1}{8}\ln(u^2 + 2) - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) + C \\
&= x + \tfrac{1}{8}\ln(4x^2 - 4x + 3) - \frac{1}{4\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{2x - 1}{\sqrt{2}}\right) + C
\end{aligned}$$

NOTA El ejemplo 6 ilustra el procedimiento general para interpretar una fracción parcial de la forma

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} \qquad \text{donde } b^2 - 4ac < 0$$

Completamos el cuadrado en el denominador y después hacemos una sustitución para llevar la integral a la forma

$$\int \frac{Cu + D}{u^2 + a^2}\,du = C\int \frac{u}{u^2 + a^2}\,du + D\int \frac{1}{u^2 + a^2}\,du$$

Entonces, la primera integral es un logaritmo y la segunda se expresa en términos de $\tan^{-1}$.

CASO IV $Q(x)$ **contiene un factor cuadrático irreductible repetido.**
Si $Q(x)$ tiene el factor $(ax^2 + bx + c)^r$, donde $b^2 - 4ac < 0$, entonces en lugar de una única fracción parcial [9], la suma

[11] $$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_rx + B_r}{(ax^2 + bx + c)^r}$$

ocurre en la descomposición en fracciones parciales de $R(x)/Q(x)$. Cada uno de los términos en [11] puede integrarse utilizando una sustitución o primero completando el cuadrado si es necesario.

EJEMPLO 7 Exprese la forma de descomposición de fracciones parciales de la función

$$\frac{x^3 + x^2 + 1}{x(x - 1)(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)^3}$$

SOLUCIÓN

$$\frac{x^3 + x^2 + 1}{x(x - 1)(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)^3}$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + x + 1} + \frac{Ex + F}{x^2 + 1} + \frac{Gx + H}{(x^2 + 1)^2} + \frac{Ix + J}{(x^2 + 1)^3}$$

Sería muy tedioso determinar a mano los valores numéricos de los coeficientes del ejemplo 7. La mayoría de los sistemas algebraicos computarizados pueden encontrar los valores numéricos muy rápidamente. Por ejemplo, el comando de Maple

```
convert(f, parfrac, x)
```

o el comando de Mathematica

```
Apart[f]
```

da los siguientes valores:

$$A = -1, \quad B = \tfrac{1}{8}, \quad C = D = -1,$$
$$E = \tfrac{15}{8}, \quad F = -\tfrac{1}{8}, \quad G = H = \tfrac{3}{4},$$
$$I = -\tfrac{1}{2}, \quad J = \tfrac{1}{2}$$

EJEMPLO 8 Evalúe $\int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2 + 1)^2}\,dx$.

SOLUCIÓN La forma de descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2 + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 1)^2}$$

Multiplicando por $x(x^2 + 1)^2$, tenemos

$$\begin{aligned} -x^3 + 2x^2 - x + 1 &= A(x^2 + 1)^2 + (Bx + C)x(x^2 + 1) + (Dx + E)x \\ &= A(x^4 + 2x^2 + 1) + B(x^4 + x^2) + C(x^3 + x) + Dx^2 + Ex \\ &= (A + B)x^4 + Cx^3 + (2A + B + D)x^2 + (C + E)x + A \end{aligned}$$

Si igualamos coeficientes, obtenemos el sistema

$$A + B = 0 \qquad C = -1 \qquad 2A + B + D = 2 \qquad C + E = -1 \qquad A = 1$$

que tiene la solución $A = 1$, $B = -1$, $C = -1$, $D = 1$ y $E = 0$. Así,

$$\begin{aligned} \int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2 + 1)^2}\,dx &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x + 1}{x^2 + 1} + \frac{x}{(x^2 + 1)^2} \right) dx \\ &= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x}{x^2 + 1}\,dx - \int \frac{dx}{x^2 + 1} + \int \frac{x\,dx}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \ln|x| - \tfrac{1}{2}\ln(x^2 + 1) - \tan^{-1}x - \frac{1}{2(x^2 + 1)} + K \end{aligned}$$

En el segundo y cuarto términos hicimos la sustitución mental $u = x^2 + 1$.

Observe que algunas veces pueden evitarse las fracciones parciales cuando integramos una función racional. Por ejemplo, aunque la integral

$$\int \frac{x^2 + 1}{x(x^2 + 3)}\,dx$$

puede determinarse por el método del caso III, es mucho más fácil observar que si $u = x(x^2 + 3) = x^3 + 3x$, entonces $du = (3x^2 + 3)\,dx$, por lo que

$$\int \frac{x^2 + 1}{x(x^2 + 3)}\,dx = \tfrac{1}{3}\ln|x^3 + 3x| + C$$

Racionalización de sustituciones

Algunas funciones no racionales pueden cambiarse a funciones racionales por medio de una sustitución adecuada. En particular, cuando un integrando contiene una expresión de la forma $\sqrt[n]{g(x)}$, puede ser eficaz la sustitución $u = \sqrt[n]{g(x)}$. En los ejercicios aparecen otros ejemplos.

EJEMPLO 9 Evalúe $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx$.

SOLUCIÓN Sea $u = \sqrt{x+4}$. Entonces $u^2 = x + 4$, así que $x = u^2 - 4$ y $dx = 2u\,du$. Por tanto,

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx = \int \frac{u}{u^2 - 4}\,2u\,du = 2\int \frac{u^2}{u^2 - 4}\,du$$
$$= 2\int \left(1 + \frac{4}{u^2 - 4}\right) du$$

Podemos evaluar esta integral, ya sea factorizando $u^2 - 4$ como $(u - 2)(u + 2)$ y usando fracciones parciales, o bien utilizando la fórmula 6 con $a = 2$:

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx = 2\int du + 8\int \frac{du}{u^2 - 4} = 2u + 8 \cdot \frac{1}{2 \cdot 2}\ln\left|\frac{u-2}{u+2}\right| + C$$
$$= 2\sqrt{x+4} + 2\ln\left|\frac{\sqrt{x+4} - 2}{\sqrt{x+4} + 2}\right| + C$$

7.4 Ejercicios

1-6 Exprese en la forma de descomposición de fracciones parciales las siguientes funciones (como en el ejemplo 7). No determine el valor numérico de los coeficientes.

1. a) $\dfrac{1 + 6x}{(4x - 3)(2x + 5)}$ b) $\dfrac{10}{5x^2 - 2x^3}$

2. a) $\dfrac{x}{x^2 + x - 2}$ b) $\dfrac{x^2}{x^2 + x + 2}$

3. a) $\dfrac{x^4 + 1}{x^5 + 4x^3}$ b) $\dfrac{1}{(x^2 - 9)^2}$

4. a) $\dfrac{x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x - 1}{x^2 - 2x + 1}$ b) $\dfrac{x^2 - 1}{x^3 + x^2 + x}$

5. a) $\dfrac{x^6}{x^2 - 4}$ b) $\dfrac{x^4}{(x^2 - x + 1)(x^2 + 2)^2}$

6. a) $\dfrac{t^6 + 1}{t^6 + t^3}$ b) $\dfrac{x^5 + 1}{(x^2 - x)(x^4 + 2x^2 + 1)}$

7-38 Evalúe cada una de las siguientes integrales.

7. $\displaystyle\int \frac{x^4}{x - 1}\,dx$ **8.** $\displaystyle\int \frac{3t - 2}{t + 1}\,dt$

9. $\displaystyle\int \frac{5x + 1}{(2x + 1)(x - 1)}\,dx$ **10.** $\displaystyle\int \frac{y}{(y + 4)(2y - 1)}\,dy$

11. $\int_0^1 \frac{2}{2x^2+3x+1}\,dx$

12. $\int_0^1 \frac{x-4}{x^2-5x+6}\,dx$

13. $\int \frac{ax}{x^2-bx}\,dx$

14. $\int \frac{1}{(x+a)(x+b)}\,dx$

15. $\int_3^4 \frac{x^3-2x^2-4}{x^3-2x^2}\,dx$

16. $\int_0^1 \frac{x^3-4x-10}{x^2-x-6}\,dx$

17. $\int_1^2 \frac{4y^2-7y-12}{y(y+2)(y-3)}\,dy$

18. $\int \frac{x^2+2x-1}{x^3-x}\,dx$

19. $\int \frac{x^2+1}{(x-3)(x-2)^2}\,dx$

20. $\int \frac{x^2-5x+16}{(2x+1)(x-2)^2}\,dx$

21. $\int \frac{x^3+4}{x^2+4}\,dx$

22. $\int \frac{ds}{s^2(s-1)^2}$

23. $\int \frac{10}{(x-1)(x^2+9)}\,dx$

24. $\int \frac{x^2-x+6}{x^3+3x}\,dx$

25. $\int \frac{4x}{x^3+x^2+x+1}\,dx$

26. $\int \frac{x^2+x+1}{(x^2+1)^2}\,dx$

27. $\int \frac{x^3+x^2+2x+1}{(x^2+1)(x^2+2)}\,dx$

28. $\int \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx$

29. $\int \frac{x+4}{x^2+2x+5}\,dx$

30. $\int \frac{3x^2+x+4}{x^4+3x^2+2}\,dx$

31. $\int \frac{1}{x^3-1}\,dx$

32. $\int_0^1 \frac{x}{x^2+4x+13}\,dx$

33. $\int_0^1 \frac{x^3+2x}{x^4+4x^2+3}\,dx$

34. $\int \frac{x^5+x-1}{x^3+1}\,dx$

35. $\int \frac{dx}{x(x^2+4)^2}$

36. $\int \frac{x^4+3x^2+1}{x^5+5x^3+5x}\,dx$

37. $\int \frac{x^2-3x+7}{(x^2-4x+6)^2}\,dx$

38. $\int \frac{x^3+2x^2+3x-2}{(x^2+2x+2)^2}\,dx$

39–52 Haga una sustitución para expresar el integrando como una función racional y después evalúe las siguientes integrales.

39. $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,dx$

40. $\int \frac{dx}{2\sqrt{x+3}+x}$

41. $\int \frac{dx}{x^2+x\sqrt{x}}$

42. $\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$

43. $\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2+1}}\,dx$

44. $\int_{1/3}^3 \frac{\sqrt{x}}{x^2+x}\,dx$

45. $\int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\,dx$ [*Sugerencia:* Sustituya $u = \sqrt[6]{x}$.]

46. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x}\,dx$

47. $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx$

48. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x-3\cos x}\,dx$

49. $\int \frac{\sec^2 t}{\tan^2 t+3\tan t+2}\,dt$

50. $\int \frac{e^x}{(e^x-2)(e^{2x}+1)}\,dx$

51. $\int \frac{dx}{1+e^x}$

52. $\int \frac{\cosh t}{\operatorname{senh}^2 t+\operatorname{senh}^4 t}\,dt$

53–54 Utilice integración por partes, junto con las técnicas de esta sección, para evaluar las siguientes integrales.

53. $\int \ln(x^2-x+2)\,dx$

54. $\int x\tan^{-1}x\,dx$

55. Use la gráfica de $f(x) = 1/(x^2-2x-3)$ para saber si $\int_0^2 f(x)\,dx$ es positiva o negativa. Use la gráfica para dar una estimación del valor de la integral y después utilice fracciones parciales para encontrar el valor exacto.

56. Evalúe

$$\int \frac{1}{x^2+k}\,dx$$

considerando diversos casos para la constante k.

57–58 Evalúe las siguientes integrales completando el cuadrado y utilizando la fórmula 6.

57. $\int \frac{dx}{x^2-2x}$

58. $\int \frac{2x+1}{4x^2+12x-7}\,dx$

59. El matemático alemán Karl Weierstrass (1815-1897) observó que la sustitución $t = \tan(x/2)$ convierte cualquier función racional del sen x y cos x en una función racional ordinaria de t.

a) Si $t = \tan(x/2)$, $-\pi < x < \pi$, dibuje un triángulo rectángulo o utilice identidades trigonométricas para demostrar que

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

b) Demuestre que

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}$$

c) Demuestre que

$$dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

60–63 Utilice la sustitución del ejercicio 59 para transformar el integrando en una función racional de t y después evalúe las siguientes integrales.

60. $\int \frac{dx}{1-\cos x}$

61. $\int \frac{1}{3\operatorname{sen} x-4\cos x}\,dx$

62. $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{1+\operatorname{sen} x-\cos x}\,dx$

63. $\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} 2x}{2 + \cos x}\, dx$

64-65 Encuentre el área de la región bajo la curva dada de 1 a 2.

64. $y = \dfrac{1}{x^3 + x}$ **65.** $y = \dfrac{x^2 + 1}{3x - x^2}$

66. Encuentre el volumen del sólido resultante, si la región bajo la curva $y = 1/(x^2 + 3x + 2)$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$ rota alrededor de a) el eje x y b) el eje y.

67. Un método para desacelerar el crecimiento de una población de insectos sin usar pesticidas, es introducir en la población varios machos estériles que se aparean con hembras fértiles, pero no producen descendencia. Si P representa el número de insectos hembra en una población, S el número de machos estériles introducidos cada generación y r la tasa de crecimiento natural de la población, entonces la población de hembras se relaciona con el tiempo t mediante

$$t = \int \frac{P + S}{P[(r - 1)P - S]}\, dP$$

Suponga que una población de insectos con 10 000 hembras crece a una tasa de $r = 0.10$ y se agregan 900 machos estériles. Evalúe la integral para obtener una ecuación que relacione la población de hembras con el tiempo. (Observe que la ecuación resultante no puede resolverse de manera explícita para P.)

68. Factorice $x^4 + 1$ como una diferencia de cuadrados, sumando y restando primero la misma cantidad. Utilice esta factorización para evaluar $\int 1/(x^4 + 1)\, dx$.

SAC **69.** a) Utilice un sistema algebraico computarizado para encontrar la descomposición en fracciones parciales de la función

$$f(x) = \frac{4x^3 - 27x^2 + 5x - 32}{30x^5 - 13x^4 + 50x^3 - 286x^2 - 299x - 70}$$

b) Utilice el inciso a) para encontrar $\int f(x)\, dx$ (a mano) y compárela con el resultado al utilizar el SAC para integrar f directamente. Comente en relación con cualquier discrepancia.

SAC **70.** a) Encuentre la descomposición en fracciones parciales de la función

$$f(x) = \frac{12x^5 - 7x^3 - 13x^2 + 8}{100x^6 - 80x^5 + 116x^4 - 80x^3 + 41x^2 - 20x + 4}$$

b) Utilice en inciso a) para encontrar $\int f(x)\, dx$ y grafique f y su integral indefinida, en la misma pantalla.

c) Utilice la gráfica de f para descubrir las características principales de la gráfica de $\int f(x)\, dx$.

71. Suponga que F, G y Q son funciones polinomiales y que

$$\frac{F(x)}{Q(x)} = \frac{G(x)}{Q(x)}$$

para toda x, excepto cuando $Q(x) = 0$. Demuestre que $F(x) = G(x)$ para toda x. [*Sugerencia:* utilice la continuidad.]

72. Si f es una función cuadrática tal que $f(0) = 1$ y

$$\int \frac{f(x)}{x^2(x + 1)^3}\, dx$$

es una función racional, encuentre el valor de $f'(0)$.

73. Si $a \neq 0$ y n es un número entero positivo, encuentre la descomposición en fracciones parciales de

$$f(x) = \frac{1}{x^n(x - a)}$$

Sugerencia: primero encuentre el coeficiente de $1/(x - a)$. Después reste el término resultante y simplifique lo que le queda.

7.5 Estrategias para la integración

Como hemos visto, la integración es más desafiante que la derivación. Para obtener la derivada de una función, resulta evidente cuál fórmula de derivación debe aplicarse. Pero podría no ser obvio qué técnica utilizar para integrar una función dada.

Hasta ahora hemos aplicado técnicas individuales en cada sección. Por ejemplo, normalmente utilizamos la sustitución en los ejercicios 5.5, integración por partes en los ejercicios 7.1, y fracciones parciales en los ejercicios 7.4. Pero en esta sección presentamos una colección de diferentes integrales al azar, y el principal reto es reconocer cuál técnica o fórmula utilizar. No es posible disponer de una regla precisa y rápida que se aplique en una situación dada, pero podemos seguir algunos consejos.

Una condición para aplicar una estrategia es conocer las fórmulas básicas de integración. En la siguiente tabla hemos reunido las integrales de nuestra lista previa junto con varias fórmulas adicionales que hemos aprendido en este capítulo. La mayoría de ellas debemos memorizarlas. Es útil conocerlas todas, pero las marcadas con un asterisco no

necesitan memorizarse porque se deducen con facilidad. La fórmula 19 puede evitarse utilizando fracciones parciales y, en lugar de la fórmula 20, pueden usarse sustituciones trigonométricas.

Tabla de fórmulas de integración Las constantes de integración se han omitido.

1. $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$
2. $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln|x|$
3. $\int e^x\,dx = e^x$
4. $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a}$
5. $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x$
6. $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x$
7. $\int \sec^2 x\,dx = \tan x$
8. $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x$
9. $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x$
10. $\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x$
11. $\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x|$
12. $\int \csc x\,dx = \ln|\csc x - \cot x|$
13. $\int \tan x\,dx = \ln|\sec x|$
14. $\int \cot x\,dx = \ln|\operatorname{sen} x|$
15. $\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x$
16. $\int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x$
17. $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a}\tan^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)$
18. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right), \quad a > 0$
*19. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|$
*20. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right|$

Una vez que contamos con estas fórmulas básicas de integración, si no se ve inmediatamente cómo atacar una integral dada, podemos ensayar la siguiente estrategia de cuatro pasos.

1. Si es posible, simplifique el integrando Algunas veces, el uso de manipulaciones algebraicas o identidades trigonométricas pueden simplificar el integrando y hacer obvio el método de integración. He aquí algunos ejemplos:

$$\int \sqrt{x}\,(1 + \sqrt{x})\,dx = \int (\sqrt{x} + x)\,dx$$

$$\int \frac{\tan\theta}{\sec^2\theta}\,d\theta = \int \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\cos^2\theta\,d\theta$$

$$= \int \operatorname{sen}\theta\cos\theta\,d\theta = \tfrac{1}{2}\int \operatorname{sen} 2\theta\,d\theta$$

$$\int (\operatorname{sen} x + \cos x)^2\,dx = \int (\operatorname{sen}^2 x + 2\operatorname{sen} x\cos x + \cos^2 x)\,dx$$

$$= \int (1 + 2\operatorname{sen} x\cos x)\,dx$$

2. Busque una sustitución obvia Intente encontrar alguna función $u = g(x)$ en el integrando cuya diferencial $du = g'(x)\,dx$ también esté presente, además de un factor constante. Por ejemplo, en la integral

$$\int \frac{x}{x^2 - 1}\,dx$$

observamos que si $u = x^2 - 1$, entonces $du = 2x\,dx$. Por tanto, utilizamos la sustitución $u = x^2 - 1$, en vez del método de fracciones parciales.

3. Clasifique el integrando de acuerdo con su forma Si los pasos 1 y 2 no conducen a la solución, entonces analizamos la forma del integrando $f(x)$.

a) *Funciones trigonométricas*. Si $f(x)$ es un producto de potencias del sen x y cos x, de tan x y sec x, o de cot x y csc x, entonces utilizamos las sustituciones recomendadas en la sección 7.2.

b) *Funciones racionales*. Si f es una función racional, utilizamos el procedimiento de la sección 7.4 que involucra fracciones parciales.

c) *Integración por partes*. Si $f(x)$ es un producto de una potencia de x (o una polinomial) y una función trascendente (tal como una función trigonométrica, exponencial o logarítmica), entonces ensayamos integración por partes, eligiendo u y dv de acuerdo con las recomendaciones dadas en la sección 7.1. Si consideramos las funciones de los ejercicios 7.1, veremos que la mayoría de éstas son del tipo que se describe.

d) *Radicales*. Los tipos particulares de sustituciones se recomiendan cuando aparecen ciertos radicales.

   i) Si aparece $\sqrt{\pm x^2 \pm a^2}$, utilizamos sustituciones trigonométricas de acuerdo con la tabla de la sección 7.3.

   ii) Si aparece $\sqrt[n]{ax + b}$, utilizamos la racionalización de la sustitución $u = \sqrt[n]{ax + b}$. Más a menudo, a veces esto funciona para $\sqrt[n]{g(x)}$.

4. Intente una vez más Si los primeros tres pasos no conducen a la solución, recuerde que básicamente sólo existen dos métodos de integración: sustitución y por partes.

a) *Intente la sustitución*. Aun si ninguna sustitución es obvia (paso 2), cierta inspiración o inventiva (o incluso desesperación) pueden sugerirle una sustitución apropiada.

b) *Intente por partes*. Aunque la integración por partes se utiliza en la mayoría de las veces sobre productos de la forma descrita en el paso 3c), a veces es eficaz en funciones únicas. En la sección 7.1 vemos que funciona para $\tan^{-1}x$, $\text{sen}^{-1}x$ y $\ln x$, y todas éstas son funciones inversas.

c) *Manipule el integrando*. Las manipulaciones algebraicas (tal vez racionalizando el denominador o utilizando identidades trigonométricas) pueden ser útiles para transformar la integral a una forma más fácil. Estas transformaciones pueden ser más sustanciales que en el paso 1 y pueden requerir cierto ingenio. He aquí un ejemplo:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1 - \cos x} &= \int \frac{1}{1 - \cos x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x}\,dx = \int \frac{1 + \cos x}{1 - \cos^2 x}\,dx \\ &= \int \frac{1 + \cos x}{\text{sen}^2 x}\,dx = \int \left(\csc^2 x + \frac{\cos x}{\text{sen}^2 x}\right) dx\end{aligned}$$

d) *Relacione el problema con problemas previos*. Cuando se ha adquirido cierta experiencia en integración, puede utilizarse un método en una integral dada similar a uno que ya se haya utilizado en una integral previa. O incluso podría expresarse

la integral dada en términos de una previa. Por ejemplo, $\int \tan^2 x \sec x\, dx$ es una integral desafiante, pero si utilizamos la identidad $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$, podemos escribir

$$\int \tan^2 x \sec x\, dx = \int \sec^3 x\, dx - \int \sec x\, dx$$

y si $\int \sec^3 x\, dx$ se ha evaluado previamente (ejemplo 8 de la sección 7.2), entonces este resultado puede utilizarse en el presente problema.

e) *Utilice varios métodos.* Algunas veces se requieren dos o tres métodos para evaluar una integral. La evaluación podría involucrar varias sustituciones sucesivas de diferentes tipos, o podría combinarse la integración por partes con una o más sustituciones.

En los siguientes ejemplos se muestra un método de ataque, pero no resuelve por completo la integral.

EJEMPLO 1 $\displaystyle\int \frac{\tan^3 x}{\cos^3 x}\, dx$

En el paso 1 reescribimos la integral:

$$\int \frac{\tan^3 x}{\cos^3 x}\, dx = \int \tan^3 x \sec^3 x\, dx$$

La integral es ahora de la forma $\int \tan^m x \sec^n x\, dx$ con m impar, así que podemos utilizar la recomendación de la sección 7.2.

Alternativamente, si en el paso 1 escribimos

$$\int \frac{\tan^3 x}{\cos^3 x}\, dx = \int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^3 x} \frac{1}{\cos^3 x}\, dx = \int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^6 x}\, dx$$

entonces tenemos que continuar como sigue, con la sustitución $u = \cos x$:

$$\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^6 x}\, dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^6 x} \operatorname{sen} x\, dx = \int \frac{1 - u^2}{u^6}(-du)$$

$$= \int \frac{u^2 - 1}{u^6}\, du = \int (u^{-4} - u^{-6})\, du$$

V EJEMPLO 2 $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\, dx$

De acuerdo con ii) en el paso 3d), sustituimos $u = \sqrt{x}$. Entonces $x = u^2$, así que $dx = 2u\, du$ y

$$\int e^{\sqrt{x}}\, dx = 2 \int u e^u\, du$$

El integrando es ahora un producto de u y una función trascendente e^u así que puede ser integrada por partes.

EJEMPLO 3 $\displaystyle\int \frac{x^5 + 1}{x^3 - 3x^2 - 10x}\,dx$

Aquí, ninguna simplificación o sustitución es obvia, así que los pasos 1 y 2 no son adecuados. El integrando es una función racional así que aplicamos el procedimiento de la sección 7.4, recordando que el primer paso es dividir.

V EJEMPLO 4 $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

Aquí todo lo que se necesita es el paso 2. Sustituimos $u = \ln x$ porque su diferencial es $du = dx/x$, que aparece en la integral.

V EJEMPLO 5 $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}\,dx$

Aunque aquí funciona la racionalización de sustitución

$$u = \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}$$

[ii) en el paso 3d)], nos lleva a una función racional muy complicada. Un método más fácil es por medio de algunas manipulaciones algebraicas [ya sea como en el paso 1 o como en el paso 4c)]. Multiplicando el numerador y el denominador por $\sqrt{1 - x}$, tenemos

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}\,dx &= \int \frac{1 - x}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx - \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx \\ &= \operatorname{sen}^{-1}x + \sqrt{1 - x^2} + C\end{aligned}$$

¿Pueden integrarse todas las funciones continuas?

Surge la pregunta: ¿nuestras estrategias de integración nos permitirán determinar la integral de toda función continua? Por ejemplo, ¿podemos utilizarlas para obtener $\int e^{x^2}\,dx$? La respuesta es *no*; al menos no en términos de las funciones con las que estamos familiarizados.

Las funciones con las que tratamos en este libro se llaman **funciones elementales**. Estas funciones son las polinomiales, racionales, potencias (x^a), exponenciales (a^x), logarítmicas, trigonométricas y sus inversas, hiperbólicas y sus inversas, y todas las funciones que pueden obtenerse por las cinco operaciones: suma, resta, multiplicación, división y composición. Por ejemplo, la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^3 + 2x - 1}} + \ln(\cosh x) - xe^{\operatorname{sen} 2x}$$

es una función elemental.

Si f es una función elemental, entonces f' es una función elemental, pero $\int f(x)\,dx$ no necesariamente es una función elemental. Considere $f(x) = e^{x^2}$. Puesto que f es continua, su integral existe, y si F se define como

$$F(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt$$

entonces, sabemos de la parte 1 del teorema fundamental del cálculo, que

$$F'(x) = e^{x^2}$$

Así, $f(x) = e^{x^2}$ tiene una antiderivada F, pero se ha demostrado que F no es una función elemental. Esto significa que no importa el esfuerzo que se haga, ya que nunca se logrará evaluar $\int e^{x^2}\,dx$ en términos de las funciones que conocemos. (Sin embargo, en el capítulo 11, veremos cómo expresar $\int e^{x^2}\,dx$ como una serie infinita.) Lo mismo puede decirse de las siguientes integrales:

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx \qquad \int \operatorname{sen}(x^2)\,dx \qquad \int \cos(e^x)\,dx$$

$$\int \sqrt{x^3 + 1}\,dx \qquad \int \frac{1}{\ln x}\,dx \qquad \int \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$$

De hecho, la mayoría de las funciones elementales no tienen antiderivadas elementales. Sin embargo, puede usted estar seguro que todas las integrales en los siguientes ejercicios son funciones elementales.

7.5 Ejercicios

1-82 Evalúe las siguientes integrales.

1. $\int \cos x\,(1 + \operatorname{sen}^2 x)\,dx$

2. $\int_0^1 (3x + 1)^{\sqrt{2}}\,dx$

3. $\int \dfrac{\operatorname{sen} x + \sec x}{\tan x}\,dx$

4. $\int \dfrac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos x}\,dx$

5. $\int \dfrac{t}{t^4 + 2}\,dt$

6. $\int_0^1 \dfrac{x}{(2x + 1)^3}\,dx$

7. $\int_{-1}^{1} \dfrac{e^{\arctan y}}{1 + y^2}\,dy$

8. $\int t \operatorname{sen} t \cos t\,dt$

9. $\int_1^3 r^4 \ln r\,dr$

10. $\int_0^4 \dfrac{x - 1}{x^2 - 4x - 5}\,dx$

11. $\int \dfrac{x - 1}{x^2 - 4x + 5}\,dx$

12. $\int \dfrac{x}{x^4 + x^2 + 1}\,dx$

13. $\int \operatorname{sen}^5 t \cos^4 t\,dt$

14. $\int \dfrac{x^3}{\sqrt{1 + x^2}}\,dx$

15. $\int \dfrac{dx}{(1 - x^2)^{3/2}}$

16. $\int_0^{\sqrt{2}/2} \dfrac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$

17. $\int_0^{\pi} t \cos^2 t\,dt$

18. $\int_1^4 \dfrac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,dt$

19. $\int e^{x + e^x}\,dx$

20. $\int e^2\,dx$

21. $\int \arctan \sqrt{x}\,dx$

22. $\int \dfrac{\ln x}{x\sqrt{1 + (\ln x)^2}}\,dx$

23. $\int_0^1 \left(1 + \sqrt{x}\right)^8 dx$

24. $\int_0^4 \dfrac{6z + 5}{2z + 1}\,dz$

25. $\int \dfrac{3x^2 - 2}{x^2 - 2x - 8}\,dx$

26. $\int \dfrac{3x^2 - 2}{x^3 - 2x - 8}\,dx$

27. $\int \dfrac{dx}{1 + e^x}$

28. $\int \operatorname{sen} \sqrt{at}\,dt$

29. $\int \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) dx$

30. $\int_{-1}^{2} |\,e^x - 1\,|\,dx$

31. $\int \sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}}\,dx$

32. $\int \dfrac{\sqrt{2x - 1}}{2x + 3}\,dx$

33. $\int \sqrt{3 - 2x - x^2}\,dx$

34. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \dfrac{1 + 4\cot x}{4 - \cot x}\,dx$

35. $\int \cos 2x \cos 6x\,dx$

36. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \dfrac{x^2 \tan x}{1 + \cos^4 x}\,dx$

37. $\int_0^{\pi/4} \tan^3\theta \sec^2\theta\,d\theta$

38. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \dfrac{\operatorname{sen}\theta \cot\theta}{\sec\theta}\,d\theta$

39. $\int \dfrac{\sec\theta \tan\theta}{\sec^2\theta - \sec\theta}\,d\theta$

40. $\int \dfrac{1}{\sqrt{4y^2 - 4y - 3}}\,dy$

41. $\int \theta \tan^2\theta\,d\theta$

42. $\int \dfrac{\tan^{-1} x}{x^2}\,dx$

43. $\int \dfrac{\sqrt{x}}{1 + x^3}\,dx$

44. $\int \sqrt{1 + e^x}\,dx$

45. $\int x^5 e^{-x^3} dx$

46. $\int \dfrac{(x - 1)e^x}{x^2}\,dx$

47. $\int x^3 (x - 1)^{-4}\,dx$

48. $\int_0^1 x\sqrt{2 - \sqrt{1 - x^2}}\,dx$

49. $\int \dfrac{1}{x\sqrt{4x + 1}}\,dx$

50. $\int \dfrac{1}{x^2\sqrt{4x + 1}}\,dx$

51. $\int \dfrac{1}{x\sqrt{4x^2 + 1}}\,dx$

52. $\int \dfrac{dx}{x(x^4 + 1)}$

1. Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

53. $\int x^2 \operatorname{senh} mx\, dx$

54. $\int (x + \operatorname{sen} x)^2\, dx$

55. $\int \dfrac{dx}{x + x\sqrt{x}}$

56. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x} + x\sqrt{x}}$

57. $\int x\sqrt[3]{x + c}\, dx$

58. $\int \dfrac{x \ln x}{\sqrt{x^2 - 1}}\, dx$

59. $\int \cos x \cos^3(\operatorname{sen} x)\, dx$

60. $\int \dfrac{dx}{x^2\sqrt{4x^2 - 1}}$

61. $\int \dfrac{d\theta}{1 + \cos\theta}$

62. $\int \dfrac{d\theta}{1 + \cos^2\theta}$

63. $\int \sqrt{x}\, e^{\sqrt{x}}\, dx$

64. $\int \dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{x} + 1}}\, dx$

65. $\int \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{1 + \cos^4 x}\, dx$

66. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \dfrac{\ln(\tan x)}{\operatorname{sen} x \cos x}\, dx$

67. $\int \dfrac{1}{\sqrt{x + 1} + \sqrt{x}}\, dx$

68. $\int \dfrac{x^2}{x^6 + 3x^3 + 2}\, dx$

69. $\int_1^{\sqrt{3}} \dfrac{\sqrt{1 + x^2}}{x^2}\, dx$

70. $\int \dfrac{1}{1 + 2e^x - e^{-x}}\, dx$

71. $\int \dfrac{e^{2x}}{1 + e^x}\, dx$

72. $\int \dfrac{\ln(x + 1)}{x^2}\, dx$

73. $\int \dfrac{x + \operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$

74. $\int \dfrac{4^x + 10^x}{2^x}\, dx$

75. $\int \dfrac{1}{(x - 2)(x^2 + 4)}\, dx$

76. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}\,(2 + \sqrt{x})^4}$

77. $\int \dfrac{xe^x}{\sqrt{1 + e^x}}\, dx$

78. $\int \dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}\, dx$

79. $\int x \operatorname{sen}^2 x \cos x\, dx$

80. $\int \dfrac{\sec x \cos 2x}{\operatorname{sen} x + \sec x}\, dx$

81. $\int \sqrt{1 - \operatorname{sen} x}\, dx$

82. $\int \dfrac{\operatorname{sen} x \cos x}{\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x}\, dx$

83. Las funciones $y = e^{x^2}$ y $y = x^2 e^{x^2}$ no tienen antiderivadas elementales, pero sí $y = (2x^2 + 1)e^{x^2}$. Determine $\int (2x^2 + 1)e^{x^2}\, dx$.

84. Sabemos que $F(x) = \int_0^x e^{e^t}\, dt$ es una función continua por el TFC1, aunque no es una función elemental. Las funciones

$$\int \frac{e^x}{x}\, dx \qquad \text{y} \qquad \int \frac{1}{\ln x}\, dx$$

tampoco son elementales, pero pueden expresarse en términos de F. Obtenga las siguientes integrales en términos de F.

a) $\int_1^2 \dfrac{e^x}{x}\, dx$ b) $\int_2^3 \dfrac{1}{\ln x}\, dx$

7.6 Integración utilizando tablas y sistemas algebraicos computarizados

En esta sección describimos cómo utilizar tablas y sistemas algebraicos computarizados para integrar funciones que tienen antiderivadas elementales. Sin embargo, debemos tener en mente que aun el sistema algebraico computarizado más poderoso, no puede encontrar fórmulas explícitas para las antiderivadas de funciones como e^{x^2} o de las otras funciones descritas al final de la sección 7.5.

Tablas de integrales

Las tablas de integrales indefinidas son muy útiles cuando abordamos una integral difícil de determinar a mano y no tenemos acceso a un sistema algebraico computarizado. En las páginas de referencia al final de este libro, se exhibe una tabla relativamente breve de 120 integrales, categorizada por forma. Tablas más extensas están disponibles en el *CRC Standard Mathematical Tables and Formulae*, 31a. ed. de Daniel Zwillinger (Boca Ratón, FL, 2002) (709 elementos) o en el de Gradshteyn and Ryzhik *Table of Integrals, Series, and Products*, 7e (San Diego, 2007), que contiene cientos de páginas de integrales. Sin embargo, hay que recordar que las integrales no surgen frecuentemente en la forma exacta en la que aparecen en las tablas. Normalmente necesitamos utilizar la regla de sustitución o manipulaciones algebraicas para transformar una integral dada en una de las formas de la tabla.

EJEMPLO 1 La región limitada por las curvas $y = \arctan x$, $y = 0$ y $x = 1$ rota alrededor del eje y. Encuentre el volumen del sólido resultante.

SOLUCIÓN Utilizando el método de cascarones cilíndricos, vemos que el volumen es

$$V = \int_0^1 2\pi x \arctan x\, dx$$

La tabla de integrales aparece en las páginas de referencia 6-10 al final del libro.

En la sección de la tabla de integrales titulada "Formas trigonométricas inversas" localizamos la fórmula 92:

$$\int u \tan^{-1}u \, du = \frac{u^2 + 1}{2} \tan^{-1}u - \frac{u}{2} + C$$

Así, el volumen es

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^1 x \tan^{-1}x \, dx = 2\pi \left[\frac{x^2 + 1}{2} \tan^{-1}x - \frac{x}{2} \right]_0^1 \\ &= \pi \left[(x^2 + 1) \tan^{-1}x - x \right]_0^1 = \pi (2 \tan^{-1} 1 - 1) \\ &= \pi [2(\pi/4) - 1] = \tfrac{1}{2}\pi^2 - \pi \end{aligned}$$

V EJEMPLO 2 Utilice la tabla de integrales para encontrar $\int \dfrac{x^2}{\sqrt{5 - 4x^2}} \, dx$.

SOLUCIÓN Si revisamos en la sección de la tabla titulada "Formas que involucran $\sqrt{a^2 - u^2}$" vemos que la forma más cercana es la número 34:

$$\int \frac{u^2}{\sqrt{a^2 - u^2}} \, du = -\frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

Esto no es exactamente lo que tenemos, pero la podremos utilizar si primero hacemos la sustitución $u = 2x$:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{5 - 4x^2}} \, dx = \int \frac{(u/2)^2}{\sqrt{5 - u^2}} \frac{du}{2} = \frac{1}{8} \int \frac{u^2}{\sqrt{5 - u^2}} \, du$$

Después utilizamos la fórmula 34 con $a^2 = 5$ (de modo que $a = \sqrt{5}$):

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{5 - 4x^2}} \, dx &= \frac{1}{8} \int \frac{u^2}{\sqrt{5 - u^2}} \, du = \frac{1}{8} \left(-\frac{u}{2} \sqrt{5 - u^2} + \frac{5}{2} \operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{\sqrt{5}} \right) + C \\ &= -\frac{x}{8} \sqrt{5 - 4x^2} + \frac{5}{16} \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{2x}{\sqrt{5}}\right) + C \end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Utilice la tabla de integrales para evaluar $\int x^3 \operatorname{sen} x \, dx$.

SOLUCIÓN Si revisamos la sección "Formas trigonométricas", vemos que ninguna de las formas incluye explícitamente a u^3 como factor. Sin embargo, podemos utilizar la fórmula de reducción en la forma 84 con $n = 3$:

$$\int x^3 \operatorname{sen} x \, dx = -x^3 \cos x + 3 \int x^2 \cos x \, dx$$

Ahora necesitamos evaluar $\int x^2 \cos x \, dx$. Podemos utilizar la fórmula de reducción de la forma 85 con $n = 2$, seguido de la forma 82:

$$\begin{aligned} \int x^2 \cos x \, dx &= x^2 \operatorname{sen} x - 2 \int x \operatorname{sen} x \, dx \\ &= x^2 \operatorname{sen} x - 2(\operatorname{sen} x - x \cos x) + K \end{aligned}$$

85. $\int u^n \cos u \, du$

$= u^n \operatorname{sen} u - n \int u^{n-1} \operatorname{sen} u \, du$

Combinando estos cálculos, obtenemos

$$\int x^3 \operatorname{sen} x\, dx = -x^3 \cos x + 3x^2 \operatorname{sen} x + 6x \cos x - 6 \operatorname{sen} x + C$$

donde $C = 3K$.

V EJEMPLO 4 Utilice la tabla de integrales para encontrar $\int x\sqrt{x^2 + 2x + 4}\, dx$.

SOLUCIÓN Puesto que la tabla da las formas que involucran $\sqrt{a^2 + x^2}$, $\sqrt{a^2 - x^2}$ y $\sqrt{x^2 - a^2}$, pero no $\sqrt{ax^2 + bx + c}$, primero completamos el cuadrado:

$$x^2 + 2x + 4 = (x + 1)^2 + 3$$

Si hacemos la sustitución $u = x + 1$ (de modo que $x = u - 1$), el integrando involucrará el patrón $\sqrt{a^2 + u^2}$:

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x^2 + 2x + 4}\, dx &= \int (u - 1)\sqrt{u^2 + 3}\, du \\ &= \int u\sqrt{u^2 + 3}\, du - \int \sqrt{u^2 + 3}\, du\end{aligned}$$

La primera integral se determina utilizando la sustitución $t = u^2 + 3$:

$$\int u\sqrt{u^2 + 3}\, du = \tfrac{1}{2}\int \sqrt{t}\, dt = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{3} t^{3/2} = \tfrac{1}{3}(u^2 + 3)^{3/2}$$

21. $\displaystyle\int \sqrt{a^2 + u^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 + u^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(u + \sqrt{a^2 + u^2}\right) + C$

Para la segunda integral utilizamos la fórmula 21 con $a = \sqrt{3}$:

$$\int \sqrt{u^2 + 3}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 + 3} + \tfrac{3}{2}\ln\left(u + \sqrt{u^2 + 3}\right)$$

Así

$$\begin{aligned}&\int x\sqrt{x^2 + 2x + 4}\, dx \\ &= \tfrac{1}{3}(x^2 + 2x + 4)^{3/2} - \frac{x + 1}{2}\sqrt{x^2 + 2x + 4} - \tfrac{3}{2}\ln\left(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 4}\right) + C\end{aligned}$$

Sistemas algebraicos computarizados

Hemos visto que el uso de las tablas implica la comparación de la forma del integrando dado con las formas del integrando en las tablas. Las computadoras son particularmente aptas para comparar patrones. Así como utilizamos sustituciones conjuntamente con las tablas, un SAC puede ejecutar sustituciones que transforman una integral dada en una que aparece almacenada en la memoria. Así, no es de sorprender que un sistema algebraico computarizado destaque en la integración. Esto no significa que la integración a mano sea una habilidad obsoleta. Veremos que el cálculo manual algunas veces produce una integral indefinida en una forma que es más conveniente que la respuesta dada por una máquina.

Para empezar, veamos qué pasa cuando le pedimos a una máquina que integre la relativamente simple función $y = 1/(3x - 2)$. Utilizando la sustitución $u = 3x - 2$, un fácil cálculo a mano da

$$\int \frac{1}{3x - 2}\, dx = \tfrac{1}{3}\ln|3x - 2| + C$$

mientras Derive, Mathematica y Maple regresan la respuesta

$$\tfrac{1}{3}\ln(3x - 2)$$

La primera cuestión que notamos es que el sistema algebraico computarizado omite la constante de integración. En otras palabras, produce una antiderivada *particular*, no la más general. Por tanto, cuando hacemos uso de una máquina de integración, se tendría que agregar una constante. Segundo, los signos de valor absoluto se omiten en la respuesta dada por la máquina. Esto está bien si a nuestro problema sólo le conciernen valores de x mayores que $\frac{2}{3}$. Pero si estamos interesados en otros valores de x, entonces necesitamos insertar el símbolo de valor absoluto.

En el siguiente ejemplo reconsideramos la integral del ejemplo 4, pero esta vez le pedimos la respuesta a una máquina.

EJEMPLO 5 Utilice un sistema algebraico computarizado para encontrar $\int x\sqrt{x^2 + 2x + 4}\,dx$.

SOLUCIÓN Maple proporciona la respuesta

$$\tfrac{1}{3}(x^2 + 2x + 4)^{3/2} - \tfrac{1}{4}(2x + 2)\sqrt{x^2 + 2x + 4} - \frac{3}{2}\operatorname{arcsenh}\frac{\sqrt{3}}{3}(1 + x)$$

Esta parece diferente de la respuesta encontrada en el ejemplo 4, pero es equivalente porque el tercer término puede reescribirse utilizando la identidad

Ésta es la ecuación 3.11.3.

$$\operatorname{arcsenh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

Así

$$\begin{aligned}\operatorname{arcsenh}\frac{\sqrt{3}}{3}(1 + x) &= \ln\left[\frac{\sqrt{3}}{3}(1 + x) + \sqrt{\tfrac{1}{3}(1 + x)^2 + 1}\right] \\ &= \ln\frac{1}{\sqrt{3}}\left[1 + x + \sqrt{(1 + x)^2 + 3}\right] \\ &= \ln\frac{1}{\sqrt{3}} + \ln\left(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 4}\right)\end{aligned}$$

El término resultante adicional $-\frac{3}{2}\ln\left(1/\sqrt{3}\right)$ puede absorberse por la constante de integración.

Mathematica aporta la respuesta

$$\left(\frac{5}{6} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{3}\right)\sqrt{x^2 + 2x + 4} - \frac{3}{2}\operatorname{arcsenh}\left(\frac{1 + x}{\sqrt{3}}\right)$$

Mathematica combina los dos primeros términos del ejemplo 4 (y el resultado de Maple) en un solo término mediante factorización.

Derive da la respuesta

$$\tfrac{1}{6}\sqrt{x^2 + 2x + 4}\,(2x^2 + x + 5) - \tfrac{3}{2}\ln\left(\sqrt{x^2 + 2x + 4} + x + 1\right)$$

El primer término se parece al primer término en la respuesta de Mathematica, y el segundo término es idéntico al último término del ejemplo 4.

EJEMPLO 6 Utilice un SAC para determinar $\int x(x^2 + 5)^8\,dx$.

SOLUCIÓN Maple y Mathematica dan la misma respuesta:

$$\tfrac{1}{18}x^{18} + \tfrac{5}{2}x^{16} + 50x^{14} + \tfrac{1750}{3}x^{12} + 4\,375x^{10} + 21\,875x^8 + \tfrac{218\,750}{3}x^6 + 156\,250x^4 + \tfrac{390\,625}{2}x^2$$

Es claro que ambos sistemas deben haber desarrollado $(x^2 + 5)^8$ mediante el teorema del binomio y después integrado cada término.

Si integramos a mano utilizando la sustitución $u = x^2 + 5$, obtenemos

El programa Derive y TI-89 y TI-92 también dan la misma respuesta.

$$\int x(x^2 + 5)^8\,dx = \tfrac{1}{18}(x^2 + 5)^9 + C$$

Para la mayoría de los propósitos, ésta es la forma más conveniente de la respuesta.

EJEMPLO 7 Utilice un SAC para encontrar $\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x\,dx$.

SOLUCIÓN En el ejemplo 2 en la sección 7.2 encontramos que

$$\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x\,dx = -\tfrac{1}{3}\cos^3 x + \tfrac{2}{5}\cos^5 x - \tfrac{1}{7}\cos^7 x + C \quad (1)$$

Derive y Maple reportan la respuesta

$$-\tfrac{1}{7}\operatorname{sen}^4 x \cos^3 x - \tfrac{4}{35}\operatorname{sen}^2 x \cos^3 x - \tfrac{8}{105}\cos^3 x$$

mientras que Mathematica produce

$$-\tfrac{5}{64}\cos x - \tfrac{1}{192}\cos 3x + \tfrac{3}{320}\cos 5x - \tfrac{1}{448}\cos 7x$$

Sospechamos que existen identidades trigonométricas que demuestran que estas tres respuestas son equivalentes. De hecho, si le pedimos a Derive, Maple y Mathematica que simplifique sus expresiones utilizando identidades trigonométricas, finalmente producirán la misma forma de la respuesta que en la ecuación 1.

7.6 Ejercicios

1-4 Utilice la forma indicada en la tabla de integrales en las páginas de referencia para evaluar las integrales.

1. $\int_0^{\pi/2} \cos 5x \cos 2x\,dx$; forma 80
2. $\int_0^1 \sqrt{x - x^2}\,dx$; forma 113
3. $\int_1^2 \sqrt{4x^2 - 3}\,dx$; forma 39
4. $\int_0^1 \tan^3(\pi x/6)\,dx$; forma 69

5-32 Utilice la tabla de integrales de las páginas de referencia 6-10 para evaluar las siguientes integrales.

5. $\int_0^{\pi/8} \arctan 2x\,dx$
6. $\int_0^2 x^2\sqrt{4 - x^2}\,dx$
7. $\int \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x - 9}\,dx$
8. $\int \dfrac{\ln(1 + \sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$
9. $\int \dfrac{dx}{x^2\sqrt{4x^2 + 9}}$
10. $\int \dfrac{\sqrt{2y^2 - 3}}{y^2}\,dy$
11. $\int_{-1}^0 t^2 e^{-t}\,dt$
12. $\int x^2 \operatorname{csch}(x^3 + 1)\,dx$
13. $\int \dfrac{\tan^3(1/z)}{z^2}\,dz$
14. $\int \operatorname{sen}^{-1}\sqrt{x}\,dx$
15. $\int e^{2x} \arctan(e^x)\,dx$
16. $\int x \operatorname{sen}(x^2)\cos(3x^2)\,dx$
17. $\int y\sqrt{6 + 4y - 4y^2}\,dy$
18. $\int \dfrac{dx}{2x^3 - 3x^2}$
19. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos x \ln(\operatorname{sen} x)\,dx$
20. $\int \dfrac{\operatorname{sen} 2}{\sqrt{5 - \operatorname{sen}}}\,d$
21. $\int \dfrac{e^x}{3 - e^{2x}}\,dx$
22. $\int_0^2 x^3\sqrt{4x^2 - x^4}\,dx$
23. $\int \sec^5 x\,dx$
24. $\int \operatorname{sen}^6 2x\,dx$

25. $\int \frac{\sqrt{4 + (\ln x)^2}}{x}\,dx$

26. $\int_0^1 x^4 e^{-x}\,dx$

27. $\int \frac{\cos^{-1}(x^{-2})}{x^3}\,dx$

28. $\int (t + 1)\sqrt{t^2 - 2t - 1}\,dt$

29. $\int \sqrt{e^{2x} - 1}\,dx$

30. $\int e^t \operatorname{sen}(\alpha t - 3)\,dt$

31. $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{x^{10} - 2}}$

32. $\int \frac{\sec^2\theta \tan^2\theta}{\sqrt{9 - \tan^2\theta}}\,d\theta$

33. La región bajo la curva $y = \operatorname{sen}^2 x$ desde 0 hasta π rota alrededor del eje x. Encuentre el volumen del sólido resultante.

34. Encuentre el volumen del sólido obtenido cuando la región bajo la curva $y = \arcsen x$, $x \geqslant 0$, rota alrededor del eje y.

35. Verifique la fórmula 53 en la tabla de integrales a) por derivación y b) utilizando la sustitución $t = a + bu$.

36. Verifique la fórmula 31 a) por derivación y b) por la sustitución $u = a \operatorname{sen}\theta$.

SAC **37-44** Utilice un sistema algebraico computarizado para evaluar la integral. Compare la respuesta con el resultado utilizando tablas. Si las respuestas no son las mismas, demuestre que son equivalentes.

37. $\int \sec^4 x\,dx$

38. $\int \csc^5 x\,dx$

39. $\int x^2\sqrt{x^2 + 4}\,dx$

40. $\int \frac{dx}{e^x(3e^x + 2)}$

41. $\int \cos^4 x\,dx$

42. $\int x^2\sqrt{1 - x^2}\,dx$

43. $\int \tan^5 x\,dx$

44. $\int \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x}}}\,dx$

SAC **45.** a) Utilice la tabla de integrales para evaluar $F(x) = \int f(x)\,dx$, donde

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}}$$

¿Cuál es el dominio de f y de F?

b) Utilice un SAC para evaluar $F(x)$ ¿Cuál es el dominio de la función F que produce el SAC? ¿Hay una discrepancia entre este dominio y el dominio de la función F que encontró en el inciso a)?

SAC **46.** A veces los sistemas algebraicos computarizados necesitan ayuda de la mano del ser humano. Intente determinar

$$\int (1 + \ln x)\sqrt{1 + (x \ln x)^2}\,dx$$

con un sistema algebraico computarizado. Si no obtiene respuesta, haga una sustitución que cambie la integral en una que el SAC *pueda* evaluar.

PROYECTO PARA UN DESCUBRIMIENTO

SAC PATRONES EN INTEGRALES

En este proyecto se utiliza un sistema algebraico computarizado para investigar integrales indefinidas de familias de funciones. Observando los patrones que ocurren en la integral de varios miembros de la familia, conjeture primero, y después demuestre, una fórmula general para la integral de cualquier miembro de la familia.

1. a) Utilice un sistema algebraico computarizado para evaluar las siguientes integrales.

i) $\int \frac{1}{(x + 2)(x + 3)}\,dx$

ii) $\int \frac{1}{(x + 1)(x + 5)}\,dx$

iii) $\int \frac{1}{(x + 2)(x - 5)}\,dx$

iv) $\int \frac{1}{(x + 2)^2}\,dx$

b) Basado en el patrón de sus respuestas del inciso a), conjeture el valor de la integral

$$\int \frac{1}{(x + a)(x + b)}\,dx$$

si $a \neq b$. ¿Qué pasa si $a = b$?

c) Verifique su conjetura pidiendo a su SAC que evalúe la integral del inciso b). Después, demuéstrela utilizando fracciones parciales.

SAC Se requiere sistema algebraico computarizado

2. a) Utilice un sistema algebraico computarizado para evaluar las siguientes integrales

i) $\int \operatorname{sen} x \cos 2x \, dx$ ii) $\int \operatorname{sen} 3x \cos 7x \, dx$ iii) $\int \operatorname{sen} 8x \cos 3x \, dx$

b) Basado en el patrón de sus respuestas del inciso a), conjeture el valor de la integral

$$\int \operatorname{sen} ax \cos bx \, dx$$

c) Verifique su conjetura con un SAC. Después demuéstrela utilizando las técnicas de la sección 7.2. ¿Para qué valores de a y b es válida?

3. a) Utilice un sistema algebraico computarizado para evaluar las siguientes integrales.

i) $\int \ln x \, dx$ ii) $\int x \ln x \, dx$ iii) $\int x^2 \ln x \, dx$

iv) $\int x^3 \ln x \, dx$ v) $\int x^7 \ln x \, dx$

b) Basado en el patrón de sus respuestas del inciso a), conjeture el valor de

$$\int x^n \ln x \, dx$$

c) Utilice integración por partes para demostrar la conjetura que hizo en el inciso b). ¿Para qué valores de n es esto válido?

4. a) Utilice un sistema algebraico computarizado para evaluar las siguientes integrales.

i) $\int xe^x \, dx$ ii) $\int x^2 e^x \, dx$ iii) $\int x^3 e^x \, dx$

iv) $\int x^4 e^x \, dx$ v) $\int x^5 e^x \, dx$

b) Basado en el patrón de sus respuestas del inciso a), conjeture el valor de $\int x^6 e^x \, dx$. Después, utilice su SAC para verificar su conjetura.

c) Basado en los patrones de los incisos a) y b), haga una conjetura en relación con el valor de la integral

$$\int x^n e^x \, dx$$

cuando n es un entero positivo.

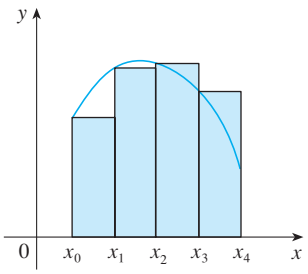
d) Utilice inducción matemática para demostrar la conjetura que hizo en el inciso c).

7.7 Integración aproximada

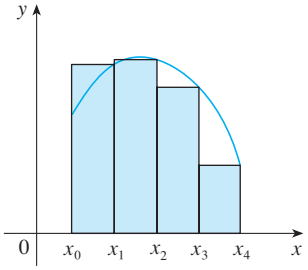
Hay dos situaciones en las cuales es imposible encontrar el valor exacto de una integral definida.

La primera de ellas surge del hecho de que, al evaluar $\int_a^b f(x) \, dx$ utilizando el teorema fundamental del cálculo, necesitemos conocer una antiderivada de f. Sin embargo, algunas veces es difícil, o aun imposible, encontrar una antiderivada (véase la sección 7.5). Por ejemplo, es imposible evaluar exactamente las siguientes integrales:

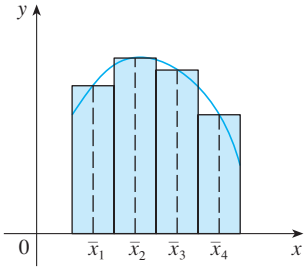
$$\int_0^1 e^{x^2} dx \qquad \int_{-1}^1 \sqrt{1 + x^3} \, dx$$



a) Aproximación por el punto extremo izquierdo



b) Aproximación por el punto extremo derecho



c) Aproximación por el punto medio

FIGURA 1

La segunda situación surge cuando la función es producto de un experimento científico, obtenida a través de lecturas en un instrumento o de una colección de datos. Podría no haber fórmula para la función (véase el ejemplo 5).

En ambos casos necesitamos encontrar valores aproximados de la integral definida. Ya se conoce un método. Recordemos que la integral definida se define como el límite de una suma de Riemann, por lo que podría utilizarse cualquier suma de Riemann como una aproximación a la integral: si dividimos $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud $\Delta x = (b - a)/n$, entonces tenemos

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

donde x_i^* es cualquier punto en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Si se elige x_i^* en el extremo izquierdo del intervalo, entonces $x_i^* = x_{i-1}$ y tenemos

$$\boxed{1} \qquad \int_a^b f(x)\,dx \approx L_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x$$

Si $f(x) \geqslant 0$, entonces la integral representa un área y $\boxed{1}$ representa una aproximación a esta área mediante los rectángulos que se muestran en la figura 1a). Si elegimos x_i^* en el extremo derecho del intervalo, entonces $x_i^* = x_i$ y tenemos

$$\boxed{2} \qquad \int_a^b f(x)\,dx \approx R_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

[Véase la figura 1b).] Las aproximaciones L_n y R_n definidas por las ecuaciones 1 y 2 se llaman **aproximación por el punto extremo izquierdo** y **aproximación por el punto extremo derecho**, respectivamente.

En la sección 5.2 también consideramos el caso donde se elige x_i^* como el punto medio $\bar{x}_i$ del subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. La figura 1c) muestra la aproximación por el punto medio M_n que parece ser mejor que L_n o R_n.

Regla del punto medio

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx M_n = \Delta x\,[f(\bar{x}_1) + f(\bar{x}_2) + \cdots + f(\bar{x}_n)]$$

donde $$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

y $$\bar{x}_i = \tfrac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) = \text{punto medio de } [x_{i-1}, x_i]$$

Otra aproximación, llamada regla del trapecio, resulta de promediar las aproximaciones de las ecuaciones 1 y 2:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x + \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x\right] = \frac{\Delta x}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} \big(f(x_{i-1}) + f(x_i)\big)\right]$$

$$= \frac{\Delta x}{2}\big[\big(f(x_0) + f(x_1)\big) + \big(f(x_1) + f(x_2)\big) + \cdots + \big(f(x_{n-1}) + f(x_n)\big)\big]$$

$$= \frac{\Delta x}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

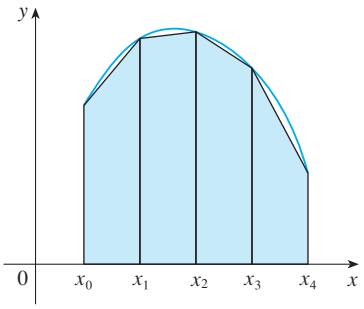


FIGURA 2
Aproximación trapezoidal

Regla del trapecio

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx T_n = \frac{\Delta x}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

donde $\Delta x = (b - a)/n$ y $x_i = a + i\,\Delta x$.

La razón para el nombre de la regla del trapecio puede verse de la figura 2, que ilustra el caso con $f(x) \geqslant 0$ y $n = 4$. El área del trapezoide que está encima del i-ésimo subintervalo es

$$\Delta x\left(\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\right) = \frac{\Delta x}{2}\left[f(x_{i-1}) + f(x_i)\right]$$

y si sumamos las áreas de todos los trapezoides, obtenemos el lado derecho de la regla del trapecio.

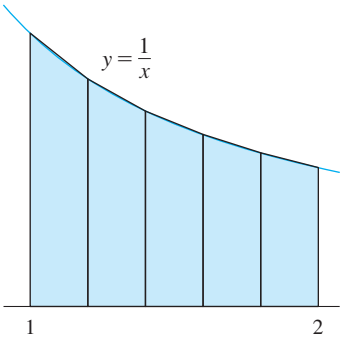


FIGURA 3

EJEMPLO 1 Utilice a) la regla del trapecio y b) la regla del punto medio con $n = 5$ para aproximar la integral $\int_1^2 (1/x)\,dx$.

SOLUCIÓN

a) Con $n = 5$, $a = 1$ y $b = 2$, tenemos $\Delta x = (2 - 1)/5 = 0.2$, por lo que la regla del trapecio da

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx T_5 = \frac{0.2}{2}\left[f(1) + 2f(1.2) + 2f(1.4) + 2f(1.6) + 2f(1.8) + f(2)\right]$$

$$= 0.1\left(\frac{1}{1} + \frac{2}{1.2} + \frac{2}{1.4} + \frac{2}{1.6} + \frac{2}{1.8} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\approx 0.695635$$

Esta aproximación se ilustra en la figura 3.

b) Los puntos medios de los cinco subintervalos son 1.1, 1.3, 1.5, 1.7 y 1.9, así que la regla del punto medio da

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx \Delta x\left[f(1.1) + f(1.3) + f(1.5) + f(1.7) + f(1.9)\right]$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{1.1} + \frac{1}{1.3} + \frac{1}{1.5} + \frac{1}{1.7} + \frac{1}{1.9}\right)$$

$$\approx 0.691908$$

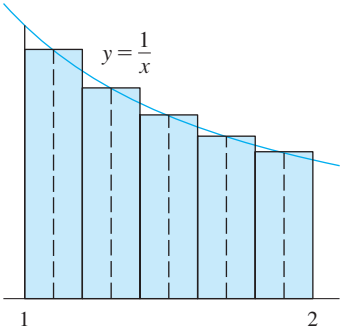


FIGURA 4

Esta aproximación se ilustra en la figura 4.

En el ejemplo 1 elegimos deliberadamente una integral cuyo valor puede calcularse explícitamente, así que podemos ver cuán precisas son las reglas del trapecio y del punto medio. Por el teorema fundamental del cálculo,

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \ln x\,]_1^2 = \ln 2 = 0.693147\ldots$$

$\int_a^b f(x)\,dx$ = aproximación + error

El **error** al usar una aproximación se define como la cantidad que debe sumarse a la aproximación para que sea exacta. De los valores en el ejemplo 1, vemos que los errores en las aproximaciones por las reglas del trapecio y del punto medio para $n = 5$ son

$$E_T \approx -0.002488 \text{ y } E_M \approx 0.001239$$

En general, tenemos

$$E_T = \int_a^b f(x)\,dx - T_n \qquad \text{y} \qquad E_M = \int_a^b f(x)\,dx - M_n$$

TEC Module 5.2/7.7 le permite comparar métodos de aproximación.

Las siguientes tablas muestran el resultado de cálculos similares a los del ejemplo 1, pero para $n = 5$, 10 y 20 y para las aproximaciones por el extremo izquierdo y el derecho así como las reglas del trapecio y del punto medio.

Aproximaciones a $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$

n	L_n	R_n	T_n	M_n
5	0.745635	0.645635	0.695635	0.691908
10	0.718771	0.668771	0.693771	0.692835
20	0.705803	0.680803	0.693303	0.693069

Errores correspondientes

n	E_L	E_R	E_T	E_M
5	−0.052488	0.047512	−0.002488	0.001239
10	−0.025624	0.024376	−0.000624	0.000312
20	−0.012656	0.012344	−0.000156	0.000078

De estas tablas pueden hacerse varias observaciones:

1. En todos los métodos se obtuvieron aproximaciones más exactas cuando se incrementa el valor de n. Pero valores muy grandes de n requieren de tantas operaciones aritméticas que se debe considerar del error de redondeo acumulado.
2. Los errores en las aproximaciones del punto extremo izquierdo y el derecho son de signo opuesto y al parecer disminuyen por un factor de aproximadamente 2 cuando se duplica el valor de n.

Estas observaciones son verdaderas en la mayoría de los casos.

3. Las reglas del trapecio y del punto medio son mucho más exactas que las aproximaciones de punto extremo.
4. Los errores en las reglas del trapecio y del punto medio son de signo opuesto y al parecer disminuyen por un factor de alrededor de 4 cuando se duplica el valor de n.
5. El tamaño del error en la regla del punto medio es casi la mitad del tamaño del error en la regla del trapecio.

La figura 5 muestra por qué usualmente podemos esperar que la regla del punto medio sea más exacta que la del trapecio. El área de un rectángulo representativo en la regla del punto medio es la misma que la del trapecio $ABCD$ cuyo lado superior es tangente a la gráfica de P. El área de este trapezoide es más próxima al área bajo la gráfica de lo que es el área del trapezoide $AQRD$ empleado en la regla del trapecio. [El error el punto medio (sombreado en rojo) es más pequeño que el error trapezoidal (sombreado en azul).]

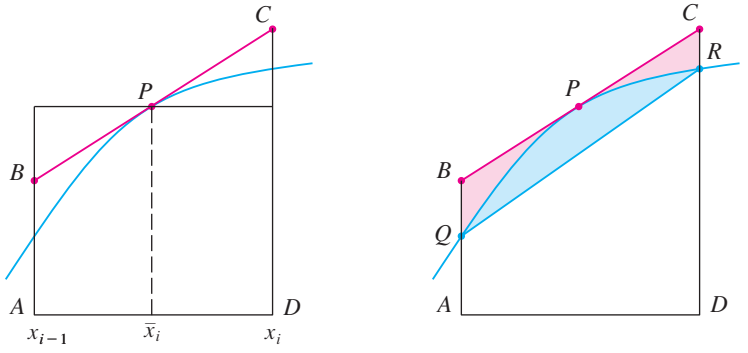


FIGURA 5

Estas observaciones se corroboran en las siguientes estimaciones de error y que se demuestran en textos de análisis numérico. Note que la observación 4 corresponde a n^2 en cada denominador porque $(2n)^2 = 4n^2$. El hecho de que las estimaciones dependan del tamaño de la segunda derivada no es de sorprender si se considera la figura 5, porque $f''(x)$ mide cuánto se curva la gráfica. [Recuerde que $f''(x)$ mide qué tan rápido cambia la pendiente de $y = f(x)$.]

3 Cotas de error Suponga que $|f''(x)| \leq K$ para $a \leq x \leq b$. Si E_T y E_M son los errores en las reglas del trapecio y el punto medio, respectivamente, entonces

$$|E_T| \leq \frac{K(b-a)^3}{12n^2} \qquad \text{y} \qquad |E_M| \leq \frac{K(b-a)^3}{24n^2}$$

Aplicaremos esta estimación del error para la aproximación por la regla del trapecio del ejemplo 1. Si $f(x) = 1/x$, entonces $f'(x) = -1/x^2$ y $f''(x) = 2/x^3$. Como $1 \leq x \leq 2$, tenemos $1/x^2 \leq 1$, así que

$$|f''(x)| = \left|\frac{2}{x^3}\right| \leq \frac{2}{1^3} = 2$$

Por tanto, tomando $K = 2$, $a = 1$, $b = 2$ y $n = 5$ en la estimación de error 3, vemos que

K puede ser cualquier número más grande que todos los valores de $|f''(x)|$, pero valores más pequeños que K dan mejores cotas de error.

$$|E_T| \leq \frac{2(2-1)^3}{12(5)^2} = \frac{1}{150} \approx 0.006667$$

Comparando esta estimación de error de 0.006667 con el error real de casi 0.002488, vemos que es posible que el error real sea sustancialmente menor que la cota superior para el error dado por 3.

V EJEMPLO 2 ¿Cuán grande debería tomarse n a fin de garantizar que las reglas del trapecio y del punto medio para $\int_1^2 (1/x)\,dx$ tengan una exactitud dentro de 0.0001?

SOLUCIÓN En el cálculo precedente, vimos que $|f''(x)| \leq 2$ para $1 \leq x \leq 2$, así que podemos tomar $K = 2$, $a = 1$ y $b = 2$ en 3. La exactitud dentro de 0.0001 significa que el tamaño del error debería ser menor que 0.0001. Por tanto, elegimos n de manera que

$$\frac{2(1)^3}{12n^2} < 0.0001$$

Resolviendo la desigualdad para n, obtenemos

$$n^2 > \frac{2}{12(0.0001)}$$

Es muy posible que un valor menor para n sea suficiente, pero 41 es el valor más pequeño para el cual la fórmula de la cota del error puede *garantizar* exactitud hasta dentro de 0.0001.

o bien

$$n > \frac{1}{\sqrt{0.0006}} \approx 40.8$$

Así, $n = 41$ asegurará la exactitud deseada.

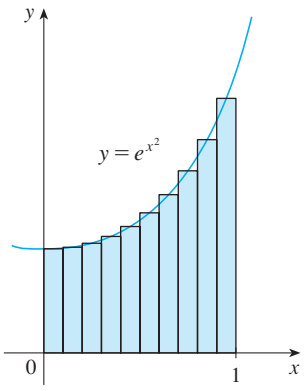


FIGURA 6

Para la misma exactitud con la regla del punto medio, elegimos n de manera que

$$\frac{2(1)^3}{24n^2} < 0.0001 \qquad \text{así que} \qquad n > \frac{1}{\sqrt{0.0012}} \approx 29$$

V EJEMPLO 3

a) Utilice la regla del punto medio con $n = 10$ para aproximar la integral $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$.
b) Proporcione una cota superior para el error involucrado en esta aproximación.

SOLUCIÓN

a) Dado que $a = 0$, $b = 1$ y $n = 10$, la regla del punto medio da

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{x^2}dx &\approx \Delta x\,[f(0.05) + f(0.15) + \cdots + f(0.85) + f(0.95)]\\ &= 0.1[e^{0.0025} + e^{0.0225} + e^{0.0625} + e^{0.1225} + e^{0.2025} + e^{0.3025}\\ &\qquad + e^{0.4225} + e^{0.5625} + e^{0.7225} + e^{0.9025}]\\ &\approx 1.460393\end{aligned}$$

La figura 6 ilustra esta aproximación.

b) Ya que $f(x) = e^{x^2}$, tenemos $f'(x) = 2xe^{x^2}$ y $f''(x) = (2 + 4x^2)e^{x^2}$. También, puesto que $0 \leqslant x \leqslant 1$, tenemos $x^2 \leqslant 1$ y así

$$0 \leqslant f''(x) = (2 + 4x^2)e^{x^2} \leqslant 6e$$

Tomando $K = 6e$, $a = 0$, $b = 1$ y $n = 10$ en el error estimado $\boxed{3}$, vemos que una cota superior para el error es

$$\frac{6e(1)^3}{24(10)^2} = \frac{e}{400} \approx 0.007$$

El error estimado da la cota superior para el error. Son escenarios teóricos del peor de los casos. El error real en este caso resulta ser de cerca de 0.0023.

La regla de Simpson

Otra regla para la integración aproximada resulta del uso de parábolas en lugar de segmentos de recta para aproximar la curva. Como antes, dividimos $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud $h = \Delta x = (b - a)/n$, pero esta vez suponemos que n es un número *par*. Entonces aproximamos la curva $y = f(x) \geqslant 0$ sobre cada par consecutivo de intervalos, por una parábola como se muestra en la figura 7. Si $y_i = f(x_i)$, entonces $P_i(x_i, y_i)$ es el punto en la curva que está sobre x_i. Una parábola representativa pasa por tres puntos consecutivos P_i, P_{i+1}, y P_{i+2}.

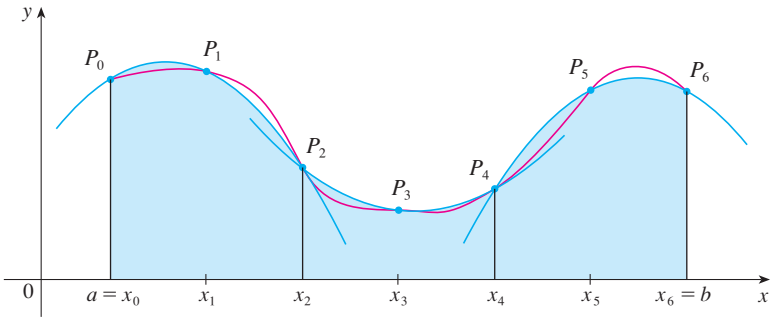


FIGURA 7

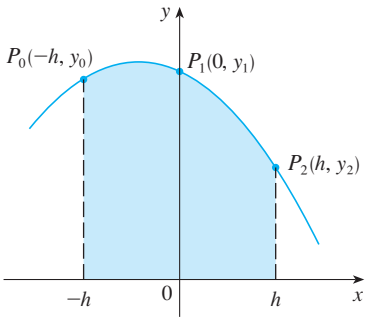


FIGURA 8

Para simplificar nuestros cálculos, primero consideramos el caso donde $x_0 = -h$, $x_1 = 0$ y $x^2 = h$ (véase la figura 8). Sabemos que la ecuación de la parábola que pasa por P_0, P_1 y P_2

es de la forma $y = Ax^2 + Bx + C$ y, por tanto, el área bajo la parábola desde $x = -h$ hasta $x = h$ es

$$\int_{-h}^{h} (Ax^2 + Bx + C)\,dx = 2\int_{0}^{h} (Ax^2 + C)\,dx$$

$$= 2\left[A\,\frac{x^3}{3} + Cx\right]_0^h$$

$$= 2\left(A\,\frac{h^3}{3} + Ch\right) = \frac{h}{3}\,(2Ah^2 + 6C)$$

Aquí, empleamos el teorema 5.5.7. Observe que $Ax^2 + C$ es par y Bx es impar.

Pero, dado que la parábola pasa por $P_0(-h, y_0)$, $P_1(0, y_1)$ y $P_2(h, y_2)$, tenemos

$$y_0 = A(-h)^2 + B(-h) + C = Ah^2 - Bh + C$$

$$y_1 = C$$

$$y_2 = Ah^2 + Bh + C$$

y, por tanto, $$y_0 + 4y_1 + y_2 = 2Ah^2 + 6C$$

Así, podemos reescribir el área bajo la parábola como

$$\frac{h}{3}\,(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Ahora, si desplazamos esta parábola horizontalmente, el área bajo ésta no cambia. Esto significa que el área bajo la parábola que pasa por P_0, P_1 y P_2 desde $x = x_0$ hasta $x = x_2$ en la figura 7 es aún

$$\frac{h}{3}\,(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

De manera similar, el área bajo la parábola que pasa por P_2, P_3 y P_4 desde $x = x_0$ hasta $x = x_4$ es

$$\frac{h}{3}\,(y_2 + 4y_3 + y_4)$$

Si calculamos de esta manera las áreas bajo todas las parábolas y sumamos los resultados, obtenemos

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\,(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}\,(y_2 + 4y_3 + y_4)$$

$$+ \cdots + \frac{h}{3}\,(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

$$= \frac{h}{3}\,(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

Aunque hemos deducido esta aproximación para el caso en el que $f(x) \geqslant 0$, es una aproximación razonable para cualquier función continua f y se le conoce como regla de Simpson en honor del matemático inglés Thomas Simpson (1710-1761). Observe el patrón de coeficientes: 1, 4, 2, 4, 2, 4, 2,..., 4, 2, 4, 1.

Simpson

Thomas Simpson fue un tejedor autodidacta en matemáticas que llegó a ser uno de los mejores matemáticos ingleses del siglo XVIII. Lo que conocemos como regla de Simpson, ya era del dominio de Cavalieri y Gregory en el siglo XVII, pero Simpson la popularizó en su muy vendido libro de cálculo *A New Treatise of Fluxions*.

Regla de Simpson

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx S_n = \frac{\Delta x}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

donde n es par y $\Delta x = (b - a)/n$.

EJEMPLO 4 Utilice la regla de Simpson con $n = 10$ para aproximar $\int_1^2 (1/x)\,dx$.

SOLUCIÓN Escribiendo $f(x) = 1/x$, $n = 0$ y $\Delta x = 0.1$ en la regla de Simpson, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx &\approx S_{10}\\ &= \frac{\Delta x}{3}[f(1) + 4f(1.1) + 2f(1.2) + 4f(1.3) + \cdots + 2f(1.8) + 4f(1.9) + f(2)]\\ &= \frac{0.1}{3}\left(\frac{1}{1} + \frac{4}{1.1} + \frac{2}{1.2} + \frac{4}{1.3} + \frac{2}{1.4} + \frac{4}{1.5} + \frac{2}{1.6} + \frac{4}{1.7} + \frac{2}{1.8} + \frac{4}{1.9} + \frac{1}{2}\right)\\ &\approx 0.693150\end{aligned}$$

Observe que, en el ejemplo 4, la regla de Simpson da una *mucha* mejor aproximación ($S_{10} \approx 0.693150$) para los valores verdaderos de la integral ($\ln 2 \approx 0.693147\ldots$) que los de la regla del trapecio ($T_{10} \approx 0.693771$) o de la regla del punto medio ($M_{10} \approx 0.692835$). Resulta (véase el ejercicio 50) que las aproximaciones en la regla de Simpson son promedios ponderados de los de las reglas del trapecio y del punto medio:

$$S_{2n} = \tfrac{1}{3}T_n + \tfrac{2}{3}M_n$$

(Recuerde que usualmente E_T y E_M tienen signos opuestos y $|E_M|$ es casi la mitad del tamaño de $|E_T|$).

En muchas aplicaciones de cálculo necesitamos evaluar una integral aun cuando no se conoce ninguna fórmula explícita para y como función de x. Una función puede darse en forma gráfica o como una tabla de valores de una colección de datos. Si hay evidencia de que los valores no cambian con rapidez, entonces todavía puede utilizarse la regla del trapecio o la regla de Simpson para hallar un valor aproximado de $\int_a^b y\,dx$, la integral de y respecto a x.

V EJEMPLO 5 La figura 9 muestra el tráfico de datos en la conexión de Estados Unidos a SWITCH, la red suiza universitaria y de investigación, el 10 de febrero de 1998. $D(t)$ es el gasto de información, medido en megabits por segundo (Mb/s). Utilice la regla de Simpson para estimar la cantidad total de datos transmitidos en la conexión de la medianoche hasta el mediodía de ese día.

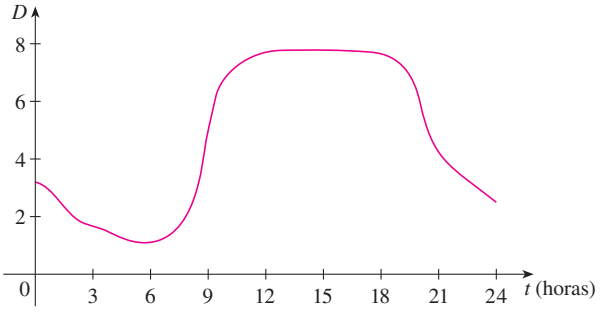


FIGURA 9

SOLUCIÓN Puesto que deseamos que las unidades sean congruentes y $D(t)$ se mide en megabits por segundo, convertimos las unidades de t de horas a segundos. Si $A(t)$ es la cantidad de datos en megabits, transmitida en el instante t, donde t se mide en segundos, entonces $A'(t) = D(t)$. Así, por el teorema del cambio neto (véase la sección 5.4), la cantidad total de datos transmitidos a mediodía (cuando $t = 12 \times 60^2 = 43\,200$) es

$$A(43\,200) = \int_0^{43\,200} D(t)\,dt$$

Estimamos los valores de $D(t)$ a intervalos de una hora a partir de la gráfica y los compilamos en la tabla.

t (horas)	t (segundos)	$D(t)$	t (horas)	t (segundos)	$D(t)$
0	0	3.2	7	25 200	1.3
1	3 600	2.7	8	28 800	2.8
2	7 200	1.9	9	32 400	5.7
3	10 800	1.7	10	36 000	7.1
4	14 400	1.3	11	39 600	7.7
5	18 000	1.0	12	43 200	7.9
6	21 600	1.1			

Después, utilizamos la regla de Simpson con $n = 12$ y $\Delta t = 3\,600$ para estimar la integral:

$$\int_0^{43\,200} A(t)\,dt \approx \frac{\Delta t}{3}[D(0) + 4D(3\,600) + 2D(7\,200) + \cdots + 4D(39\,600) + D(43\,200)]$$

$$\approx \frac{3\,600}{3}[3.2 + 4(2.7) + 2(1.9) + 4(1.7) + 2(1.3) + 4(1.0) + 2(1.1) + 4(1.3) + 2(2.8) + 4(5.7) + 2(7.1) + 4(7.7) + 7.9]$$

$$= 143\,880$$

Así, la cantidad total de datos transmitida de la medianoche hasta el mediodía es de alrededor de 144 000 megabits, o 144 gigabits.

La tabla en el margen muestra cómo se compara la regla de Simpson con la regla del punto medio para la integral $\int_1^2 (1/x)\,dx$, cuyo valor es de cerca de 0.69314718. La segunda tabla muestra cómo decrece el error E_s en la regla de Simpson, por un factor de casi 16 cuando n se duplica. (En los ejercicios 27 y 28 se le pide comprobar esto para dos integrales adicionales.) Esto es consistente con la aparición de n^4 en el denominador de la siguiente estimación de error para la regla de Simpson. Esto es similar a las estimaciones dadas en 3 para las reglas del trapecio y del punto medio, pero se emplea la cuarta derivada de f.

n	M_n	S_n
4	0.69121989	0.69315453
8	0.69266055	0.69314765
16	0.69302521	0.69314721

n	E_M	E_S
4	0.00192729	−0.00000735
8	0.00048663	−0.00000047
16	0.00012197	−0.00000003

4 Cota de error para la regla de Simpson Suponga que $|f^{(4)}(x)| \leq K$ para $a \leq x \leq b$. Si E_S es el error involucrado al utilizar la regla de Simpson, entonces

$$|E_S| \leq \frac{K(b-a)^5}{180n^4}$$

EJEMPLO 6 ¿Qué tan grande debemos tomar n a fin de garantizar que la aproximación de la regla de Simpson para $\int_1^2 (1/x)\,dx$ sea exacta dentro de 0.0001?

SOLUCIÓN Si $f(x) = 1/x$, entonces $f^{(4)}(x) = 24/x^5$. Dado que $x \geqslant 1$, tenemos $1/x \leqslant 1$, así

$$|f^{(4)}(x)| = \left|\frac{24}{x^5}\right| \leqslant 24$$

Muchas calculadoras y sistemas algebraicos computarizados tienen un algoritmo integrado que calcula una aproximación de una integral definida. Algunas de estas máquinas utilizan la regla de Simpson; otras utilizan técnicas más complejas como la integración numérica *adaptativa*. Esto significa que si una función fluctúa mucho más en cierta parte del intervalo que en cualquier otra parte, entonces esta parte se divide en más subintervalos. Esta estrategia reduce el número de cálculos requeridos para lograr la exactitud prescrita.

Por tanto, podemos tomar $K = 24$ en 4. En consecuencia, para un error menor que 0.0001, deberíamos elegir n de manera que

$$\frac{24(1)^5}{180n^4} < 0.0001$$

Esto da

$$n^4 > \frac{24}{180(0.0001)}$$

o bien

$$n > \frac{1}{\sqrt[4]{0.00075}} \approx 6.04$$

Por tanto, $n = 8$ (n debe ser par) da la exactitud deseada. (Compare esto con el ejemplo 2, donde obtuvimos $n = 41$ para la regla del trapecio y $n = 29$ para la regla del punto medio.)

EJEMPLO 7

a) Utilice la regla de Simpson con $n = 10$ para aproximar la integral $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$.
b) Estime el error involucrado en esta aproximación.

SOLUCIÓN

a) Si $n = 10$, entonces $\Delta x = 0.1$ y la regla de Simpson da

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{x^2}dx &\approx \frac{\Delta x}{3}[f(0) + 4f(0.1) + 2f(0.2) + \cdots + 2f(0.8) + 4f(0.9) + f(1)]\\ &= \frac{0.1}{3}[e^0 + 4e^{0.01} + 2e^{0.04} + 4e^{0.09} + 2e^{0.16} + 4e^{0.25} + 2e^{0.36}\\ &\qquad + 4e^{0.49} + 2e^{0.64} + 4e^{0.81} + e^1]\\ &\approx 1.462681\end{aligned}$$

La figura 10 ilustra los cálculos del ejemplo 7. Observe que los arcos parabólicos son muy cercanos a la gráfica de $y = e^{x^2}$ que son prácticamente indistinguibles de ésta.

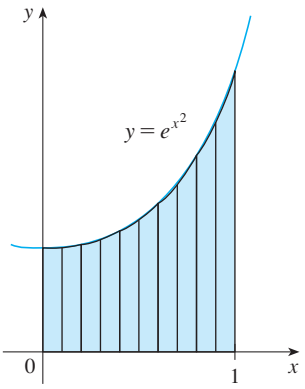


FIGURA 10

b) La cuarta derivada de $f(x) = e^{x^2}$ es

$$f^{(4)}(x) = (12 + 48x^2 + 16x^4)e^{x^2}$$

por ende, dado que $0 \leqslant x \leqslant 1$, tenemos

$$0 \leqslant f^{(4)}(x) \leqslant (12 + 48 + 16)e^1 = 76e$$

Por tanto, escribiendo $K = 76e$, $a = 0$, $b = 1$ y $n = 10$ en 4, vemos que el error es a lo más

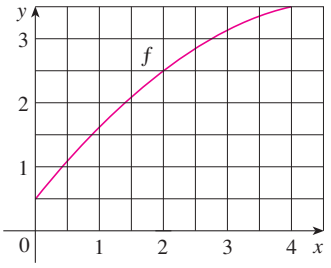
$$\frac{76e(1)^5}{180(10)^4} \approx 0.000115$$

(Compare esto con el ejemplo 3.) Así, con una aproximación a tres decimales, tenemos

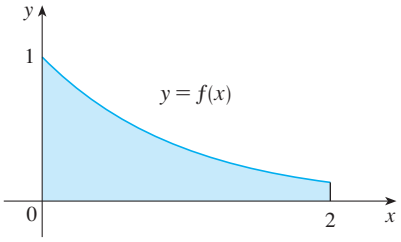
$$\int_0^1 e^{x^2}dx \approx 1.463$$

7.7 Ejercicios

1. Sea $I = \int_0^4 f(x)\,dx$, donde f es la función cuya gráfica se muestra.
a) Utilice la gráfica para encontrar L_2, R_2 y M_2.
b) ¿Son éstas sobrestimaciones o subestimaciones de I?
c) Utilice la gráfica para encontrar T_2. ¿Cómo se compara ésta con I?
d) Para cualquier valor de n, liste los números L_n, R_n, M_n, T_n, e I, en orden creciente.



2. Se utilizaron las aproximaciones por la izquierda, por la derecha, la regla del trapecio y la regla del punto medio para estimar $\int_0^2 f(x)\,dx$, donde f es la función cuya gráfica se muestra. Las estimaciones fueron 0.7811, 0.8675, 0.8632 y 0.9540, y se utilizó el mismo número de subintervalos en cada caso.
a) ¿Cuál regla produce cuál estimación?
b) ¿Entre cuáles dos aproximaciones está el valor verdadero de $\int_0^2 f(x)\,dx$?



3. Estime $\int_0^1 \cos(x^2)\,dx$ utilizando a) la regla del trapecio y b) la regla del punto medio, cada una con $n = 4$. A partir de una gráfica del integrando, decida si sus respuestas son subestimadas o sobrestimadas ¿Qué se puede concluir acerca del valor verdadero de la integral?

4. Dibuje la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen}(\frac{1}{2}x^2)$ en el rectángulo de vista $[0, 1]$ por $[0, 0.5]$ y sea $I = \int_0^1 f(x)\,dx$.
a) Utilice la gráfica para decidir si L_2, R_2, M_2 y T_2 son subestimaciones o sobrestimaciones de I.
b) Para cualquier valor de n, liste los números L_n, R_n, M_n, T_n e I, en orden creciente.
c) Calcule L_5, R_5, M_5 y T_5. A partir de la gráfica, ¿cuál piensa usted que da la mejor estimación de I?

5-6 Utilice a) la regla del punto medio y b) la regla de Simpson para aproximar cada una de las integrales dadas, con el valor especificado de n. (Redondee sus respuestas a seis decimales.) Compare sus resultados con el valor verdadero para determinar el error en cada aproximación.

5. $\int_0^2 \dfrac{x}{1+x^2}\,dx, \quad n = 10$

6. $\int_0^{\pi} x\cos x\,dx, \quad n = 4$

7-18 Utilice a) la regla del trapecio, b) la regla del punto medio y c) la regla de Simpson para aproximar las integrales dadas con el valor especificado de n. (Redondee sus respuestas a seis decimales.)

7. $\int_1^2 \sqrt{x^3 - 1}\,dx, \quad n = 10$

8. $\int_0^2 \dfrac{1}{1+x^6}\,dx, \quad n = 8$

9. $\int_0^2 \dfrac{e^x}{1+x^2}\,dx, \quad n = 10$

10. $\int_0^{\pi/2} \sqrt[3]{1+\cos x}, \quad n = 4$

11. $\int_1^4 \sqrt{\ln x}\,dx, \quad n = 6$

12. $\int_0^1 \operatorname{sen}(x^3)\,dx, \quad n = 10$

13. $\int_0^4 e^{\sqrt{t}} \operatorname{sen} t\,dt, \quad n = 8$

14. $\int_0^1 \sqrt{z}\,e^{-z}dz, \quad n = 10$

15. $\int_1^5 \dfrac{\cos x}{x}\,dx, \quad n = 8$

16. $\int_4^6 \ln(x^3 + 2)\,dx, \quad n = 10$

17. $\int_{-1}^1 e^{e^x}\,dx, \quad n = 10$

18. $\int_0^4 \cos\sqrt{x}\,dx, \quad n = 10$

19. a) Encuentre las aproximaciones T_8 y M_8 para la integral $\int_0^1 \cos(x^2)\,dx$.
b) Estime los errores en las aproximaciones del inciso a).
c) ¿Qué tan grande debemos elegir n de modo que las aproximaciones T_n y M_n para la integral del inciso a) tengan una exactitud dentro de 0.0001?

20. a) Encuentre la aproximaciones T_{10} y M_{10} para $\int_1^2 e^{1/x}\,dx$.
b) Estime los errores en la aproximación del inciso a).
c) ¿Qué tan grande debemos elegir n de manera que las aproximaciones T_n y M_n para la integral del inciso a) tengan una exactitud dentro de 0.0001?

21. Encuentre las aproximaciones T_{10}, M_{10} y S_{10} para $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx$ y los errores correspondientes E_T, E_M y E_S.

b) Compare los errores reales de inciso a) con las estimaciones del error dadas por 3 y 4.
c) ¿Qué tan grande se tiene que elegir n para que las aproximaciones T_n, M_n y S_n para la integral del inciso a) estén dentro de una exactitud de 0.00001?

22. ¿Qué tan grande debería ser n para garantizar que la aproximación por la regla de Simpson para $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$ esté dentro de 0.00001?

SAC **23.** La dificultad con las estimaciones de error es que suele ser muy difícil calcular cuatro derivadas y obtener a mano una buena cota superior K para $|f^{(4)}(x)|$. Pero los sistemas algebraicos computarizados no tienen problema para calcular $f^{(4)}$ y graficarla, así que es posible hallar con facilidad un valor de K a partir de una gráfica hecha por la máquina. Este ejercicio trata con las aproximaciones a la integral $I = \int_0^{2\pi} f(x)\,dx$, donde $f(x) = e^{\cos x}$.
a) Utilice una gráfica para obtener una buena cota superior para $|f''(x)|$.
b) Utilice M_{10} para aproximar I.
c) Use el inciso a) para estimar el error en el inciso b).
d) Utilice la capacidad de integración numérica integrada en su SAC para aproximar I.
e) ¿Cómo se compara el error real con la estimación de error del inciso c)?
f) Utilice una gráfica para obtener una buena cota superior para $|f^{(4)}(x)|$.
g) Use S_{10} para aproximar I.
h) Utilice el inciso f) para estimar el error en el inciso g).
i) ¿Cómo se compara el error verdadero con el error estimado en el inciso h)?
j) ¿Qué tan grande debería ser n para garantizar que el tamaño del error al utilizar S_n sea menor que 0.0001?

SAC **24.** Repita el ejercicio 23 para la integral $\int_{-1}^{1} \sqrt{4 - x^3}\,dx$.

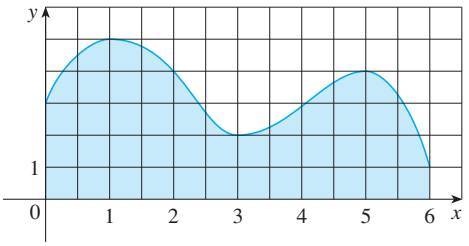
25-26 Encuentre las aproximaciones L_n, R_n, T_n y M_n para $n = 5$, 10 y 20. Después, calcule los errores correspondientes E_L, E_R, E_T y E_M. (Redondee sus respuestas a seis decimales. Si lo desea, puede utilizar el comando SUM de un sistema algebraico computarizado.) ¿Qué observaciones puede hacer? En particular, ¿qué sucede con los errores cuando se duplica n?

25. $\int_0^1 xe^x\,dx$ **26.** $\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx$

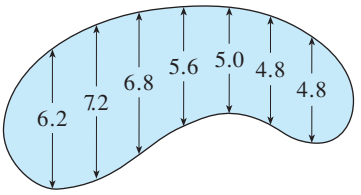
27-28 Encuentre las aproximaciones T_n, M_n y S_n para $n = 6$ y 12. Después calcule los correspondientes errores E_T, E_M y E_S. (Redondee sus respuestas a seis decimales. Si lo desea, puede utilizar el comando SUM de su sistema algebraico computarizado.) ¿Qué observaciones puede hacer? En particular, ¿qué pasa con los errores cuando n se duplica?

27. $\int_0^2 x^4\,dx$ **28.** $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

29. Estime el área bajo la gráfica en la figura utilizando
a) La regla del trapecio, b) la regla del punto medio y c) la regla de Simpson, cada una con $n = 6$.



30. Los anchos (en metros) de una piscina en forma de riñón se midieron a intervalos de dos metros como se indica en la figura. Utilice la regla de Simpson para estimar el área de la piscina.



31. a) Utilice la regla del punto medio y los datos dados para estimar el valor de la integral $\int_1^5 f(x)\,dx$.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1.0	2.4	3.5	4.0
1.5	2.9	4.0	4.1
2.0	3.3	4.5	3.9
2.5	3.6	5.0	3.5
3.0	3.8		

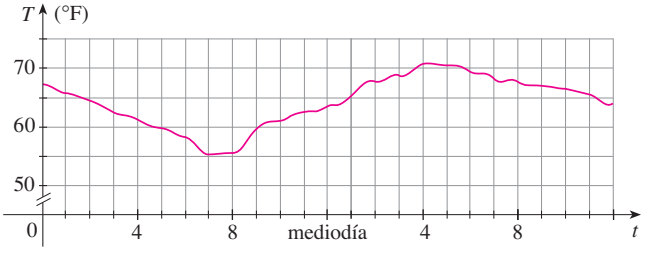
b) Si se sabe que $-2 \leq f''(x) \leq 3$ para toda x, estime el error involucrado en la aproximación en el inciso a).

32. a) Se proporciona una tabla de valores de una función g. Utilice la regla de Simpson para estimar $\int_0^{1.6} g(x)\,dx$.

x	$g(x)$	x	$g(x)$
0.0	12.1	1.0	12.2
0.2	11.6	1.2	12.6
0.4	11.3	1.4	13.0
0.6	11.1	1.6	13.2
0.8	11.7		

b) Si $-5 \leq g^{(4)}(x) \leq 2$ para $0 \leq x \leq 1.6$ estime el error involucrado en la aproximación en el inciso a).

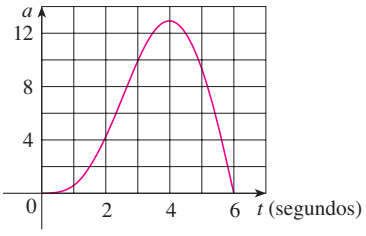
33. Se muestra una gráfica de temperatura en la ciudad de Nueva York el 19 de septiembre de 2009. Utilice la regla de Simpson con $n = 12$ para estimar el promedio de temperatura de ese día.



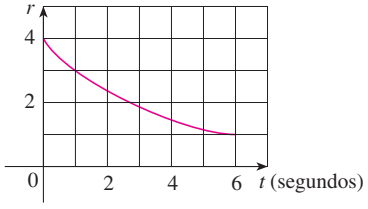
34. Se empleó una pistola de radar para registrar la rapidez de un corredor durante los primeros 5 segundos de una competencia (véase la tabla). Utilice la regla de Simpson para estimar la distancia que cubrió el corredor durante ese lapso.

t (s)	v (m/s)	t (s)	v (m/s)
0	0	3.0	10.51
0.5	4.67	3.5	10.67
1.0	7.34	4.0	10.76
1.5	8.86	4.5	10.81
2.0	9.73	5.0	10.81
2.5	10.22		

35. Se muestra la gráfica de la aceleración $a(t)$ de un automóvil medida en pies/s^2. Utilice la regla de Simpson para estimar el aumento de velocidad del automóvil durante el intervalo de seis segundos.



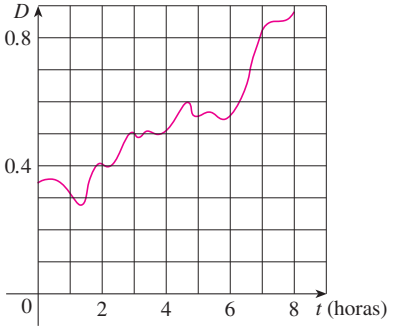
36. El agua se fuga de un depósito con una rapidez de $r(t)$ litros por hora, donde la gráfica de r es como se muestra. Utilice la regla de Simpson para estimar la cantidad total de agua que escapa durante las primeras seis horas.



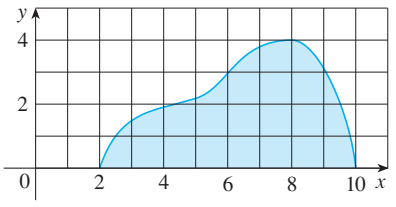
37. La tabla (proporcionada por el proveedor de energía San Diego Gas and Electric) da el consumo de potencia P en megavatios en el condado de San Diego desde la media noche a las 6:00 a.m. un día de diciembre. Utilice la regla de Simpson para estimar la potencia utilizada durante ese periodo. (Use el hecho de que la potencia es la derivada de la energía.)

t	P	t	P
0:00	1 814	3:30	1 611
0:30	1 735	4:00	1 621
1:00	1 686	4:30	1 666
1:30	1 646	5:00	1 745
2:00	1 637	5:30	1 886
2:30	1 609	6:00	2 052
3:00	1 604		

38. En la gráfica se muestra el tráfico de datos en una línea de datos TI del proveedor de servicio de internet de la medianoche a las 8:00 a.m. D es el flujo de datos medido en megabits por segundo. Utilice la regla de Simpson para estimar la cantidad total de datos transmitidos durante ese periodo.



39. Utilice la regla de Simpson con $n = 8$ para estimar el volumen del sólido obtenido al rotar la región que se muestra en la figura, alrededor de a) el eje x y b) el eje y.



40. La tabla muestra valores de una función fuerza $f(x)$, donde x está medido en metros y $f(x)$ en newtons. Utilice la regla de Simpson para estimar el trabajo realizado por la fuerza al mover un objeto a una distancia de 18 metros.

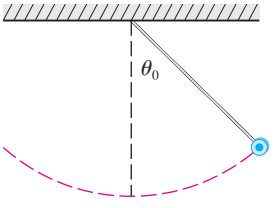
x	0	3	6	9	12	15	18
$f(x)$	9.8	9.1	8.5	8.0	7.7	7.5	7.4

41. La región limitada por las curvas $y = e^{-1/x}$, $y = 0$, $x = 1$ y $x = 5$ es rotada alrededor del eje x. Utilice la regla de Simpson con $n = 8$ para estimar el volumen del sólido resultante.

SAC **42.** En la figura se muestra un péndulo con longitud L que forma una ángulo máximo θ_0 con la vertical. Utilizando la segunda ley de Newton, puede demostrarse que el periodo T (el tiempo para una oscilación completa) está dado por

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 x}}$$

donde $k = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\theta_0\right)$ y g es la aceleración debida a la gravedad. Si $L = 1$ m y $\theta_0 = 42°$, utilice la regla de Simpson con $n = 10$ para encontrar el periodo.



43. La intensidad de luz con longitud de onda λ que viaja por una rejilla de difracción con N ranuras en un ángulo θ está dado por $I(\theta) = N^2 \operatorname{sen}^2 k/k^2$, donde $k = (\pi N d \operatorname{sen}\theta)/\lambda$ y d es la distancia entre ranuras adyacentes. Un láser de helio-neón con longitud de onda $\lambda = 632.8 \times 10^{-9}$ m está emitiendo una estrecha banda de luz, dada por $-10^{-6} < \theta < 10^{-6}$ a través de una rejilla con 10 000 ranuras espaciadas 10^{-4} m. Utilice la regla del punto medio con $n = 10$ para estimar la intensidad total de luz $\int_{-10^{-6}}^{10^{-6}} I(\theta)\, d\theta$ que emerge de la rejilla.

44. Utilice la regla del trapecio con $n = 10$ para aproximar $\int_0^{20} \cos(\pi x)\, dx$. Compare su resultado con el valor verdadero. ¿Puede explicar la discrepancia?

45. Trace la gráfica de una función continua sobre $[0, 2]$ para la cual la regla del trapecio con $n = 2$ es más exacta que la regla del punto medio.

46. Trace la gráfica de una función continua sobre $[0, 2]$ para la cual la aproximación por el punto extremo derecho con $n = 2$ es más exacta que la regla de Simpson.

47. Si f es una función positiva y $f''(x) < 0$ para $a \leq x \leq b$, demuestre que

$$T_n < \int_a^b f(x)\, dx < M_n$$

48. Demuestre que si f es una función polinomial de grado tres o menor, entonces la regla de Simpson da el valor exacto de $\int_a^b f(x)\, dx$.

49. Demuestre que $\frac{1}{2}(T_n + M_n) = T_{2n}$.

50. Demuestre que $\frac{1}{3}T_n + \frac{2}{3}M_n = S_{2n}$.

7.8 Integrales impropias

Al establecer la integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$ tratamos con una función f definida sobre un intervalo finito $[a, b]$ y supusimos que f no tiene una discontinuidad infinita (véase la sección 5.2). En esta sección extendemos el concepto de integral definida al caso donde el intervalo es infinito y también para el caso donde f tiene una discontinuidad infinita en $[a, b]$. En cada caso la integral se llama *impropia*. Una de las más importantes aplicaciones de esta idea se da en la distribución de probabilidad, que será estudiada en la sección 8.5.

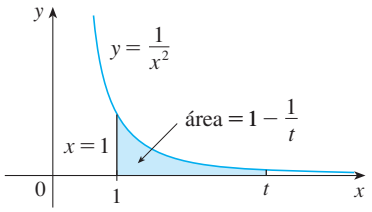


FIGURA 1

Tipo 1: intervalos infinitos

Considere la región infinita S que está bajo la curva $y = 1/x^2$, por encima del eje x y a la derecha de la recta $x = 1$. Podría pensarse que, puesto que S se extiende al infinito, su área debe ser infinita, pero veamos esto con más detalle. El área de la parte de S que está a la izquierda de la recta $x = t$ (sombreada en la figura 1) es

$$A(t) = \int_1^t \frac{1}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x}\Big]_1^t = 1 - \frac{1}{t}$$

Observe que $A(t) < 1$ sin importar qué tan grande se elija t.

También observamos que

$$\lim_{t\to\infty} A(t) = \lim_{t\to\infty}\left(1 - \frac{1}{t}\right) = 1$$

El área de la región sombreada se aproxima a 1 cuando $t \to \infty$ (véase la figura 2), así que decimos que el área de la región infinita S es igual a 1 y escribimos

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2}\, dx = 1$$

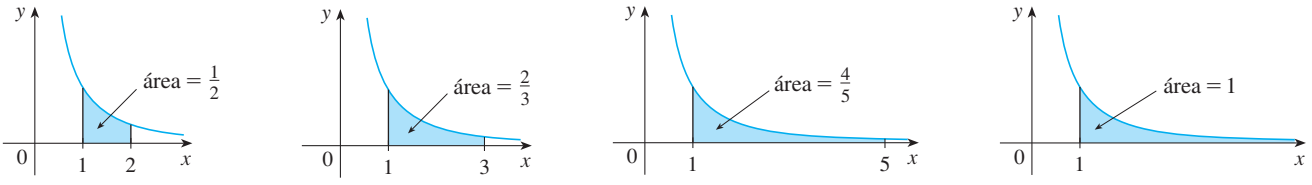


FIGURA 2

Usando este ejemplo como guía, definimos la integral de f (no necesariamente una función positiva) sobre un intervalo infinito como el límite de las integrales sobre intervalos finitos.

1 Definición de una integral impropia de tipo 1

a) Si $\int_a^t f(x)\,dx$ existe para todo número $t \geqslant a$, entonces

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx$$

siempre que el límite exista (como un número finito).

b) Si $\int_t^b f(x)\,dx$ existe para todo número $t \leqslant b$, entonces

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)\,dx$$

siempre que este límite exista (como un número finito).

Las integrales impropias $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ y $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ se llaman **convergentes** si el límite correspondiente existe, y **divergente** si el límite no existe.

c) Si ambas $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ y $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ son convergentes, entonces definimos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^{\infty} f(x)\,dx$$

En el inciso c) puede utilizarse cualquier número real a (véase el ejercicio 74).

Cualquiera de las integrales impropias en la definición 1 puede interpretarse como un área, siempre que f sea una función positiva. Por ejemplo, en el caso a) si $f(x) \geqslant 0$ y la integral $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ es convergente, entonces definimos el área de la región $S = \{(x, y) \mid x \geqslant a, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ en la figura 3 como

$$A(S) = \int_a^{\infty} f(x)\,dx$$

Esto es apropiado porque $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ es el límite cuando $t \to \infty$ del área bajo la gráfica de f desde a hasta t.

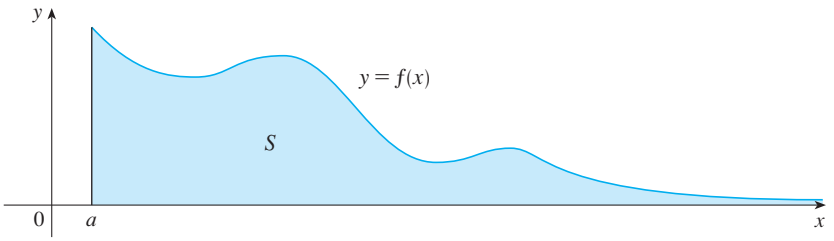


FIGURA 3

V EJEMPLO 1 Determine si la integral $\int_1^{\infty} (1/x)\,dx$ es convergente o divergente.

SOLUCIÓN De acuerdo con el inciso a) de la definición 1, tenemos

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \ln|x|\Big]_1^t$$

$$= \lim_{t\to\infty} (\ln t - \ln 1) = \lim_{t\to\infty} \ln t = \infty$$

El límite no existe como un número finito y, por tanto, la integral impropia $\int_1^\infty (1/x)\,dx$ es divergente.

Comparemos el resultado del ejemplo 1 con el ejemplo dado al principio de esta sección:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx \text{ converge} \qquad \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx \text{ diverge}$$

Geométricamente, esto indica que, aunque las curvas $y = 1/x^2$ y $y = 1/x$ se parecen mucho para $x > 0$, la región bajo $y = 1/x^2$ a la derecha de $x = 1$ (la región sombreada en la figura 4) tiene un área finita, mientras que el área de la correspondiente región bajo $y = 1/x$ (figura 5) tiene un área infinita. Observe que ambas $1/x^2$ y $1/x$ tienden a 0 cuando $x \to \infty$, pero $1/x^2$ tiende a 0 más rápido que $1/x$. Los valores de $1/x$ no decrecen lo suficientemente rápido para que su integral tenga un valor finito.

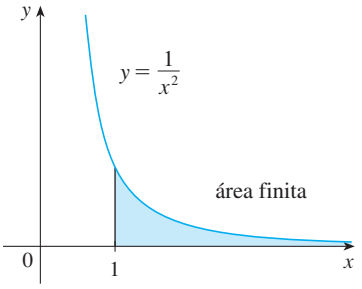


FIGURA 4 $\int_1^\infty (1/x^2)\,dx$ converge

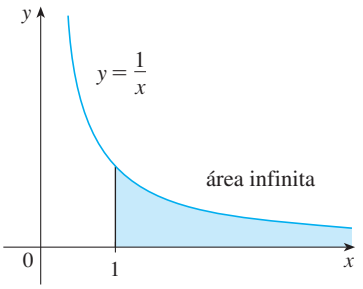


FIGURA 5 $\int_1^\infty (1/x)\,dx$ diverge

EJEMPLO 2 Evalúe $\int_{-\infty}^0 xe^x\,dx$.

SOLUCIÓN Utilizando el inciso b) de la definición 1, tenemos

$$\int_{-\infty}^0 xe^x\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^0 xe^x\,dx$$

Integramos por partes con $u = x$, $dv = e^x\,dx$ de modo que $du = dx$ y $v = e^x$:

$$\begin{aligned}\int_t^0 xe^x\,dx &= xe^x\Big]_t^0 - \int_t^0 e^x\,dx \\ &= -te^t - 1 + e^t\end{aligned}$$

Sabemos que $e^t \to 0$ cuando $t \to -\infty$ y, por la regla de l'Hospital, tenemos

$$\begin{aligned}\lim_{t\to-\infty} te^t &= \lim_{t\to-\infty} \frac{t}{e^{-t}} = \lim_{t\to-\infty} \frac{1}{-e^{-t}} \\ &= \lim_{t\to-\infty} (-e^t) = 0\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^0 xe^x\,dx &= \lim_{t\to-\infty} (-te^t - 1 + e^t) \\ &= -0 - 1 + 0 = -1\end{aligned}$$

TEC En Module 7.8 puede investigar visual y numéricamente si algunas integrales impropias son convergentes o divergentes.

EJEMPLO 3 Evalúe $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$.

SOLUCIÓN Es conveniente elegir $a = 0$ en la definición 1c):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

Ahora debemos evaluar por separado las integrales del lado derecho:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to\infty} \tan^{-1}x\Big]_0^t$$

$$= \lim_{t\to\infty} (\tan^{-1}t - \tan^{-1}0) = \lim_{t\to\infty} \tan^{-1}t = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to-\infty} \tan^{-1}x\Big]_t^0$$

$$= \lim_{t\to-\infty} (\tan^{-1}0 - \tan^{-1}t)$$

$$= 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Ya que ambas integrales son convergentes, la integral dada es convergente y

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

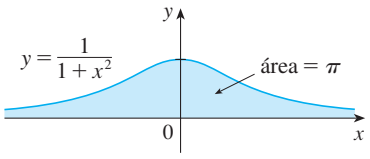


FIGURA 6

Puesto que $1/(1 + x^2) > 0$, la integral impropia dada puede interpretarse como el área de la región infinita que está bajo la curva $y = 1/(1 + x^2)$ y por arriba del eje x (véase la figura 6).

EJEMPLO 4 ¿Para qué valores de p, la integral

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$$

es convergente?

SOLUCIÓN Sabemos del ejemplo 1 que si $p = 1$, entonces la integral es divergente, así que demos por sentado que $p \neq 1$. Entonces

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t x^{-p}\,dx$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Bigg]_{x=1}^{x=t}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{1-p}\left[\frac{1}{t^{p-1}} - 1\right]$$

Si $p > 1$, entonces $p - 1 > 0$, así que cuando $t \to \infty$, $t^{p-1} \to \infty$ y $1/t^{p-1} \to 0$. Por tanto,

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \frac{1}{p-1} \qquad \text{si } p > 1$$

y, en consecuencia, la integral converge. Pero si $p < 1$, entonces $p - 1 < 0$, así que

$$\frac{1}{t^{p-1}} = t^{1-p} \to \infty \qquad \text{cuando } t \to \infty$$

y la integral diverge.

Resumiremos el resultado del ejemplo 4 para futuras referencias:

2 $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ es convergente si $p > 1$ y divergente si $p \leq 1$.

Tipo 2: integrandos discontinuos

Suponga que f es una función continua positiva definida sobre un intervalo finito $[a, b)$, pero tiene una asíntota vertical en b. Sea S la región no acotada bajo la gráfica de f y por encima del eje x entre a y b. (Para integrales del tipo 1, las regiones se extienden indefinidamente en una dirección horizontal. Aquí la región es infinita en una dirección vertical.) El área de la parte de S entre a y t (la región sombreada en la figura 7) es

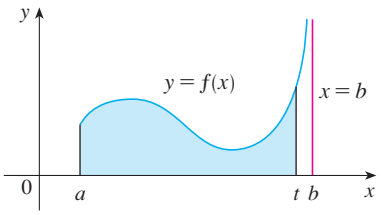


FIGURA 7

$$A(t) = \int_a^t f(x)\,dx$$

Si sucede que $A(t)$ se aproxima a un número definido A cuando $t \to b^-$, entonces decimos que el área de la región S es A y escribimos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$

Utilizamos esta ecuación para definir una integral impropia de tipo 2, aun cuando f no es una función positiva, sin importar qué tipo de discontinuidad tenga f en b.

Los incisos b) y c) de la definición 3 se ilustran en las figuras 8 y 9 para el caso donde $f(x) \geqslant 0$ y f tiene asíntotas verticales en a y c, respectivamente.

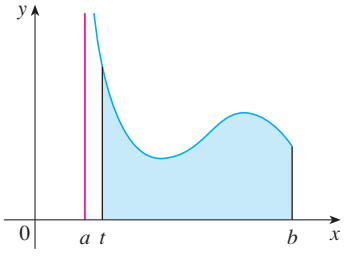


FIGURA 8

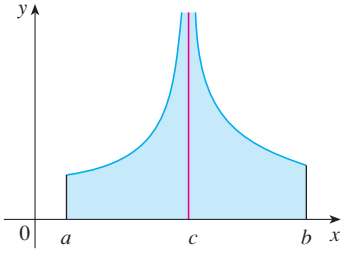


FIGURA 9

3 Definición de una integral impropia de tipo 2

a) Si f es continua sobre $[a, b)$ y es discontinua en b, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$

si este límite existe (como un número finito).

b) Si f es continua sobre $(a, b]$ y es discontinua en a, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$$

si este límite existe (como un número finito).

La integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ se llama **convergente** si existe el límite correspondiente, y **divergente** si el límite no existe.

c) Si f tiene una discontinuidad en c, donde $a < c < b$, y ambas $\int_a^c f(x)\,dx$ y $\int_c^b f(x)\,dx$ son convergentes, entonces definimos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

EJEMPLO 5 Encuentre $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx$.

SOLUCIÓN Primero, notamos que la integral dada es impropia porque $f(x) = 1/\sqrt{x-2}$ tiene una asíntota vertical $x = 2$. Dado que hay una discontinuidad infinita en el extremo izquierdo de $[2, 5]$, utilizamos el inciso b) de la definición 3:

$$\begin{aligned}\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} &= \lim_{t\to 2^+} \int_t^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} \\ &= \lim_{t\to 2^+} 2\sqrt{x-2}\,\Big]_t^5 \\ &= \lim_{t\to 2^+} 2\left(\sqrt{3} - \sqrt{t-2}\right) \\ &= 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

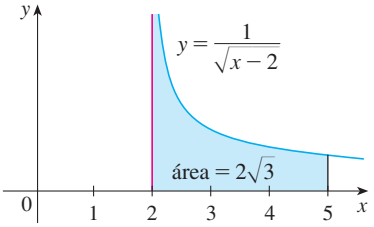


FIGURA 10

Así, la integral impropia dada es convergente y, puesto que el integrando es positivo, podemos interpretar el valor de la integral como el área de la región sombreada en la figura 10.

V EJEMPLO 6 Determine si $\int_0^{\pi/2} \sec x\,dx$ converge o diverge.

SOLUCIÓN Observe que la integral dada es impropia porque $\lim_{x\to(\pi/2)^-} \sec x = \infty$. Utilizando el inciso a) de la definición 3 y la fórmula 14 de la tabla de integrales, tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sec x\,dx &= \lim_{t\to(\pi/2)^-} \int_0^t \sec x\,dx = \lim_{t\to(\pi/2)^-} \ln\left|\sec x + \tan x\right|\Big]_0^t \\ &= \lim_{t\to(\pi/2)^-} \left[\ln(\sec t + \tan t) - \ln 1\right] = \infty\end{aligned}$$

porque $\sec t \to \infty$ y $\tan t \to \infty$ cuando $t \to (\pi/2)^-$. Así la integral impropia dada es divergente.

EJEMPLO 7 Evalúe $\int_0^3 \frac{dx}{x-1}$ si es posible.

SOLUCIÓN Observe que la recta $x = 1$ es una asíntota vertical del integrando. Puesto que aparece a la mitad del intervalo $[0, 3]$, debe utilizarse el inciso c) de la definición 3 con $c = 1$:

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \int_0^1 \frac{dx}{x-1} + \int_1^3 \frac{dx}{x-1}$$

donde $$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{x-1} &= \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{dx}{x-1} = \lim_{t\to 1^-} \ln\left|x-1\right|\Big]_0^t \\ &= \lim_{t\to 1^-} \left(\ln\left|t-1\right| - \ln\left|-1\right|\right) \\ &= \lim_{t\to 1^-} \ln(1-t) = -\infty\end{aligned}$$

porque $1 - t \to 0^+$ cuando $t \to 1^-$. Así, $\int_0^1 dx/(x-1)$ es divergente. Esto implica que $\int_0^3 dx/(x-1)$ es divergente. [No necesitamos evaluar $\int_1^3 dx/(x-1)$.]

ADVERTENCIA Si no hubiéramos notado la asíntota $x = 1$ en el ejemplo 7 y se hubiera confundido la integral con una integral ordinaria, entonces podría caerse en el

cálculo erróneo:

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1|\Big]_0^3 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

Esto es incorrecto porque la integral es impropia, y debemos calcularla en términos de límites.

De ahora en adelante, siempre que se encuentre el símbolo $\int_a^b f(x)\,dx$ debe usted decidir, observando la función f sobre $[a, b]$, si ésta es una integral definida ordinaria o una integral impropia.

EJEMPLO 8 Evalúe $\int_0^1 \ln x\,dx$.

SOLUCIÓN Sabemos que la función $f(x) = \ln x$ tiene una asíntota vertical en $x = 0$ puesto que $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, así que la integral dada es impropia y tenemos

$$\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \ln x\,dx$$

Ahora integramos por partes con $u = \ln x$, $dv = dx$, $du = dx/x$ y $v = x$:

$$\begin{aligned}\int_t^1 \ln x\,dx &= x \ln x\Big]_t^1 - \int_t^1 dx \\ &= 1 \ln 1 - t \ln t - (1 - t) \\ &= -t \ln t - 1 + t\end{aligned}$$

Para encontrar el límite del primer término utilizamos la regla de l'Hospital:

$$\lim_{t\to 0^+} t \ln t = \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln t}{1/t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1/t}{-1/t^2} = \lim_{t\to 0^+} (-t) = 0$$

Por tanto, $$\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{t\to 0^+} (-t \ln t - 1 + t) = -0 - 1 + 0 = -1$$

La figura 11 muestra la interpretación geométrica de este resultado. El área de la región sombreada sobre $y = \ln x$ y por debajo del eje x es 1.

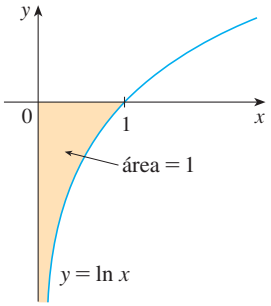


FIGURA 11

Una prueba de comparación para las integrales impropias

Algunas veces es imposible encontrar el valor exacto de una integral impropia y aún es importante saber si converge o diverge. En tales casos, es útil el siguiente teorema que, aunque se establece para integrales de tipo 1, un teorema similar es válido para integrales de tipo 2.

Teorema de comparación Suponga que f y g son funciones continuas con $f(x) \geqslant g(x) \geqslant 0$ para $x \geqslant a$.

a) Si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es convergente, entonces $\int_a^\infty g(x)\,dx$ es convergente.

b) Si $\int_a^\infty g(x)\,dx$ es divergente, entonces $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es divergente.

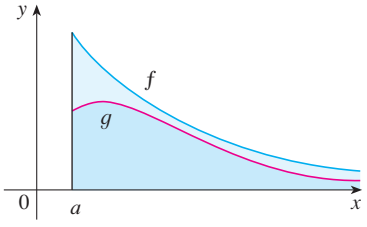


FIGURA 12

Omitimos la demostración del teorema de comparación, pero la figura 12 muestra su factibilidad. Si el área bajo la curva superior $y = f(x)$ es finita, entonces también lo es el área bajo la curva inferior $y = g(x)$. Y si el área bajo $y = g(x)$ es infinita, entonces el área bajo $y = f(x)$ también lo es. [Observe que lo contrario no es necesariamente cierto:

si $\int_a^\infty g(x)\,dx$ es convergente, $\int_a^\infty f(x)\,dx$ puede o no ser convergente, y si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es divergente, $\int_a^\infty g(x)\,dx$ puede o no ser divergente.]

V EJEMPLO 9 Demuestre que $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ es convergente.

SOLUCIÓN No podemos evaluar directamente la integral porque la antiderivada de e^{-x^2} no es una función elemental (como se explicó en la sección 7.5). Escribimos

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \int_0^1 e^{-x^2}dx + \int_1^\infty e^{-x^2}dx$$

y observe que la primera integral al lado derecho es justo una integral definida ordinaria. En la segunda integral, utilizamos el hecho de que para $x \geqslant 1$ tenemos $x^2 \geqslant x$, y así $-x^2 \leqslant -x$ y, por tanto, $e^{-x^2} \leqslant e^{-x}$ (véase la figura 13). La integral de e^{-x} se evalúa fácilmente:

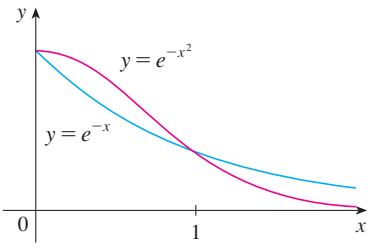


FIGURA 13

$$\int_1^\infty e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty}(e^{-1} - e^{-t}) = e^{-1}$$

Así, tomando $f(x) = e^{-x}$ y $g(x) = e^{-x^2}$ en el teorema de comparación, vemos que $\int_1^\infty e^{-x^2}dx$ es convergente, por lo que se sigue que $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ es convergente. ■

TABLA 1

t	$\int_0^t e^{-x^2}\,dx$
1	0.7468241328
2	0.8820813908
3	0.8862073483
4	0.8862269118
5	0.8862269255
6	0.8862269255

En el ejemplo 9 demostramos que $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ es convergente sin calcular su valor. En el ejercicio 70 indicamos cómo demostrar que su valor es aproximadamente 0.8862. En la teoría de probabilidad es importante conocer el valor exacto de esta integral impropia, como se verá en la sección 8.5; utilizando los métodos del cálculo de varias variables puede demostrarse que el valor exacto es $\sqrt{\pi}/2$. La tabla 1 ilustra la definición de una integral impropia mostrando cómo los valores (generados por computadora) de $\int_0^t e^{-x^2}dx$ tienden a $\sqrt{\pi}/2$ cuando t es muy grande. De hecho, estos valores convergen muy rápido porque $e^{-x^2} \to 0$ muy rápidamente cuando $x \to \infty$.

V EJEMPLO 10 La integral $\int_1^\infty \dfrac{1 + e^{-x}}{x}\,dx$ es divergente por el teorema de comparación porque

$$\frac{1 + e^{-x}}{x} > \frac{1}{x}$$

y $\int_1^\infty (1/x)\,dx$ es divergente por el ejemplo 1 [o por 2 con $p = 1$]. ■

La tabla 2 ilustra la divergencia de la integral en el ejemplo 10. Al parecer, los valores no tienden a un número fijo.

TABLA 2

t	$\int_1^t [(1 + e^{-x})/x]\,dx$
2	0.8636306042
5	1.8276735512
10	2.5219648704
100	4.8245541204
1000	7.1271392134
10 000	9.4297243064

7.8 Ejercicios

1. Explique por qué cada una de las siguientes integrales es impropia.

a) $\int_1^2 \frac{x}{x-1}\,dx$ b) $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^3}\,dx$

c) $\int_{-\infty}^\infty x^2 e^{-x^2}\,dx$ d) $\int_0^{\pi/4} \cot x\,dx$

2. ¿Cuáles de las siguientes integrales es impropia? ¿Por qué?

a) $\int_0^{\pi/4} \tan x\,dx$ b) $\int_0^{\pi} \tan x\,dx$

c) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2-x-2}$ d) $\int_0^\infty e^{-x^3}\,dx$

3. Encuentre el área bajo la curva $y = 1/x^3$ desde $x = 1$ hasta $x = t$ y evalúela para $t = 10$, 100 y 1000. Después encuentre el área total bajo esta curva para $x \geq 1$.

4. a) Grafique las funciones $f(x) = 1/x^{1.1}$ y $g(x) = 1/x^{0.9}$ en los rectángulos de vista $[0, 10]$ por $[0, 1]$, y $[0, 100]$ por $[0, 1]$.
b) Encuentre las áreas bajo las gráficas de f y g desde $x = 1$ hasta $x = t$ y evalúelas para $t = 10$, 100, 10^4, 10^6, 10^{10} y 10^{20}.
c) Encuentre el área total bajo cada curva para $x \geq 1$ si ésta existe.

5-40 Determine si cada una de las siguientes integrales es convergente o divergente. Evalúe las que sean convergentes.

5. $\int_3^\infty \frac{1}{(x-2)^{3/2}}\,dx$

6. $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[4]{1+x}}\,dx$

7. $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{3-4x}\,dx$

8. $\int_1^\infty \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx$

9. $\int_2^\infty e^{-5p}\,dp$

10. $\int_{-\infty}^0 2^r\,dr$

11. $\int_0^\infty \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}\,dx$

12. $\int_{-\infty}^\infty (y^3 - 3y^2)\,dy$

13. $\int_{-\infty}^\infty xe^{-x^2}\,dx$

14. $\int_1^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

15. $\int_0^\infty \operatorname{sen}^2\alpha\,d\alpha$

16. $\int_{-\infty}^\infty \cos \pi t\,dt$

17. $\int_1^\infty \frac{1}{x^2+x}\,dx$

18. $\int_2^\infty \frac{dv}{v^2+2v-3}$

19. $\int_{-\infty}^0 ze^{2z}\,dz$

20. $\int_2^\infty ye^{-3y}\,dy$

21. $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x}\,dx$

22. $\int_{-\infty}^\infty x^3 e^{-x^4}\,dx$

23. $\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{9+x^6}\,dx$

24. $\int_0^\infty \frac{e^x}{e^{2x}+3}\,dx$

25. $\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^3}\,dx$

26. $\int_0^\infty \frac{x \arctan x}{(1+x^2)^2}\,dx$

27. $\int_0^1 \frac{3}{x^5}\,dx$

28. $\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}}\,dx$

29. $\int_{-2}^{14} \frac{dx}{\sqrt[4]{x+2}}$

30. $\int_6^8 \frac{4}{(x-6)^3}\,dx$

31. $\int_{-2}^3 \frac{1}{x^4}\,dx$

32. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

33. $\int_0^9 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx$

34. $\int_0^5 \frac{w}{w-2}\,dw$

35. $\int_0^3 \frac{dx}{x^2-6x+5}$

36. $\int_{\pi/2}^\pi \csc x\,dx$

37. $\int_{-1}^0 \frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx$

38. $\int_0^1 \frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx$

39. $\int_0^2 z^2 \ln z\,dz$

40. $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

41-46 Trace cada una de las siguientes regiones y encuentre su área (si el área es finita).

41. $S = \{(x, y) \mid x \geq 1,\ 0 \leq y \leq e^{-x}\}$

42. $S = \{(x, y) \mid x \leq 0,\ 0 \leq y \leq e^{x}\}$

43. $S = \{(x, y) \mid x \geq 1,\ 0 \leq y \leq 1/(x^3 + x)\}$

44. $S = \{(x, y) \mid x \geq 0,\ 0 \leq y \leq xe^{-x}\}$

45. $S = \{(x, y) \mid 0 \leq x < \quad /2,\ 0 \leq y \leq \sec^2 x\}$

46. $S = \left\{(x, y) \mid -2 < x \leq 0,\ 0 \leq y \leq 1/\sqrt{x+2}\right\}$

47. a) Si $g(x) = (\operatorname{sen}^2 x)/x^2$, utilice su calculadora o computadora para elaborar una tabla de valores aproximados de $\int_1^t g(x)\,dx$, para $t = 2$, 5, 10, 100, 1000 y 10 000. ¿Parece que $\int_1^\infty g(x)\,dx$ es convergente?
b) Utilice el teorema de comparación con $f(x) = 1/x^2$ para demostrar que $\int_1^\infty g(x)\,dx$ es convergente.
c) Ilustre el inciso b) graficando f y g sobre la misma pantalla para $1 \leq x \leq 10$. Utilice su gráfica para explicar intuitivamente por qué $\int_1^\infty g(x)\,dx$ es convergente.

48. a) Si $g(x) = 1/\left(\sqrt{x} - 1\right)$, utilice su calculadora o computadora para elaborar una tabla de valores aproximados de $\int_2^t g(x)\,dx$ para $t = 5$, 10, 100, 1000 y 10 000. ¿Parece que $\int_2^\infty g(x)\,dx$ es convergente o divergente?

Se requiere calculadora graficadora o computadora **1.** Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

b) Utilice el teorema de comparación con $f(x) = 1/\sqrt{x}$ para demostrar que $\int_2^\infty g(x)\,dx$ es divergente.
c) Ilustre el inciso b) graficando f y g sobre la misma pantalla para $2 \leq x \leq 20$. Utilice su gráfica para explicar intuitivamente por qué $\int_2^\infty g(x)\,dx$ es divergente.

49–54 Utilice el teorema de comparación para determinar si cada una de las siguientes integrales es convergente o divergente.

49. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{x^3 + 1}\,dx$

50. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{2 + e^{-x}}{x}\,dx$

51. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x + 1}{\sqrt{x^4 - x}}\,dx$

52. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan x}{2 + e^x}\,dx$

53. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sec^2 x}{x\sqrt{x}}\,dx$

54. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\sqrt{x}}\,dx$

55. La integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(1 + x)}\,dx$$

es impropia por dos razones: el intervalo $[0, \infty)$ es infinito, y el integrando tiene una discontinuidad infinita en $x = 0$. Evalúela expresándola como una suma de integrales impropias de tipo 2 y tipo 1 como sigue:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(1 + x)}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\,(1 + x)}\,dx + \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(1 + x)}\,dx$$

56. Evalúe

$$\int_2^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 4}}\,dx$$

por el mismo método que en el ejercicio 55.

57–59 Encuentre los valores de p para los cuales la integral converge y evalúe la integral para esos valores de p.

57. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$

58. $\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^p}\,dx$

59. $\displaystyle\int_0^1 x^p \ln x\,dx$

60. a) Evalúe la integral $\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$ para $n = 0$, 1, 2 y 3.
b) Conjeture el valor de $\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$ cuando n es un entero positivo arbitrario.
c) Demuestre su conjetura usando inducción matemática.

61. a) Demuestre que $\int_{-\infty}^\infty x\,dx$ es divergente.
b) Demuestre que

$$\lim_{t\to\infty} \int_{-t}^t x\,dx = 0$$

Esto demuestra que no podemos definir

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_{-t}^t f(x)\,dx$$

62. La *rapidez promedio* de las moléculas de un gas ideal es

$$\bar{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{M}{2RT}\right)^{3/2} \int_0^\infty v^3 e^{-Mv^2/(2RT)}\,dv$$

donde M es el peso molecular del gas, R es la constante de los gases, T es la temperatura del gas y v es la rapidez molecular. Demuestre que

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

63. Del ejemplo 1, sabemos que la región $\mathcal{R} = \{(x, y) \mid x \geq 1,\ 0 \leq y \leq 1/x\}$ tiene un área infinita. Demuestre que rotando $\mathcal{R}$ alrededor del eje x obtenemos un sólido con volumen finito.

64. Utilice la información y los datos del ejercicio 29 de la sección 6.4 para encontrar el trabajo requerido para impulsar un satélite de 1000 kg fuera del campo gravitatorio terrestre.

65. Encuentre la *velocidad de escape* v_0 necesaria para impulsar un cohete de masa m fuera del campo gravitatorio de un planeta con masa M y radio R. Utilice la ley de Newton de gravitación (véase ejercicio 29 de la sección 6.4) y el hecho de que la energía cinética inicial de $\frac{1}{2}mv_0^2$ suministra el trabajo necesario.

66. Los astrónomos utilizan una técnica llamada *estereografía estelar* para determinar la densidad de las estrellas en un cúmulo estelar a partir de la densidad observada (en dos dimensiones) que puede analizarse en una fotografía. Suponga que en un cúmulo esférico de radio R, la densidad de estrellas depende sólo de la distancia r desde el centro del cúmulo. Si la densidad estelar percibida está dada por $y(s)$, donde s es la distancia plana del centro del cúmulo y $x(r)$ es la densidad real, se puede demostrar que

$$y(s) = \int_s^R \frac{2r}{\sqrt{r^2 - s^2}}\,x(r)\,dr$$

Si la densidad real de las estrellas en un cúmulo es $x(r) = \frac{1}{2}(R - r)^2$, encuentre la densidad percibida $y(s)$.

67. Un fabricante quiere producir lámparas que duren cerca de 700 horas pero, por supuesto, algunas se queman más rápido que otras. Sea $F(t)$ la fracción de las lámparas de la compañía que se queman antes de t horas, de modo que $F(t)$ yace siempre entre 0 y 1.
a) Trace una gráfica aproximada de lo que usted piensa que es la forma de la gráfica de F.
b) ¿Cuál es el significado de la derivada $r(t) = F'(t)$?
c) ¿Cuál es el valor de $\int_0^\infty r(t)\,dt$? ¿Por qué?

68. Como vimos en la sección 3.8, una sustancia radiactiva decae exponencialmente: La masa en el tiempo t es $m(t) = m(0)e^{kt}$, donde $m(0)$ es la masa inicial y k es una constante negativa. La *vida media* M de un átomo en la sustancia es

$$M = -k \int_0^\infty te^{kt}\,dt$$

Para el isótopo radiactivo ^{14}C, utilizado en la datación por radiocarbono, el valor de k es -0.000121. Encuentre la vida media de un átomo de ^{14}C.

69. Determine cuán grande debe ser el número a para que

$$\int_a^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1}\, dx < 0.001$$

70. Estime el valor numérico de $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx$ expresándolo como la suma de $\int_0^4 e^{-x^2}\, dx$ y $\int_4^{\infty} e^{-x^2}\, dx$. Aproxime la primera integral utilizando la regla de Simpson con $n = 8$ y demuestre que la segunda integral es más pequeña que $\int_4^{\infty} e^{-4x}\, dx$, la cual es menor que 0.0000001.

71. Si $f(t)$ es continua para $t \geqslant 0$, la *transformada de Laplace* de f es la función F definida por

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\, dt$$

y el dominio de F es el conjunto que consiste en todos los números s para los cuales la integral converge. Encuentre las transformadas de Laplace de las siguientes funciones.

a) $f(t) = 1$ b) $f(t) = e^t$ c) $f(t) = t$

72. Demuestre que si $0 \leqslant f(t) \leqslant Me^{at}$ para $t \geqslant 0$, donde M y a son constantes, entonces la transformada de Laplace $F(s)$ existe para $s > a$.

73. Suponga que $0 \leqslant f(t) \leqslant Me^{at}$ y $0 \leqslant f'(t) \leqslant Ke^{at}$ para $t \geqslant 0$, donde f' es continua. Si la transformada de Laplace de $f(t)$ es $F(s)$ y la transformada de Laplace de $f'(t)$ es $G(s)$, demuestre que

$$G(s) = sF(s) - f(0) \qquad s > a$$

74. Si $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ es convergente y a y b son números reales, demuestre que

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx + \int_a^{\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx + \int_b^{\infty} f(x)\, dx$$

75. Demuestre que $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx$.

76. Demuestre que $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{-\ln y}\; dy$ interpretando las integrales como áreas.

77. Encuentre el valor de la constante C para la cual la integral

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} - \frac{C}{x + 2} \right) dx$$

converge. Evalúe la integral para este valor de C.

78. Encuentre el valor de la constante C para la cual la integral

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{x}{x^2 + 1} - \frac{C}{3x + 1} \right) dx$$

converge. Evalúe la integral para este valor de C.

79. Suponga que f es continua en $[0, \infty)$ y $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$. ¿Es posible que $\int_0^{\infty} f(x)\, dx$ sea convergente?

80. Demuestre que si $a > -1$ y $b > a + 1$, entonces la siguiente integral es convergente.

$$\int_0^{\infty} \frac{x^a}{1 + x^b}\, dx$$

7 Repaso

Verificación de conceptos

1. Establezca la regla para la integración por partes. En la práctica, ¿cómo se utiliza?

2. ¿Cómo se evalúa $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx$ si m es impar? ¿Qué pasa si n es impar? ¿Qué ocurre si m y n son pares?

3. Si la expresión $\sqrt{a^2 - x^2}$ aparece en una integral, ¿qué sustitución podemos intentar? ¿Qué pasa si se presenta $\sqrt{a^2 + x^2}$? ¿Y si se presenta $\sqrt{x^2 - a^2}$?

4. ¿Cuál es la forma de la descomposición en fracciones parciales de una función racional $P(x)/Q(x)$ si el grado de P es menor que el grado de Q, y $Q(x)$ tiene factores lineales distintos? ¿Qué pasa si tiene factores lineales repetidos? ¿Y qué ocurre si $Q(x)$ tiene una factor cuadrático irreductible (no repetido)? ¿Y si el factor cuadrático se repite?

5. Establezca las reglas para la aproximación de la integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$ con la regla del punto medio, la regla del trapecio y la regla de Simpson. ¿Cuál esperaría que diera la mejor estimación? ¿Cómo se aproxima la estimación del error para cada regla?

6. Defina las siguientes integrales impropias.

a) $\int_a^{\infty} f(x)\, dx$ b) $\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx$ c) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$

7. Defina la integral impropia $\int_a^b f(x)\, dx$ para cada uno de los siguientes casos.

a) f tiene una discontinuidad infinita en a.
b) f tiene una discontinuidad infinita en b.
c) f tiene una discontinuidad infinita en c, donde $a < c < b$.

8. Establezca el teorema de comparación para integrales impropias.

Examen rápido Verdadero-Falso

Determine si las afirmaciones son verdaderas o falsas. Si es verdadera, explique por qué. Si es falsa, explique por qué o dé un ejemplo que refute la afirmación.

1. $\dfrac{x(x^2+4)}{x^2-4}$ puede escribirse en la forma $\dfrac{A}{x+2}+\dfrac{B}{x-2}$.
2. $\dfrac{x^2+4}{x(x^2-4)}$ puede escribirse en la forma $\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+2}+\dfrac{C}{x-2}$.
3. $\dfrac{x^2+4}{x^2(x-4)}$ puede escribirse en la forma $\dfrac{A}{x^2}+\dfrac{B}{x-4}$.
4. $\dfrac{x^2-4}{x(x^2+4)}$ puede escribirse en la forma $\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2+4}$.
5. $\displaystyle\int_0^4 \frac{x}{x^2-1}\,dx = \tfrac{1}{2}\ln 15$
6. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^{\sqrt{2}}}\,dx$ es convergente.
7. Si f es continua, entonces $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{t} f(x)\,dx$.
8. La regla del punto medio es siempre más exacta que la regla del trapecio.
9. a) Toda función elemental tiene una derivada elemental.
   b) Toda función elemental tiene una antiderivada elemental.
10. Si f es continua sobre $[0,\infty]$ y $\int_1^\infty f(x)\,dx$ es convergente, entonces $\int_0^\infty f(x)\,dx$ es convergente.
11. Si f es una función continua y decreciente en $[1,\infty]$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, entonces $\int_1^\infty f(x)\,dx$ es convergente.
12. Si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ y $\int_a^\infty g(x)\,dx$ son ambas convergentes, entonces $\int_a^\infty [f(x)+g(x)]\,dx$ es convergente.
13. Si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ y $\int_a^\infty g(x)\,dx$ son ambas divergentes, entonces $\int_a^\infty [f(x)+g(x)]\,dx$ es divergente.
14. Si $f(x) \leqslant g(x)$ y $\int_0^\infty g(x)\,dx$ divergen, entonces $\int_0^\infty f(x)\,dx$ también diverge.

Ejercicios

Nota: en los ejercicios 7.5 se proporciona práctica adicional en técnicas de integración.

1-40 Evalúe cada una de las siguientes integrales.

1. $\displaystyle\int_1^2 \frac{(x+1)^2}{x}\,dx$
2. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{(x+1)^2}\,dx$
3. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta\, e^{\cos\theta}\,d\theta$
4. $\displaystyle\int_0^{\pi/6} t \operatorname{sen} 2t\,dt$
5. $\displaystyle\int \frac{dt}{2t^2+3t+1}$
6. $\displaystyle\int_1^2 x^5 \ln x\,dx$
7. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3\theta\cos^2\theta\,d\theta$
8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$
9. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(\ln t)}{t}\,dt$
10. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2}\,dx$
11. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$
12. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{1+e^{4x}}\,dx$
13. $\displaystyle\int e^{\sqrt[3]{x}}\,dx$
14. $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{x+2}\,dx$
15. $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+2x}\,dx$
16. $\displaystyle\int \frac{\sec^6\theta}{\tan^2\theta}\,d\theta$
17. $\displaystyle\int x\sec x\tan x\,dx$
18. $\displaystyle\int \frac{x^2+8x-3}{x^3+3x^2}\,dx$
19. $\displaystyle\int \frac{x+1}{9x^2+6x+5}\,dx$
20. $\displaystyle\int \tan^5\theta\sec^3\theta\,d\theta$
21. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x}}$
22. $\displaystyle\int te^{\sqrt{t}}\,dt$
23. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$
24. $\displaystyle\int e^x\cos x\,dx$
25. $\displaystyle\int \frac{3x^3-x^2+6x-4}{(x^2+1)(x^2+2)}\,dx$
26. $\displaystyle\int x\operatorname{sen} x\cos x\,dx$
27. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^3 x\operatorname{sen} 2x\,dx$
28. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x}-1}\,dx$
29. $\displaystyle\int_{-3}^{3} \frac{x}{1+|x|}\,dx$
30. $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x\sqrt{1-e^{-2x}}}$
31. $\displaystyle\int_0^{\ln 10} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+8}\,dx$
32. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{x\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}\,dx$
33. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(4-x^2)^{3/2}}\,dx$
34. $\displaystyle\int (\operatorname{arcsen} x)^2\,dx$
35. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}+x^{3/2}}\,dx$
36. $\displaystyle\int \frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\,d\theta$
37. $\displaystyle\int (\cos x+\operatorname{sen} x)^2\cos 2x\,dx$
38. $\displaystyle\int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$
39. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{xe^{2x}}{(1+2x)^2}\,dx$
40. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sqrt{\tan\theta}}{\operatorname{sen} 2\theta}\,d\theta$

Se requiere calculadora graficadora o computadora SAC Se requiere sistema algebraico computarizado

41–50 Evalúe cada una de las siguientes integrales o demuestre que es divergente.

41. $\int_1^\infty \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx$

42. $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^4}\,dx$

43. $\int_2^\infty \frac{dx}{x \ln x}$

44. $\int_2^6 \frac{y}{\sqrt{y-2}}\,dy$

45. $\int_0^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

46. $\int_0^1 \frac{1}{2-3x}\,dx$

47. $\int_0^1 \frac{x-1}{\sqrt{x}}\,dx$

48. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2-2x}$

49. $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{4x^2+4x+5}$

50. $\int_1^\infty \frac{\tan^{-1}x}{x^2}\,dx$

51–52 Evalúe cada una de las siguientes integrales indefinidas. Ilustre y verifique que su respuesta sea razonable graficando la función y su antiderivada (tome $C = 0$).

51. $\int \ln(x^2+2x+2)\,dx$

52. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

53. Grafique la función $f(x) = \cos^2x \operatorname{sen}^3x$ y utilice la gráfica para conjeturar el valor de la integral $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$. Después evalúe la integral para confirmar su conjetura.

SAC **54.** a) ¿Cómo evaluaría $\int x^5e^{-2x}\,dx$ a mano? (No realice la integración.)
b) ¿Cómo evaluaría $\int x^5e^{-2x}\,dx$ utilizando tablas? (No realice la evaluación.)
c) Utilice un SAC para evaluar $\int x^5e^{-2x}\,dx$.
d) Grafique el integrando y la integral indefinida en la misma pantalla.

55–58 Utilice la tabla de integrales de las páginas de referencia para evaluar la integral.

55. $\int \sqrt{4x^2-4x-3}\,dx$

56. $\int \csc^5t\,dt$

57. $\int \cos x\sqrt{4+\operatorname{sen}^2x}\,dx$

58. $\int \frac{\cot x}{\sqrt{1+2\operatorname{sen}x}}\,dx$

59. Verifique la fórmula 33 en la tabla de integrales a) por derivación y b) utilizando una sustitución trigonométrica.

60. Verifique la fórmula 62 en la tabla de integrales.

61. ¿Es posible encontrar un número n tal que $\int_0^\infty x^n\,dx$ sea convergente?

62. ¿Para qué valores de a es $\int_0^\infty e^{ax}\cos x\,dx$ convergente? Evalúe la integral para esos valores de a.

63–64 Utilice a) la regla del trapecio, b) la regla del punto medio, y c) la regla de Simpson con $n = 10$ para aproximar la integral dada. Redondee sus respuestas a seis decimales.

63. $\int_2^4 \frac{1}{\ln x}\,dx$

64. $\int_1^4 \sqrt{x}\cos x\,dx$

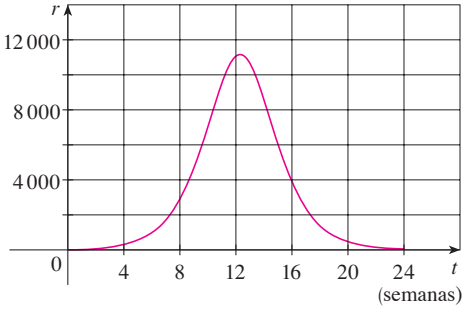
65. Estime los errores involucrados en el ejercicio 63, incisos a) y b). ¿Cuán grande debe ser n en cada caso, para garantizar un error menor que 0.00001?

66. Utilice la regla de Simpson con $n = 6$ para estimar el área bajo la curva $y = e^x/x$ de $x = 1$ a $x = 4$.

67. La lectura en un velocímetro (v) en un automóvil fue hecha a intervalos de un minuto y registrados en una tabla. Utilice la regla de Simpson para estimar la distancia recorrida por el automóvil.

t (min)	v (mi/h)	t (min)	v (mi/h)
0	40	6	56
1	42	7	57
2	45	8	57
3	49	9	55
4	52	10	56
5	54		

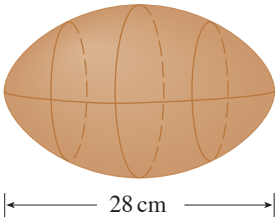
68. Una población de abejas aumentó en una proporción de $r(t)$ abejas por semana, donde la gráfica de r es como se muestra. Utilice la regla de Simpson con seis subintervalos para estimar el incremento de la población de abejas durante las primeras 24 semanas.



SAC **69.** a) Si $f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$, utilice una gráfica para encontrar una cota superior para $|f^{(4)}(x)|$.
b) Utilice la regla de Simpson con $n = 10$ para aproximar $\int_0^\pi f(x)\,dx$ y utilice el inciso a) para estimar el error.
c) ¿Qué tan grande debe ser n para garantizar que el tamaño del error al utilizar S_n sea menor que 0.00001?

70. Suponga que se le pide estimar el volumen de un balón de futbol. Al hacer la medición encuentra que un balón de futbol mide 28 cm de largo. Con una cuerda se determina que la circunferencia en su punto más amplio es de 53 cm. La

circunferencia a 7 cm de cada extremo es de 45 cm. Utilice la regla de Simpson para hacer su estimación.



71. Utilice el teorema de comparación para determinar si la integral es convergente o divergente.

a) $\int_1^\infty \frac{2 + \operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}\,dx$ b) $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{1 + x^4}}\,dx$

72. Encuentre el área de la región limitada por la hipérbola $y^2 - x^2 = 1$ y la recta $y = 3$.

73. Determine el área limitada por las curvas $y = \cos x$ y $y = \cos^2 x$ entre $x = 0$ y $x = \pi$.

74. Halle el área de la región limitada por las curvas $y = 1/(2 + \sqrt{x})$, $y = 1/(2 - \sqrt{x})$ y $x = 1$.

75. La región bajo la curva $y = \cos^2 x$, $0 \leq x \leq \pi/2$, rota alrededor del eje x. Encuentre el volumen del sólido resultante.

76. La región en el ejercicio 75 rota alrededor del eje y. Encuentre el volumen del sólido resultante.

77. Si f' es continua sobre $[0, \infty)$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, demuestre que

$$\int_0^\infty f'(x)\,dx = -f(0)$$

78. Podemos extender nuestra definición de valor promedio de una función continua a un intervalo infinito, definiendo el valor promedio de f sobre el intervalo $[a, \infty)$ como

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t - a} \int_a^t f(x)\,dx$$

a) Encuentre el valor promedio de $y = \tan^{-} 1x$ sobre el intervalo $[0, \infty)$.
b) Si $f(x) \geqslant 0$ y $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es divergente, demuestre que el valor promedio de f sobre el intervalo $[a, \infty)$ es $\lim_{x\to\infty} f(x)$ si este límite existe.
c) Si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es convergente, ¿cuál es el valor promedio de f sobre el intervalo $[a, \infty)$?
d) Encuentre el valor promedio de $y = \operatorname{sen} x$ sobre el intervalo $[0, \infty)$.

79. Utilice la sustitución $u = 1/x$ para demostrar que

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{1 + x^2}\,dx = 0$$

80. La magnitud de la fuerza de repulsión entre dos cargas con el mismo signo, una de tamaño 1 y la otra de tamaño q es

$$F = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

donde r es la distancia entre las cargas y ε_0 es una constante. El *potencial* V en un punto debida a la carga q está definida como el trabajo realizado para traer una carga unitaria a P desde el infinito, a lo largo de una recta que une q y P. Encuentre una fórmula para V.

Cubra la solución del ejemplo e inténtelo primero por sí mismo.

EJEMPLO 1

a) Demuestre que si f es una función continua, entonces

$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$$

b) Utilice el inciso a) para demostrar que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^n x}{\operatorname{sen}^n x + \cos^n x}\,dx = \frac{\pi}{4}$$

para todo número positivo n.

SOLUCIÓN

RP Los principios para la resolución de problemas se discuten en la página 75.

a) A primera vista, la ecuación dada podría parecer un poco desconcertante. ¿Cómo puede relacionarse el lado izquierdo con el lado derecho? Con frecuencia, las relaciones pueden hacerse a través de uno de los principios de resolución de problemas: *introduzca algo extra*. Aquí, el ingrediente extra es una nueva variable. Es común pensar en introducir una nueva variable cuando se utiliza la regla de sustitución para integrar una función específica. Pero esta técnica aun es útil en esta circunstancia en la que se tiene una función general f.

Una vez que se concibe la sustitución, la forma del lado derecho hace pensar que debe ser $u = a - x$. Entonces $du = -dx$. Cuando $x = 0$, $u = a$; cuando $x = a$, $u = 0$. Así,

$$\int_0^a f(a-x)\,dx = -\int_a^0 f(u)\,du = \int_0^a f(u)\,du$$

Pero esta integral del lado derecho es sólo otra forma de escribir $\int_0^a f(x)\,dx$. Así, la ecuación dada queda demostrada.

b) Sea I la integral dada, y apliquemos el inciso a) con $a = \pi/2$; obtenemos

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^n x}{\operatorname{sen}^n x + \cos^n x}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^n(\pi/2 - x)}{\operatorname{sen}^n(\pi/2 - x) + \cos^n(\pi/2 - x)}\,dx$$

Las gráficas por computadora de la figura 1, hacen que parezca plausible que todas las integrales del ejemplo tengan el mismo valor. La gráfica de cada integrando se identifica con el valor correspondiente de n.

Una identidad trigonométrica bien conocida nos indica que $\operatorname{sen}(\pi/2 - x) = \cos x$ y $\cos(\pi/2 - x) = \operatorname{sen} x$, así que obtenemos

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^n x}{\cos^n x + \operatorname{sen}^n x}\,dx$$

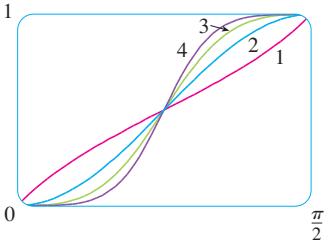


FIGURA 1

Observe que las dos expresiones para I son muy similares. De hecho, los integrandos tienen el mismo denominador. Esto hace pensar que deben sumarse las dos expresiones. Si se procede de esta manera, se obtiene

$$2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^n x + \cos^n x}{\operatorname{sen}^n x + \cos^n x}\,dx = \int_0^{\pi/2} 1\,dx = \frac{\pi}{2}$$

Por tanto, $I = \pi/4$. ■

Problemas

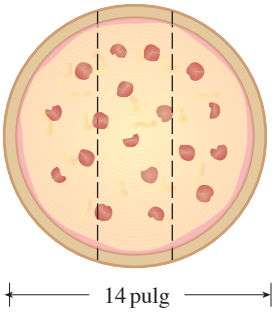


FIGURA PARA EL PROBLEMA 1

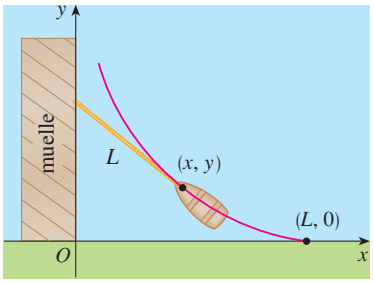


FIGURA PARA EL PROBLEMA 6

1. Tres estudiantes de matemáticas han ordenado una pizza de 14 pulgadas. En lugar de cortar en la forma tradicional, deciden hacer cortes paralelos, como se ve en la figura. Debido a sus conocimientos de matemáticas, pueden determinar dónde cortar de modo que cada uno obtenga la misma cantidad de pizza. ¿Dónde se hacen los cortes?

2. Evalúe

$$\int \frac{1}{x^7 - x}\, dx$$

Un camino directo sería empezar con fracciones parciales, pero eso sería demasiado complejo. Ensaye una sustitución.

3. Evalúe $\int_0^1 \left(\sqrt[3]{1 - x^7} - \sqrt[7]{1 - x^3}\right) dx$.

4. Los centros de dos discos con radio 1 están apartados una unidad. Encuentre el área de la unión de ellos.

5. Una elipse es cortada por un círculo de radio a. El eje mayor de la elipse coincide con un diámetro del círculo, y el eje menor tiene longitud $2b$. Demuestre que el área de la parte restante del círculo es la misma que el área de una elipse con semiejes a y $a - b$.

6. Un hombre parado inicialmente en el punto O camina a lo largo de un muelle jalando un bote mediante una cuerda de longitud L. El hombre mantiene la cuerda recta y tensa. La trayectoria que sigue el bote es una curva llamada *tractrix* y tiene la propiedad de que la cuerda es siempre tangente a la curva (véase la figura).

a) Demuestre que si la trayectoria seguida por el bote es la gráfica de la función $y = f(x)$, entonces

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{-\sqrt{L^2 - x^2}}{x}$$

b) Determine la función $y = f(x)$.

7. Una función f está definida por

$$f(x) = \int_0^{\pi} \cos t \cos(x - t)\, dt \qquad 0 \leq x \leq 2\pi$$

Encuentre el valor mínimo de f.

8. Si n es un entero positivo, demuestre que

$$\int_0^1 (\ln x)^n\, dx = (-1)^n n!$$

9. Demuestre que

$$\int_0^1 (1 - x^2)^n\, dx = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n + 1)!}$$

Sugerencia: empiece por demostrar que si I_n denota la integral, entonces

$$I_{k+1} = \frac{2k + 2}{2k + 3} I_k$$

Se requiere calculadora graficadora o computadora

10. Suponga que f es una función positiva tal que f' es continua.

a) ¿Cómo se relaciona la gráfica de $y = f(x)$ sen nx con la gráfica de $y = f(x)$? ¿Qué sucede cuando $n \to \infty$?

b) Haga una conjetura en cuanto al valor del límite

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x) \operatorname{sen} nx \, dx$$

basándose en las gráficas del integrando.

c) Por la integración por partes, confirme la conjetura que hizo en el inciso b). [Utilice el hecho de que, puesto que es $f'(x)$ continua, hay una constante M tal que $|f'(x)| \leq x \leq 1$ para $0 \leq x \leq 1$.]

11. Si $0 < a < b$, encuentre $\lim_{t\to 0} \left\{ \int_0^1 [bx + a(1-x)]^t \, dx \right\}^{1/t}$.

12. Grafique $f(x) = \operatorname{sen}(e^x)$ y utilice la gráfica para estimar el valor de t tal que $\int_t^{t+1} f(x)\,dx$ es un máximo. Después encuentre el valor exacto de t que maximiza esta integral.

13. Evalúe $\int_{-1}^{\infty} \left(\frac{x^4}{1+x^6} \right)^2 dx$.

14. Evalúe $\int \sqrt{\tan x}\, dx$.

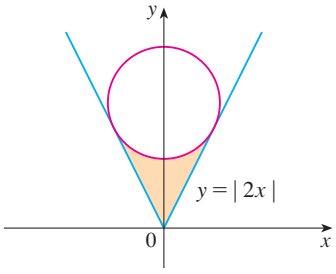


FIGURA PARA EL PROBLEMA 15

15. El círculo con radio 1 que se muestra en la figura, toca la curva $y = |2x|$ dos veces. Encuentre el área de la región que está entre las dos curvas.

16. Un cohete se dispara verticalmente en línea recta quemando combustible a una razón constante de b kilogramos por segundo. Sea $v = v(t)$ la velocidad del cohete en el instante t, y suponga que la velocidad u del gas de salida es constante. Sea $M = M(t)$ la masa del cohete en el instante t, y note que M disminuye cuando se quema el combustible. Si se desprecia la resistencia del aire, se deduce de la segunda ley de Newton que

$$F = M\frac{dv}{dt} - ub$$

donde la fuerza $F = -Mg$. Así

$$M\frac{dv}{dt} - ub = -Mg \qquad \boxed{1}$$

Sea M_1 la masa del cohete sin combustible, M_2 la masa inicial del combustible y $M_0 = M_1 + M_2$. Entonces, hasta que se agota el combustible en el tiempo $t = M_2/b$, la masa es $M = M_0 - bt$.

a) Sustituya $M = M_0 - bt$ en la ecuación 1 y resuelva la ecuación resultante para v. Utilice la condición inicial $v(0) = 0$ para evaluar la constante.

b) Determine la velocidad del cohete en el tiempo $t = M_2/b$. Ésta se llama *velocidad de combustible agotado*.

c) Determine la altura del cohete $y = y(t)$ y el tiempo en que se quema todo el combustible.

d) Halle la altura del cohete en cualquier tiempo t.

8 Aplicaciones adicionales de la integración



La presa Hoover atraviesa el río Colorado entre Nevada y Arizona (EU). Construida de 1931 a 1936, tiene 726 pies de altura y está diseñada para generar energía hidroeléctrica, distribuir agua para fines de riego y controlar inundaciones. En la sección 8.3 aprenderá a plantear y evaluar una integral que le permitirá calcular la fuerza sobre una presa ejercida por la presión del agua.

© iofoto / Shutterstock

En el capítulo 6 vimos algunas aplicaciones de las integrales: áreas, volúmenes, trabajo y valores promedio. Aquí se exploran algunas de muchas otras aplicaciones geométricas de la integración: la longitud de una curva y el área de una superficie, así como cantidades de interés en física, ingeniería, biología, economía y estadística. Por ejemplo, se investigará el centro de gravedad de una placa, la fuerza ejercida por la presión del agua en una presa, el flujo sanguíneo desde el corazón humano y el tiempo promedio en espera durante una llamada telefónica.

8.1 Longitud de arco

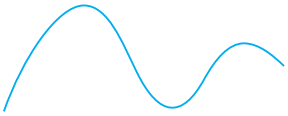


FIGURA 1

TEC Visual 8.1 muestra una animación de la figura 2.

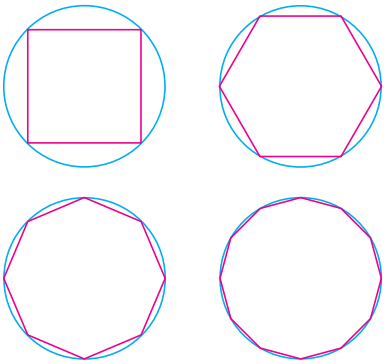


FIGURA 2

¿Qué se entiende por longitud de una curva? Podríamos pensar en ajustar un trozo de cuerda a la curva de la figura 1, y después medir la cuerda con una regla. Pero eso podría ser difícil de hacer con mucha exactitud si se tiene una curva complicada. Necesitamos una definición precisa para la longitud de un arco de una curva, en el mismo sentido que las definiciones desarrolladas para los conceptos de área y volumen.

Si la curva es un polígono, podemos determinar con facilidad su longitud; sólo necesitamos sumar las longitudes de los segmentos de recta que forman el polígono (puede usarse la fórmula de la distancia para hallar ésta entre los puntos extremos de cada segmento). Con esta estrategia, podemos definir la longitud de una curva general aproximándola primero mediante un polígono y luego tomando un límite cuando se incrementa el número de segmentos del polígono. Este proceso es conocido para el caso de un círculo, donde la circunferencia es el límite de longitudes de polígonos inscritos (véase la figura 2).

Ahora supongamos que una curva C se define mediante la función $y = f(x)$, donde f es continua y $a \leq x \leq b$. Podemos obtener una aproximación poligonal a C dividiendo el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos con puntos extremos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ y de igual ancho a Δx. Si $y_i = f(x_i)$, entonces el punto $P_i(x_i, y_i)$ está sobre C, y el polígono con vértices $P_0, P_1, \ldots, P_n$, ilustrado en la figura 3, es una aproximación a C.

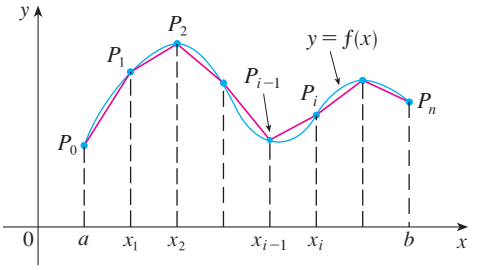


FIGURA 3

La longitud L de C es aproximadamente la longitud de este polígono y la aproximación es mejor cuando se incrementa n. (Véase la figura 4, donde se ha ampliado el arco de la curva entre P_{i-1} y P_i y se muestran las aproximaciones con valores sucesivamente más pequeños de Δx. Por tanto, definimos la **longitud** L de la curva C con la ecuación $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, como el límite de las longitudes de estos polígonos inscritos (si el límite existe):

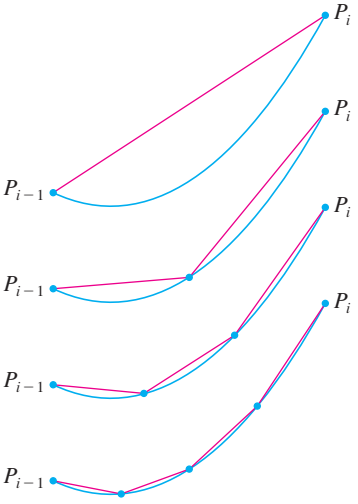


FIGURA 4

$$L = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i| \qquad 1$$

Observe que el procedimiento para definir la longitud de arco es muy similar al utilizado para definir área y volumen: se divide la curva en un gran número de partes pequeñas. Luego, se determinan las longitudes aproximadas de éstas y se suman. Por último, se toma el límite cuando $n \to \infty$.

La definición de la longitud de arco expresada en la ecuación 1 no es muy conveniente para propósitos de cálculo, pero puede deducirse una fórmula integral para L en el caso donde f tiene una derivada continua. [Tal función se denomina **suave** porque un cambio pequeño en x produce un cambio pequeño en $f'(x)$.]

Si $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, entonces

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

Al aplicar el teorema del valor medio a f en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, encontramos que hay un número x_i^* entre x_{i-1} y x_i tal que

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$$

es decir,

$$\Delta y_i = f'(x_i^*)\,\Delta x$$

Así, se tiene

$$\begin{aligned} |P_{i-1}P_i| &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + [f'(x_i^*)\,\Delta x]^2} \\ &= \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\,\sqrt{(\Delta x)^2} = \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\,\Delta x \qquad \text{(puesto que } \Delta x > 0\text{)} \end{aligned}$$

Por tanto, por la definición 1,

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i| = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\,\Delta x$$

Esta expresión se reconoce como igual a

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$$

por la definición de una integral definida. Esta integral existe porque la función $g(x) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ es continua. Con esto, se ha demostrado el siguiente teorema:

2 Fórmula de la longitud de arco Si f' es continua sobre $[a, b]$, entonces la longitud de la curva $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, es

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$$

Si usamos la notación de Leibniz para derivadas, podemos expresar la fórmula de la longitud de arco como:

3

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

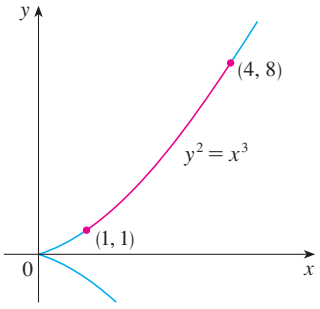


FIGURA 5

EJEMPLO 1 Halle la longitud del arco de la parábola semicúbica $y^2 = x^3$ entre los puntos (1, 1) y (4, 8). (Véase la figura 5.)

SOLUCIÓN Para la mitad superior de la curva se tiene

$$y = x^{3/2} \qquad \frac{dy}{dx} = \tfrac{3}{2}x^{1/2}$$

y, por tanto, la fórmula de longitud de arco da

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_1^4 \sqrt{1 + \tfrac{9}{4}x}\,dx$$

Si sustituimos $u = 1 + \frac{9}{4}x$, entonces $du = \frac{9}{4}\,dx$. Cuando $x = 1$, $u = \frac{13}{4}$; cuando $x = 4$, $u = 10$.

Como comprobación de nuestra respuesta al ejemplo 1, observe en la figura 5 que la longitud de arco debe ser un poco más grande que la distancia de (1, 1) a (4, 8), que es

$$\sqrt{58} \approx 7.615773$$

De acuerdo con nuestro cálculo del ejemplo 1, se tiene

$$L = \tfrac{1}{27}(80\sqrt{10} - 13\sqrt{13}) \approx 7.633705$$

Con certeza suficiente, ésta es un poco más grande que la longitud del segmento de recta.

Por tanto,

$$L = \tfrac{4}{9}\int_{13/4}^{10} \sqrt{u}\, du = \tfrac{4}{9} \cdot \tfrac{2}{3} u^{3/2}\Big]_{13/4}^{10}$$
$$= \tfrac{8}{27}\Big[10^{3/2} - \big(\tfrac{13}{4}\big)^{3/2}\Big] = \tfrac{1}{27}\big(80\sqrt{10} - 13\sqrt{13}\big)$$

Si una curva tiene la ecuación $x = g(y)$, $c \leq y \leq d$, y $g'(y)$ es continua, entonces al intercambiar los papeles de x y y en la fórmula 2 o en la ecuación 3, se obtiene la fórmula siguiente para su longitud:

4
$$L = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, dy = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

V EJEMPLO 2 Encuentre la longitud del arco de la parábola $y^2 = x$ de (0, 0) a (1, 1).

SOLUCIÓN Puesto que $x = y^2$, se tiene $dx/dy = 2y$, y la fórmula 4 da

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \int_0^1 \sqrt{1 + 4y^2}\, dy$$

Hacemos la sustitución trigonométrica $y = \frac{1}{2}\tan\theta$, que da $dy = \frac{1}{2}\sec^2\theta\, d\theta$ y $\sqrt{1 + 4y^2} = \sqrt{1 + \tan^2\theta} = \sec\theta$. Cuando $y = 0$, $\tan\theta = 0$; por tanto, $\theta = 0$; cuando $y = 1$, $\tan\theta = 2$, así que $\theta = \tan^{-1} 2 = \alpha$, por ejemplo. Así,

$$L = \int_0^{\alpha} \sec\theta \cdot \tfrac{1}{2}\sec^2\theta\, d\theta = \tfrac{1}{2}\int_0^{\alpha} \sec^3 \, d\theta$$
$$= \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}\Big[\sec\theta\tan\theta + \ln\big|\sec\theta + \tan\theta\big|\Big]_0^{\alpha} \qquad \text{(del ejemplo 8 de la sección 7.2)}$$
$$= \tfrac{1}{4}\big(\sec\alpha\tan\alpha + \ln\big|\sec\alpha + \tan\alpha\big|\big)$$

(Podríamos haber usado la fórmula 21 de la tabla de integrales.) Puesto que $\tan\alpha = 2$, se tiene que $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha = 5$, de modo que $\sec\alpha = \sqrt{5}$ y

$$L = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\ln(\sqrt{5} + 2)}{4}$$

En la figura 6 se muestra el arco de la parábola cuya longitud se calculó en el ejemplo 2, junto con las aproximaciones poligonales que tienen segmentos de recta $n = 1$ y $n = 2$, respectivamente. Para $n = 1$ la longitud aproximada es $L_1 = \sqrt{2}$, la diagonal de un cuadrado. En la tabla se muestran las aproximaciones L_n que se obtienen al dividir $[0, 1]$ en n subintervalos iguales. Observe que cada vez que duplicamos el número de lados de un polígono, nos aproximamos más a la longitud exacta, que es

$$L = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\ln(\sqrt{5} + 2)}{4} \approx 1.478943$$

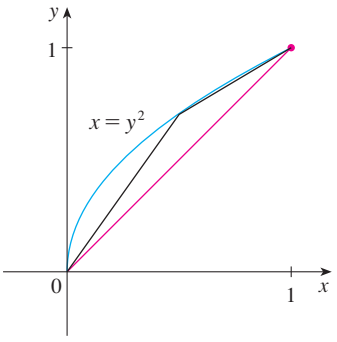


FIGURA 6

n	L_n
1	1.414
2	1.445
4	1.464
8	1.472
16	1.476
32	1.478
64	1.479

Debido a la presencia del signo raíz cuadrada en las fórmulas 2 y 4, el cálculo de una longitud de arco a menudo conduce a una integral que es muy difícil o incluso imposible de evaluar de manera explícita. Así, algunas veces nos tenemos que conformar con hallar una aproximación de la longitud de una curva, como en el siguiente ejemplo.

V EJEMPLO 3

a) Plantee una integral para la longitud del arco de la hipérbola $xy = 1$ del punto $(1, 1)$ al punto $\left(2, \frac{1}{2}\right)$.

b) Use la regla de Simpson con $n = 10$ para estimar la longitud de arco.

SOLUCIÓN

a) Se tiene

$$y = \frac{1}{x} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$$

y, por tanto, la longitud de arco es

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\, dx = \int_1^2 \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^2}\, dx$$

b) Por medio de la regla de Simpson (véase la sección 7.7) con $a = 1$, $b = 2$, $n = 10$, $\Delta x = 0.1$ y $f(x) = \sqrt{1 + 1/x^4}$, tenemos

Al verificar el valor de la integral definida con una aproximación más exacta producida por un sistema algebraico computarizado, se ve que la aproximación por medio de la regla de Simpson es exacta con una aproximación de cuatro decimales.

$$\begin{aligned} L &= \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\, dx \\ &\approx \frac{\Delta x}{3}[f(1) + 4f(1.1) + 2f(1.2) + 4f(1.3) + \cdots + 2f(1.8) + 4f(1.9) + f(2)] \\ &\approx 1.1321 \end{aligned}$$

Función de la longitud de arco

Encontraremos útil tener una función que mida la longitud de arco de una curva de un determinado punto de partida a cualquier otro punto sobre la curva. Así, si una curva suave C tiene la ecuación $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, sea $s(x)$ la distancia a lo largo de C del punto inicial $P_0(a, f(a))$ al punto $Q(x, f(x))$. Entonces s es una función, llamada **función longitud de arco** y, por la fórmula 2,

$$\boxed{5} \qquad s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, dt$$

(Se ha reemplazado la variable de integración por t para que x no tenga dos significados.) Podemos usar la parte 1 del teorema fundamental del cálculo para derivar la ecuación 5 (puesto que el integrando es continuo):

$$\boxed{6} \qquad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

En la ecuación 6 se muestra que la razón de cambio de s respecto a x es siempre por lo menos 1 y es igual a 1 cuando $f'(x)$, la pendiente de la curva, es 0. La derivada de la longitud de arco es

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \qquad \boxed{7}$$

y esta ecuación se escribe a veces en la forma simétrica

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \qquad \boxed{8}$$

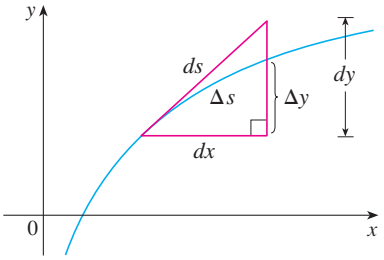


FIGURA 7

La interpretación geométrica de la ecuación 8 se muestra en la figura 7. Puede usarse como recurso nemotécnico para recordar las fórmulas 3 y 4. Si escribimos $L = \int ds$, entonces de la ecuación 8 podemos resolver para obtener 7, que da 3, o para obtener

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

que da 4.

V EJEMPLO 4 Encuentre la función longitud de arco para la curva $y = x^2 - \frac{1}{8}\ln x$ tomando a $P_0(1, 1)$ como el punto de partida.

SOLUCIÓN Si $f(x) = x^2 - \frac{1}{8}\ln x$, entonces

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{8x}$$

$$1 + [f'(x)]^2 = 1 + \left(2x - \frac{1}{8x}\right)^2 = 1 + 4x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{64x^2}$$

$$= 4x^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{64x^2} = \left(2x + \frac{1}{8x}\right)^2$$

$$\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = 2x + \frac{1}{8x}$$

Así, la función longitud de arco está dada por

$$s(x) = \int_1^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, dt$$

$$= \int_1^x \left(2t + \frac{1}{8t}\right) dt = t^2 + \tfrac{1}{8}\ln t\Big]_1^x$$

$$= x^2 + \tfrac{1}{8}\ln x - 1$$

Por ejemplo, la longitud de arco a lo largo de la curva de (1, 1) a $(3, f(3))$ es

$$s(3) = 3^2 + \tfrac{1}{8}\ln 3 - 1 = 8 + \frac{\ln 3}{8} \approx 8.1373$$

En la figura 8 se muestra la interpretación de la función longitud de arco del ejemplo 4. En la figura 9 se ilustra la gráfica de esta función de longitud de arco. ¿Por qué $s(x)$ es negativa cuando x es menor que 1?

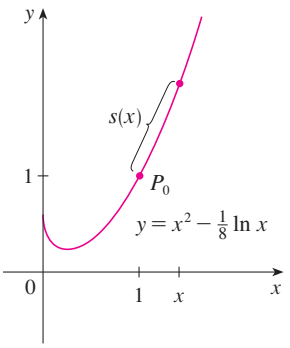


FIGURA 8

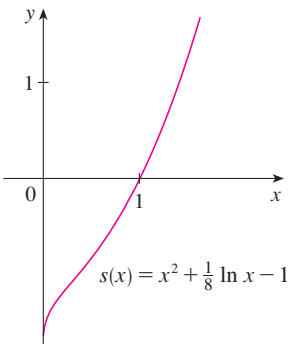


FIGURA 9

8.1 Ejercicios

1. Use la fórmula de longitud de arco 3 para hallar la longitud de la curva $y = 2x - 5$, $-1 \leq x \leq 3$. Compruebe su respuesta observando que la curva es un segmento de recta y calculando su longitud mediante la fórmula de la distancia.

2. Use la fórmula de la longitud de arco para hallar la longitud de la curva $y = \sqrt{2 - x^2}$, $0 \leq x \leq 1$. Compruebe su respuesta observando que la curva es parte de una circunferencia.

3-6 Plantee una integral que represente la longitud de las siguientes curvas. Después, utilice su calculadora para encontrar la longitud con una aproximación de cuatro decimales.

3. $y = \operatorname{sen} x, \quad 0 \leq x \leq \pi$

4. $y = xe^{-x}, \quad 0 \leq x \leq 2$

5. $x = \sqrt{y} - y, \quad 1 \leq y \leq 4$

6. $x = y^2 - 2y, \quad 0 \leq y \leq 2$

7-18 Determine la longitud exacta de las siguientes curvas.

7. $y = 1 + 6x^{3/2}, \quad 0 \leq x \leq 1$

8. $y^2 = 4(x + 4)^3, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad y > 0$

9. $y = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1}{4x}, \quad 1 \leq x \leq 2$

10. $x = \dfrac{y^4}{8} + \dfrac{1}{4y^2}, \quad 1 \leq y \leq 2$

11. $x = \frac{1}{3}\sqrt{y}\,(y - 3), \quad 1 \leq y \leq 9$

12. $y = \ln(\cos x), \quad 0 \leq x \leq \pi/3$

13. $y = \ln(\sec x), \quad 0 \leq x \leq \pi/4$

14. $y = 3 + \frac{1}{2}\cosh 2x, \quad 0 \leq x \leq 1$

15. $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x, \quad 1 \leq x \leq 2$

16. $y = \sqrt{x - x^2} + \operatorname{sen}^{-1}(\sqrt{x})$

17. $y = \ln(1 - x^2), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$

18. $y = 1 - e^{-x}, \quad 0 \leq x \leq 2$

19-20 Halle la longitud de arco de la curva desde el punto P hasta el punto Q.

19. $y = \frac{1}{2}x^2, \quad P\left(-1, \frac{1}{2}\right), \quad Q\left(1, \frac{1}{2}\right)$

20. $x^2 = (y - 4)^3, \quad P(1, 5), \quad Q(8, 8)$

21-22 Grafique la curva y estime visualmente su longitud. Después utilice su calculadora para determinar la longitud con una aproximación de cuatro decimales.

21. $y = x^2 + x^3, \quad 1 \leq x \leq 2$

22. $y = x + \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi/2$

23-26 Use la regla de Simpson con $n = 10$ para estimar la longitud de arco de las siguientes curvas. Compare su respuesta con el valor de la integral que obtiene con su calculadora.

23. $y = x \operatorname{sen} x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

24. $y = \sqrt[3]{x}, \quad 1 \leq x \leq 6$

25. $y = \ln(1 + x^3), \quad 0 \leq x \leq 5$

26. $y = e^{-x^2}, \quad 0 \leq x \leq 2$

27. a) Grafique la curva $y = x\sqrt[3]{4 - x}$, $0 \leq x \leq 4$.
b) Calcule las longitudes de polígonos inscritos con $n = 1, 2,$ y 4 lados. (Divida el intervalo en subintervalos iguales.) Ilustre bosquejando estos polígonos (como en la figura 6).
c) Plantee una integral para la longitud de la curva.
d) Use su calculadora para hallar la longitud de la curva con una aproximación de cuatro decimales. Compare con las aproximaciones del inciso b).

28. Repita el ejercicio 27 para la curva

$$y = x + \operatorname{sen} x \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$$

29. Use un sistema algebraico computarizado o una tabla de integrales para hallar la longitud *exacta* del arco de la curva $y = \ln x$ que está entre los puntos $(1, 0)$ y $(2, \ln 2)$.

30. Emplee un sistema algebraico computarizado o una tabla de integrales para hallar la longitud *exacta* del arco de la curva $y = x^{4/3}$ que está entre los puntos $(0, 0)$ y $(1, 1)$. Si su SAC tiene problemas para evaluar la integral, haga una sustitución que cambie la integral en una que el SAC pueda evaluar.

31. Bosqueje la curva con ecuación $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ y emplee la simetría para hallar su longitud.

32. a) Bosqueje la curva $y^3 = x^2$.
b) Use las fórmulas 3 y 4 para plantear dos integrales para la longitud de arco de $(0, 0)$ a $(1, 1)$. Observe que una de éstas es una integral impropia y evalúelas.
c) Determine la longitud de arco de esta curva de $(-1, 1)$ a $(8, 4)$.

33. Encuentre la función longitud de arco para la curva $y = 2x^{3/2}$ con punto inicial $P_0(1, 2)$.

34. a) Encuentre la función longitud de arco para la curva $y = \ln(\operatorname{sen} x)$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, con inicial $(\pi/2, 0)$.
b) Grafique la curva y su función longitud de arco en la misma pantalla.

35. Halle la función longitud de arco para la curva $y = \operatorname{sen}^{-1} x + \sqrt{1 - x^2}$ con punto inicial $(0, 1)$.

36. Un viento continuo arrastra un cometa hacia el oeste. La altura del cometa por encima de la superficie de la tierra desde la posición horizontal $x = 0$ hasta $x = 80$ pies está dada por $y = 150 - \frac{1}{40}(x - 50)^2$. Halle la distancia recorrida por el cometa.

37. Un halcón que vuela a 15 m/s a una altitud de 180 m deja caer su presa accidentalmente. La trayectoria parabólica de la presa en descenso se describe mediante la ecuación

$$y = 180 - \frac{x^2}{45}$$

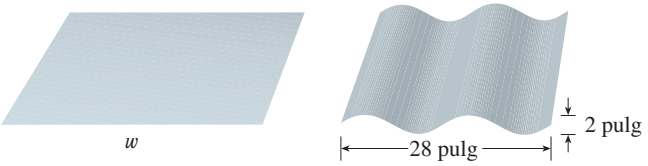
hasta que choca con el suelo, donde y es la altura sobre del suelo, y x es la distancia horizontal recorrida en metros. Calcule la distancia que recorre la presa desde el momento en que es dejada caer hasta que choca con el suelo. Exprese su respuesta correcta hasta el decímetro más próximo.

38. El arco Gateway en San Luis (EU) (véase la foto en la página 259) fue construido aplicando la ecuación

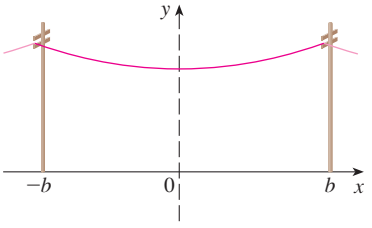
$$y = 211.49 - 20.96 \cosh 0.03291765x$$

para la curva central del arco, donde x y y se miden en metros $|x| \leqslant 91.20$. Establezca una integral para la longitud de arco y utilice su calculadora para estimar su longitud al metro más cercano.

39. Un fabricante de techos de metal corrugado quiere producir paneles que miden 28 pulgadas de ancho y 2 pulgadas de espesor, procesando láminas planas de metal como se ilustra en la figura. El perfil del techo toma la forma de una onda seno. Verifique que la curva seno tiene ecuación $y = \operatorname{sen}(\pi x/7)$ y determine el ancho w de una lámina de metal plana requerida para construir un panel de 28 pulgadas. (Con su calculadora evalúe la integral con una aproximación de cuatro dígitos significativos.)



40. a) En la figura se muestra un cable telefónico que cuelga entre dos postes en $x = -b$ y $x = b$. El cable toma la forma de una catenaria con ecuación $y = c + a \cosh(x/a)$. Halle la longitud del cable.
b) Suponga que dos postes de teléfono están apartados entre sí 50 pies y que la longitud del cable entre los postes es de 51 pies. Si el punto mínimo del cable debe estar a 20 pies sobre el suelo, ¿a qué altura debe estar atado el cable en cada poste?



41. Encuentre la longitud de la curva

$$y = \int_1^x \sqrt{t^3 - 1}\, dt \qquad 1 \leqslant x \leqslant 4$$

42. Las curvas con ecuaciones $x^n + y^n = 1$, $n = 4, 6, 8, \ldots$, se llaman **circunferencias gordas**. Grafique las curvas con $n = 2, 4, 6, 8$ y 10 para ver por qué. Plantee una integral para la longitud L_{2k} de la circunferencia gorda con $n = 2k$. Sin intentar evaluar esta integral, establezca el valor del $\lim_{k \to \infty} L_{2k}$.

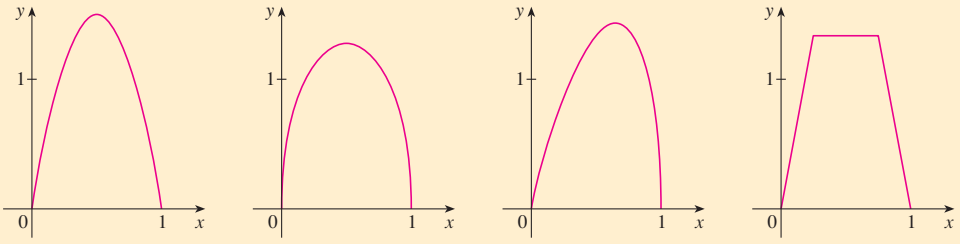
PROYECTO PARA UN DESCUBRIMIENTO

CONCURSO DE LA LONGITUD DE ARCO

Las curvas que se muestran son ejemplos de gráficas de funciones continuas f que tienen las siguientes propiedades.

1. $f(0) = 0$ y $f(1) = 0$
2. $f(x) \geqslant 0$ para $0 \leqslant x \leqslant 1$
3. El área bajo la gráfica de f desde 0 a 1 es igual a 1.

Sin embargo, las longitudes L de estas curvas son diferentes.



$L \approx 3.249$ $L \approx 2.919$ $L \approx 3.152$ $L \approx 3.213$

Intente descubrir las fórmulas para dos funciones que satisfagan las condiciones dadas 1, 2 y 3. (Sus gráficas podrían ser similares a las mostradas o podrían parecer bastante diferentes). Después calcule la longitud de arco de cada gráfica. El elemento ganador será el que tenga la longitud de arco más pequeña.

8.2 Área de una superficie de revolución

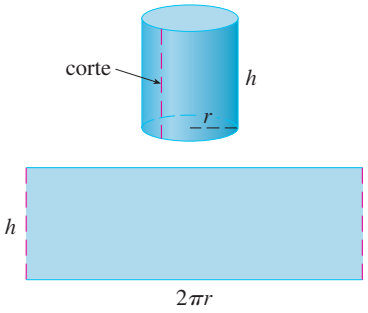


FIGURA 1

Una superficie de revolución se forma cuando se hace girar una curva en torno a una recta. Tal superficie es la frontera lateral de un sólido de revolución del tipo analizado en las secciones 6.2 y 6.3.

Se desea definir el área de una superficie de revolución de tal manera que corresponda con nuestra intuición. Si el área de la superficie es A, podemos imaginar que pintar la superficie requeriría la misma cantidad de pintura que una región plana con área A.

Comencemos con algunas superficies simples. El área superficial lateral de un cilindro circular con radio r y altura h se toma como $A = 2\pi rh$ porque puede imaginarse como si se cortara el cilindro para después desenrollarlo (como en la figura 1) para obtener un rectángulo con dimensiones $2\pi rh$ y h.

De igual manera, podemos tomar un cono circular con base de radio r y de altura inclinada l, cortarlo a lo largo de la línea discontinua en la figura 2, y aplanarlo para formar un

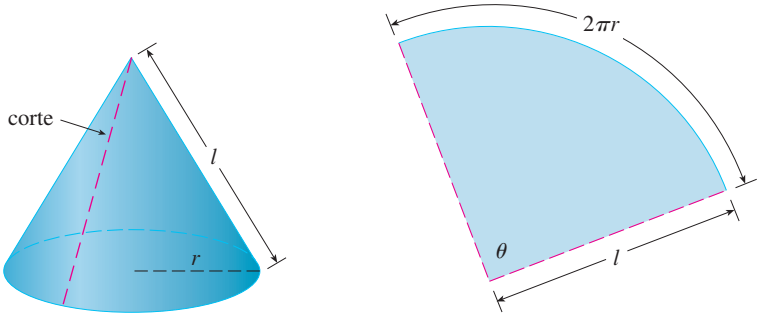


FIGURA 2

sector de un círculo con radio l y ángulo central $\theta = 2\pi r/l$. Sabemos que, en general, el área de un sector de un círculo con radio l y ángulo θ es $\frac{1}{2}l^2\theta$ (véase el ejercicio 35 en la sección 7.3) y, por tanto, en este caso es

$$A = \tfrac{1}{2}l^2\theta = \tfrac{1}{2}l^2\left(\frac{2\pi r}{l}\right) = \pi rl$$

Por ende, definimos el área de la superficie lateral de un cono como $A = \pi rl$.

¿Qué hay acerca de las superficies de revolución más complicadas? Si se sigue la estrategia que se usó con la longitud de arco, podemos aproximar la curva original mediante un polígono. Cuando éste se hace girar en torno a un eje, crea una superficie más simple cuya área superficial se aproxima al área superficial real. Si se toma un límite, podemos determinar el área superficial exacta.

Entonces, la superficie de aproximación consta de varias *bandas*, cada una formada al hacer girar un segmento de recta en torno a un eje. Para hallar el área superficial, cada una de estas bandas puede ser considerada la porción de un cono circular, como se muestra en la figura 3. El área de la banda (o cono truncado) con una altura inclinada l y radios superior e inferior r_1 y r_2, respectivamente, se encuentra al restar las áreas de los dos conos:

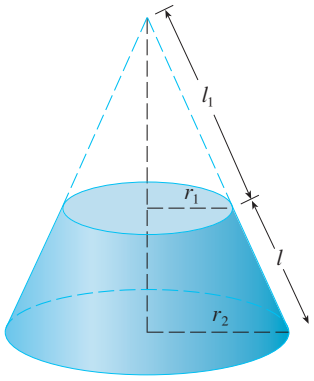


FIGURA 3

$$\boxed{1} \qquad A = \pi r_2(l_1 + l) - \pi r_1 l_1 = \pi[(r_2 - r_1)l_1 + r_2 l]$$

Considerando los triángulos semejantes se tiene

$$\frac{l_1}{r_1} = \frac{l_1 + l}{r_2}$$

que da

$$r_2 l_1 = r_1 l_1 + r_1 l \qquad \text{o bien} \qquad (r_2 - r_1)l_1 = r_1 l$$

Si se sustituye esto en la ecuación 1, se obtiene

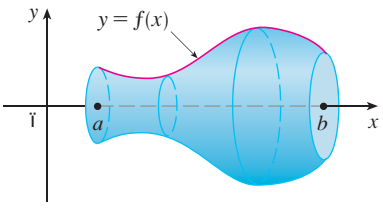
$$A = \pi(r_1 l + r_2 l)$$

o bien,

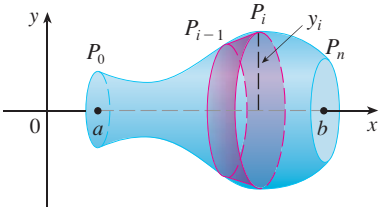
$$\boxed{2} \qquad \boxed{A = 2\pi rl}$$

donde $r = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$ es el radio promedio de la banda.

Ahora aplicaremos esta fórmula a nuestra estrategia. Consideremos la superficie mostrada en la figura 4, que se obtiene al hacer girar la curva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, en torno al eje x, donde f es positiva y tiene una derivada continua. A fin de definir su área superficial, dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos con puntos extremos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ e igual ancho Δx, como se hizo para determinar la longitud de arco. Si $y_i = f(x_i)$, entonces el punto $P_i(x_i, y_i)$ está sobre la curva. La porción de la superficie entre x_{i-1} y x_i se aproxima al tomar el segmento de recta $P_{i-1}P_i$, y hacerlo girar en torno al eje x. El resultado es una banda con altura inclinada $l = |P_{i-1}P_i|$ y radio promedio $r = \frac{1}{2}(y_{i-1} + y_i)$ de modo que, por la fórmula 2, su área superficial es



a) Superficie de revolución



b) Banda de aproximación

FIGURA 4

$$2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} |P_{i-1}P_i|$$

Como en la demostración del teorema 8.1.2, tenemos

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\,\Delta x$$

donde x_i^* es algún número en $[x_{i-1}, x_i]$. Cuando Δx es pequeño, tenemos $y_i = f(x_i) \approx f(x_i^*)$ y también $y_{i-1} = f(x_{i-1}) \approx f(x_i^*)$, puesto que f es continua. Por tanto,

$$2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} |P_{i-1}P_i| \approx 2\pi f(x_i^*) \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\, \Delta x$$

y de este modo una aproximación a lo que se considera el área de la superficie de revolución completa es

$$\sum_{i=1}^{n} 2\pi f(x_i^*) \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\, \Delta x \tag{3}$$

Esta aproximación al parecer mejora cuando $n \to \infty$ y, reconociendo a 3 como una suma de Riemann para la función $g(x) = 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(x_i^*) \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\, \Delta x = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

Por tanto, en el caso donde f es positiva y tiene una derivada continua, el **área superficial** de la superficie obtenida se define al hacer girar la curva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, en torno al eje x como

$$S = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx \tag{4}$$

Con la notación de Leibniz para derivadas, esta fórmula se convierte en

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \tag{5}$$

Si la curva se describe como $x = g(y)$, $c \leq y \leq d$, entonces la fórmula para el área superficial se transforma en

$$S = \int_c^d 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy \tag{6}$$

y ambas fórmulas 5 y 6 pueden resumirse simbólicamente, utilizando la notación para la longitud de arco dada en la sección 8.1, como

$$S = \int 2\pi y\, ds \tag{7}$$

Para la rotación en torno al eje y, la fórmula del área superficial se convierte en

$$\boxed{8} \qquad \boxed{S = \int 2\pi x \, ds}$$

donde, como antes, puede usarse

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \quad \text{o bien} \quad ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

Estas fórmulas pueden recordarse si se considera a $2\pi y$ o $2\pi x$ como la circunferencia de un círculo trazado por el punto (x, y) sobre la curva cuando se hace girar en torno al eje x o al eje y, respectivamente (véase la figura 5).

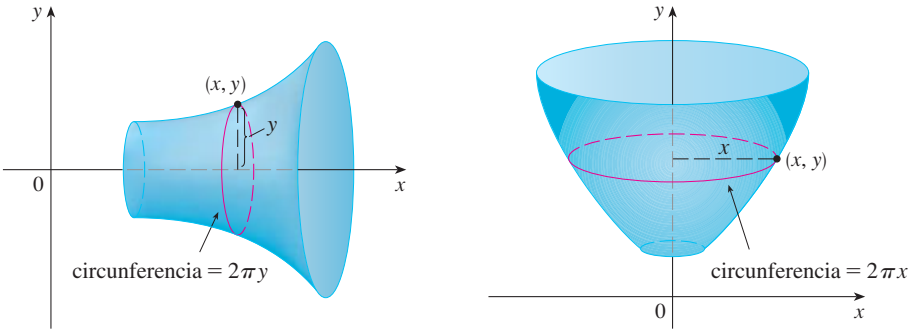


FIGURA 5 a) Rotación en torno al eje x: $S = \int 2\pi y \, ds$ b) Rotación respecto al eje y: $S = \int 2\pi x \, ds$

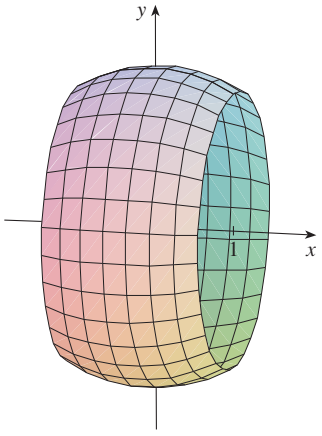


FIGURA 6

En la figura 6 se muestra la porción de la esfera cuya área superficial se calculó en el ejemplo 1.

V EJEMPLO 1 La curva $y = \sqrt{4 - x^2}$, $-1 \leq x \leq 1$ es un arco de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$. Encuentre el área de la superficie obtenida al hacer girar este arco en torno al eje x. (La superficie es una porción de una esfera de radio 2. Véase la figura 6.)

SOLUCIÓN Se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{2}(4 - x^2)^{-1/2}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

y, por tanto, por la fórmula 5, el área superficial es

$$S = \int_{-1}^{1} 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{4 - x^2}\, \sqrt{1 + \frac{x^2}{4 - x^2}}\, dx$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{4 - x^2}\, \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}}\, dx$$

$$= 4\pi \int_{-1}^{1} 1 \, dx = 4\pi(2) = 8\pi$$

En la figura 7 se muestra una superficie de revolución cuya área se calcula como en el ejemplo 2.

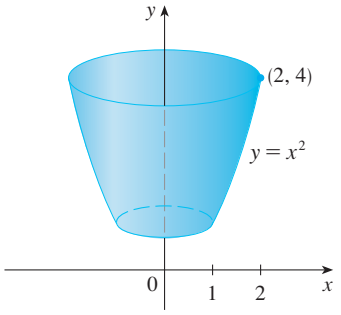


FIGURA 7

V EJEMPLO 2 El arco de la parábola $y = x^2$ de (1, 1) a (2, 4) se hace girar en torno al eje y. Encuentre el área de la superficie resultante.

SOLUCIÓN 1 Utilizando

$$y = x^2 \qquad \text{y} \qquad \frac{dy}{dx} = 2x$$

se tiene, de la fórmula 8,

$$S = \int 2\pi x \, ds$$

$$= \int_1^2 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx$$

$$= 2\pi \int_1^2 x \sqrt{1 + 4x^2} \, dx$$

Al sustituir $u = 1 + 4x^2$, se tiene $du = 8x\,dx$. Recuerde que al cambiar los límites de integración, se tiene

$$S = \frac{\pi}{4} \int_5^{17} \sqrt{u} \, du = \frac{\pi}{4} \left[\tfrac{2}{3} u^{3/2}\right]_5^{17}$$

$$= \frac{\pi}{6} \left(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}\right)$$

Para comprobar la respuesta al ejemplo 2, observe en la figura 7 que el área superficial debe ser cercana a la de un cilindro circular con la misma altura y radio a la mitad entre el radio superior e inferior de la superficie: $2\pi(1.5)(3) \approx 28.27$. Se calculó que el área superficial era

$$\frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}\right) \approx 30.85$$

que parece razonable. De manera alternativa, el área superficial debe ser un poco más grande que el área de un cono truncado con la misma base y tapa. De la ecuación 2, esto es $2\pi(1.5)(\sqrt{10}) \approx 29.80$.

SOLUCIÓN 2 Utilizando

$$x = \sqrt{y} \qquad \text{y} \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

se tiene

$$S = \int 2\pi x \, ds = \int_1^4 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \, dy$$

$$= 2\pi \int_1^4 \sqrt{y} \sqrt{1 + \frac{1}{4y}} \, dy = \pi \int_1^4 \sqrt{4y + 1} \, dy$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_5^{17} \sqrt{u} \, du \qquad (\text{donde } u = 1 + 4y)$$

$$= \frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}\right) \qquad (\text{como en la solución 1})$$

V EJEMPLO 3 Encuentre el área de la superficie generada al hacer girar la curva $y = e^x$, $0 \leq x \leq 1$, en torno al eje x.

SOLUCIÓN Utilizando la fórmula 5 con

$$y = e^x \qquad \text{y} \qquad \frac{dy}{dx} = e^x$$

Otro método: utilice la fórmula 6 con $x = \ln y$.

se tiene

$$S = \int_0^1 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = 2\pi \int_0^1 e^x \sqrt{1 + e^{2x}}\, dx$$

$$= 2\pi \int_1^e \sqrt{1 + u^2}\, du \qquad (\text{donde } u = e^x)$$

$$= 2\pi \int_{\pi/4}^{\alpha} \sec^3\theta\, d\theta \qquad (\text{donde } u = \tan\theta \text{ y } \alpha = \tan^{-1}e)$$

O utilice la fórmula 21 de la tabla de integrales.

$$= 2\pi \cdot \tfrac{1}{2}\left[\sec\theta \tan\theta + \ln\left|\sec\theta + \tan\theta\right|\right]_{\pi/4}^{\alpha} \qquad (\text{por el ejemplo 8 de la sección 7.2})$$

$$= \pi\left[\sec\alpha \tan\alpha + \ln(\sec\alpha + \tan\alpha) - \sqrt{2} - \ln\left(\sqrt{2} + 1\right)\right]$$

Puesto que $\alpha = e$, se tiene $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha = 1 + e^2$ y

$$S = \pi\left[e\sqrt{1 + e^2} + \ln\left(e + \sqrt{1 + e^2}\right) - \sqrt{2} - \ln\left(\sqrt{2} + 1\right)\right]$$

8.2 Ejercicios

1-4
a) Plantee una integral para el área de la superficie obtenida al hacer girar la curva en torno al i) eje x y ii) el eje y.
b) Utilice la capacidad numérica de su calculadora para evaluar las áreas de superficie con una aproximación de cuatro decimales.

1. $y = \tan x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/3$

2. $y = x^{-2}, \quad 1 \leqslant x \leqslant 2$

3. $y = e^{-x^2}, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1$

4. $x = \ln(2y + 1), \quad 0 \leqslant y \leqslant 1$

5-12 Determine el área de la superficie obtenida al hacer girar la curva en torno al eje x.

5. $y = x^3, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2$

6. $9x = y^2 + 18, \quad 2 \leqslant x \leqslant 6$

7. $y = \sqrt{1 + 4x}, \quad 1 \leqslant x \leqslant 5$

8. $y = \sqrt{1 + e^x}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

9. $y = \operatorname{sen} \pi x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

10. $y = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{1}{2x}, \quad \tfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$

11. $x = \tfrac{1}{3}(y^2 + 2)^{3/2}, \quad 1 \leqslant y \leqslant 2$

12. $x = 1 + 2y^2, \quad 1 \leqslant y \leqslant 2$

13-16 La curva dada se hace girar en torno al eje y. Encuentre el área de la superficie resultante.

13. $y = \sqrt[3]{x}, \quad 1 \leqslant y \leqslant 2$

14. $y = 1 - x^2, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

15. $x = \sqrt{a^2 - y^2}, \quad 0 \leqslant y \leqslant a/2$

16. $y = \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{2}\ln x, \quad 1 \leqslant x \leqslant 2$

17-20 Use la regla de Simpson con $n = 10$ para aproximar el área de la superficie obtenida al hacer girar la curva en torno al eje x. Compare su respuesta con el valor de la integral producido por su calculadora.

17. $y = \tfrac{1}{5}x^5, \quad 0 \leqslant x \leqslant 5$

18. $y = x + x^2, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

19. $y = xe^x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

20. $y = x \ln x, \quad 1 \leqslant x \leqslant 2$

SAC **21-22** Use un SAC o una tabla de integrales para hallar el área exacta de la superficie obtenida al hacer girar la curva dada en torno al eje x.

21. $y = 1/x, \quad 1 \leqslant x \leqslant 2$

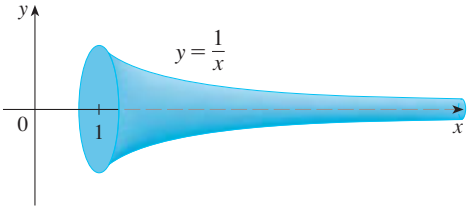
22. $y = \sqrt{x^2 + 1}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 3$

SAC **23-24** Use un SAC para hallar el área exacta de la superficie obtenida al hacer girar la curva en torno al eje y. Si su SAC tiene problema para evaluar la integral, exprese el área superficial como una integral en la otra variable.

23. $y = x^3, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1$

24. $y = \ln(x + 1), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

25. Si la región $\mathcal{R} = \{(x, y) \mid x \geqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1/x\}$ se hace girar en torno al eje x, el volumen del sólido resultante es finito (véase el ejercicio 63 en la sección 7.8). Demuestre que el área superficial es infinita. (La superficie se muestra en la figura y se conoce como **trompeta de Gabriel**.)



26. Si la curva infinita $y = e^{-x}$, $x \geqslant 0$, se hace girar en torno al eje x, encuentre el área de la superficie resultante.

27. a) Si $a > 0$, encuentre el área de la superficie generada al hacer girar el bucle de la curva $3ay^2 = x(a - x)^2$ en torno al eje x.
b) Determine el área superficial si el bucle se hace girar en torno al eje y.

28. Un grupo de ingenieros está construyendo un plato de satélite parabólico cuya forma se obtiene al hacer girar la curva $y = ax^2$ en torno al eje y. Si el plato tiene un diámetro de 10 pies y una profundidad máxima de 2 pies, encuentre el valor de a y el área superficial del plato.

29. a) La elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad a > b$$

se hace girar en torno al eje x para formar una superficie llamada *elipsoide* o *esferoide prolato*. Determine el área superficial de este elipsoide.
b) Si la elipse del inciso a) gira en torno a su eje menor (el eje y), la elipsoide resultante se le conoce como *esferoide oblato*. Halle el área de la superficie de este elipsoide.

30. Calcule el área superficial del toroide del ejercicio 61 en la sección 6.2.

31. Si la curva $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, se hace girar en torno a la recta horizontal $y = c$, donde $f(x) \leqslant c$, encuentre una fórmula para el área de la superficie resultante.

SAC **32.** Use el resultado del ejercicio 31 para plantear una integral que permita hallar el área de la superficie generada al hacer girar la curva $y = \sqrt{x}$, $0 \leqslant x \leqslant 4$ en torno a la recta $y = 4$. Después, use un SAC para evaluar la integral.

33. Encuentre el área de la superficie obtenida al hacer girar la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ en torno a la recta $y = r$.

34. a) Demuestre que el área superficial de una zona de una esfera ubicada entre dos planos paralelos es $S = 2\pi Rh$, donde R es el radio de la esfera y h es la distancia entre los planos. (Observe que S sólo depende de la distancia entre los planos, y no sobre su ubicación, siempre que ambos planos intersequen la esfera).
b) Demuestre que el área de la superficie de una zona de un *cilindro* con radio R y altura h es la misma que el área de la superficie de la zona de una *esfera* en el inciso a).

35. La fórmula 4 es válida sólo cuando $f(x) \geqslant 0$. Demuestre que cuando $f(x)$ no necesariamente es positiva, la fórmula para el área superficial se transforma en

$$S = \int_a^b 2\pi |f(x)| \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

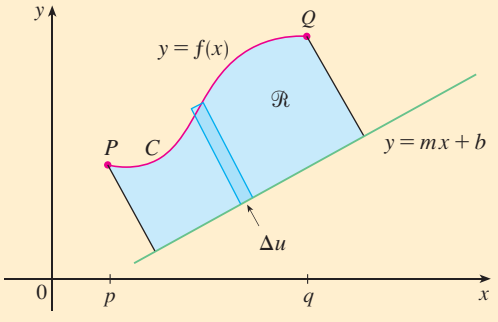
36. Sea L la longitud de la curva $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, donde f es positiva y tiene una derivada continua. Sea S_f el área superficial generada al hacer girar la curva en torno al eje x. Si c es una constante positiva, defina $g(x) = f(x) + c$ y sea S_g el área superficial correspondiente generada por la curva $y = g(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$. Exprese S_g en términos de S_f y L.

PROYECTO PARA UN DESCUBRIMIENTO

ROTACIÓN SOBRE UNA PENDIENTE

Se sabe cómo hallar el volumen de un sólido de revolución obtenido al hacer girar una región en torno a una recta horizontal o vertical (véase la sección 6.2). También se sabe cómo determinar el área de una superficie de revolución si se gira una curva en torno a una recta horizontal o vertical (véase la sección 8.2). Pero, ¿qué pasa si se hace girar en torno a una recta inclinada, es decir, una recta que no sea horizontal ni vertical? En este proyecto se le pide descubrir fórmulas para el volumen de un sólido de revolución y para el área de una superficie de revolución cuando el eje de rotación es una recta inclinada.

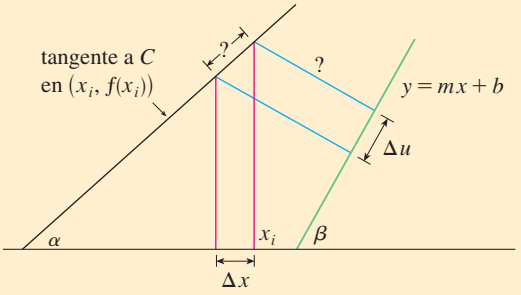
Sea C el arco de la curva $y = f(x)$ entre los puntos $P(p, f(p))$ y $Q(q, f(q))$ y sea $\mathcal{R}$ la región limitada por C, por la recta $y = mx + b$ (la cual está totalmente por debajo de C) y por las perpendiculares a la recta desde P y Q.



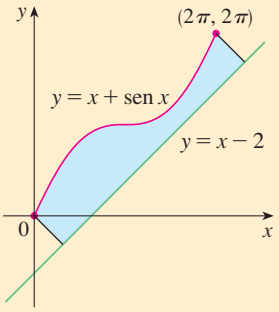
1. Demuestre que el área de $\mathcal{R}$ es

$$\frac{1}{1+m^2}\int_p^q [f(x)-mx-b][1+mf'(x)]\,dx$$

[*Sugerencia:* esta fórmula puede verificarse restando áreas, pero será útil en el proyecto derivarla aproximando primero el área por medio de rectángulos perpendiculares a la recta, como se muestra en la figura. Use la figura para ayudarse a expresar Δu en términos de Δx].



2. Determine el área de la región mostrada en la figura a la izquierda.



3. Encuentre una fórmula (similar a la del problema 1) para el volumen del sólido obtenido al hacer girar $\mathcal{R}$ en torno a la recta $y = mx + b$.

4. Halle el volumen del sólido obtenido al hacer girar la región del problema 2 en torno a la recta $y = x - 2$.

5. Obtenga una fórmula para el área de la superficie obtenida al hacer girar C en torno a la recta $y = mx + b$.

SAC **6.** Use un sistema algebraico computarizado para hallar el área exacta de la superficie obtenida al hacer girar la curva $y = \sqrt{x}\,, 0 \leqslant x \leqslant 4$, en torno a la recta $y = \frac{1}{2}x$. Luego aproxime su resultado a tres decimales.

SAC Se requiere sistema algebraico computarizado

8.3 Aplicaciones a la física y a la ingeniería

Entre las muchas aplicaciones del cálculo integral a la física y a la ingeniería, aquí se consideran dos: la fuerza debida a la presión del agua y los centros de masa. Como con las aplicaciones previas a la geometría (áreas, volúmenes y longitudes) y el trabajo, la estrategia es descomponer la cantidad física en un gran número de partes pequeñas, aproximar cada parte pequeña, sumar los resultados, tomar el límite y después evaluar la integral resultante.

Fuerza y presión hidrostáticas

Los buceadores de aguas profundas saben que la presión del agua se incrementa al aumentar la profundidad. Esto se debe a que aumenta el peso del agua sobre ellos.

En general, suponga que una placa horizontal delgada con área de A metros cuadrados se sumerge en un fluido de densidad ρ kilogramos por metro cúbico a una profundidad de d metros debajo de la superficie del fluido como en la figura 1. El fluido directamente arriba de la placa tiene volumen $V = Ad$, de modo que su masa es $m = \rho V = \rho Ad$. La fuerza ejercida por el fluido sobre la placa es

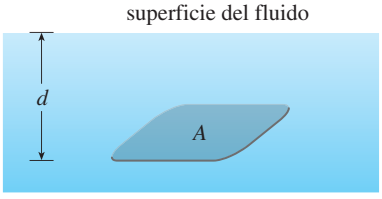


FIGURA 1

$$F = mg = \rho gAd$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad. La **presión** P sobre la placa se define como la fuerza por unidad de área:

$$P = \frac{F}{A} = \rho g d$$

Al usar unidades inglesas estándares, se escribe $P = \rho g d = \delta d$, donde $\delta = \rho g$ es el *peso específico* (en oposición a ρ, que es la *masa específica*). Por ejemplo, el peso específico del agua es $\delta = 62.5\,\text{lb/pies}^3$.

La unidad SI para medir la presión es newtons por metro cuadrado, llamada pascal (abreviatura: $1\,\text{N/m}^2 = 1\,\text{Pa}$). Puesto que ésta es una unidad pequeña, se emplea con frecuencia el kilopascal (kPa). Por ejemplo, debido a que la densidad del agua es $\rho = 1000\,\text{kg/m}^3$, la presión en el fondo de una alberca de 2 m de profundidad es

$$\begin{aligned} P = \rho g d &= 1000\,\text{kg/m}^3 \times 9.8\,\text{m/s}^2 \times 2\,\text{m} \\ &= 19\,600\,\text{Pa} = 19.6\,\text{kPa} \end{aligned}$$

Un importante principio de la presión del fluido es el hecho comprobado experimentalmente de que en *cualquier punto en un líquido, la presión es la misma en todas direcciones*. (Un buzo siente la misma presión en la nariz y en ambos oídos.) Así, la presión en *cualquier* dirección a una profundidad d en un fluido con masa específica ρ está dada por

$$\boxed{1} \qquad P = \rho g d = \delta d$$

Esto ayuda a determinar la fuerza hidrostática contra una placa o pared *vertical* en un fluido. Éste no es un problema directo porque la presión no es constante, sino que crece a medida que aumenta la profundidad.

V EJEMPLO 1 Una presa tiene la forma del trapecio mostrado en la figura 2. La altura es 20 m y el ancho es 50 m en la parte superior y 30 m en el fondo. Determine la fuerza sobre la presa debida a la presión hidrostática si el nivel del agua es 4 m desde la parte superior de la presa.

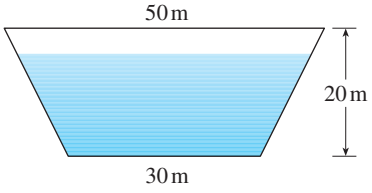


FIGURA 2

SOLUCIÓN Se elige un eje x vertical con origen en la superficie del agua y dirigido hacia abajo como en la figura 3a). La profundidad del agua es 16 m, así que se divide el intervalo $[0, 16]$ en subintervalos de igual longitud con puntos extremos x_i y se elige $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. La i-ésima banda horizontal de la presa se aproxima mediante un rectángulo con altura Δx y ancho w_i, donde, de los triángulos semejantes de la figura 3b),

$$\frac{a}{16 - x_i^*} = \frac{10}{20} \qquad \text{o bien} \qquad a = \frac{16 - x_i^*}{2} = 8 - \frac{x_i^*}{2}$$

y, por tanto, $$w_i = 2(15 + a) = 2\left(15 + 8 - \tfrac{1}{2}x_i^*\right) = 46 - x_i^*$$

Si A_i es el área de la i-ésima banda, entonces

$$A_i \approx w_i\,\Delta x = (46 - x_i^*)\,\Delta x$$

Si Δx es pequeña, entonces la presión P_i sobre la i-ésima banda es casi constante y puede usarse la ecuación 1 para escribir

$$P_i \approx 1000 g x_i^*$$

La fuerza hidrostática F_i que actúa sobre la i-ésima banda es el producto de la presión y el área:

$$F_i = P_i A_i \approx 1000 g x_i^* (46 - x_i^*)\,\Delta x$$

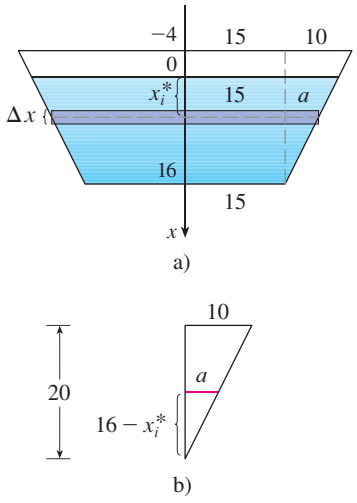


FIGURA 3

Si sumamos estas fuerzas y tomamos el límite cuando $n \to \infty$, obtenemos la fuerza hidrostática total sobre la presa:

$$F = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 1000 g x_i^*(46 - x_i^*)\,\Delta x = \int_0^{16} 1000 g x(46 - x)\,dx$$

$$= 1000(9.8) \int_0^{16} (46x - x^2)\,dx = 9800\left[23x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^{16}$$

$$\approx 4.43 \times 10^7 \text{N}$$

EJEMPLO 2 Determine la fuerza hidrostática sobre un extremo de un tambor cilíndrico con radio 3 pies si el tambor es sumergido 10 pies en agua.

SOLUCIÓN En este ejemplo es conveniente elegir los ejes como en la figura 4 de modo que el origen esté colocado en el centro del tambor. Por tanto, la circunferencia tiene una ecuación simple: $x^2 + y^2 = 9$. Como en el ejemplo 1, dividimos la región circular en bandas horizontales de igual ancho. De la ecuación de una circunferencia se ve que la longitud de la i-ésima banda es $2\sqrt{9 - (y_i^*)^2}$ y, por tanto, su área es

$$A_i = 2\sqrt{9 - (y_i^*)^2}\,\Delta y$$

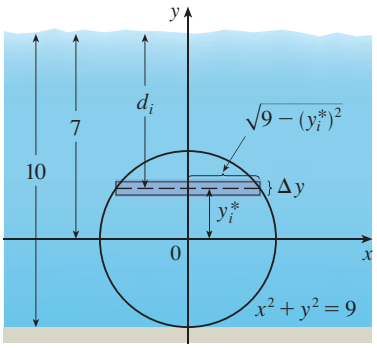


FIGURA 4

La presión sobre esta banda es aproximadamente

$$\delta d_i = 62.5(7 - y_i^*)$$

y, por ende, la fuerza aproximada sobre la banda es

$$\delta d_i A_i = 62.5(7 - y_i^*)2\sqrt{9 - (y_i^*)^2}\,\Delta y$$

La fuerza total se obtiene sumando las fuerzas sobre todas las bandas y tomando el límite:

$$F = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 62.5(7 - y_i^*)2\sqrt{9 - (y_i^*)^2}\,\Delta y$$

$$= 125 \int_{-3}^{3} (7 - y)\sqrt{9 - y^2}\,dy$$

$$= 125 \cdot 7 \int_{-3}^{3} \sqrt{9 - y^2}\,dy - 125 \int_{-3}^{3} y\sqrt{9 - y^2}\,dy$$

La segunda integral es 0 porque el integrando es una función impar (véase el teorema 5.5.7). La primera integral puede evaluarse por medio de la sustitución trigonométrica $y = 3 \operatorname{sen} \theta$, pero es más simple observar que es el área de un disco semicircular con radio 3. Así,

$$F = 875 \int_{-3}^{3} \sqrt{9 - y^2}\,dy = 875 \cdot \tfrac{1}{2}\pi(3)^2$$

$$= \frac{7\,875\pi}{2} \approx 12\,370\,\text{lb}$$

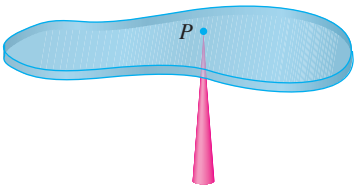


FIGURA 5

Momentos y centros de masa

Nuestro principal objetivo aquí es hallar el punto P sobre el que una placa delgada de cualquier forma se mantiene horizontal como en la figura 5. El punto se llama **centro de masa** (o centro de gravedad) de la placa.

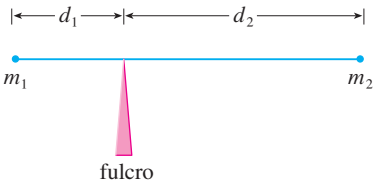


FIGURA 6

Primero se considera la situación más simple ilustrada en la figura 6, donde dos masas m_1 y m_2 se fijan a una varilla de masa insignificante en lados opuestos de un fulcro (punto de apoyo) y a distancias d_1 y d_2 de éste. La varilla se estabilizará si

$$m_1 d_1 = m_2 d_2 \tag{2}$$

Éste es un hecho experimental que descubrió Arquímedes y se llama ley de la palanca. (Imagine una persona de poco peso que pone en equilibrio a una persona más pesada en un balancín, sentándose a una mayor distancia en relación con el centro.)

Ahora suponga que la varilla está a lo largo del eje x con m_1 en x_1 y m_2 en x_2 y el centro de masa en $\bar{x}$. Si se comparan las figuras 6 y 7, se ve que $d_1 = \bar{x} - x_1$ y $d_2 = x_2 - \bar{x}$, entonces, la ecuación 2 da

$$m_1(\bar{x} - x_1) = m_2(x_2 - \bar{x})$$

$$m_1\bar{x} + m_2\bar{x} = m_1x_1 + m_2x_2$$

$$\bar{x} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} \tag{3}$$

Los números m_1x_1 y m_2x_2 se llaman **momentos** de las masas m_1 y m_2 (respecto al origen), y la ecuación 3 indica que el centro de masa $\bar{x}$ se obtiene al sumar los momentos de las masas y dividir entre la masa total $m = m_1 + m_2$.

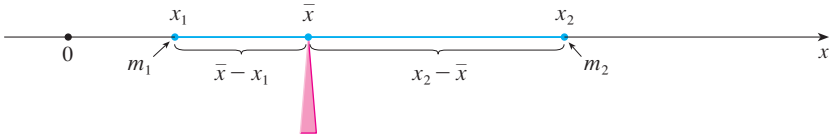


FIGURA 7

En general, si se tiene un sistema de n partículas con masas $m_1, m_2, \ldots, m_n$ localizadas en los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sobre el eje x, puede demostrarse de manera similar que el centro de masa del sistema se localiza en

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{m} \tag{4}$$

donde $m = \Sigma\, m_i$ es la masa total del sistema, y la suma de los momentos individuales

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

se llama **momento del sistema respecto al origen**. La ecuación 4 podría reescribirse como $m\bar{x} = M$, que indica que si se considerara a la masa total como si estuviera concentrada en el centro de masa $\bar{x}$, entonces su momento sería el mismo que el del sistema.

Ahora consideremos un sistema de n partículas con masas $m_1, m_2, \ldots, m_n$ localizadas en los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ en el plano xy como se muestra en la figura 8. Por analogía con el caso unidimensional, se define el **momento del sistema respecto al eje *y*** como

$$M_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i \tag{5}$$

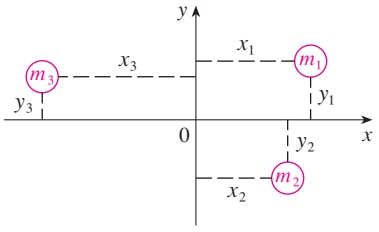


FIGURA 8

y el **momento del sistema respecto al eje *x*** como

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i \qquad \boxed{6}$$

Entonces M_y mide la tendencia del sistema a girar respecto al eje y y M_x mide la tendencia a girar respecto al eje x.

Como en el caso unidimensional, las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ del centro de masa están dadas en términos de los momentos por las fórmulas

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{m} \qquad \boxed{7}$$

donde $m = \Sigma\, m_i$ es la masa total. Puesto que $m\bar{x} = M_y$ y $m\bar{y} = M_x$, el centro de masa $(\bar{x}, \bar{y})$ es el punto donde una sola partícula de masa m tendría los mismos momentos que el sistema.

V EJEMPLO 3 Encuentre los momentos y el centro de masa del sistema de objetos que tienen masas 3, 4 y 8 en los puntos $(-1, 1)$, $(2, -1)$ y $(3, 2)$, respectivamente.

SOLUCIÓN Se usan las ecuaciones 5 y 6 para calcular los momentos:

$$M_y = 3(-1) + 4(2) + 8(3) = 29$$
$$M_x = 3(1) + 4(-1) + 8(2) = 15$$

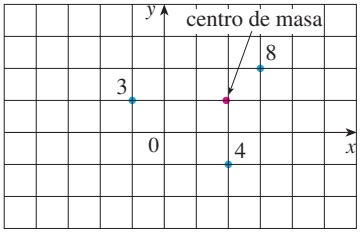


FIGURA 9

Puesto que $m = 3 + 4 + 8 = 15$, usamos las ecuaciones 7 para obtener

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{29}{15} \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{15}{15} = 1$$

Así, el centro de masa es $\left(1\frac{14}{15}, 1\right)$. (Véase figura 9.)

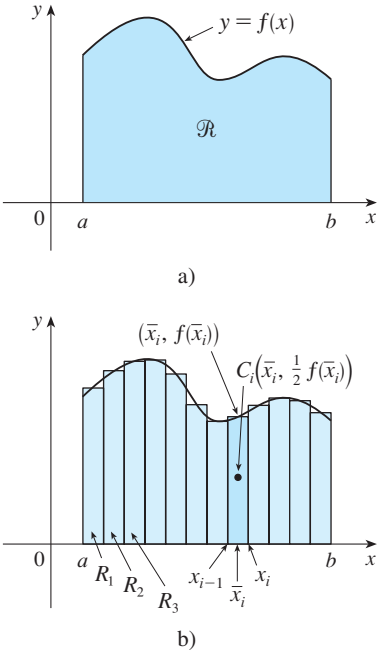


FIGURA 10

Ahora, consideremos una placa plana (llamada *lámina*) con densidad uniforme ρ que ocupa una región $\mathcal{R}$ del plano. Se desea localizar el centro de masa de la placa, llamado **centroide** de $\mathcal{R}$. Para esto utilizamos los siguientes principios físicos: el **principio de simetría** señala que si $\mathcal{R}$ es simétrica respecto a la recta l, entonces el centroide de $\mathcal{R}$ está sobre l. (Si $\mathcal{R}$ se refleja respecto a l, entonces $\mathcal{R}$ no cambia, y su centroide permanece fijo. Pero los únicos puntos fijos yacen sobre l.) Así, el centroide de un rectángulo es su centro geométrico. Los momentos deben definirse de modo que si toda la masa de una región se concentra en el centro de masa, entonces sus momentos permanecen sin cambio. Asimismo, el momento de la unión de dos regiones que no se traslapan debe ser la suma de los momentos de cada una de las regiones.

Suponga que la región $\mathcal{R}$ es del tipo mostrado en la figura 10a); es decir, $\mathcal{R}$ se sitúa entre las rectas $x = a$ y $x = b$, arriba del eje x y debajo de la gráfica de f, donde f es una función continua. Dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos con puntos extremos x_0, $x_1, \ldots, x_n$ e igual ancho Δx. Elegimos el mismo punto muestra x_i^* como el punto medio $\bar{x}_i$ del i-ésimo subintervalo; es decir, $\bar{x}_i = (x_{i-1} + x_i)/2$. Esto determina la aproximación poligonal a $\mathcal{R}$ mostrada en la figura 10b). El centroide del i-ésimo rectángulo de aproximación R_i es su centro $C_i\left(\bar{x}_i, \frac{1}{2} f(\bar{x}_i)\right)$. Su área es $f(\bar{x}_i)\,\Delta x$, de modo que su masa es

$$\rho f(\bar{x}_i)\,\Delta x$$

El momento de $\bar{x}$ respecto al eje y es el producto de su masa y la distancia desde C_i

al eje y, que es $\bar{x}_i$. Así

$$M_y(R_i) = [\rho f(\bar{x}_i)\,\Delta x]\,\bar{x}_i = \rho \bar{x}_i f(\bar{x}_i)\,\Delta x$$

Al sumar estos momentos, se obtiene el momento de la aproximación poligonal a $\mathcal{R}$, y luego tomando el límite cuando $n \to \infty$ se obtiene el momento de $\mathcal{R}$ mismo respecto al eje y:

$$M_y = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho \bar{x}_i f(\bar{x}_i)\,\Delta x = \rho \int_a^b x f(x)\,dx$$

En un modo similar se calcula el momento de R_i respecto al eje x como el producto de su masa y la distancia de C_i al eje x:

$$M_x(R_i) = [\rho f(\bar{x}_i)\,\Delta x]\,\tfrac{1}{2} f(\bar{x}_i) = \rho \cdot \tfrac{1}{2}[f(\bar{x}_i)]^2\,\Delta x$$

De nuevo se suman estos momentos y se toma el límite para obtener el momento de $\mathcal{R}$ respecto al eje x:

$$M_x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho \cdot \tfrac{1}{2}[f(\bar{x}_i)]^2\,\Delta x = \rho \int_a^b \tfrac{1}{2}[f(x)]^2\,dx$$

Al igual que para sistemas de partículas, el centro de masa de la placa se define de modo que $m\bar{x} = M_y$ y $m\bar{y} = M_x$. Sin embargo, la masa de la placa es el producto de su densidad y su área:

$$m = \rho A = \rho \int_a^b f(x)\,dx$$

y, por tanto,

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\rho \int_a^b x f(x)\,dx}{\rho \int_a^b f(x)\,dx} = \frac{\int_a^b x f(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\rho \int_a^b \tfrac{1}{2}[f(x)]^2\,dx}{\rho \int_a^b f(x)\,dx} = \frac{\int_a^b \tfrac{1}{2}[f(x)]^2\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}$$

Observe la cancelación de las ρ. La ubicación del centro de masa es independiente de la densidad.

En resumen, el centro de masa de la placa (o el centroide de $\mathcal{R}$) se localiza en el punto $(\bar{x}, \bar{y})$, donde

8

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_a^b x f(x)\,dx \qquad \bar{y} = \frac{1}{A}\int_a^b \tfrac{1}{2}[f(x)]^2\,dx$$

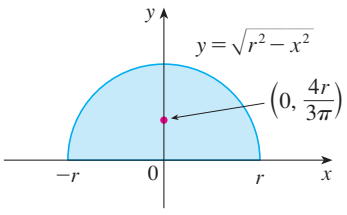


FIGURA 11

EJEMPLO 4 Encuentre el centro de masa de una placa semicircular de radio r.

SOLUCIÓN A fin de usar 8 se coloca el semicírculo como en la figura 11 de modo que $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ y $a = -r$, $b = r$. Aquí no es necesario usar la fórmula para calcular $\bar{x}$ porque, por el principio de simetría, el centro de masa debe estar sobre el eje y,

por consiguiente, $\bar{x} = 0$. El área del semicírculo es $A = \frac{1}{2}\pi r^2$, así que

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{1}{A}\int_{-r}^{r} \tfrac{1}{2}[f(x)]^2\,dx \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2}\pi r^2}\cdot\tfrac{1}{2}\int_{-r}^{r}\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2 dx \\ &= \frac{2}{\pi r^2}\int_0^r (r^2-x^2)\,dx = \frac{2}{\pi r^2}\left[r^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^r \\ &= \frac{2}{\pi r^2}\,\frac{2r^3}{3} = \frac{4r}{3\pi}\end{aligned}$$

El centro de masa se localiza en el punto $(0, 4r/(3\pi))$.

EJEMPLO 5 Encuentre el centroide de la región acotada por las curvas $y = \cos x$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = \pi/2$.

SOLUCIÓN El área de la región es

$$A = \int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = \operatorname{sen} x\Big]_0^{\pi/2} = 1$$

así, con las fórmulas de 8, se obtiene

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{A}\int_0^{\pi/2} xf(x)\,dx = \int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx \\ &= x\operatorname{sen}x\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}x\,dx \qquad \text{(mediante integración por partes)} \\ &= \frac{\pi}{2} - 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{1}{A}\int_0^{\pi/2} \tfrac{1}{2}[f(x)]^2\,dx = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^2 x\,dx \\ &= \tfrac{1}{4}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2x)\,dx = \tfrac{1}{4}\left[x + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}2x\right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{\pi}{8}\end{aligned}$$

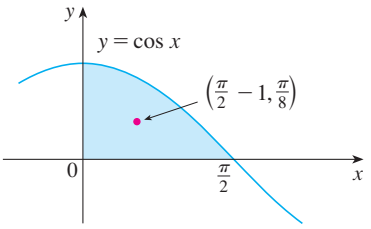


FIGURA 12

El centroide es $\left(\frac{1}{2}\pi - 1, \frac{1}{8}\pi\right)$ y se muestra en la figura 12.

Si la región $\mathcal{R}$ se localiza entre dos curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$, donde $f(x) \geqslant g(x)$, como se ilustra en la figura 13, entonces puede usarse la misma clase de argumento que condujo a las fórmulas 8 para demostrar que el centroide de $\mathcal{R}$ es $(\bar{x}, \bar{y})$, donde

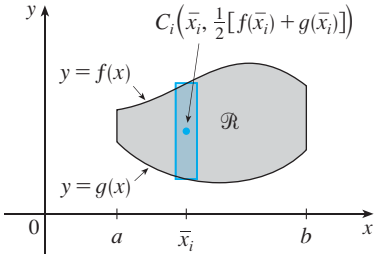


FIGURA 13

9

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_a^b x[f(x) - g(x)]\,dx$$

$$\bar{y} = \frac{1}{A}\int_a^b \tfrac{1}{2}\{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}\,dx$$

(Véase el ejercicio 47.)

EJEMPLO 6 Encuentre el centroide de la región acotada por la recta $y = x$ y la parábola $y = x^2$.

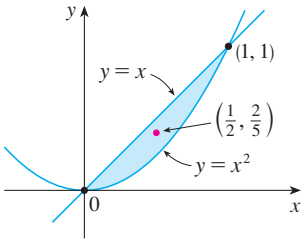


FIGURA 14

SOLUCIÓN La región se bosqueja en la figura 14. Se toma $f(x) = x$, $g(x) = x^2$, $a = 0$ y $b = 1$ en las fórmulas 9. Primero observamos que el área de la región es

$$A = \int_0^1 (x - x^2)\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1}{6}$$

Por tanto,

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_0^1 x[f(x) - g(x)]\,dx = \frac{1}{\frac{1}{6}}\int_0^1 x(x - x^2)\,dx$$

$$= 6\int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx = 6\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{A}\int_0^1 \tfrac{1}{2}\{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}\,dx = \frac{1}{\frac{1}{6}}\int_0^1 \tfrac{1}{2}(x^2 - x^4)\,dx$$

$$= 3\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{2}{5}$$

El centroide es $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{5}\right)$.

Se concluye esta sección mostrando una conexión sorprendente entre centroides y volúmenes de revolución.

Teorema de Pappus Sea $\mathcal{R}$ la región plana que está completamente en un lado de una recta l en el plano. Si se hace girar a $\mathcal{R}$ en torno a l, entonces el volumen del sólido resultante es el producto del área A de $\mathcal{R}$ y la distancia d recorrida por el centroide de $\mathcal{R}$.

Este teorema lleva el nombre del matemático griego Pappus de Alejandría, quien vivió en el siglo IV después de Cristo.

DEMOSTRACIÓN Se da la demostración para el caso especial en que la región está entre $y = f(x)$ y $y = g(x)$ como se ilustra en la figura 13, y la recta l es el eje y. Con el método de los cascarones cilíndricos (véase la sección 6.3), se tiene

$$V = \int_a^b 2\pi x[f(x) - g(x)]\,dx$$

$$= 2\pi\int_a^b x[f(x) - g(x)]\,dx$$

$$= 2\pi(\bar{x}A) \qquad \text{(por las fórmulas 9)}$$

$$= (2\pi\bar{x})A = Ad$$

donde $d = 2\pi\bar{x}$ es la distancia recorrida por el centroide durante una rotación en torno al eje y.

V EJEMPLO 7 Un toro se forma al hacer girar un círculo de radio r en torno a una recta en el plano del círculo que es una distancia R ($> r$) desde el centro del círculo. Encuentre el volumen del toro.

SOLUCIÓN El círculo tiene área $A = \pi r^2$. Por el principio de simetría, su centroide es su centro geométrico y, por tanto, la distancia recorrida por el centroide durante una rotación es $d = 2\pi R$. Así, por el teorema de Pappus, el volumen del toro es

$$V = Ad = (2\pi R)(\pi r^2) = 2\pi^2 r^2 R$$

El método del ejemplo 7 debe compararse con el método del ejercicio 61 en la sección 6.2.

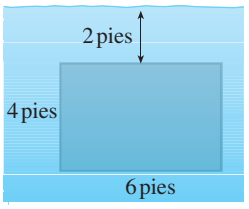
8.3 Ejercicios

1. Un acuario de 5 pies de largo, 2 pies de ancho y 3 pies de profundidad se llena de agua. Determine a) la presión hidrostática en el fondo del acuario, b) la fuerza hidrostática en el fondo y c) la fuerza hidrostática en un extremo del acuario.

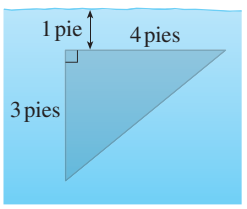
2. Un estanque de 8 m de largo, 4 m de ancho y 2 m de profundidad se llena con queroseno de densidad 820 kg/m^3 hasta una profundidad de 1.5 m. Encuentre a) la presión hidrostática en el fondo del estanque, b) la fuerza hidrostática en el fondo y c) la fuerza hidrostática en un extremo del estanque.

3-11 Una placa vertical se sumerge en agua (o parcialmente sumergida) y tiene la forma indicada. Explique cómo aproximar la fuerza hidrostática contra un extremo de la placa mediante una suma de Riemann. Luego exprese la fuerza como una integral, y evalúela.

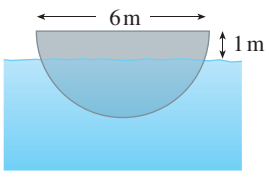
3.



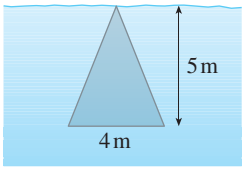
4.



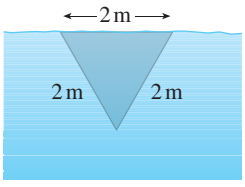
5.



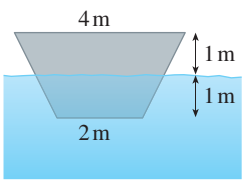
6.



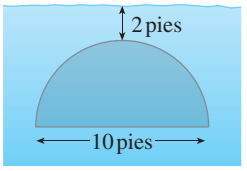
7.



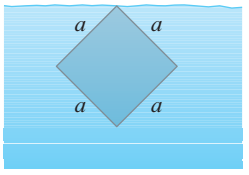
8.



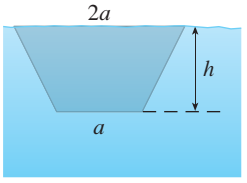
9.



10.



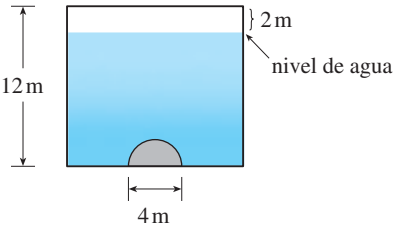
11.



12. Un camión cisterna con tanque en forma de cilindro horizontal con diámetro de 6 pies transporta leche cuya densidad es 64.6 lb/pie^3.
a) Encuentre la fuerza ejercida por la leche sobre uno de los extremos del tanque, cuando éste está lleno.
b) ¿Y cuando está a la mitad?

13. Una pileta se llena con un líquido de densidad 840 kg/m^3. Los extremos de la pileta son triángulos equiláteros con lados de 8 m de largo y vértice en la parte de abajo. Determine la fuerza hidrostática en un extremo de la pileta.

14. Una presa vertical tiene una compuerta semicircular como se muestra en la figura. Encuentre la fuerza hidrostática que se ejerce contra la compuerta.



15. Un cubo con lados de 20 cm de largo está asentado sobre el fondo de un acuario en el que el agua tiene un metro de profundidad. Estime la fuerza hidrostática sobre a) la parte superior del cubo y b) uno de los lados del cubo.

16. Una presa está inclinada en un ángulo de 30° desde la vertical y tiene la forma de un trapecio isósceles de 100 pies de ancho en la parte superior y 50 pies de ancho en el fondo y con una altura inclinada de 70 pies. Encuentre la fuerza hidrostática sobre la presa cuando está llena de agua.

17. Una alberca mide 20 pies de ancho y 40 pies de largo, y su fondo es un plano inclinado. El extremo poco profundo tiene una profundidad de 3 pies y el extremo profundo, 9 pies. Si la alberca se llena de agua, estime la fuerza hidrostática sobre a) el extremo poco profundo, b) el extremo profundo, c) uno de los lados y d) el fondo de la alberca.

18. Suponga que una placa se sumerge verticalmente en un fluido con densidad ρ y el ancho de la placa es $w(x)$, a una profundidad de x metros debajo de la superficie del fluido. Si la parte superior de la placa está a una profundidad a y el fondo está a una profundidad b, demuestre que la fuerza hidrostática en un lado de la placa es

$$F = \int_a^b \rho g x\, w(x)\, dx$$

19. Una placa metálica se sumerge verticalmente en el mar, cuya agua está a una densidad de 64 lb/pie^3. En la tabla se muestran las medidas de su ancho, tomadas a las profundidades indicadas. Use la regla de Simpson para estimar la fuerza del agua contra la placa.

Profundidad (m)	7.0	7.4	7.8	8.2	8.6	9.0	9.4
Ancho de la placa (m)	1.2	1.8	2.9	3.8	3.6	4.2	4.4

20. a) Use la fórmula del ejercicio 18 para demostrar que

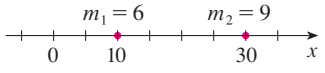
$$F = (\rho g \bar{x})A$$

donde $\bar{x}$ es la coordenada x del centroide de la placa y A es su área. Esta ecuación muestra que la fuerza hidrostática contra una región plana vertical es la misma que si la región estuviera horizontal a la profundidad del centroide de la región.

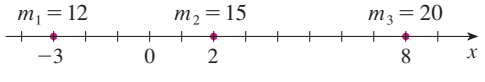
b) Use el resultado del inciso a) para dar otra solución al ejercicio 10.

21-22 Masas puntuales m_i se localizan sobre el eje x como se ilustra. Determine el momento M del sistema respecto al origen y el centro de masa $\bar{x}$.

21.



22.



23-24 Las masas m_i se localizan en los puntos P_i. Encuentre los momentos M_x y M_y y el centro de masa del sistema.

23. $m_1 = 4,\ m_2 = 2,\ m_3 = 4;$
$P_1(2, -3),\ P_2(-3, 1),\ P_3(3, 5)$

24. $m_1 = 5,\ m_2 = 4,\ m_3 = 3,\ m_4 = 6;$
$P_1(-4, 2),\ P_2(0, 5),\ P_3(3, 2),\ P_4(1, -2)$

25-28 Bosqueje la región acotada por las curvas y estime en forma visual la ubicación del centroide. Después encuentre las coordenadas exactas del centroide.

25. $y = 2x,\quad y = 0,\quad x = 1$

26. $y = \sqrt{x},\quad y = 0,\quad x = 4$

27. $y = e^x,\quad y = 0,\quad x = 0,\quad x = 1$

28. $y = \operatorname{sen} x,\quad y = 0,\quad 0 \leq x \leq \pi$

29-33 Encuentre el centroide de la región acotada por las curvas dadas.

29. $y = x^2,\quad x = y^2$

30. $y = 2 - x^2,\quad y = x$

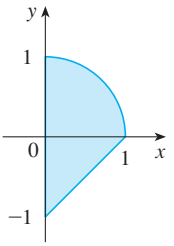
31. $y = \operatorname{sen} x,\quad y = \cos x,\quad x = 0,\quad x = \pi/4$

32. $y = x^3,\quad x + y = 2,\quad y = 0$

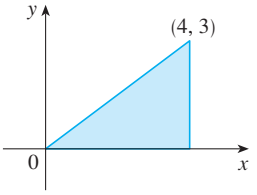
33. $x + y = 2,\quad x = y^2$

34-35 Calcule los momentos M_x y M_y y el centro de masa de una lámina con la densidad y forma dadas.

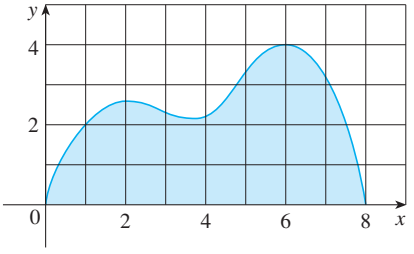
34. $\rho = 3$



35. $\rho = 10$



36. Utilice la regla de Simpson para estimar el centroide de la región que se muestra.



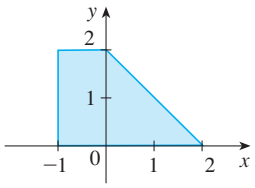
37. Encuentre el centroide de la región acotada por las curvas $y = x^3 - x$ y $y = x^2 - 1$. Bosqueje la región y grafique el centroide para ver si su respuesta es razonable.

38. Use una gráfica para hallar coordenadas x aproximadas de los puntos de intersección de las curvas $y = e^x$ y $y = 2 - x^2$. Después determine (de manera aproximada) el centroide de la región acotada por estas curvas.

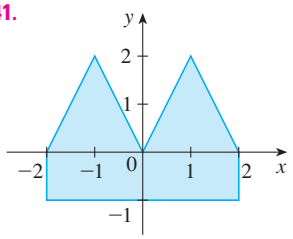
39. Demuestre que el centroide de cualquier triángulo se localiza en la intersección de las medianas. [*Sugerencias:* coloque los ejes de modo que los vértices sean $(a, 0)$, $(0, b)$ y $(c, 0)$. Recuerde que una mediana es un segmento de recta desde un vértice al punto medio del lado opuesto. Recuerde que las medianas se intersecan en un punto a dos tercios del tramo de cada vértice (a lo largo de la mediana) al lado opuesto.]

40-41 Encuentre el centroide de la región mostrada, no por integración, sino mediante la localización de los centroides de los rectángulos y triángulos (del ejercicio 39) y por medio de la suma de los momentos.

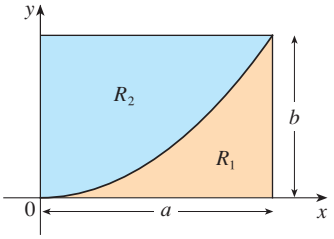
40.



41.



42. Un rectángulo R con lados a y b se divide en dos partes R_1 y R_2 mediante un arco de la parábola que tiene sus vértices en las esquinas de R y que pasa a través de la esquina opuesta. Halle el centroide en ambos R_1 y R_2.



43. Si $\bar{x}$ es la coordenada x del centroide de la región que se encuentra bajo la gráfica de una función continua f, donde $a \leq x \leq b$, demuestre que

$$\int_a^b (cx + d) f(x)\, dx = (c\bar{x} + d) \int_a^b f(x)\, dx$$

44-46 Use el teorema de Pappus para hallar el volumen del sólido.

44. Una esfera de radio r. (Use el ejemplo 4.)

45. Un cono con altura h y radio de base r.

46. El sólido obtenido al hacer girar el triángulo con vértices (2, 3), (2, 5) y (5, 4) en torno al eje x.

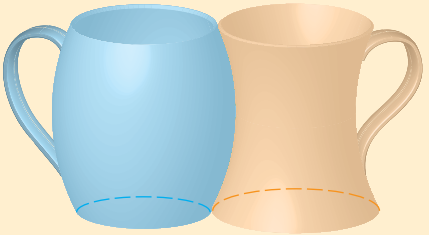
47. Demuestre las fórmulas 9.

48. Sea la región $\mathcal{R}$ localizada entre las curvas $y = x^m$ y $y = x^n$, $0 \leq x \leq 1$, donde m y n son enteros con $0 \leq n \leq m$.
a) Bosqueje la región $\mathcal{R}$.
b) Encuentre las coordenadas del centroide de $\mathcal{R}$.
c) Trate de hallar los valores de m y n tales que el centroide esté *fuera de* $\mathcal{R}$.

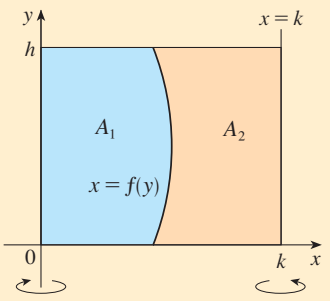
PROYECTO PARA UN DESCUBRIMIENTO

TAZAS DE CAFÉ COMPLEMENTARIAS

Suponga que de dos tazas de café tiene que elegir del tipo que se muestra, una que se curva hacia fuera y una hacia dentro, y observe que tienen la misma altura y sus formas se ajustan entre sí. Le sorprendería saber que una taza contenga más café. Naturalmente podría llenar una taza con agua y verter el contenido en la otra, pero como estudiante de cálculo, decide un planteamiento más matemático. Despreciando el asa de cada una, observe que ambas tazas son superficies de revolución, de esta manera puede pensar el café como un volumen de revolución.



Taza A Taza B



1. Suponga que las tazas tienen altura h, la taza A se forma por la rotación de la curva $x = f(y)$ en torno del eje y, y la taza B se forma por la rotación de la misma curva en torno de la recta $x = k$. Halle el valor de k tal que las dos tazas contengan la misma cantidad de café.
2. ¿Qué le indica el resultado del problema 1 respecto a las áreas A_1 y A_2 que se muestran en la figura?
3. Utilice el teorema de Pappus para explicar su resultado en los problemas 1 y 2.
4. Basándose en sus medidas y observaciones, sugiera un valor para h y una ecuación para $x = f(y)$ y calcule la cantidad de café que contiene cada una de las tazas.

8.4 Aplicaciones a la economía y a la biología

En esta sección se consideran algunas aplicaciones de la integración a la economía (superávit del consumidor) y la biología (flujo sanguíneo, ritmo cardiaco). Otras se describen en los ejercicios.

Superávit de consumo

Recuerde de la sección 4.8 que la función de demanda $p(x)$ es el precio que una compañía tiene que cargar a fin de vender x unidades de un artículo. Por lo común, vender cantidades más grandes requiere bajar los precios, de modo que la función de demanda sea una función decreciente. La gráfica de una función de demanda representativa, llamada **curva de demanda**, se muestra en la figura 1. Si X es la cantidad del artículo que actualmente está disponible, entonces $P = p(X)$ es el precio actual de venta.

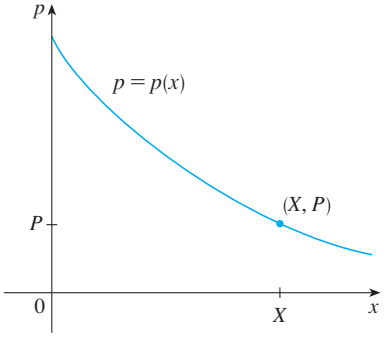


FIGURA 1
Una curva representativa de la demanda

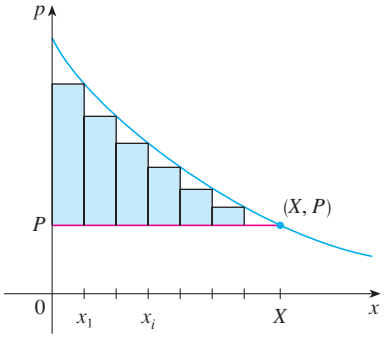


FIGURA 2

Dividimos el intervalo $[0, X]$ en n subintervalos, cada uno de longitud $\Delta x = X/n$, y sea $x_i^* = x_i$ el punto extremo derecho del i-ésimo subintervalo, como en la figura 2. Si, después de que se vendieron las primeras x_{i-1} unidades, hubiera estado disponible un total de x_i unidades y el precio por unidad se hubiera establecido en $p(x_i)$ dólares, entonces podrían haber vendido Δx unidades adicionales (pero no más). Los consumidores que habrían pagado $p(x)$ dólares le dieron un valor alto al producto; habrían pagado lo que valía para ellos. Así, al pagar solo P dólares han ahorrado una cantidad de

$$\text{(ahorros por unidad)(número de unidades)} = [p(x_i) - P]\,\Delta x$$

Al considerar grupos similares de consumidores dispuestos para cada uno de los subintervalos y sumar los ahorros, se obtiene el total de ahorros:

$$\sum_{i=1}^{n} [p(x_i) - P]\,\Delta x$$

(Esta suma corresponde al área encerrada por los rectángulos de la figura 2.) Si $n \to \infty$,

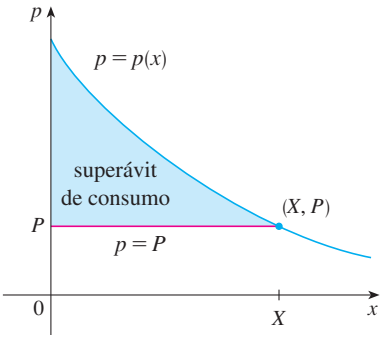


FIGURA 3

esta suma de Riemann se aproxima a la integral

$$\boxed{1} \qquad \int_0^X [p(x) - P]\,dx$$

que los economistas llaman **superávit de consumo** para el artículo.

El superávit de consumo representa la cantidad de dinero que ahorran los consumidores al comprar el artículo a precio P, correspondiente a una cantidad demandada de X. En la figura 3 se muestra la interpretación del superávit de consumo como el área bajo la curva de demanda y por encima de la recta $p = P$.

V EJEMPLO 1 La demanda para un producto, en dólares, es

$$p = 1200 - 0.2x - 0.0001x^2$$

Determine el superávit de consumo cuando el nivel de ventas es 500.

SOLUCIÓN Puesto que la cantidad de productos vendida es $X = 500$, el precio correspondiente es

$$p = 1200 - (0.2)(500) - (0.0001)(500)^2 = 1075$$

Por tanto, de la definición 1, el superávit de consumo es

$$\begin{aligned}\int_0^{500} [p(x) - P]\,dx &= \int_0^{500} (1200 - 0.2x - 0.0001x^2 - 1075)\,dx \\ &= \int_0^{500} (125 - 0.2x - 0.0001x^2)\,dx \\ &= 125x - 0.1x^2 - (0.0001)\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg]_0^{500} \\ &= (125)(500) - (0.1)(500)^2 - \frac{(0.0001)(500)^3}{3} \\ &= \$33\,333.33\end{aligned}$$

Flujo sanguíneo

En el ejemplo 7 de la sección 3.3, se analizó la ley de flujo laminar:

$$v(r) = \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2)$$

que da la velocidad v de la sangre que fluye a lo largo de un vaso sanguíneo con radio R y longitud l a una distancia r del eje central, donde P es la diferencia de presión entre los extremos del vaso y η es la viscosidad de la sangre. Ahora, a fin de calcular la razón del flujo sanguíneo (volumen por unidad de tiempo), se consideran radios más pequeños igualmente espaciados $r_1, r_2, \ldots$ El área aproximada del anillo (o arandela) con radio interno r_{i-1} y radio externo r_i es

$$2\pi r_i\,\Delta r \qquad \text{donde} \qquad \Delta r = r_i - r_{i-1}$$

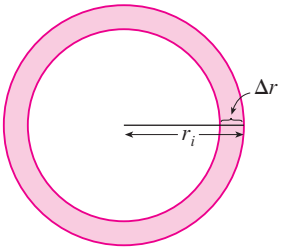


FIGURA 4

(Véase la figura 4.) Si Δr es pequeño, entonces la velocidad es casi constante en este anillo, y puede aproximarse mediante $v(r_i)$. Así, el volumen de sangre por unidad de tiempo que fluye por el anillo es

$$(2\pi r_i\,\Delta r)\,v(r_i) = 2\pi r_i\,v(r_i)\,\Delta r$$

y el volumen total de sangre que fluye por una sección transversal por unidad de tiempo es

$$\sum_{i=1}^{n} 2\pi r_i\, v(r_i)\, \Delta r$$

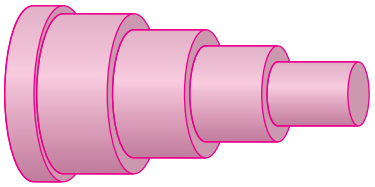


FIGURA 5

Esta aproximación se ilustra en la figura 5. Observe que la velocidad (y, por tanto, el volumen por unidad de tiempo) se incrementa hacia el centro del vaso sanguíneo. La aproximación es mejor cuando se incrementa n. Cuando se toma el límite se obtiene el valor exacto del **flujo** (o *descarga*), que es el volumen de sangre que pasa una sección transversal por unidad de tiempo:

$$\begin{aligned} F &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi r_i\, v(r_i)\, \Delta r = \int_0^R 2\pi r\, v(r)\, dr \\ &= \int_0^R 2\pi r \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2)\, dr \\ &= \frac{\pi P}{2\eta l}\int_0^R (R^2 r - r^3)\, dr = \frac{\pi P}{2\eta l}\left[R^2\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=R} \\ &= \frac{\pi P}{2\eta l}\left[\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right] = \frac{\pi P R^4}{8\eta l} \end{aligned}$$

La ecuación resultante

$$\boxed{2} \qquad F = \frac{\pi P R^4}{8\eta l}$$

se llama **ley de Poiseuille** y muestra que el flujo es proporcional a la cuarta potencia del radio del vaso sanguíneo.

Rendimiento cardiaco

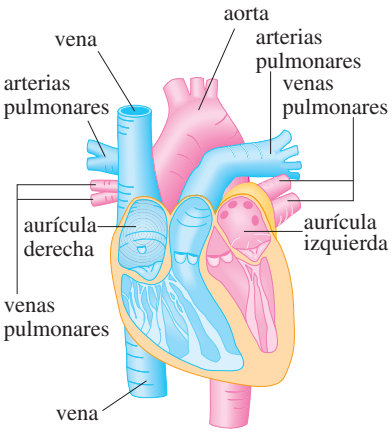


FIGURA 6

En la figura 6 se muestra el sistema cardiovascular humano. La sangre retorna del cuerpo por las venas, entra a la aurícula derecha del corazón y es bombeada para oxigenación a los pulmones por las arterias pulmonares. Después regresa a la aurícula izquierda por las venas pulmonares y sale hacia el resto del cuerpo por la aorta. El **rendimiento cardiaco** del corazón es el volumen de sangre que bombea éste por unidad de tiempo, es decir, la razón del flujo sanguíneo hacia la aorta.

El *método de dilución de colorante* se emplea para medir el rendimiento cardiaco. Se inyecta colorante hacia la aurícula derecha y fluye por el corazón hacia la aorta. Una sonda insertada en la aorta mide la concentración del colorante que sale del corazón a tiempos igualmente espaciados en un intervalo $[0, T]$ hasta que se ha eliminado el colorante. Sea $c(t)$ la concentración del colorante en el tiempo t. Si se divide $[0, T]$ en subintervalos de igual extensión Δt, entonces la cantidad de colorante que fluye más allá del punto de medición durante el subintervalo de $t = t_{i-1}$ a $t = t_i$ es aproximadamente

$$\text{(concentración)(volumen)} = c(t_i)(F\,\Delta t)$$

donde F es la razón del flujo que se trata de determinar. Así, el monto total de colorante es aproximadamente

$$\sum_{i=1}^{n} c(t_i) F\,\Delta t = F\sum_{i=1}^{n} c(t_i)\,\Delta t$$

y, haciendo que $n \to \infty$, se encuentra que la cantidad de colorante es

$$A = F\int_0^T c(t)\, dt$$

Así, el rendimiento cardiaco está dado por

$$F = \frac{A}{\int_0^T c(t)\,dt} \quad \boxed{3}$$

donde se conoce la cantidad de colorante A y la integral puede aproximarse a partir de las lecturas de concentración.

t	$c(t)$	t	$c(t)$
0	0	6	6.1
1	0.4	7	4.0
2	2.8	8	2.3
3	6.5	9	1.1
4	9.8	10	0
5	8.9		

V EJEMPLO 2 Un bolo de colorante de 5 mg se inyecta hacia la aurícula derecha. La concentración del colorante (en miligramos por litro) se mide en la aorta a intervalos de un segundo, como se muestra en la tabla. Estime el rendimiento cardiaco.

SOLUCIÓN Aquí $A = 5$, $\Delta t = 1$ y $T = 10$. Use la regla de Simpson para aproximar la integral de la concentración:

$$\begin{aligned}\int_0^{10} c(t)\,dt &\approx \tfrac{1}{3}[0 + 4(0.4) + 2(2.8) + 4(6.5) + 2(9.8) + 4(8.9) \\ &\quad + 2(6.1) + 4(4.0) + 2(2.3) + 4(1.1) + 0] \\ &\approx 41.87\end{aligned}$$

Así, la fórmula 3 da el rendimiento cardiaco

$$F = \frac{A}{\int_0^{10} c(t)\,dt} \approx \frac{5}{41.87} \approx 0.12\,\text{L/s} = 7.2\,\text{L/min}$$

8.4 Ejercicios

1. La función de costo marginal $C'(x)$ se definió como la derivada de la función costo. (Véanse las secciones 3.7 y 4.7.) Si el costo marginal de fabricar x galones de jugo de naranja es $C'(x) = 0.82 - 0.00003x + 0.000000003x^2$ (medido en dólares por galón). El costo de arranque fijo es $C(0) = \$18\,000$. Use el teorema del cambio neto para hallar el costo de producir los primeros 4 000 galones de jugo.

2. Una compañía estima que el ingreso marginal (en dólares por unidad) por la venta de x unidades de un producto es $48 - 0.0012x$. Suponiendo que la estimación es exacta, encuentre el aumento en los ingresos si aumentan las ventas de 5 000 unidades a 10 000 unidades.

3. Una compañía minera estima que el costo marginal por extraer x toneladas de cobre de una mina es $0.6 + 0.008x$, medida en miles de dólares por tonelada. Los costos iniciales son $\$100\,000$. ¿Cuál es el costo de extraer las primeras 50 toneladas de cobre? ¿Y cuál el de extraer las siguientes 50 toneladas?

4. La función de demanda para cierto artículo es $p = 20 - 0.05x$. Determine el superávit de consumo cuando el nivel de ventas es 300. Ilustre dibujando la curva de demanda e identificando al superávit de consumo como un área.

5. Una curva de demanda está dada por $p = 450/(x + 8)$. Determine el superávit de consumo cuando el precio de venta es $10.

6. La **función de suministro** $p_S(x)$ para un artículo da la relación entre el precio de venta y el número de unidades que los fabricantes producirán a ese precio. Para un precio más alto, los fabricantes producirán más unidades, así que p_S es una función creciente de x. Sea X la cantidad del artículo que se produce actualmente, y sea $P = p_S(X)$ el precio actual. Algunos productores estarían dispuestos a fabricar y vender el artículo por un precio de venta menor y, por tanto, recibir más que su precio mínimo. Este exceso se llama **superávit de producción**. Un argumento similar a ése para el superávit de consumo, muestra que el excedente está dado por la integral

$$\int_0^X [P - p_S(x)]\,dx$$

Calcule el superávit de producción para la función de suministro $p_S(x) = 3 + 0.01x^2$ al nivel de ventas $X = 10$. Ilustre dibujando la curva de suministro e identificando el excedente del productor como un área.

7. Si una curva de suministro se modela mediante la ecuación $p = 200 + 0.2x^{3/2}$, determine el superávit de producción cuando el precio de venta es $400.

8. Para un determinado artículo y competencia pura, el número de unidades producidas y el precio por unidad se determinan como las coordenadas del punto de intersección de las curvas de suministro y demanda.

Dada la curva de demanda $p = 50 - \frac{1}{20}x$ y la curva de suministro $p = 20 + \frac{1}{10}x$, determine el superávit de consumo y el superávit del productor. Ilustre dibujando las curvas de suministro y de demanda e identifique los superávits como áreas.

9. Una compañía modeló la curva de demanda para su producto (en dólares) mediante

$$p = \frac{800\,000e^{-x/5\,000}}{x + 20\,000}$$

Use una gráfica para estimar el nivel de ventas cuando el precio de venta es \$16. Después determine (en forma aproximada) el superávit de consumo para este nivel de ventas.

10. Un cine ha estado cobrando \$10.00 por persona y vendiendo alrededor de 500 boletos en las noches de sábado y domingo. Después de encuestar a sus clientes, los propietarios del cine estiman que por cada 50 centavos que bajen el precio, la cantidad de asistentes se incrementará en 50 por noche. Encuentre la función de demanda y calcule el superávit de consumo cuando los boletos se venden a \$8.00.

11. Si la cantidad de capital que una compañía tiene en el tiempo t es $f(t)$, entonces la derivada, $f'(t)$, se llama el *flujo de inversión neto*. Suponga que el flujo de inversión neto es $\sqrt{t}$ millones de dólares por año (donde t se mide en años). Determine el incremento de capital (la *formación de capital*) del cuarto año al octavo.

12. El flujo de ingreso de una compañía es a razón de $f(t) = 9\,000\sqrt{1 + 2t}$, donde t se mide en años y $f(t)$ se mide en dólares por año, halle el ingreso total obtenido en los primeros cuatro años.

13. La *ley de Pareto de la utilidad* establece que el número de personas con ingresos entre $x = a$ y $x = b$ es $N = \int_a^b Ax^{-k}\,dx$, donde A y k son constantes con $A > 0$ y $k > 1$. El ingreso promedio de estas personas es

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\int_a^b Ax^{1-k}\,dx$$

Calcule $\bar{x}$.

14. Un verano húmedo y cálido causa una explosión en la población de mosquitos en un área lacustre de descanso. El número de mosquitos se incrementa a una rapidez estimada de $2\,200 + 10e^{0.8t}$ por semana (donde t se mide en semanas). ¿En cuánto se incrementa la población de mosquitos entre las semanas quinta y novena del verano?

15. Use la ley de Poiseuille para calcular la razón del flujo sanguíneo en una pequeña arteria humana donde puede tomarse $\eta = 0.027$, $R = 0.008\,\text{cm}$, $l = 2\,\text{cm}$ y $P = 4\,000\,\text{dinas/cm}^2$.

16. La presión sanguínea alta resulta de la obstrucción de las arterias. Para mantener un flujo normal, el corazón tiene que bombear más fuerte, de modo que se incrementa la presión arterial. Use la ley de Poiseuille para demostrar que si R_0 y P_0 son valores normales del radio y la presión en una arteria, y los valores obstruidos son R y P, respectivamente, entonces para que el flujo permanezca constante, P y R se relacionan mediante la ecuación

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{R_0}{R}\right)^4$$

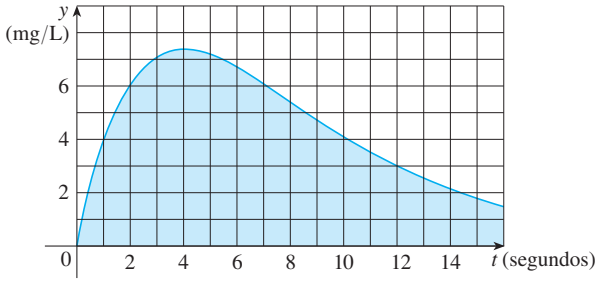
Deduzca que si el radio de una arteria se reduce a tres cuartos de su valor anterior, entonces la presión es más que el triple.

17. El método de dilución de colorante se emplea para medir el rendimiento cardiaco con 6 mg de colorante. Las concentraciones de colorante, en mg/L, se modelan mediante $c(t) = 20te^{-0.6t}$, $0 \leq t \leq 10$, donde t se mide en segundos. Determine el rendimiento cardiaco.

18. Después de una inyección de colorante de 5.5 mg, las lecturas de concentración de colorante, en mg/L, a intervalos de dos segundos son como se muestra en la tabla. Use la regla de Simpson para estimar el rendimiento cardiaco.

t	$c(t)$	t	$c(t)$
0	0.0	10	4.3
2	4.1	12	2.5
4	8.9	14	1.2
6	8.5	16	0.2
8	6.7		

19. Se muestra la gráfica de la función concentración $c(t)$ después de inyectar 7 mg de tintura dentro de un corazón. Aplique la regla de Simpson para estimar el rendimiento cardiaco.



8.5 Probabilidad

El cálculo desempeña un papel en el análisis del comportamiento aleatorio. Suponga que se considera el nivel de colesterol de una persona elegida al azar de un cierto grupo de edad, o la estatura de una mujer adulta elegida al azar o la duración de una batería de cierto tipo elegida en forma aleatoria. Tales cantidades se llaman **variables aleatorias continuas** porque sus valores varían en realidad en un rango de números reales, aunque podrían medirse o registrarse sólo hasta el entero más próximo. Quizá se desee conocer la probabilidad de que el nivel de colesterol sea mayor que 250, o la probabilidad de que la estatura de una mujer adulta esté entre 60 y 70 pulgadas o la probabilidad de que la duración de la batería que se está comprando sea de entre 100 y 200 horas. Si X representa la duración de ese tipo de batería, su probabilidad se denota como sigue:

$$P(100 \leqslant X \leqslant 200)$$

De acuerdo con la interpretación de frecuencia de probabilidad, este número es la proporción a largo plazo de todas las baterías del tipo especificado cuyos tiempos de vida están entre 100 y 200 horas. Puesto que esto representa una proporción, la probabilidad cae naturalmente entre 0 y 1.

Toda variable aleatoria continua X tiene una **función de densidad de probabilidad** f. Esto significa que la probabilidad de que X esté entre a y b se encuentra integrando f de a a b.

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(x)\,dx \qquad \boxed{1}$$

Por ejemplo, en la figura 1 se muestra la gráfica de un modelo de la función de densidad de probabilidad f para una variable aleatoria X definida como la estatura en pulgadas de una mujer adulta en Estados Unidos (de acuerdo con los datos de la *National Health Survey,* Encuesta Nacional de Salud). La probabilidad de que la estatura de una mujer elegida al azar de esta población este entre 60 y 70 pulgadas es igual al área bajo la gráfica de f de 60 a 70.

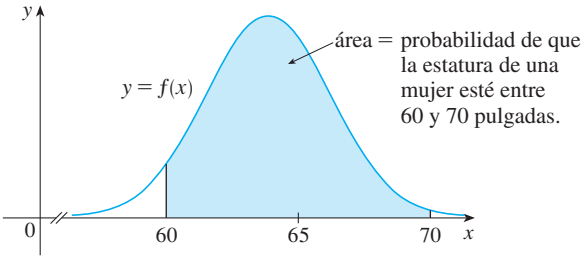


FIGURA 1
Función de densidad de probabilidad para la estatura de una mujer adulta

En general, la función de densidad de probabilidad f de una variable aleatoria X satisface la condición $f(x) \geqslant 0$ para toda x. Debido a que las probabilidades se miden en una escala de 0 a 1, se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \qquad \boxed{2}$$

EJEMPLO 1 Sea $f(x) = 0.006x(10 - x)$ para $0 \leqslant x \leqslant 10$ y $f(x) = 0$ para todos los otros valores de x.

a) Verifique que f es una función de densidad de probabilidad.

b) Determine $P(4 \leqslant X \leqslant 8)$.

SOLUCIÓN

a) Para $0 \leqslant x \leqslant 10$ se tiene $0.006x(10 - x) \geqslant 0$, por tanto, $f(x) \geqslant 0$ para toda x. Necesitamos verificar también que se satisface la ecuación 2:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{0}^{10} 0.006x(10 - x)\,dx = 0.006\int_{0}^{10} (10x - x^2)\,dx$$

$$= 0.006\left[5x^2 - \tfrac{1}{3}x^3\right]_0^{10} = 0.006\left(500 - \tfrac{1000}{3}\right) = 1$$

Por ende, f es una función de densidad de probabilidad.

b) La probabilidad de que X esté entre 4 y 8 es

$$P(4 \leqslant X \leqslant 8) = \int_{4}^{8} f(x)\,dx = 0.006\int_{4}^{8} (10x - x^2)\,dx$$

$$= 0.006\left[5x^2 - \tfrac{1}{3}x^3\right]_4^{8} = 0.544$$

V EJEMPLO 2 Fenómenos como los tiempos de espera y los tiempos de falla de equipo se modelan por lo común mediante funciones de densidad de probabilidad que decrecen en forma exponencial. Determine la forma exacta de tal función.

SOLUCIÓN Considere a la variable aleatoria como el tiempo de espera en una llamada antes de que conteste un agente de una compañía a la que usted está llamando. Así que, en lugar de x, utilizaremos t para representar en minutos el tiempo. Si f es la función de densidad de probabilidad y usted llama en el tiempo $t = 0$, entonces, de la definición 1, $\int_0^2 f(t)\,dt$ representa la probabilidad de que un agente conteste dentro de los primeros dos minutos, y $\int_4^5 f(t)\,dt$ es la probabilidad de que la llamada sea contestada durante el minuto cinco.

Es claro que $f(t) = 0$ para $t < 0$ (el agente no puede contestar antes de que usted llame). Para $t > 0$ se nos indica que hay que usar una función que decrece en forma exponencial, es decir, una función de la forma $f(t) = Ae^{-et}$, donde A y c son constantes positivas. Así,

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ Ae^{-ct} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Usamos la condición 2 para determinar el valor de A:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{\infty} f(t)\,dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} Ae^{-ct}\,dt = \lim_{x\to\infty}\int_{0}^{x} Ae^{-ct}\,dt$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[-\frac{A}{c}e^{-ct}\right]_0^{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{A}{c}(1 - e^{-cx})$$

$$= \frac{A}{c}$$

Por tanto, $A/c = 1$ y así $A = c$. En estos términos, toda función de densidad exponencial tiene la forma

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ ce^{-ct} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

En la figura 2 se ilustra una gráfica representativa.

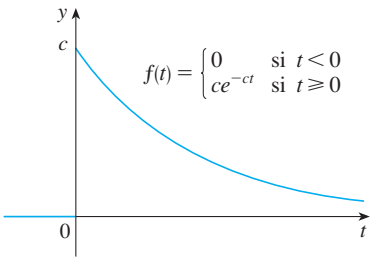


FIGURA 2
Una función de densidad exponencial

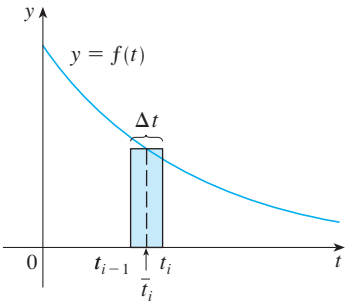


FIGURA 3

Valores promedio

Supongamos que está usted en espera de que una compañía conteste su llamada telefónica y se pregunta cuánto tiempo, en promedio, está dispuesto a esperar. Sea $f(t)$ la función de densidad correspondiente, donde t se mide en minutos, y considere una muestra de N personas que han llamado a esta compañía. Es muy probable que ninguno de ellos tuviera que esperar más de una hora, así que se restringe la atención al intervalo $0 \leqslant t \leqslant 60$. Dividamos ese intervalo en n intervalos de longitud Δt y puntos extremos $0, t_1, t_2, \ldots, t_{60}$. (Suponga que Δt dura un minuto, o medio minuto, o 10 segundos o incluso un segundo.) La probabilidad de que la llamada de alguien sea contestada durante el periodo de tiempo de t_{i-1} a t_i es el área bajo la curva $y = f(t)$ de t_{i-1} a t_i que es aproximadamente igual a $f(\bar{t}_i)\,\Delta t$. (Ésta es el área del rectángulo de aproximación en la figura 3, donde $\bar{t}_i$ es el punto medio del intervalo.)

Puesto que la proporción a largo plazo de llamadas que son contestadas en el periodo de t_{i-1} a t_i es $f(\bar{t}_i)\,\Delta t$, se espera que, de la muestra de N personas que llaman, la cantidad cuya llamada fue contestada en ese periodo es aproximadamente $Nf(\bar{t}_i)\,\Delta t$ y el tiempo que cada uno esperó es de alrededor de $\bar{t}_i$. Por tanto, el tiempo total que esperaron es el producto de estos números: aproximadamente $\bar{t}_i[Nf(\bar{t}_i)\,\Delta t]$. Al sumar todos estos intervalos se obtiene el total aproximado de los tiempos de espera de todos:

$$\sum_{i=1}^{n} N\bar{t}_i f(\bar{t}_i)\,\Delta t$$

Si ahora se divide entre el número N de personas que llamaron, se obtiene el tiempo de espera *promedio* aproximado:

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{t}_i f(\bar{t}_i)\,\Delta t$$

Esto lo reconocemos como una suma de Riemann para la función $tf(t)$. Conforme se acorta el intervalo (es decir, $\Delta t \to 0$ y $n \to \infty$), esta suma de Riemann se aproxima a la integral

$$\int_0^{60} t f(t)\,dt$$

Esta integral se llama *la media del tiempo de espera*.

En general, la **media** de cualquier función de densidad de probabilidad se define como

Tradicionalmente, denotamos la media por la letra griega μ (*mu*).

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$$

La media puede interpretarse como el valor promedio a largo plazo de la variable aleatoria X. Puede interpretarse también como una medida de la posición central de la función de densidad de probabilidad.

La expresión para la media se asemeja a una integral que se ha visto antes. Si $\mathcal{R}$ es la región que yace bajo la gráfica de f, se sabe de la fórmula 8.3.8 que la coordenada x del centroide de $\mathcal{R}$ es

$$\bar{x} = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \mu$$

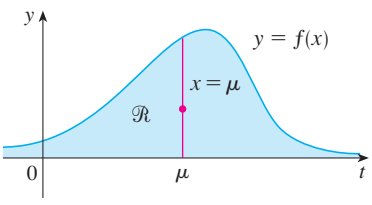


FIGURA 4
$\mathcal{R}$ se equilibra en un punto sobre la recta $x = \mu$

debido a la ecuación 2. De modo que una placa delgada en la forma de $\mathcal{R}$ se equilibra en un punto sobre la recta vertical $x = \mu$. (Véase la figura 4.)

EJEMPLO 3 Encuentre la media de la distribución exponencial del ejemplo 2:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ ce^{-ct} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN De acuerdo con la definición de media, se tiene

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} t f(t)\, dt = \int_{0}^{\infty} tce^{-ct}\, dt$$

Para evaluar esta integral usamos la integración por partes, con $u = t$ y $dv = ce^{-et}\, dt$:

$$\int_0^{\infty} tce^{-ct}\, dt = \lim_{x\to\infty} \int_0^x tce^{-ct}\, dt = \lim_{x\to\infty} \left(-te^{-ct}\Big]_0^x + \int_0^x e^{-ct}\, dt \right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(-xe^{-cx} + \frac{1}{c} - \frac{e^{-cx}}{c} \right) = \frac{1}{c}$$

El límite del primer término es 0 por la regla de l'Hospital.

La media es $\mu = 1/c$, así que podemos reescribir la función de densidad de probabilidad como

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \mu^{-1}e^{-t/\mu} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

V EJEMPLO 4 Suponga que el tiempo de espera promedio para que la llamada de un cliente sea contestada por un representante de la compañía es cinco minutos.
a) Encuentre la probabilidad de que una llamada sea contestada durante el primer minuto.
b) Determine la probabilidad de que un cliente espere más de cinco minutos a que sea contestada su llamada.

SOLUCIÓN
a) Se tiene como dato que la media de la distribución exponencial es $\mu = 5$ min y, por tanto, del resultado del ejemplo 3, se sabe que la función de densidad de probabilidad es

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 0.2e^{-t/5} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Por esto, la probabilidad de que una llamada sea contestada durante el primer minuto es

$$P(0 \leqslant T \leqslant 1) = \int_0^1 f(t)\, dt$$

$$= \int_0^1 0.2e^{-t/5}\, dt = 0.2(-5)e^{-t/5}\Big]_0^1$$

$$= 1 - e^{-1/5} \approx 0.1813$$

Por consiguiente, cerca de 18% de las llamadas de los clientes serán contestadas durante el primer minuto.
a) La probabilidad de que un cliente espere más de cinco minutos, es

$$P(T > 5) = \int_5^{\infty} f(t)\, dt = \int_5^{\infty} 0.2e^{-t/5}\, dt$$

$$= \lim_{x\to\infty} \int_5^x 0.2e^{-t/5}\, dt = \lim_{x\to\infty} (e^{-1} - e^{-x/5})$$

$$= \frac{1}{e} \approx 0.368$$

Cerca de 37% de los clientes espera más de cinco minutos antes de que su llamada sea contestada.

Observe el resultado del ejemplo 4b): aun cuando el tiempo promedio de espera es 5 minutos, sólo 37% de las personas que llaman esperan más de 5 minutos. La razón es que algunas de las personas que llaman tienen que esperar mucho más tiempo (quizá 10 o 15 minutos), y esto hace subir el promedio.

Otra medida central de una función de densidad de probabilidad es la *mediana*. Ésta es un número m tal que la mitad de las personas que llaman tienen un tiempo de espera menor que m y la otra mitad tiene un tiempo de espera más largo que m. En general, la **mediana** de una función de densidad de probabilidad es el número m tal que

$$\int_m^{\infty} f(x)\,dx = \tfrac{1}{2}$$

Esto significa que la mitad del área bajo la gráfica de f se localiza a la derecha de m. En el ejercicio 9 se le pidió demostrar que el tiempo de espera promedio para la compañía descrita en el ejemplo 4 es aproximadamente 3.5 minutos.

Distribuciones normales

Muchos fenómenos aleatorios importantes —como las puntuaciones en pruebas de aptitud, estaturas y pesos de individuos de una población homogénea, precipitación pluvial anual en un determinado lugar— se modelan mediante una **distribución normal**. Esto significa que la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria X es un miembro de la familia de funciones

La desviación estándar se denota con la letra griega σ (*sigma*) minúscula.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} \qquad \boxed{3}$$

Puede verificarse que la media para esta función es μ. La constante positiva σ se llama **desviación estándar**, que mide qué tan dispersos están los valores de X. De las gráficas en forma de campana de miembros de la familia de la figura 5, se ve que para valores pequeños de σ los valores de X están agrupados respecto a la media, mientras que para valores más grandes de σ los valores de X están más dispersos. Los estadísticos se sirven de métodos que les permiten usar conjuntos de datos para estimar μ y σ.

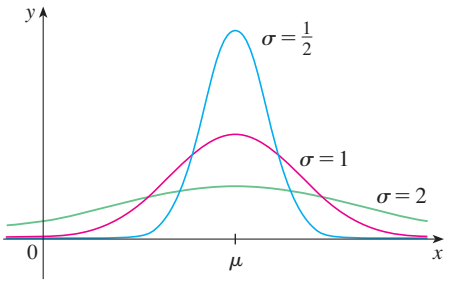


FIGURA 5
Distribuciones normales

El factor $1/\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)$ es necesario para hacer de f una función de densidad de probabilidad. De hecho, puede comprobarse por medio de los métodos de cálculo de varias variables que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}\,dx = 1$$

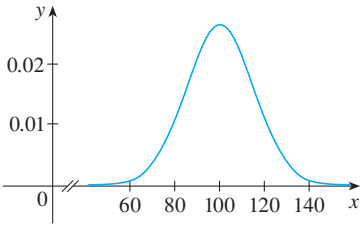


FIGURA 6
Distribución de puntuaciones de CI

V EJEMPLO 5 Las puntuaciones del cociente intelectual (CI) tienen una distribución normal con media 100 y desviación estándar 15. (En la figura 6 se muestra la función de densidad de probabilidad correspondiente.)

a) ¿Qué porcentaje de la población tiene una puntuación de CI entre 85 y 115?

b) ¿Qué porcentaje de la población tiene un CI arriba de 140?

SOLUCIÓN

a) Puesto que las puntuaciones CI tienen una distribución normal, se usa la función de densidad de probabilidad dada por la ecuación 3 con $\mu = 100$ y $\sigma = 15$:

$$P(85 \leqslant X \leqslant 115) = \int_{85}^{115} \frac{1}{15\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-100)^2/(2\cdot 15^2)}\, dx$$

Recuerde de la sección 7.5 que la función $y = e^{-x^2}$ no tiene una antiderivada elemental, así que no puede evaluarse la integral de manera exacta. Pero se puede usar la capacidad de integración numérica de una calculadora o computadora (o la regla del punto medio o la regla de Simpson) para estimar la integral. Al hacerlo se encuentra que

$$P(85 \leqslant X \leqslant 115) \approx 0.68$$

Por tanto, cerca de 68% de la población tiene un CI entre 85 y 115, es decir, dentro de una desviación estándar de la media.

b) La probabilidad de que la puntuación del CI de una persona elegida al azar sea más de 140 es

$$P(X > 140) = \int_{140}^{\infty} \frac{1}{15\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-100)^2/450}\, dx$$

Para evitar la integral impropia, se podría aproximarla mediante la integral de 140 a 200. (Es bastante seguro decir que las personas con un CI de más de 200 son muy pocas.) Entonces

$$P(X > 140) \approx \int_{140}^{200} \frac{1}{15\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-100)^2/450}\, dx \approx 0.0038$$

Por ende, cerca de 0.4% de la población tiene un CI de más de 140.

8.5 Ejercicios

1. Sea $f(x)$ la función de densidad de probabilidad para la duración de la llanta de automóvil de la más alta calidad de un fabricante, donde x se mide en millas. Explique el significado de cada integral.

a) $\displaystyle\int_{30\,000}^{40\,000} f(x)\, dx$ b) $\displaystyle\int_{25\,000}^{\infty} f(x)\, dx$

2. Sea $f(t)$ la función de densidad de probabilidad para el tiempo que le toma conducir a la escuela en la mañana, donde t se mide en minutos. Exprese las siguientes probabilidades como integrales.

a) La probabilidad de que llegue a la escuela en menos de 15 minutos.

b) La probabilidad de que tarde más de media hora en llegar a la escuela.

3. Sea $f(x) = 30x^2(1 - x)^2$ para $0 \leqslant x \leqslant 1$ y $f(x) = 0$ para los otros valores de x.

a) Compruebe que f es una función de densidad de probabilidad.

b) Encuentre $P\left(X \leqslant \frac{1}{3}\right)$.

4. Sea $f(x) = xe^{-x}$ si $x \geqslant 0$ y $f(x) = 0$ si $x < 0$.

a) Verifique que f es una función de densidad de probabilidad.

b) Halle $P(1 \leqslant X \leqslant 2)$.

5. Sea $f(x) = c/(1 + x^2)$.

a) ¿Para qué valor de c, f es una función de densidad de probabilidad?

b) Para este valor de c, halle $P(-1 < X < 1)$.

6. Sea $f(x) = k(3 - x^2)$ si $0 \leqslant x \leqslant 3$ y $f(x) = 0$ si $x < 0$ o bien $x > 3$.

a) ¿Para qué valor de k es f una función de densidad de probabilidad?

b) Para ese valor de k, determine $P(X > 1)$.

c) Encuentre la media.

7. Una perinola de un juego de mesa indica al azar un número real entre 0 y 10. La perinola es justa en el sentido de que indica un número en un intervalo dado con la misma probabilidad que indica un número en cualquier otro intervalo de la misma longitud.

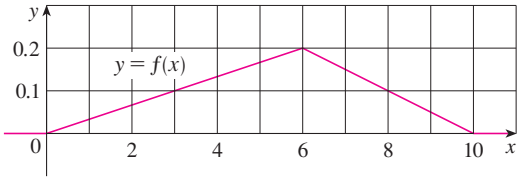
a) Explique por qué la función

$$f(x) = \begin{cases} 0.1 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 10 \\ 0 & \text{si } x < 0 \text{ o } x > 10 \end{cases}$$

es una función de densidad de probabilidad para los valores de la perinola.

b) ¿Qué le dice su intuición acerca del valor de la media? Verifique su intuición evaluando una integral.

8. a) Explique por qué la función cuya gráfica se muestra es una función de densidad de probabilidad.
b) Use la gráfica para hallar las siguientes probabilidades:
i) $P(X < 3)$ ii) $P(3 \leqslant X \leqslant 8)$
c) Calcule la media.



9. Demuestre que el tiempo de espera promedio para una llamada telefónica a la compañía descrita en el ejemplo 4 es de alrededor de 3.5 minutos.

10. a) Cierto tipo de lámpara lleva una marca que indica una duración promedio de 1000 horas. Es razonable modelar la probabilidad de falla de estas lámparas mediante una función de densidad exponencial con media $\mu = 1000$. Use este modelo para hallar la probabilidad de que la lámpara
i) falle dentro de las primeras 200 horas,
ii) se quema para más de 800 horas.
b) ¿Cuál es la duración promedio de estas lámparas?

11. El gerente de un restaurante de comida rápida determina que el tiempo promedio que sus clientes esperan a ser atendidos es 2.5 minutos.
a) Encuentre la probabilidad de que un cliente tenga que esperar durante más de 4 minutos.
b) Encuentre la probabilidad de que un cliente sea atendido dentro de los primeros dos minutos.
c) El gerente quiere anunciar que cualquier persona que no sea atendida dentro de cierto número de minutos tiene derecho a una hamburguesa gratis, pero no quiere dar hamburguesas gratis a más de 2% de sus clientes. ¿Qué debe decir el anuncio?

12. De acuerdo con la *National Health Survey*, las estaturas de varones adultos en Estados Unidos tienen una distribución normal con media de 69.0 pulgadas y desviación estándar de 2.8 pulgadas.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que un varón adulto elegido al azar tenga una estatura de entre 65 y 73 pulgadas?
b) ¿Qué porcentaje de la población de varones adultos tiene una estatura de más de 6 pies?

13. El "Proyecto basura" en la Universidad de Arizona informa que la cantidad de papel que se desecha en los hogares por semana tiene una distribución normal con media de 9.4 lb y desviación estándar de 4.2 lb. ¿Qué porcentaje de los hogares tira por lo menos 10 lb de papel a la semana?

14. La etiqueta de unas cajas indica que contiene 500 g de cereal. Una máquina que llena las cajas introduce pesos que tienen una distribución normal con desviación estándar de 12 g.
a) Si el peso deseado es 500 g, ¿cuál es la probabilidad de que la máquina llene una caja con menos de 480 g de cereal?
b) Suponga que una ley establece que no más de 5% de las cajas de cereal de un fabricante puede contener menos del peso establecido de 500 g. ¿En qué peso debe fijar el fabricante su máquina de llenado?

15. La rapidez de los vehículos en una autopista con límite de velocidad de 100 km/h usualmente están distribuidas con una media de 112 km/h y una desviación estándar de 8 km/h.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que un vehículo elegido al azar esté viajando con una velocidad dispuesta por ley?
b) Si los policías están instruidos para infraccionar a los automovilistas que conduzcan a 125 km/h o más, ¿qué porcentaje de automovilistas están señalados?

16. Demuestre que la función de densidad de probabilidad para una variable aleatoria normalmente distribuida tiene puntos de inflexión en $x = \mu \pm \sigma$.

17. Para cualquier distribución normal, encuentre la probabilidad de que la variable aleatoria se localice dentro de dos desviaciones estándar de la media.

18. La desviación estándar para una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad f y media μ se define por

$$\sigma = \left[\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)\, dx \right]^{1/2}$$

Encuentre la desviación estándar para una función de densidad exponencial con media μ.

19. El átomo de hidrógeno se compone de un protón en el núcleo y un electrón, que se mueve respecto al núcleo. En la teoría cuántica de la estructura atómica, se supone que el electrón no se mueve en una órbita bien definida. En cambio, ocupa un estado conocido como *orbital*, que puede considerarse como una "nube" de carga negativa en torno al núcleo. En el estado de menor energía, llamado *estado basal*, o *1s-orbital*, la forma de esta nube se supone como una esfera centrada en el núcleo. Esta esfera se describe en términos de la función de densidad de probabilidad

$$p(r) = \frac{4}{a_0^3}\, r^2 e^{-2r/a_0} \qquad r \geqslant 0$$

donde a_0 es el *radio de Bohr* ($a_0 \approx 5.59 \times 10^{-11}$ m). La integral

$$P(r) = \int_0^r \frac{4}{a_0^3}\, s^2 e^{-2s/a_0}\, ds$$

da la probabilidad de que el electrón se encuentre dentro de la esfera de radio r metros centrada en el núcleo.
a) Compruebe que $p(r)$ es una función de densidad de probabilidad.
b) Determine $\lim_{r \to \infty} p(r)$. ¿Para qué valor de r la expresión $p(r)$ tiene su valor máximo?
c) Grafique la función de densidad.
d) Encuentre la probabilidad de que el electrón esté dentro de la esfera de radio $4a_0$ centrada en el núcleo.
e) Calcule la distancia media del electrón desde el núcleo en el estado basal del átomo de hidrógeno.

8 Repaso

Verificación de conceptos

1. a) ¿Cómo se define la longitud de una curva?
   b) Escriba una expresión para la longitud de una curva suave dada por $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$.
   c) ¿Qué pasa si x se da como una función de y?
2. a) Escriba una expresión para el área superficial de la superficie obtenida al hacer girar la curva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, en torno al eje x.
   b) ¿Qué pasa si x se da como una función de y?
   c) ¿Qué pasa si la curva se hace girar en torno al eje y?
3. Describa cómo puede determinarse la fuerza hidrostática contra una pared vertical sumergida en un fluido.
4. a) ¿Cuál es el significado físico del centro de masa de una placa delgada?
   b) Si la placa está entre $y = f(x)$ y $y = 0$, donde $a \leq x \leq b$, escriba expresiones para las coordenadas del centro de masa.
5. ¿Qué establece el teorema de Pappus?
6. Dada una función de demanda $p(x)$, explique lo que se entiende por superávit de consumo cuando la cantidad de un artículo actualmente disponible es X y el precio de venta actual es P. Ilustre con un bosquejo.
7. a) ¿Qué es el rendimiento cardiaco del corazón?
   b) Explique cómo puede medirse el rendimiento cardiaco por el método de dilución de colorante.
8. ¿Qué es la función de densidad de probabilidad? ¿Qué propiedades tiene tal función?
9. Suponga que $f(x)$ es la función de densidad de probabilidad para el peso de una alumna universitaria, donde x se mide en libras.
   a) ¿Cuál es el significado de la integral $\int_0^{130} f(x)\,dx$?
   b) Escriba una expresión para la media de esta función de densidad.
   c) ¿Cómo puede hallarse la mediana de esta función de densidad?
10. ¿Qué es una distribución normal? ¿Cuál es el significado de la desviación estándar?

Ejercicios

1-2 Encuentre la longitud de la curva.

1. $y = \frac{1}{6}(x^2 + 4)^{3/2}, \quad 0 \leq x \leq 3$
2. $y = 2 \ln(\operatorname{sen} \frac{1}{2}x), \quad \pi/3 \leq x \leq \pi$

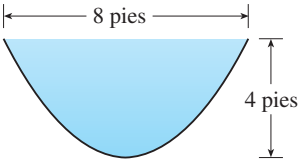
3. a) encuentre la longitud de la curva

$$y = \frac{x^4}{16} + \frac{1}{2x^2} \qquad 1 \leq x \leq 2$$

   b) Determine el área de la superficie obtenida al hacer girar la curva del inciso a) en torno al eje y.
4. a) La curva $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$ se hace girar en torno al eje y. Encuentre el área de la superficie resultante.
   b) Determine el área de la superficie obtenida al hacer girar la curva del inciso a) en torno al eje x.
5. Use la regla de Simpson con $n = 10$ para estimar la longitud de la curva $y = \operatorname{sen} x$, $0 \leq x \leq \pi$.
6. Utilice la regla de Simpson con $n = 10$ para estimar el área de la superficie obtenida al hacer girar la curva seno del ejercicio 5 en torno al eje x.
7. Encuentre la longitud de la curva

$$y = \int_1^x \sqrt{\sqrt{t} - 1}\, dt \qquad 1 \leq x \leq 16$$

8. Determine el área de la superficie obtenida al hacer girar la curva del ejercicio 7 en torno al eje y.
9. Una compuerta en un canal de irrigación se construye en la forma de un trapecio de 3 pies de ancho en el fondo, 5 pies de ancho en la parte superior y 2 pies de altura. Se coloca verticalmente en el canal, de manera que el agua cubre hasta su parte superior. Determine la fuerza hidrostática sobre un lado de la compuerta.
10. Un canal se llena con agua, y sus extremos verticales tienen la forma de la región parabólica en la figura. Encuentre la fuerza hidrostática en un extremo del canal.

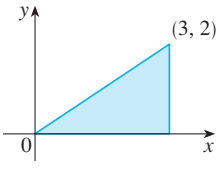


11-12 Determine el centroide de la región acotada por las curvas dadas.

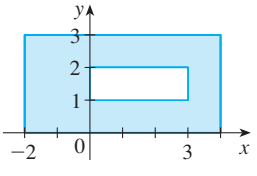
11. $y = \frac{1}{2}x, \quad y = \sqrt{x}$
12. $y = \operatorname{sen} x, \quad y = 0, \quad x = \pi/4, \quad x = 3\pi/4$

13-14 Encuentre el centroide de la región mostrada.

13.



14.



15. Encuentre el volumen obtenido cuando el círculo de radio 1 con centro (1, 0) se hace girar en torno al eje y.

16. Use el teorema de Pappus y el hecho de que el volumen de una esfera de radio r es $\frac{4}{3}\pi r^3$ para encontrar el centroide de la región semicircular acotada por la curva $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ y el eje x.

17. La función de demanda para un artículo se da por

$$p = 2000 - 0.1x - 0.01x^2$$

Encuentre el superávit del consumo cuando el nivel de ventas es 100.

18. Después de una inyección de 6 mg de colorante al corazón, las lecturas de concentración de colorante a intervalos de dos segundos se muestran en la tabla. Use la regla de Simpson para estimar el rendimiento cardiaco.

t	$c(t)$	t	$c(t)$
0	0	14	4.7
2	1.9	16	3.3
4	3.3	18	2.1
6	5.1	20	1.1
8	7.6	22	0.5
10	7.1	24	0
12	5.8		

19. a) Explique por qué la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{20}\,\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi x}{10}\right) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 10 \\ 0 & \text{si } x < 0 \text{ o } x > 10 \end{cases}$$

es una función de densidad de probabilidad.

b) Encuentre $P(X < 4)$.

c) Calcule la media. ¿Es el valor que esperaría?

20. Los lapsos de embarazos humanos tienen una distribución normal con media de 268 días y una desviación estándar de 15 días. ¿Qué porcentaje de embarazos dura entre 250 días y 280 días?

21. El tiempo de espera en la fila de cierto banco se modela mediante una función de densidad exponencial con media de 8 minutos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente sea atendido en los primeros 3 minutos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente tenga que esperar más de 10 minutos?

c) ¿Cuál es la mediana del tiempo de espera?

Problemas adicionales

1. Encuentre el área de la región $S = \{(x, y) \mid x \geqslant 0,\ y \leqslant 1,\ x^2 + y^2 \leqslant 4y\}$.

2. Halle el centroide de la región encerrada por el bucle de la curva $y^2 = x^3 - x^4$.

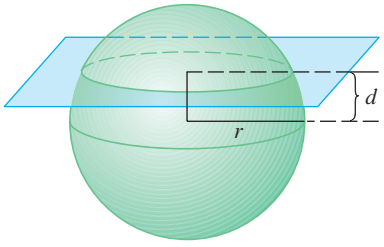
3. Si la esfera de radio r se corta mediante un plano cuya distancia desde el centro de la esfera es d, entonces la esfera se divide en dos piezas llamadas segmentos de una base. Las superficies correspondientes se llaman *zonas esféricas de una base*.

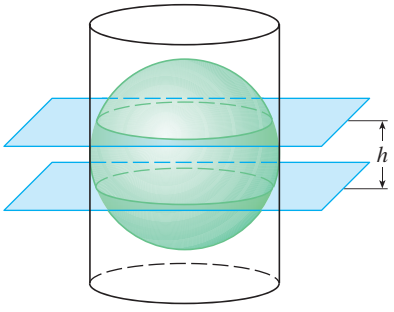
a) Determine las áreas superficiales de las dos zonas esféricas indicadas en la figura.

b) Calcule el área aproximada del océano Ártico suponiendo que su forma es aproximadamente circular, con centro en el Polo Norte y "circunferencia" a 75° latitud norte. Use $r = 3960$ millas para el radio de la Tierra.

c) Una esfera de radio r se inscribe en un cilindro circular recto de radio r. Dos planos perpendiculares al eje central del cilindro y apartados una distancia h cortan una *zona esférica de dos bases* en la esfera. Demuestre que el área superficial de la zona esférica es igual al área superficial de la región que los dos planos cortan en el cilindro.

d) La *Zona tórrida* es la región sobre la superficie de la Tierra que está entre el Trópico de Cáncer (23.45° latitud norte) y el Trópico de Capricornio (23.45° latitud sur). ¿Cuál es el área de la Zona tórrida?





4. a) Demuestre que un observador a la altura H por encima del Polo Norte de una esfera de radio r puede ver una parte de la esfera que tiene un área

$$\frac{2\pi r^2 H}{r + H}$$

b) Dos esferas con radios r y R se colocan de modo que la distancia entre sus centros es d, donde $d > r + R$. ¿Dónde debe colocarse una luz sobre la recta que une los centros de las esferas, a fin de iluminar la superficie total más grande?

5. Suponga que la densidad del agua de mar, $\rho = (z)$, varía con la profundidad z debajo de la superficie.

a) Demuestre que la presión hidrostática está gobernada por la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dz} = \rho(z)g$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad. Sea P_0 y ρ_0 la presión y la densidad en $z = 0$. Exprese la presión a profundidad z como una integral.

b) Suponga que la densidad del agua de mar a la profundidad z está dada por $\rho = \rho_0 e^{z/H}$, donde H es una constante positiva. Encuentre la fuerza total, expresada como una integral, ejercida sobre un orificio circular vertical de radio r cuyo centro se localiza a una distancia $L > r$ debajo de la superficie.

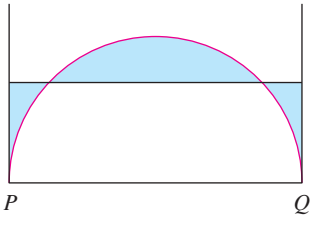


FIGURA PARA EL PROBLEMA 6

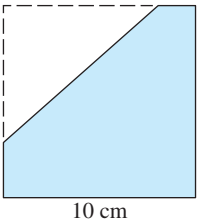
6. En la figura se muestra un semicírculo con radio 1, diámetro horizontal PQ y rectas tangentes en P y Q. ¿A qué altura arriba del diámetro debe colocarse la recta horizontal para minimizar el área sombreada?

7. Sea P una pirámide con una base cuadrada de lado $2b$ y suponga que S es una esfera con su centro en la base de P y S es tangente a los ocho lados de P. Determine la altura de P. Después calcule el volumen de la intersección de S y P.

8. Considere una placa metálica plana que se colocará verticalmente bajo el agua con la parte superior sumergida 2 m debajo de la superficie del agua. Determine una forma para la placa de modo que si ésta se divide en cierto número de bandas horizontales de igual altura, la fuerza hidrostática en cada banda es la misma.

9. Un disco uniforme con radio 1 se cortara mediante una línea de modo que el centro de masa de la pieza más pequeña se localice a la mitad a lo largo de un radio. ¿Qué tan cerca del centro del disco debe hacerse el corte? (Exprese su respuesta con una aproximación de dos decimales.)

10. Un triangulo con área 30 cm^2 se corta desde una esquina de un cuadrado con lado 10 cm, como se ilustra en la figura. Si el centroide de la región restante es 4 cm desde el lado derecho del cuadrado, ¿qué tan lejos está del fondo del cuadrado?



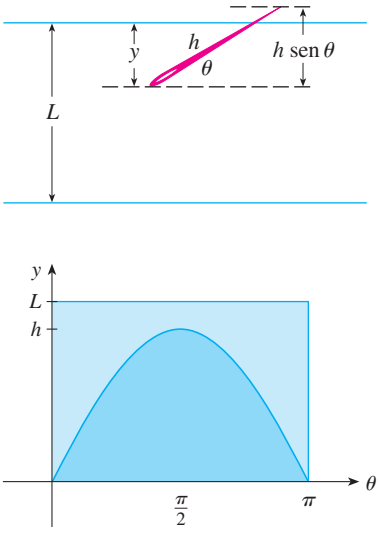


FIGURA PARA EL PROBLEMA 11

11. En un famoso problema del siglo XVIII conocido como *problema de la aguja del bufón*, se deja caer una aguja de longitud h sobre una superficie plana (por ejemplo, una mesa) en la que se han dibujado rectas paralelas apartadas L unidades, $L \geqslant h$. El problema es determinar la probabilidad de que la aguja llegue al reposo cortando una de las rectas. Suponga que las rectas van de este a oeste, paralelas al eje x en un sistema coordenado rectangular (como en la figura). Sea y la distancia del extremo sur de la aguja a la recta más próxima al norte. (Si el extremo sur de la aguja está sobre una recta, sea $y = 0$. Si la aguja yace de este a oeste, sea el extremo "oeste" el extremo "sur".) Sea θ el ángulo que la aguja forma con un rayo que se extiende hacia el este desde el extremo "sur". Entonces $0 \leqslant y \leqslant L$ y $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Observe que la aguja interseca una de las rectas sólo cuando $y < h$ sen θ. Ahora, el conjunto total de posibilidades para la aguja se puede identificar con la región rectangular $0 \leqslant y \leqslant L$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, y la proporción de veces que una aguja corta una recta es la razón

$$\frac{\text{área debajo de } y = h \text{ sen } \theta}{\text{área del rectángulo}}$$

Esta razón es la probabilidad de que la aguja corte una recta. Encuentre la probabilidad de que la aguja interseque una recta si $h = L$. ¿Qué pasa si $h = \frac{1}{2}L$?

12. Si la aguja del problema 11 tiene longitud $h > L$, es posible que la aguja corte más de una recta.

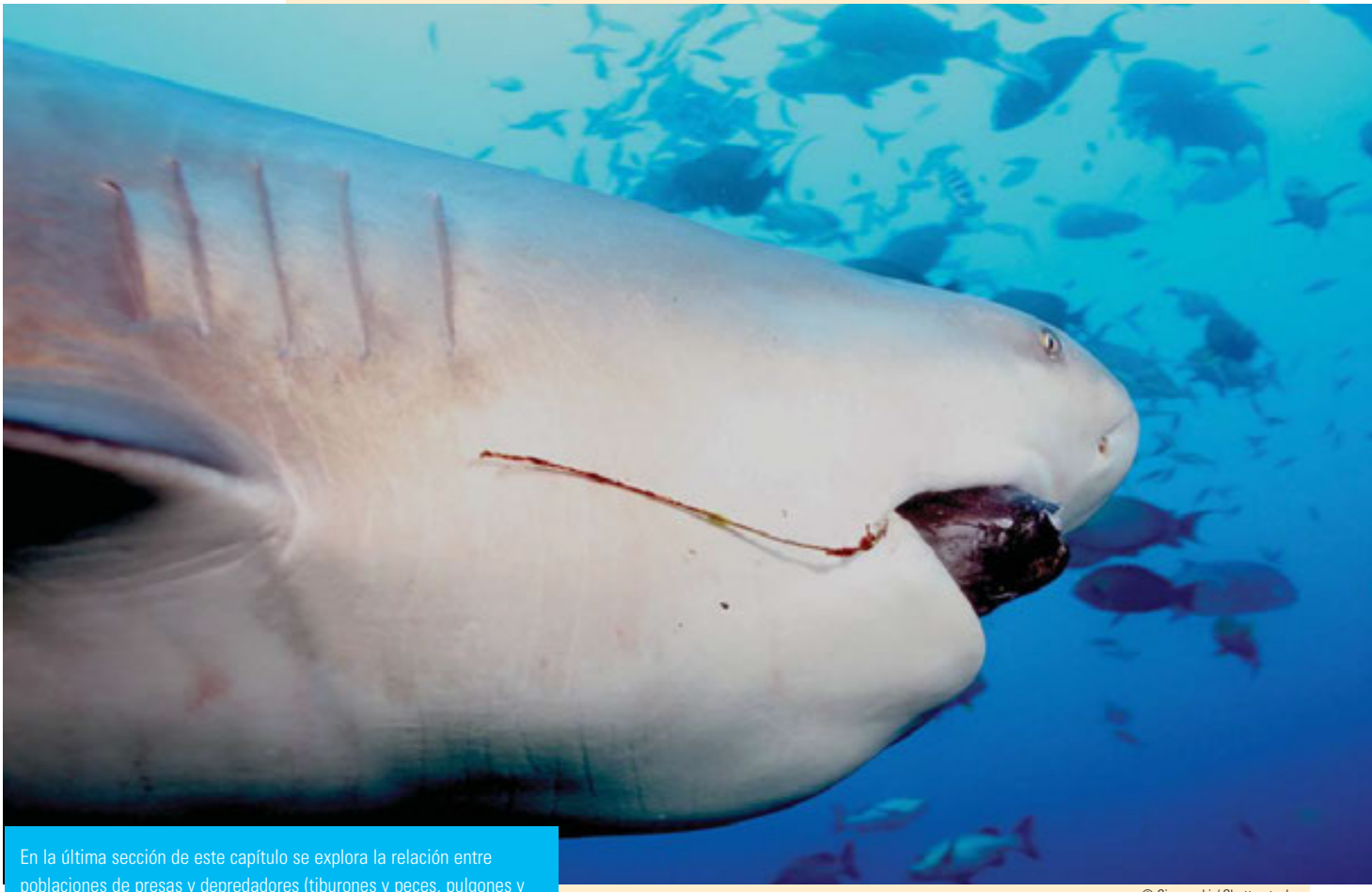
a) Si $L = 4$, encuentre la probabilidad de que una aguja de longitud 7 corte por lo menos una recta. [*Sugerencia:* proceda como en el problema 11. Defina y como antes; entonces el conjunto total de posibilidades para la aguja puede identificarse con la misma región rectangular $0 \leqslant y \leqslant L$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. ¿Qué porción del rectángulo corresponde a la aguja que corta una recta?]

b) Si $L = 4$, encuentre la probabilidad de que una aguja de longitud 7 corte *dos* rectas.

c) Si $2L < h \leqslant 3L$, encuentre una fórmula general para la probabilidad de que la aguja corte tres rectas.

13. Encuentre el centroide de la región encerrada por la elipse $x^2 + (x + y + 1)^2 = 1$.

9 Ecuaciones diferenciales



En la última sección de este capítulo se explora la relación entre poblaciones de presas y depredadores (tiburones y peces, pulgones y mariquitas, lobos y conejos) mediante pares de ecuaciones diferenciales.

© Ciurzynski / Shutterstock

Tal vez la más importante de todas las aplicaciones del cálculo está en las ecuaciones diferenciales. Cuando los físicos o los científicos que se ocupan de las ciencias sociales utilizan el cálculo, con frecuencia lo hacen para analizar una ecuación diferencial que ha aparecido en el proceso de modelado de algún fenómeno que están estudiando. Aun cuando a veces es imposible hallar una fórmula explícita para la solución de una ecuación diferencial, veremos que hay métodos gráficos y numéricos que aportan la información necesaria.

9.1 Modelado con ecuaciones diferenciales

Ahora es un buen momento para leer (o volver a leer) la discusión de un modelo matemático en la página 24.

Al describir el proceso de modelado en la sección 1.2, se habló acerca de la formulación de un modelo matemático de un problema del mundo real, ya sea por razonamiento intuitivo acerca del fenómeno o de una ley física en función de la evidencia experimental. El modelo matemático con frecuencia toma la forma de una *ecuación diferencial*, es decir, una ecuación que contiene una función desconocida y algunas de sus derivadas. Esto no es sorprendente, porque en el problema del mundo real, es común observar que ocurran cambios y se desea predecir el comportamiento futuro respecto a cómo cambian los valores actuales. Comenzamos por examinar varios ejemplos de cómo surgen las ecuaciones diferenciales cuando se modelan fenómenos físicos.

Modelos de crecimiento poblacional

Un modelo para el crecimiento de una población se basa en asumir que la población crece en una cantidad proporcional al tamaño de la población. Ésa es una suposición razonable para una población de bacterias o animales en condiciones ideales (ambiente ilimitado, nutrición adecuada, ausencia de depredadores, inmunidad a enfermedad).

Identifiquemos y denotemos las variables en este modelo:

t = tiempo (la variable independiente)

P = número de individuos en la población (la variable dependiente)

La rapidez de crecimiento de la población es la derivada dP/dt. Así que la suposición de que la rapidez de crecimiento de la población es proporcional al tamaño de la población, se escribe como la ecuación

$$\frac{dP}{dt} = kP \tag{1}$$

donde k es la constante de proporcionalidad. La ecuación 1 es nuestro primer modelo para el crecimiento poblacional; es una ecuación diferencial porque contiene una función desconocida P y su derivada dP/dt.

Una vez formulado un modelo, se consideran sus consecuencias. Si se descarta una población de 0, entonces $P(t) > 0$ para toda t. Así, si $k > 0$, entonces la ecuación 1 muestra que $P'(t) > 0$ para toda t. Esto significa que la población siempre está creciendo. De hecho, cuando crece $P(t)$ la ecuación 1 muestra que dP/dt se vuelve más grande. En otras palabras, la rapidez de crecimiento se incrementa cuando crece la población.

Tratemos de pensar en una solución para la ecuación 1. La ecuación nos pide hallar una función cuya derivada sea un múltiplo constante de sí misma. Sabemos del capítulo 3 que las funciones exponenciales tienen esa propiedad. De hecho, si establecemos $P(t) = Ce^{kt}$, entonces

$$P'(t) = C(ke^{kt}) = k(Ce^{kt}) = kP(t)$$

Así, cualquier función exponencial de la forma $P(t) = Ce^{kt}$ es una solución de la ecuación 1. En la sección 9.4 veremos que no hay otra solución.

Si C es un número real, se obtiene la *familia* de soluciones $P(t) = Ce^{kt}$ cuyas gráficas se muestran en la figura 1. Pero las poblaciones tienen sólo valores positivos y, por lo tanto, se está interesado sólo en soluciones con $C > 0$. Y probablemente se tiene interés

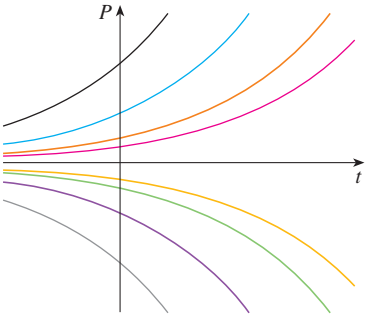


FIGURA 1
La familia de soluciones de $dP/dt = kP$

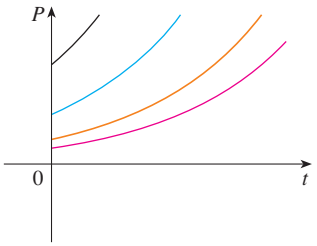


FIGURA 2
La familia de soluciones $P(t) = Ce^{kt}$ con $C > 0$ y $t \geqslant 0$

sólo en valores de t mayores que el tiempo inicial $t = 0$. En la figura 2 se muestran las soluciones con significado físico. Si se escribe $t = 0$, se obtiene $P(0) = Ce^{k(0)} = C$, de modo que la constante C resulta ser la población inicial, $P(0)$.

La ecuación 1 es apropiada para modelar el crecimiento poblacional en condiciones ideales, pero se tiene que reconocer que un modelo más real debe reflejar el hecho de que un determinado ambiente tiene recursos limitados. Muchas poblaciones comienzan incrementándose de manera exponencial, pero la población se estabiliza cuando se aproxima a su *capacidad de soporte* M (o disminuye hacia M si alguna vez excede a M). Para que un modelo tome en cuenta ambas tendencias, se hacen dos suposiciones:

- $\dfrac{dP}{dt} \approx kP$ si P es pequeña (al inicio, la rapidez de crecimiento es proporcional)
- $\dfrac{dP}{dt} < 0$ si $P > M$ (P disminuye si nunca excede a M)

Una expresión simple que incorpora ambas suposiciones es la siguiente ecuación

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right) \tag{2}$$

Observe que si P es pequeña en comparación con M, entonces P/M se aproxima a 0 y, por lo tanto, $dP/dt \approx kP$. *Si* $P > M$, entonces $1 - P/M$ es negativa y, por tanto, $dP/dt < 0$.

La ecuación 2 se llama *ecuación diferencial logística*, y la propuso el biólogo matemático holandés Pierre-François Verhulst en la década de 1840 como un modelo para el crecimiento poblacional mundial. En la sección 9.4 se desarrollarán técnicas que permiten hallar soluciones explícitas de la ecuación logística, pero por ahora se pueden deducir características cualitativas de las soluciones directamente de la ecuación 2. Primero observaremos que las funciones constantes $P(t) = 0$ y $P(t) = M$ son soluciones porque, en cualquier caso, uno de los factores del lado derecho de la ecuación 2 es cero. (Esto sin duda tiene sentido físico: si la población es alguna vez 0 o está a la capacidad de soporte, permanece así.) Estas dos soluciones constantes se llaman *soluciones de equilibrio*.

Si la población inicial $P(0)$ está entre 0 y M, entonces el lado derecho de la ecuación 2 es positivo, por lo tanto $dP/dt > 0$ y la población crece. Pero si la población rebasa la capacidad de soporte ($P > M$), entonces $1 - P/M$ es negativa, así que $dP/dt < 0$ y la población decrece. Observe que, en cualquier caso, si la población tiende a la capacidad de soporte ($P \to M$), entonces $dP/dt \to 0$, lo que significa que la población se estabiliza. Así que se espera que las soluciones de la ecuación diferencial logística tengan gráficas que se parecen a las de la figura 3. Observe que las gráficas se alejan de la solución de equilibrio $P = 0$ y se mueven hacia la solución de equilibrio $P = M$.

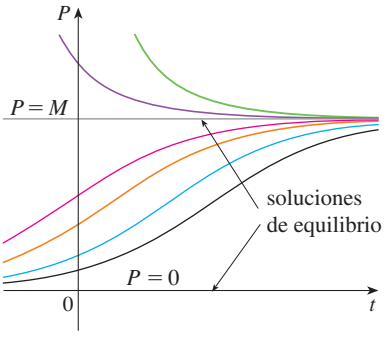


FIGURA 3
Soluciones de la ecuación logística

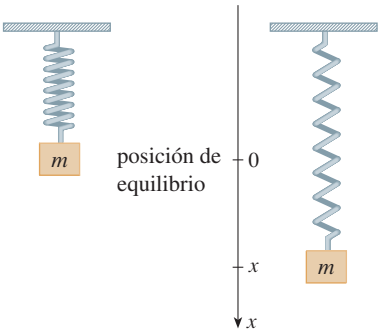


FIGURA 4

Modelo para el movimiento de un resorte

Ahora se examina un ejemplo de un modelo de las ciencias físicas. Consideraremos el movimiento de un objeto con masa m sujeto en el extremo de un resorte vertical (como en la figura 4). En la sección 6.4 se analizó la ley de Hooke que establece que si un resorte se estira (o comprime) x unidades desde su longitud natural, entonces ejerce una fuerza que es proporcional a x:

$$\text{Fuerza de restauración} = -kx$$

donde k es una constante positiva (llamada *constante del resorte*). Si se ignoran las fuerzas de resistencia externas (debidas a la resistencia del aire o la fricción) entonces, por la segunda ley de Newton (fuerza es igual a masa por aceleración), se tiene

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \tag{3}$$

Éste es un ejemplo de lo que se llama una *ecuación diferencial de segundo orden* porque involucra segundas derivadas. Veamos qué se puede conjeturar acerca de la forma de la solución directamente de la ecuación. Podemos reescribir la ecuación 3 en la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

que dice que la segunda derivada de x es proporcional a x pero tiene signo opuesto. Se conocen dos funciones con esta propiedad, las funciones seno y coseno. De hecho, resulta que todas las soluciones de la ecuación 3 pueden escribirse como combinaciones de ciertas funciones seno y coseno (véase el ejercicio 4). Esto no es sorprendente; se espera que el resorte oscile respecto a su posición de equilibrio y, por tanto, es natural pensar que están involucradas las funciones trigonométricas.

Ecuaciones diferenciales generales

En general, una **ecuación diferencial** es una ecuación que contiene una función desconocida y una o más de sus derivadas. El **orden** de la ecuación diferencial es el de la mayor de las derivadas que aparecen en la ecuación. Así, las ecuaciones 1 y 2 son de primer orden, y la ecuación 3 es de segundo. En las tres ecuaciones, la variable independiente se llama t y representa el tiempo, pero en general la variable independiente no tiene que representar tiempo. Por ejemplo, cuando se considera la ecuación diferencial

$$y' = xy \tag{4}$$

se entiende que y es una función desconocida de x.

Una función f se llama **solución** de una ecuación diferencial si la ecuación se satisface cuando $y = f(x)$ y sus derivadas se sustituyen en la ecuación. Así, f es una solución de la ecuación 4 si

$$f'(x) = xf(x)$$

para todos los valores de x en algún intervalo.

Cuando se pide *resolver* una ecuación diferencial, se espera hallar las posibles soluciones de la ecuación. Ya se han resuelto algunas ecuaciones diferenciales particularmente simples, a saber, aquellas de la forma

$$y' = f(x)$$

Por ejemplo, sabemos que la solución general de la ecuación diferencial

$$y' = x^3$$

está dada por

$$y = \frac{x^4}{4} + C$$

donde C es una constante arbitraria.

Pero, en general, resolver una ecuación diferencial no es una tarea fácil. No hay técnica sistemática que permita resolver todas las ecuaciones diferenciales. Sin embargo, en la sección 9.2 se verá cómo dibujar gráficas aproximadas de soluciones aun cuando no se tiene fórmula explícita. También se aprenderá cómo hallar aproximaciones numéricas a soluciones.

V EJEMPLO 1 Demuestre que cualquier miembro de la familia de funciones

$$y = \frac{1 + ce^t}{1 - ce^t}$$

es una solución de la ecuación diferencial $y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$.

SOLUCIÓN Utilizamos la regla del cociente para derivar la expresión para y:

$$y' = \frac{(1 - ce^t)(ce^t) - (1 + ce^t)(-ce^t)}{(1 - ce^t)^2}$$

$$= \frac{ce^t - c^2e^{2t} + ce^t + c^2e^{2t}}{(1 - ce^t)^2} = \frac{2ce^t}{(1 - ce^t)^2}$$

El lado derecho de la ecuación diferencial se convierte en

$$\tfrac{1}{2}(y^2 - 1) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1 + ce^t}{1 - ce^t}\right)^2 - 1\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(1 + ce^t)^2 - (1 - ce^t)^2}{(1 - ce^t)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{4ce^t}{(1 - ce^t)^2} = \frac{2ce^t}{(1 - ce^t)^2}$$

Por tanto, para todo valor de c, la función dada es una solución de la ecuación diferencial.

En la figura 5 se muestran las gráficas de siete miembros de la familia del ejemplo 1. La ecuación diferencial muestra que si $y \approx \pm 1$, entonces $y' \approx 0$. Esto se confirma por lo alisado de las gráficas cerca de $y = 1$ y $y = -1$.

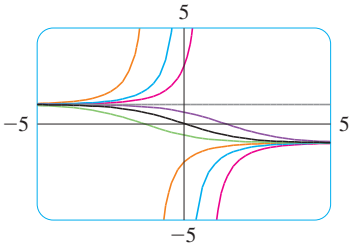


FIGURA 5

Al aplicar ecuaciones diferenciales, normalmente no se está tan interesado en hallar una familia de soluciones (la *solución general*) como en determinar una solución que satisfaga algún requerimiento adicional. En muchos problemas físicos se requiere hallar la solución particular que satisface una condición de la forma $y(t_0) = y_0$. Ésta se llama **condición inicial**, y el problema de hallar una solución de la ecuación diferencial que satisface la condición inicial se llama **problema con valores iniciales**.

Desde el punto de vista geométrico, cuando se impone una condición inicial, buscamos en la familia de curvas solución una que pase por el punto (t_0, y_0). Físicamente, esto corresponde a medir el estado de un sistema en el tiempo t_0 y usar la solución del problema con valor inicial para predecir el futuro comportamiento del sistema.

V EJEMPLO 2 Encuentre una solución de la ecuación diferencial $y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$ que satisface la condición inicial $y(0) = 2$.

SOLUCIÓN Al sustituir los valores $t = 0$ y $y = 2$ en la fórmula

$$y = \frac{1 + ce^t}{1 - ce^t}$$

del ejemplo 1, se obtiene

$$2 = \frac{1 + ce^0}{1 - ce^0} = \frac{1 + c}{1 - c}$$

Si esta ecuación se resuelve para c, se obtiene $2 - 2c = 1 + c$, que da $c = \frac{1}{3}$. Por tanto, la solución del problema con valores iniciales es

$$y = \frac{1 + \frac{1}{3}e^t}{1 - \frac{1}{3}e^t} = \frac{3 + e^t}{3 - e^t}$$

9.1 Ejercicios

1. Demuestre que $y = \frac{2}{3}e^x + e^{-2x}$ es una solución de la ecuación diferencial $y' + 2y = 2e^x$.

2. Compruebe que $y = -t \cos t - t$ es una solución del problema con valores iniciales

$$t\frac{dy}{dt} = y + t^2 \operatorname{sen} t \qquad y(\pi) = 0$$

3. a) ¿Para qué valores de r la función $y = e^{rx}$ satisface la ecuación diferencial $2y'' + y' - y = 0$?
b) Si r_1 y r_2 son los valores de r que encontró en el inciso a), demuestre que todo integrante de la familia de funciones $y = ae^{r_1 x} + be^{r_2 x}$ también es una solución.

4. a) ¿Para qué valores de k la función $y = \cos kt$ satisface la ecuación diferencial $4y'' = -25y$?
b) Para esos valores de k, verifique que cualquier integrante de la familia de las funciones $y = A \operatorname{sen} kt + B \cos kt$ también es una solución.

5. ¿Cuáles de las siguientes funciones son soluciones de la ecuación diferencial $y'' + y = \operatorname{sen} x$?
a) $y = \operatorname{sen} x$ b) $y = \cos x$
c) $y = \frac{1}{2}x \operatorname{sen} x$ d) $y = -\frac{1}{2}x \cos x$

6. a) Demuestre que cualquier integrante de la familia de funciones $y = (\ln x + C)/x$ es una solución de la ecuación diferencial $x^2y' + xy = 1$.
b) Ilustre el inciso a) graficando diferentes miembros de la familia de soluciones en una pantalla común.
c) Encuentre una solución de la ecuación diferencial que satisface la condición inicial $y(1) = 2$.
d) Determine una solución de la ecuación diferencial que satisface la condición inicial $y(2) = 1$.

7. a) ¿Qué puede decir acerca de una solución de la ecuación $y' = -y^2$ con sólo observar la ecuación diferencial?
b) Compruebe que todos los miembros de la familia $y = 1/(x + C)$ son soluciones de la ecuación del inciso a).
c) ¿Puede pensar en una solución de la ecuación diferencial $y' = -y^2$ que no sea un miembro de la familia del inciso b)?
d) Encuentre una solución del problema con valores iniciales

$$y' = -y^2 \qquad y(0) = 0.5$$

8. a) ¿Qué se puede decir acerca de la gráfica de una solución de la ecuación $y' = xy^3$ cuando x es cercana a 0? ¿Qué pasa si x es grande?
b) Compruebe que todos los miembros de la familia $y = (c - x^2)^{-1/2}$ son soluciones de la ecuación diferencial $y' = xy^3$.
c) Grafique varios miembros de la familia de soluciones en una pantalla común. ¿Las gráficas confirman lo que predijo en el inciso a)?
d) Encuentre una solución del problema con valores iniciales.

$$y' = xy^3 \qquad y(0) = 2$$

9. Una población se modela mediante una ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = 1.2P\left(1 - \frac{P}{4200}\right)$$

a) ¿Para qué valores de P la población es creciente?
b) ¿Para qué valores de P la población es decreciente?
c) ¿Cuáles son las soluciones de equilibrio?

10. Una función $y(t)$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = y^4 - 6y^3 + 5y^2$$

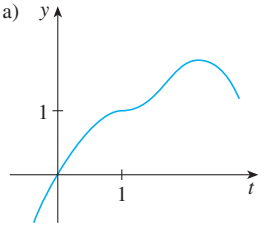
a) ¿Cuáles son las soluciones constantes de la ecuación?

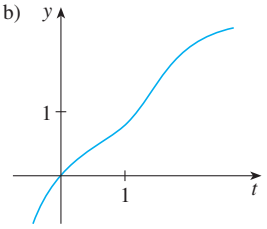
Se requiere calculadora graficadora o computadora **1.** Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

b) ¿Para qué valores de y es y creciente?
c) ¿Para qué valores de y es y decreciente?

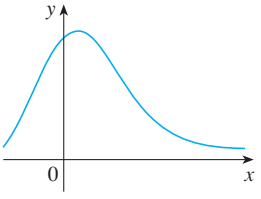
11. Explique por qué las funciones con las gráficas dadas *no pueden* ser soluciones de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = e^t(y-1)^2$$

a)


b)


12. La función de la gráfica dada es una solución de una de las siguientes ecuaciones diferenciales. Decida cuál es la ecuación correcta y justifique su respuesta.

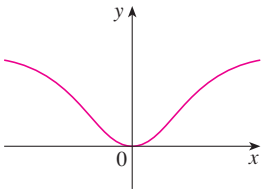


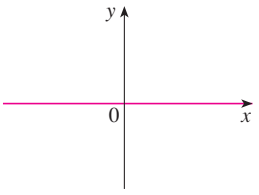
A. $y' = 1 + xy$ **B.** $y' = -2xy$ **C.** $y' = 1 - 2xy$

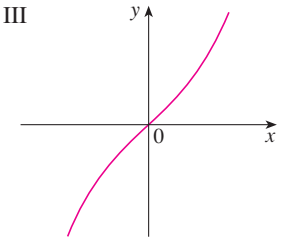
13. Relacione las siguientes ecuaciones diferenciales con las gráficas solución I-IV. Argumente sus elecciones.

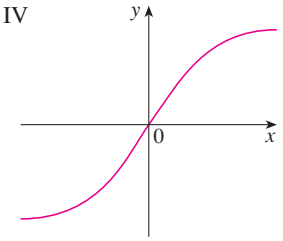
a) $y' = 1 + x^2 + y^2$ b) $y' = xe^{-x^2-y^2}$

c) $y' = \dfrac{1}{1 + e^{x^2+y^2}}$ d) $y' = \operatorname{sen}(xy)\cos(xy)$

I


II


III


IV


14. Suponga que se sirve una taza de café recién preparado con temperatura de 95 °C en una habitación donde la temperatura es de 20 °C.
a) ¿Cuándo considera que el café se enfría con más rapidez? ¿Qué sucede con la rapidez de enfriamiento a medida que pasa el tiempo? Explique.
b) La ley de Newton del enfriamiento establece que la rapidez de enfriamiento de un objeto es proporcional a la diferencia de temperatura entre el objeto y el medio ambiente, siempre que esta diferencia no sea muy grande. Escriba una ecuación diferencial que exprese la ley de Newton del enfriamiento para esta situación particular. ¿Cuál es la condición inicial? En vista de su respuesta al inciso a), ¿considera que esta ecuación diferencial es un modelo apropiado para el enfriamiento?
c) Elabore un bosquejo aproximado de la gráfica de la solución del problema con valores iniciales del inciso b).

15. Los psicólogos interesados en teoría de aprendizaje estudian **curvas de aprendizaje**. Una curva de aprendizaje es la gráfica de una función $P(t)$, el desempeño de alguien que aprende una habilidad como una función del tiempo de capacitación t. La derivada dP/dt representa la rapidez a la que mejora el desempeño.
a) ¿Cuándo considera que P se incrementa con más rapidez? ¿Qué sucede con dP/dt cuando t crece? Explique.
b) Si M es el nivel máximo de desempeño del cual es capaz el alumno, explique por qué la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = k(M - P) \qquad k \text{ es una constante positiva}$$

es un modelo razonable para el aprendizaje.
c) Proponga un bosquejo aproximado de una posible solución de esta ecuación diferencial.

9.2 Campos direccionales y método de Euler

Desafortunadamente, es imposible resolver la mayoría de las ecuaciones diferenciales en términos de una fórmula explícita para la solución. En esta sección se muestra que, a pesar de la ausencia de una solución explícita, aún se puede aprender mucho acerca de la solución por un método gráfico (campos direccionales) o método numérico (método de Euler).

Campos direccionales

Suponga que se le pide bosquejar la gráfica de la solución del problema con valores iniciales

$$y' = x + y \qquad y(0) = 1$$

No se conoce una fórmula para la solución, así que ¿cómo puede bosquejar su gráfica? Considere lo que significa la ecuación diferencial. La ecuación $y' = x + y$ indica que la pendiente en cualquier punto (x, y) sobre la gráfica (llamada *curva solución*) es igual a la suma de las coordenadas x y y del punto (véase figura 1). En particular, debido a que la curva pasa por el punto (0, 1), su pendiente ahí debe ser $0 + 1 = 1$. Así, una pequeña porción de la curva solución cerca del punto (0, 1) tiene la apariencia de un corto segmento de recta que pasa por (0, 1) con pendiente 1 (véase figura 2).

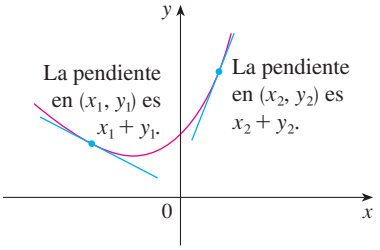


FIGURA 1
La solución de $y' = x + y$

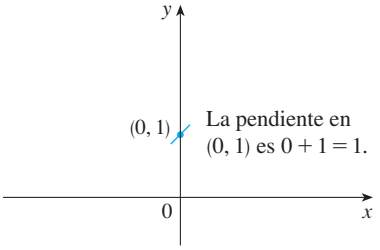


FIGURA 2
Comienzo de la curva solución que pasa por (0, 1)

Como una guía para bosquejar el resto de la curva, se dibujan cortos segmentos de recta en varios puntos (x, y) con pendiente $x + y$. El resultado se llama *campo direccional* y se muestra en la figura 3. Por ejemplo, el segmento de recta en el punto (1, 2) tiene pendiente $1 + 2 = 3$. El campo direccional permite ver la forma general de las curvas solución indicando la dirección en que proceden las curvas en cada punto.

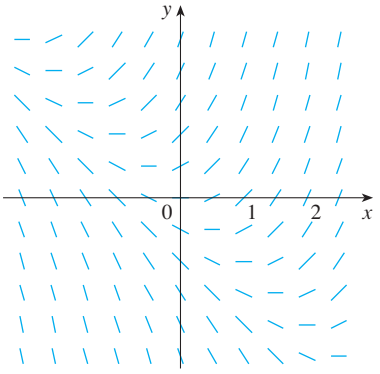


FIGURA 3
Campo direccional para $y' = x + y$

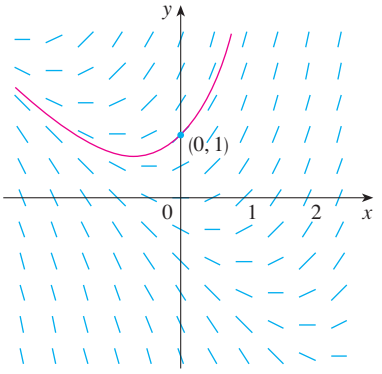


FIGURA 4
Curva solución a través de (0, 1)

Ahora se puede bosquejar la curva solución a través del punto (0, 1) siguiendo el campo direccional como en la figura 4. Observe que se ha dibujado la curva para que sea paralela a segmentos de recta cercanos.

En general, suponga que se tiene una ecuación diferencial de primer orden de la forma

$$y' = F(x, y)$$

donde $F(x, y)$ es alguna expresión en x y y. La ecuación diferencial dice que la pendiente de una curva solución en un punto (x, y) sobre la curva es $F(x, y)$. Si se dibujan segmentos cortos de recta con pendiente $F(x, y)$ en varios puntos (x, y), el resultado se llama **campo direccional** (o **campo de pendientes**). Estos segmentos de recta indican la dirección en que apunta una curva solución, así que el campo direccional ayuda a ver la forma general de estas curvas.

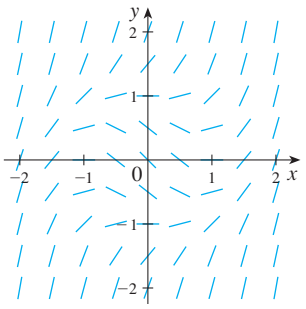


FIGURA 5

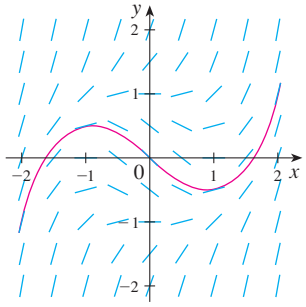


FIGURA 6

V EJEMPLO 1

a) Bosqueje el campo direccional para la ecuación diferencial $y' = x^2 + y^2 - 1$.
b) Use el inciso a) para bosquejar la curva solución que pasa por el origen.

SOLUCIÓN

a) Se empieza por calcular la pendiente en varios puntos en la tabla siguiente:

x	-2	-1	0	1	2	-2	-1	0	1	2	. . .
y	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	. . .
$y' = x^2 + y^2 - 1$	3	0	-1	0	3	4	1	0	1	4	. . .

Ahora se dibujan cortos segmentos de recta con estas pendientes en estos puntos. El resultado es el campo direccional de la figura 5.

b) Empezamos en el origen y nos movemos a la derecha en la dirección del segmento de recta (cuya pendiente es -1). Continuamos con el trazo de la curva solución de modo que se mueva paralela a los segmentos de recta cercanos. La curva solución resultante se muestra en la figura 6. Volviendo al origen, se dibuja también la curva solución a la izquierda.

Mientras más segmentos de recta se dibujen en un campo direccional, más clara se vuelve la ilustración. Por supuesto, es tedioso calcular pendientes y dibujar segmentos de recta para un enorme número de puntos a mano, pero las calculadoras son muy adecuadas para esta tarea. En la figura 7 se muestra un campo direccional más detallado dibujado por computadora para la ecuación diferencial del ejemplo 1. Permite dibujar, con razonable exactitud, las curvas solución mostradas en la figura 8 con intersecciones en y, -2, -1, 0, 1 y 2.

TEC Module 9.2A muestra campos direccionales y las curvas solución para varias ecuaciones diferenciales.

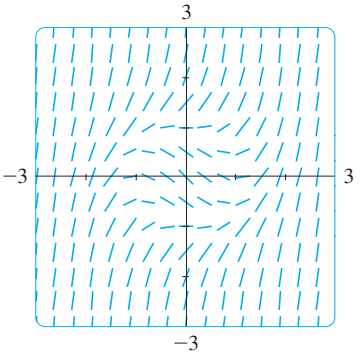


FIGURA 7

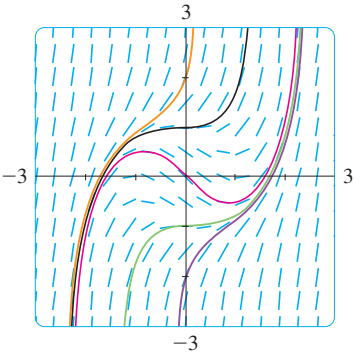


FIGURA 8

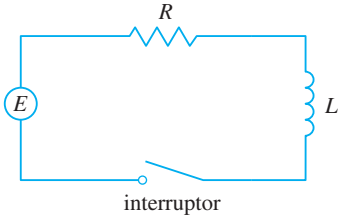


FIGURA 9

Ahora veremos cómo los campos direccionales dan una idea de las situaciones físicas. El circuito eléctrico simple mostrado en la figura 9 contiene una fuerza electromotriz (por lo común una batería o generador) que produce un voltaje de $E(t)$ volts (V) y una corriente de $I(t)$ amperes (A) en el tiempo t. El circuito también contiene un resistor con una resistencia de R ohms (Ω) y un inductor con una inductancia de L henrios (H).

La ley de Ohm da la caída de voltaje debida al resistor como RI. La caída de voltaje debida al inductor es $L(dI/dt)$. Una de las leyes de Kirchhoff dice que la suma de las caídas de voltaje es igual al voltaje suministrado $E(t)$. Así, se tiene

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t) \qquad \boxed{1}$$

que es una ecuación diferencial de primer orden que modela la corriente I en el tiempo t.

V EJEMPLO 2 Considere que en el circuito simple de la figura 9 la resistencia es 12 Ω, la inductancia es 4 H y la batería da un voltaje constante de 60 V.

a) Dibuje un campo direccional para la ecuación 1 con estos valores.

b) ¿Qué se puede decir acerca del valor límite de la corriente?

c) Identifique las soluciones de equilibrio.

d) Si el interruptor está cerrado cuando $t = 0$ de modo que la corriente empieza con $I(0) = 0$, use el campo direccional para bosquejar la curva solución.

SOLUCIÓN

a) Si hacemos $L = 4$, $R = 12$ y $E(t) = 60$ en la ecuación 1, obtenemos

$$4\frac{dI}{dt} + 12I = 60 \qquad \text{o} \qquad \frac{dI}{dt} = 15 - 3I$$

El campo direccional para esta ecuación diferencial se muestra en la figura 10.

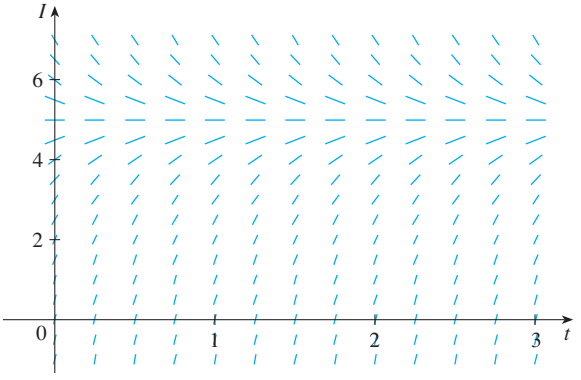


FIGURA 10

b) Del campo direccional se ve que las soluciones se aproximan al valor 5 A, es decir,

$$\lim_{t \to \infty} I(t) = 5$$

c) En la función constante $I(t) = 5$ se ve que es una solución de equilibrio. De hecho, esto se puede comprobar de manera directa a partir de la ecuación diferencial $dI/dt = 15 - 3I$. Si $I(t) = 5$, entonces el lado izquierdo es $dI/dt = 0$ y el lado derecho es $15 - 3(5) = 0$.

d) Usamos el campo direccional para bosquejar la curva solución que pasa por (0, 0), como se muestra en color rojo en la figura 11.

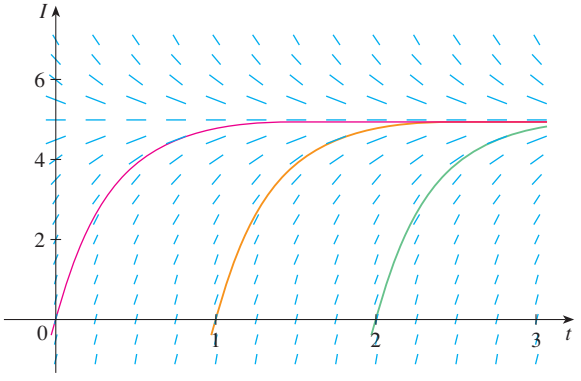


FIGURA 11

Observe en la figura 10 que los segmentos de recta a lo largo de cualquier recta horizontal son paralelos. Eso es porque la variable independiente t no aparece del lado

derecho de la ecuación $I' = 15 - 3I$. En general, una ecuación diferencial de la forma

$$y' = f(y)$$

en la que falta la variable independiente en el lado derecho, se llama **autónoma**. Para tal ecuación, las pendientes correspondientes a dos puntos distintos con la misma coordenada y deben ser iguales. Esto significa que si se conoce una solución para una ecuación diferencial autónoma, entonces se puede obtener infinitamente muchas otras desplazando sólo la gráfica de la ecuación conocida a la derecha o a la izquierda. En la figura 11 se han mostrado las soluciones que resultan de desplazar la curva solución del ejemplo 2 una o dos unidades de tiempo (a saber, segundos) a la derecha. Corresponden a cerrar el interruptor cuando $t = 1$ o $t = 2$.

Método de Euler

La idea básica detrás de los campos direccionales se puede usar para hallar aproximaciones numéricas a soluciones de ecuaciones diferenciales. Se ilustra el método en el problema con valor inicial que se empleó para introducir campos direccionales:

$$y' = x + y \qquad y(0) = 1$$

La ecuación diferencial dice que $y'(0) = 0 + 1 = 1$, así que la curva solución en el punto $(0, 1)$ tiene pendiente 1. Como una primera aproximación a la solución se podría usar la aproximación lineal $L(x) = x + 1$. En otras palabras, se podría usar la recta tangente en $(0, 1)$ como aproximación a la curva solución (véase figura 12).

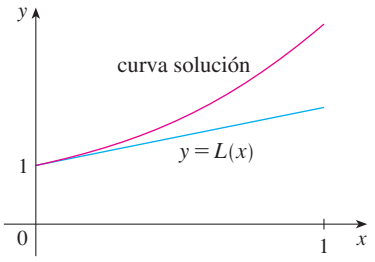


FIGURA 12
Primera aproximación de Euler

La idea de Euler era mejorar esta aproximación procediendo sólo una corta distancia a lo largo de esta recta tangente y luego hacer una corrección a mitad de curso cambiando la dirección como indica el campo direccional. En la figura 13 se muestra lo que sucede si se comienza a lo largo de la recta tangente pero se detiene cuando $x = 0.5$. (Esta distancia horizontal recorrida se llama *tamaño de paso*.) Puesto que $L(0.5) \approx 1.5$, se tiene $y(0.5) \approx 1.5$ y se toma $(0.5, 1.5)$ como el punto de partida para un nuevo segmento de recta. La ecuación diferencial indica que $y'(0.5) = 0.5 + 1.5 = 2$, de modo que se usa la función lineal

$$y = 1.5 + 2(x - 0.5) = 2x + 0.5$$

como una aproximación a la solución para $x > 0.5$ (el segmento verde en la figura 13). Si se reduce el tamaño de paso de 0.5 a 0.25, se obtiene una mejor aproximación de Euler mostrada en la figura 14.

Euler

Leonhard Euler (1707-1783) fue el principal matemático de mediados del siglo XVIII y el más prolífico de todos los tiempos. Nació en Suiza pero pasó casi toda su carrera en las academias de ciencias apoyadas por Catalina la Grande en San Petersburgo y Federico el Grande en Berlín. Las obras de colección de Euler llenan cerca de 100 grandes volúmenes. Como dijo el físico francés Arago, "Euler calculaba sin aparente esfuerzo como los hombres respiran o como las águilas se sostienen en el aire". Los cálculos y escritos de Euler no disminuyeron por cuidar de sus 13 hijos ni estar totalmente ciego los últimos 17 años de su vida. De hecho, ya ciego, dictaba sus descubrimientos a sus ayudantes gracias a su prodigiosa memoria e imaginación. Sus tratados de cálculo y de casi todos los otros temas de matemáticas fueron guía para la instrucción en matemáticas, y la ecuación $e^{i\pi} + 1 = 0$ que él descubrió reúne los cinco números más famosos de todas las matemáticas.

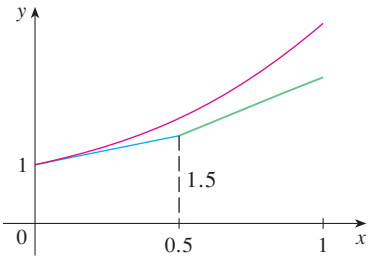


FIGURA 13
Aproximación de Euler con tamaño de paso 0.5

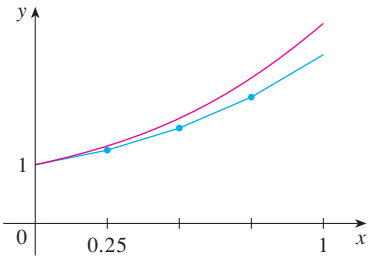


FIGURA 14
Aproximación de Euler con tamaño de paso 0.25

En general, el método de Euler propone empezar en el punto dado por el valor inicial y avanzar en la dirección indicada por el campo direccional. Deténgase después de un corto tiempo, examine la pendiente en la nueva ubicación y avance en esta dirección. Continúe deteniéndose y cambiando la dirección de acuerdo con el campo direccional. El método de Euler no produce la solución exacta para un problema con valor inicial, da aproximaciones. Pero al disminuir el tamaño de paso (y por tanto se incrementa el número de las correcciones de mitad de curso), se obtienen aproximaciones cada vez mejores a la solución exacta. (Compare las figuras 12, 13 y 14.)

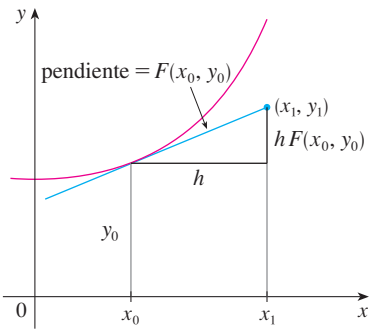


FIGURA 15

Para el problema general con valores iniciales de primer orden $y' = F(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, nuestro objetivo es encontrar valores aproximados para la solución en números igualmente espaciados x_0, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_1 + h, \ldots$, donde h es el tamaño de paso. La ecuación diferencial nos dice que la pendiente en (x_0, y_0) es $y' = F(x_0, y_0)$, de modo que la figura 15 muestra que el valor aproximado de la solución cuando $x = x_1$ es

$$y_1 = y_0 + hF(x_0, y_0)$$

De manera similar,

$$y_2 = y_1 + hF(x_1, y_1)$$

En general,

$$y_n = y_{n-1} + hF(x_{n-1}, y_{n-1})$$

Método de Euler Los valores aproximados para la solución del problema con valor inicial $y' = F(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, con tamaño de paso h, en $x_n = x_{n-1} + h$, son

$$y_n = y_{n-1} + hF(x_{n-1}, y_{n-1}) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

EJEMPLO 3 Use el método de Euler con tamaño de paso 0.1 para construir una tabla de valores aproximados de la solución del problema con valor inicial

$$y' = x + y \qquad y(0) = 1$$

SOLUCIÓN Se tiene que $h = 0.1$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ y $F(x, y) = x + y$. Así que tenemos

$$y_1 = y_0 + hF(x_0, y_0) = 1 + 0.1(0 + 1) = 1.1$$

$$y_2 = y_1 + hF(x_1, y_1) = 1.1 + 0.1(0.1 + 1.1) = 1.22$$

$$y_3 = y_2 + hF(x_2, y_2) = 1.22 + 0.1(0.2 + 1.22) = 1.362$$

Esto significa que si $y(x)$ es la solución exacta, entonces $y(0.3) \approx 1.362$.

Procediendo con cálculos similares, se obtienen los valores de la tabla:

n	x_n	y_n	n	x_n	y_n
1	0.1	1.100000	6	0.6	1.943122
2	0.2	1.220000	7	0.7	2.197434
3	0.3	1.362000	8	0.8	2.487178
4	0.4	1.528200	9	0.9	2.815895
5	0.5	1.721020	10	1.0	3.187485

TEC Module 9.2B muestra cómo funciona el método de Euler desde el punto de vista numérico y visual para diversas ecuaciones diferenciales y tamaños de paso.

Para una tabla más exacta de valores del ejemplo 3, se podría disminuir el tamaño de paso. Pero para un gran número de pasos pequeños, la cantidad de cálculos es considerable y, por tanto, se requiere programar una calculadora o computadora para realizarlos. En la siguiente tabla se muestran los resultados de aplicar el método de Euler con tamaño de paso decreciente al problema con valor inicial del ejemplo 3.

Tamaño de paso	Estimación de Euler de $y(0.5)$	Estimación de Euler de $y(1)$
0.500	1.500000	2.500000
0.250	1.625000	2.882813
0.100	1.721020	3.187485
0.050	1.757789	3.306595
0.020	1.781212	3.383176
0.010	1.789264	3.409628
0.005	1.793337	3.423034
0.001	1.796619	3.433848

Los paquetes de software que producen soluciones numéricas a ecuaciones diferenciales son refinaciones del método de Euler. Aunque el método de Euler es simple y no es preciso, se trata de la idea básica de la cual parten métodos más precisos.

Observe que las estimaciones de Euler en la tabla al parecer son límites de aproximación, es decir, los valores verdaderos de $y(0.5)$ y $y(1)$. En la figura 16 se muestran las gráficas de las aproximaciones de Euler con tamaños de paso 0.5, 0.25, 0.1, 0.05, 0.02, 0.01 y 0.005. Cuando el tamaño de paso h se aproxima a 0, la tendencia es hacia la curva solución exacta.

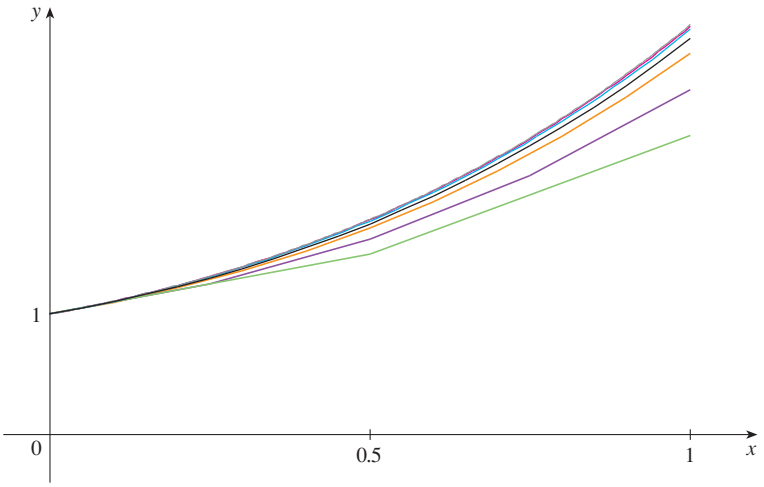


FIGURA 16
Aproximaciones de Euler que tienden a la solución exacta

V EJEMPLO 4 En el ejemplo 2 se examinó un circuito eléctrico simple con resistencia 12 Ω, inductancia de 4 H y una batería con voltaje de 60 V. Si el interruptor está cerrado cuando $t = 0$, se modela la corriente I en el tiempo t mediante el problema con valor inicial

$$\frac{dI}{dt} = 15 - 3I \qquad I(0) = 0$$

Estime la corriente en el circuito medio segundo después de que se cierra el interruptor.

SOLUCIÓN Usamos el método de Euler con $F(t, I) = 15 - 3I$, $t_0 = 0$, $I_0 = 0$ y tamaño de paso $h = 0.1$ segundo:

$$I_1 = 0 + 0.1(15 - 3 \cdot 0) = 1.5$$

$$I_2 = 1.5 + 0.1(15 - 3 \cdot 1.5) = 2.55$$

$$I_3 = 2.55 + 0.1(15 - 3 \cdot 2.55) = 3.285$$

$$I_4 = 3.285 + 0.1(15 - 3 \cdot 3.285) = 3.7995$$

$$I_5 = 3.7995 + 0.1(15 - 3 \cdot 3.7995) = 4.15965$$

Así que la corriente después de 0.5 s es

$$I(0.5) \approx 4.16 \text{ A}$$

9.2 Ejercicios

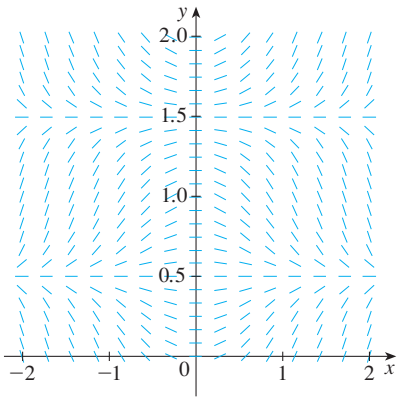
1. Se muestra un campo direccional para la ecuación diferencial $y' = x \cos \pi y$.

a) Bosqueje las gráficas de las soluciones que satisfacen las condiciones iniciales dadas.

i) $y(0) = 0$ ii) $y(0) = 0.5$

iii) $y(0) = 1$ iv) $y(0) = 1.6$

b) Encuentre todas las soluciones de equilibrio.



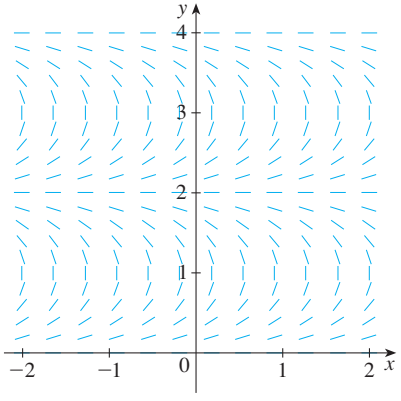
2. Se muestra un campo direccional para la ecuación diferencial $y' = \tan\left(\frac{1}{2}\pi y\right)$.

a) Bosqueje las gráficas de las soluciones que satisfacen las condiciones iniciales dadas.

i) $y(0) = 1$ ii) $y(0) = 0.2$

iii) $y(0) = 2$ iv) $y(1) = 3$

b) Encuentre todas las soluciones de equilibrio.

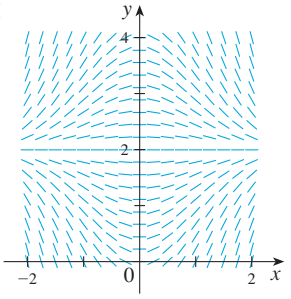


3-6 Relacione cada ecuación diferencial con su campo direccional (marcado I-IV). Dé razones para su respuesta.

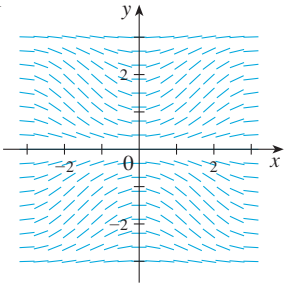
3. $y' = 2 - y$ **4.** $y' = x(2 - y)$

5. $y' = x + y - 1$ **6.** $y' = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$

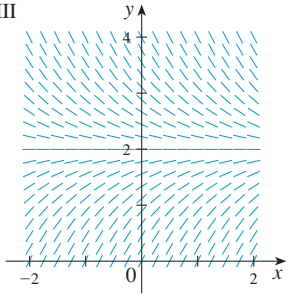
I



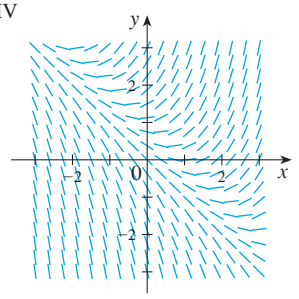
II



III



IV



7. Use el campo direccional marcado con II (arriba) para bosquejar las gráficas de las soluciones que satisfacen las condiciones iniciales dadas.

a) $y(0) = 1$ b) $y(0) = 2$ c) $y(0) = -1$

8. Utilice el campo direccional marcado con IV (de arriba) para dibujar las gráficas solución que satisfacen las condiciones iniciales que se proporcionan.

a) $y(0) = -1$ b) $y(0) = 0$ c) $y(0) = 1$

9-10 Bosqueje un campo direccional para la ecuación diferencial. Después empléelo para bosquejar tres curvas solución.

9. $y' = \frac{1}{2}y$ **10.** $y' = x - y + 1$

11-14 Bosqueje el campo direccional de la ecuación diferencial. Después utilícelo para bosquejar una curva solución que pasa por el punto dado.

11. $y' = y - 2x, \quad (1, 0)$ **12.** $y' = xy - x^2, \quad (0, 1)$

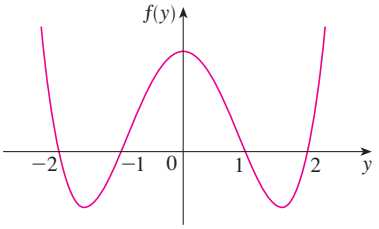
13. $y' = y + xy, \quad (0, 1)$ **14.** $y' = x + y^2, \quad (0, 0)$

SAC **15-16** Use un sistema algebraico computarizado para dibujar un campo direccional para la ecuación diferencial dada. Imprímalo y bosqueje sobre él la curva solución que pasa por (0, 1). Después use el SAC para dibujar la curva solución y compárela con su bosquejo.

15. $y' = x^2 \operatorname{sen} y$ **16.** $y' = x(y^2 - 4)$

SAC **17.** Use un sistema algebraico computarizado para trazar un campo direccional para la ecuación diferencial $y' = y^3 - 4y$. Imprímalo y trace sobre él soluciones que satisfacen la condición inicial $y(0) = c$ para varios valores de c. ¿Para qué valores de c existe $\lim_{t\to\infty} y(t)$? ¿Cuáles son los posibles valores para este límite?

18. Trace un bosquejo aproximado de un campo direccional para la ecuación diferencial autónoma $y' = f(y)$, donde la gráfica de f es como se muestra. ¿Cómo depende el comportamiento límite de las soluciones del valor de $y(0)$?

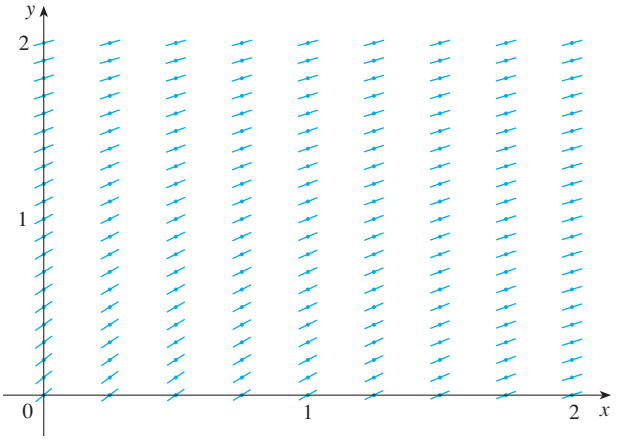


19. a) Use el método de Euler con cada uno de los siguientes tamaños de paso para estimar el valor de $y(0.4)$, donde y es la solución del problema con valores iniciales $y' = y$, $y(0) = 1$.
i) $h = 0.4$ ii) $h = 0.2$ iii) $h = 0.1$

b) Se sabe que la solución exacta del problema con valores iniciales del inciso a) es $y = e^x$. Dibuje, de la manera más exacta posible, la gráfica de $y = e^x$, $0 \leq x \leq 0.4$, junto con las aproximaciones de Euler usando el tamaño de paso del inciso a). (Sus bosquejos deben asemejarse a las figuras 12, 13 y 14.) Use sus bosquejos para decidir si sus estimaciones del inciso a) son subestimaciones o sobreestimaciones.

c) El error en el método de Euler es la diferencia entre el valor exacto y el valor aproximado. Encuentre los errores cometidos en el inciso a) al usar el método de Euler para estimar el valor verdadero de $y(0.4)$, es decir, $e^{0.4}$. ¿Qué sucede con el tamaño del error cada vez que el tamaño de paso se reduce a la mitad?

20. Se muestra un campo direccional para una ecuación diferencial. Dibuje, con una regla, las gráficas de las aproximaciones de Euler a la curva solución que pasa por el origen. Use tamaños de paso $h = 1$ y $h = 0.5$. ¿Las estimaciones de Euler serán subestimaciones o sobreestimaciones? Explique.



21. Use el método de Euler con tamaño de paso 0.5 para calcular los valores de y aproximados y_1, y_2, y_3 y y_4 de la solución del problema con valor inicial $y' = y - 2x$, $y(1) = 0$.

22. Use el método de Euler con tamaño de paso 0.2 para estimar $y(1)$, donde $y(x)$ es la solución del problema con valores iniciales $y' = xy - x^2$, $y(0) = 1$.

23. Use el método de Euler con tamaño de paso 0.1 para estimar $y(0.5)$, donde $y(x)$ es la solución del problema con valores iniciales $y' = y + xy$, $y(0) = 1$.

24. a) Use el método de Euler con tamaño de paso 0.2 para estimar $y(0.4)$, donde $y(x)$ es la solución del problema con valores iniciales $y' = x + y^2$, $y(0) = 0$.

b) Repita el inciso a) con tamaño de paso 0.1.

25. a) Programe una calculadora o computadora a fin de usar el método de Euler para calcular $y(1)$, donde $y(x)$ es la solución del problema con valores iniciales

$$\frac{dy}{dx} + 3x^2y = 6x^2 \qquad y(0) = 3$$

i) $h = 1$ ii) $h = 0.1$
iii) $h = 0.01$ iv) $h = 0.001$

b) Compruebe que $y = 2 + e^{-x^3}$ es la solución exacta de la ecuación diferencial.

c) Encuentre los errores de usar el método de Euler para calcular $y(1)$ con los tamaños de paso del inciso a). ¿Qué sucede con el error cuando se divide entre 10 el tamaño de paso?

SAC **26.** a) Programe un sistema algebraico computarizado, usando el método de Euler con tamaño de paso 0.01, para calcular $y(2)$, donde y es la solución del problema con valor inicial

$$y' = x^3 - y^3 \qquad y(0) = 1$$

b) Compruebe su trabajo por medio del SAC para dibujar la curva solución.

27. En la figura se muestra un circuito que contiene una fuerza electromotriz, un capacitor con una capacitancia de C faradios (F) y un resistor con una resistencia de R ohms (Ω). La caída de voltaje en el capacitor es Q/C, donde Q es la carga (en coulombs, C), de modo que en este caso la ley de Kirchhoff da

$$RI + \frac{Q}{C} = E(t)$$

Pero $I = dQ/dt$, así que se tiene

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

Suponga que la resistencia es 5 Ω, la capacitancia es 0.05 F y la batería da un voltaje constante de 60 V.

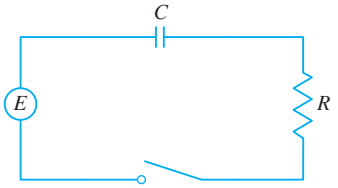
a) Dibuje un campo direccional para esta ecuación diferencial.

b) ¿Cuál es el valor límite de la carga?

c) ¿Hay una solución de equilibrio?

d) Si la carga inicial es $Q(0) = 0$ C, use el campo direccional para bosquejar la curva solución.

e) Si la carga inicial es $Q(0) = 0$ C, emplee el método de Euler con tamaño de paso 0.1 para estimar la carga después de medio segundo.



28. En el ejercicio 14 en la sección 9.1 se consideró una taza de café a 95 °C en una habitación a 20 °C. Suponga que se sabe que la taza de café se enfría a razón de 1 °C por minuto cuando su temperatura es 70 °C.

a) En este caso, ¿en qué se convierte la ecuación diferencial?

b) Bosqueje un campo direccional y utilícelo para trazar la curva solución para el problema con valores iniciales. ¿Cuál es el valor límite de la temperatura?

c) Use el método de Euler con tamaño de paso $h = 2$ minutos para estimar la temperatura del café después de 10 minutos.

9.3 Ecuaciones separables

Se han considerado ecuaciones diferenciales de primer orden desde un punto de vista geométrico (campos direccionales) y desde un punto de vista numérico (método de Euler). ¿Qué hay acerca del punto de vista simbólico? Sería bueno tener una fórmula explícita para una solución de una ecuación diferencial. Desafortunadamente, eso no siempre es posible. Pero en esta sección se examina cierto tipo de ecuación diferencial que se *puede* resolver de manera explícita.

Una **ecuación separable** es una ecuación diferencial de primer orden en que la expresión para dy/dx se puede factorizar como una función de x y una función de y. En otras palabras, se puede escribir en la forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x)f(y)$$

El nombre *separable* viene del hecho de que la expresión del lado derecho se puede "separar" en una función de x y una función de y. De manera equivalente, si $f(y) \neq 0$, se podría escribir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \qquad \boxed{1}$$

donde $h(y) = 1/f(y)$. Para resolver esta ecuación se reescribe en la forma diferencial

$$h(y)\,dy = g(x)\,dx$$

La técnica para resolver ecuaciones diferenciales separables fue utilizada primero por James Bernoulli (en 1690) para resolver un problema acerca de péndulos y por Leibniz (en una carta a Huygens en 1691). John Bernoulli explicó el método general en un documento publicado en 1694.

de modo que las y estén de un lado de la ecuación y las x estén del otro lado. Después se integran ambos lados de la ecuación:

$$\int h(y)\,dy = \int g(x)\,dx \qquad \boxed{2}$$

La ecuación 2 define y implícitamente como una función de x. En algunos casos se podría resolver para y en términos de x.

Se emplea la regla de la cadena para justificar este procedimiento: si h y g satisfacen 2, entonces

$$\frac{d}{dx}\left(\int h(y)\,dy\right) = \frac{d}{dx}\left(\int g(x)\,dx\right)$$

por tanto,

$$\frac{d}{dy}\left(\int h(y)\,dy\right)\frac{dy}{dx} = g(x)$$

y

$$h(y)\frac{dy}{dx} = g(x)$$

Así, se satisface la ecuación 1.

EJEMPLO 1

a) Resuelva la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{y^2}$.

b) Encuentre la solución de esta ecuación que satisface la condición inicial $y(0) = 2$.

SOLUCIÓN

a) Se expresa la ecuación en términos de diferenciales y se integran ambos lados:

$$y^2\,dy = x^2\,dx$$

$$\int y^2\,dy = \int x^2\,dx$$

$$\tfrac{1}{3}y^3 = \tfrac{1}{3}x^3 + C$$

donde C es una constante arbitraria. (Se podría haber usado una constante C_1 del lado izquierdo y otra constante C_2 del lado derecho. Pero luego se combinan estas dos constantes al escribir $C = C_2 - C_1$.)

Al despejar y, se obtiene

$$y = \sqrt[3]{x^3 + 3C}$$

Se podría dejar la solución de esta manera o se podría escribir en la forma

$$y = \sqrt[3]{x^3 + K}$$

donde $K = 3C$. (Puesto que C es una constante arbitraria, K también lo es.)

b) Si hacemos $x = 0$ en la solución general del inciso a), se obtiene $y(0) = \sqrt[3]{K}$. Para satisfacer la condición inicial $y(0) = 2$, se debe tener $\sqrt[3]{K} = 2$, por tanto, $K = 8$. Así, la solución del problema con valores iniciales es

$$y = \sqrt[3]{x^3 + 8}$$

La figura 1 muestra las gráficas de varios miembros de la familia de soluciones de la ecuación diferencial del ejemplo 1. La solución del problema de valor inicial del inciso b) se muestra en rojo.

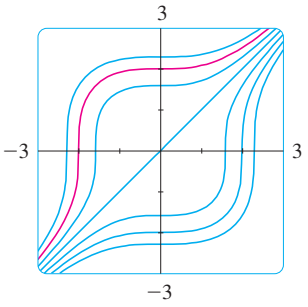


FIGURA 1

V EJEMPLO 2 Resuelva la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{6x^2}{2y + \cos y}$.

SOLUCIÓN Al escribir la ecuación en forma diferencial e integrar ambos lados, se tiene

$$(2y + \cos y)\,dy = 6x^2\,dx$$

$$\int (2y + \cos y)\,dy = \int 6x^2\,dx$$

$$y^2 + \operatorname{sen} y = 2x^3 + C \qquad 3$$

donde C es una constante. La ecuación 3 da la solución general en forma implícita. En este caso, es imposible resolver la ecuación para expresar y de forma explícita como una función de x.

Algunos sistemas algebraicos computacionales grafican curvas definidas por ecuaciones implícitas. En la figura 2 se muestran las gráficas de varios miembros de la familia de soluciones de la ecuación diferencial del ejemplo 2. Como se ve en las curvas de izquierda a derecha, los valores de C son 3, 2, 1, 0, −1, −2 y −3.

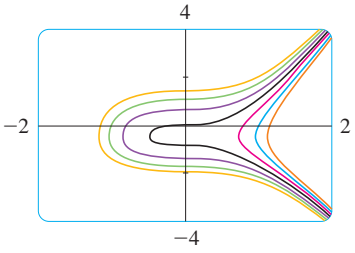


FIGURA 2

EJEMPLO 3 Resuelva la ecuación $y' = x^2 y$.

SOLUCIÓN Primero se reescribe la ecuación utilizando la notación de Leibniz:

$$\frac{dy}{dx} = x^2 y$$

Si una solución y es una función que satisface $y(x) \neq 0$ para alguna x, se deduce del teorema de unicidad para soluciones de ecuaciones diferenciales que $y(x) \neq 0$ para toda x.

Si $y \neq 0$, podemos reescribirla en forma diferencial e integrar:

$$\frac{dy}{y} = x^2\,dx \qquad y \neq 0$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int x^2\,dx$$

$$\ln|y| = \frac{x^3}{3} + C$$

Esta ecuación define y de manera implícita como una función de x. Pero en este caso podemos resolverla de forma explícita para y como sigue:

$$|y| = e^{\ln|y|} = e^{(x^3/3)+C} = e^C e^{x^3/3}$$

por tanto,

$$y = \pm e^C e^{x^3/3}$$

Se verifica fácilmente que la función $y = 0$ es también una solución de la ecuación diferencial dada. Así, se puede escribir la solución general en la forma

$$y = Ae^{x^3/3}$$

donde A es una constante arbitraria ($A = e^C$ o $A = -e^C$ o $A = 0$).

En la figura 3 se muestra un campo direccional para la ecuación diferencial del ejemplo 3. Compárelo con la figura 4, en la que se usa la ecuación $y = Ae^{x^3/3}$ para graficar soluciones para varios valores de A. Si emplea el campo direccional para bosquejar curvas solución con intersecciones en y: 5, 2, 1, -1 y -2, se asemejarán a las curvas de la figura 4.

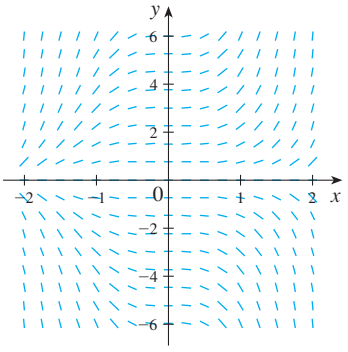


FIGURA 3

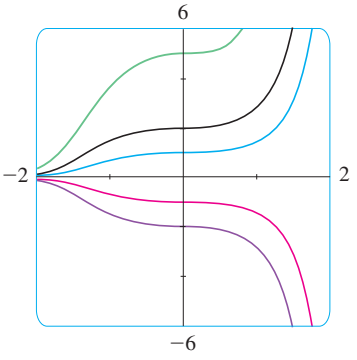


FIGURA 4

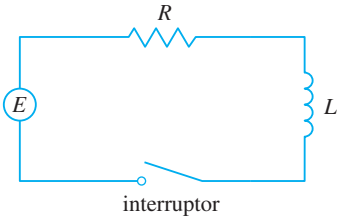


FIGURA 5

V EJEMPLO 4 En la sección 9.2 se modeló la corriente $I(t)$ en el circuito eléctrico mostrado en la figura 5 mediante la ecuación diferencial

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t)$$

Encuentre una expresión para la corriente en un circuito donde la resistencia es 12 Ω, la inductancia es 4 H, una batería que da un voltaje constante de 60 V y el interruptor cierra el circuito en $t = 0$. ¿Cuál es el valor límite de la corriente?

SOLUCIÓN Con $L = 4$, $R = 12$ y $E(t) = 60$, la ecuación se convierte en

$$4\frac{dI}{dt} + 12I = 60 \qquad \text{o} \qquad \frac{dI}{dt} = 15 - 3I$$

y el problema con valor inicial es

$$\frac{dI}{dt} = 15 - 3I \qquad I(0) = 0$$

Esta ecuación es de variables separables y se resuelve como sigue:

$$\int \frac{dI}{15 - 3I} = \int dt \qquad (15 - 3I \neq 0)$$

$$-\tfrac{1}{3} \ln |15 - 3I| = t + C$$

$$|15 - 3I| = e^{-3(t+C)}$$

$$15 - 3I = \pm e^{-3C} e^{-3t} = Ae^{-3t}$$

$$I = 5 - \tfrac{1}{3} Ae^{-3t}$$

En la figura 6 se muestra cómo la solución del ejemplo 4 (la corriente) se aproxima a su valor límite. La comparación con la figura 11 de la sección 9.2 muestra que se pudo dibujar una curva solución bastante exacta a partir del campo direccional.

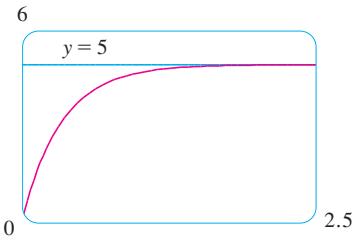


FIGURA 6

Puesto que $I(0) = 0$, se tiene $5 - \frac{1}{3}A = 0$, de modo que $A = 15$ y la solución es

$$I(t) = 5 - 5e^{-3t}$$

La corriente límite, en amperes, es

$$\lim_{t \to \infty} I(t) = \lim_{t \to \infty} (5 - 5e^{-3t}) = 5 - 5 \lim_{t \to \infty} e^{-3t} = 5 - 0 = 5$$

Trayectorias ortogonales

Una **trayectoria ortogonal** de una familia de curvas es una curva que corta ortogonalmente cada curva de la familia, es decir, en ángulos rectos (véase figura 7). Por ejemplo, cada miembro de la familia $y = mx$ de rectas que pasan por el origen es una trayectoria ortogonal de la familia $x^2 + y^2 = r^2$ de circunferencias concéntricas con centro en el origen (véase figura 8). Se dice que las dos familias son trayectorias ortogonales entre sí.

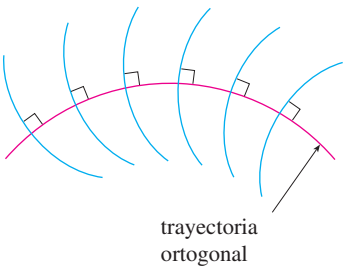


FIGURA 7

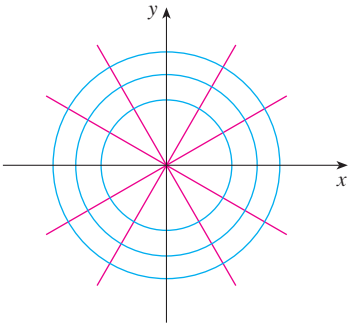


FIGURA 8

V EJEMPLO 5 Encuentre las trayectorias ortogonales de la familia de curvas $x = ky^2$, donde k es una constante arbitraria.

SOLUCIÓN Las curvas $x = ky^2$ forman una familia de parábolas cuyo eje de simetría es el eje x. El primer paso es hallar una sola ecuación diferencial que sea satisfactoria

para todos los miembros de la familia. Si derivamos $x = ky^2$, obtenemos

$$1 = 2ky\frac{dy}{dx} \qquad \text{o} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2ky}$$

Esta ecuación diferencial depende de k, pero se necesita una ecuación que sea válida para los valores de k de manera simultánea. Para eliminar k se observa que, de la ecuación general de la parábola que se proporciona $x = ky^2$, se tiene $k = x/y^2$, por tanto, la ecuación diferencial se puede escribir como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2ky} = \frac{1}{2\dfrac{x}{y^2}y}$$

o bien

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}$$

Esto significa que la pendiente de la recta tangente en cualquier punto (x, y) sobre una de las parábolas es $y' = y/(2x)$. En una trayectoria ortogonal la pendiente de la recta tangente debe ser el recíproco negativo de esta pendiente. Por tanto, las trayectorias ortogonales deben satisfacer la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{y}$$

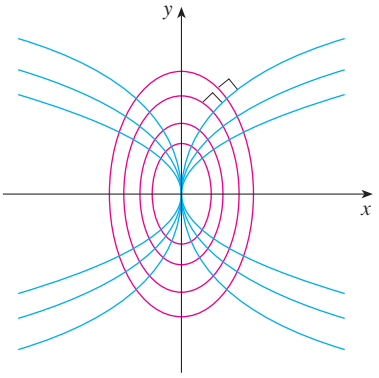


FIGURA 9

Esta ecuación diferencial es separable y se resuelve como sigue:

$$\int y\,dy = -\int 2x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = -x^2 + C$$

$$x^2 + \frac{y^2}{2} = C \qquad 4$$

donde C es una constante positiva arbitraria. Así, las trayectorias ortogonales son la familia de elipses dada por la ecuación 4 y bosquejada en la figura 9.

Las trayectorias ortogonales aparecen en varias ramas de la física. Por ejemplo, en un campo electrostático, las líneas de fuerza son ortogonales a las líneas de potencial constante. También, las líneas de corriente en aerodinámica son trayectorias ortogonales de las curvas equipotenciales de velocidad.

Problemas de mezclas

Un problema de mezclas característico involucra un tanque de capacidad fija lleno con una solución mezclada en todas sus partes de alguna sustancia, como una sal. Una solución de una determinada concentración entra al recipiente en una proporción fija, y la mezcla, totalmente agitada, sale con una proporción fija, que puede diferir de la proporción entrante. Si $y(t)$ denota la cantidad de sustancia en el recipiente en el tiempo t, entonces $y'(t)$ es la proporción a la que la sustancia está siendo añadida menos la proporción a la cual está siendo removida. La descripción matemática de esta situación suele llevar a una ecuación diferencial separable de primer orden. Se puede usar el mismo tipo de razonamiento para representar diversos fenómenos: reacciones químicas, descarga de contaminantes en un lago, inyección de un fármaco en el torrente sanguíneo.

EJEMPLO 6 Un tanque contiene 20 kg de sal disuelta en 5 000 L de agua. Se introduce salmuera al tanque que contiene 0.03 kg de sal por litro de agua a razón de 25 L/min. La solución se mantiene mezclada por completo y sale del recipiente con la misma razón. ¿Cuánta sal queda en el recipiente después de media hora?

SOLUCIÓN Sea $y(t)$ la cantidad de sal (en kilogramos) después de t minutos. Se tiene como dato que $y(0) = 20$ y se quiere determinar $y(30)$. Esto se hace al hallar una ecuación diferencial que satisface $y(t)$. Observe que dy/dt es la rapidez de cambio de la cantidad de sal, por lo que

$$\frac{dy}{dt} = (\text{razón de entrada}) - (\text{razón de salida}) \tag{5}$$

donde (razón de entrada) es la razón a la que la sal entra al recipiente y (razón de salida) es la razón a la que la sal sale del recipiente. Se tiene

$$\text{razón de entrada} = \left(0.03 \frac{\text{kg}}{\text{L}}\right)\left(25 \frac{\text{L}}{\text{min}}\right) = 0.75 \frac{\text{kg}}{\text{min}}$$

El tanque contiene siempre 5 000 L de líquido, así que la concentración en el tiempo t es $y(t)/5\,000$ (medida en kilogramos por litro). Puesto que la salmuera sale a razón de 25 L/min, se tiene

$$\text{razón de salida} = \left(\frac{y(t)}{5000} \frac{\text{kg}}{\text{L}}\right)\left(25 \frac{\text{L}}{\text{min}}\right) = \frac{y(t)}{200} \frac{\text{kg}}{\text{min}}$$

Así, de la ecuación 5 se obtiene

$$\frac{dy}{dt} = 0.75 - \frac{y(t)}{200} = \frac{150 - y(t)}{200}$$

Al resolver esta ecuación diferencial separable, se obtiene

$$\int \frac{dy}{150 - y} = \int \frac{dt}{200}$$

$$-\ln|150 - y| = \frac{t}{200} + C$$

Puesto que $y(0) = 20$, se tiene $-\ln 130 = C$, así que

$$-\ln|150 - y| = \frac{t}{200} - \ln 130$$

Por tanto,

$$|150 - y| = 130e^{-t/200}$$

Puesto que $y(t)$ es continua y $y(0) = 20$ y el lado derecho nunca es 0, se deduce que $150 - y(t)$ es siempre positiva. Así, $|150 - y| = 150 - y$ y también

$$y(t) = 150 - 130e^{-t/200}$$

La cantidad de sal después de 30 minutos es

$$y(30) = 150 - 130e^{-30/200} \approx 38.1 \text{ kg}$$

En la figura 10 se muestra la gráfica de la función $y(t)$ del ejemplo 6. Observe que, conforme pasa el tiempo, la cantidad de sal se aproxima a 150 kg.

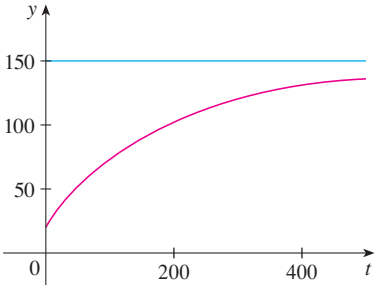


FIGURA 10

9.3 Ejercicios

1-10 Resuelva la ecuación diferencial

1. $\dfrac{dy}{dx} = xy^2$

2. $\dfrac{dy}{dx} = xe^{-y}$

3. $xy^2y' = x + 1$

4. $(y^2 + xy^2)y' = 1$

5. $(y + \operatorname{sen} y)y' = x + x^3$

6. $\dfrac{dv}{ds} = \dfrac{s + 1}{sv + s}$

7. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{t}{ye^{y+t^2}}$

8. $\dfrac{dy}{d\theta} = \dfrac{e^y \operatorname{sen}^2\theta}{y \sec\theta}$

9. $\dfrac{dp}{dt} = t^2p - p + t^2 - 1$

10. $\dfrac{dz}{dt} + e^{t+z} = 0$

11-18 Encuentre la solución de la ecuación diferencial que satisface la condición inicial que se indica.

11. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}, \quad y(0) = -3$

12. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\ln x}{xy}, \quad y(1) = 2$

13. $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{2t + \sec^2 t}{2u}, \quad u(0) = -5$

14. $y' = \dfrac{xy \operatorname{sen} x}{y + 1}, \quad y(0) = 1$

15. $x \ln x = y\left(1 + \sqrt{3 + y^2}\right)y', \quad y(1) = 1$

16. $\dfrac{dP}{dt} = \sqrt{Pt}, \quad P(1) = 2$

17. $y' \tan x = a + y, \; y(\pi/3) = a, \quad 0 < x < \pi/2$

18. $\dfrac{dL}{dt} = kL^2 \ln t, \; L(1) = -1$

19. Encuentre la ecuación de la curva que pasa por el punto $(0, 1)$ y cuya pendiente en (x, y) es xy.

20. Halle la función f tal que $f'(x) = f(x)(1 - f(x))$ y $f(0) = \frac{1}{2}$.

21. Resuelva la ecuación diferencial $y' = x + y$ haciendo el cambio de variable $u = x + y$.

22. Resuelva la ecuación diferencial $xy' = y + xe^{y/x}$ haciendo el cambio de variable $v = y/x$.

23. a) Resuelva la ecuación diferencial $y' = 2x\sqrt{1 - y^2}$.

b) Resuelva el problema con valor inicial $y' = 2x\sqrt{1 - y^2}$, $y(0) = 0$, y grafique la solución.

c) ¿El problema con valor inicial $y' = 2x\sqrt{1 - y^2}$, $y(0) = 2$, tiene una solución? Explique.

24. Resuelva la ecuación $e^{-y}y' + \cos x = 0$ y grafique varias integrantes de la familia de soluciones. ¿Cómo cambia la curva solución cuando varía la constante C?

SAC **25.** Resuelva el problema con valor inicial $y' = (\operatorname{sen} x)/\operatorname{sen} y$, $y(0) = \pi/2$, y grafique la solución (si su SAC hace gráficas implícitas).

SAC **26.** Resuelva la ecuación $y' = x\sqrt{x^2 + 1}/(ye^y)$ y grafique varios miembros de la familia de soluciones (si su SAC hace gráficas implícitas). ¿Cómo cambia la curva solución cuando varía la constante C?

SAC **27-28**

a) Use un sistema algebraico computacional para trazar un campo direccional para la ecuación diferencial. Imprímalo y utilícelo para bosquejar algunas curvas solución sin resolver la ecuación diferencial.

b) Resuelva la ecuación diferencial.

c) Emplee un SAC para trazar varias integrantes de la familia de soluciones obtenida en el inciso b). Compare con las curvas del inciso a).

27. $y' = y^2$

28. $y' = xy$

29-32 Encuentre las trayectorias ortogonales de la familia de curvas. Use un dispositivo de graficación para trazar varios miembros de cada familia en una pantalla común.

29. $x^2 + 2y^2 = k^2$

30. $y^2 = kx^3$

31. $y = \dfrac{k}{x}$

32. $y = \dfrac{x}{1 + kx}$

33-35 Una ecuación integral es una ecuación que contiene una función desconocida $y(x)$ y una integral que involucra $y(x)$. Resuelva la ecuación integral dada. [*Sugerencia:* utilice una condición inicial obtenida de la ecuación integral.]

33. $y(x) = 2 + \displaystyle\int_2^x [t - ty(t)]\,dt$

34. $y(x) = 2 + \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{ty(t)}, \quad x > 0$

35. $y(x) = 4 + \displaystyle\int_0^x 2t\sqrt{y(t)}\,dt$

36. Encuentre una ecuación f tal que $f(3) = 2$ y

$$(t^2 + 1)f'(t) + [f(t)]^2 + 1 = 0 \qquad t \neq 1$$

[*Sugerencia:* utilice la fórmula de la adición para $\tan(x + y)$ en la página de referencia 2.]

37. Resuelva el problema con valor inicial del ejercicio 27 en la sección 9.2 a fin de hallar una expresión para la carga en el tiempo t. Encuentre el valor límite de la carga.

38. En el ejercicio 28 de la sección 9.2, se examinó una ecuación diferencial que modela la temperatura de una taza de café a 95 °C en una habitación a 20 °C. Resuelva la ecuación diferencial, a fin de hallar una expresión para la temperatura del café en el tiempo t.

39. En el ejercicio 15 de la sección 9.1 se formuló un modelo para el aprendizaje en la forma de la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = k(M - P)$$

donde $P(t)$ mide el desempeño de alguien que aprende una habilidad después de un tiempo de entrenamiento t, M es el nivel máximo de desempeño y k es una constante positiva. Resuelva esta ecuación diferencial con el fin de hallar una expresión para $P(t)$. ¿Cuál es el límite de esta expresión?

40. En una reacción química elemental, las moléculas simples de dos reactivos A y B forman una molécula del producto C: $A + B \longrightarrow C$. La ley de acción de masas establece que la velocidad de reacción es proporcional al producto de las concentraciones de A y B:

$$\frac{d[C]}{dt} = k[A][B]$$

(Véase el ejemplo 4 en la sección 3.7.) De este modo, si las concentraciones iniciales son $[A] = a$ moles/L y $[B] = b$ moles/L y se escribe $x = [C]$, entonces se tiene

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x)$$

a) Suponiendo que $a \neq b$, determine x como una función de t. Use el hecho de que la concentración inicial de C es 0.

b) Determine $x(t)$ suponiendo que $a = b$. ¿Cómo se simplifica esta expresión para $x(t)$ si se sabe que $[C] = \frac{1}{2}a$ después de 20 segundos?

41. En contraste con la situación del ejercicio 40, los experimentos muestran que la reacción $H_2 + Br_2 \longrightarrow 2HBr$ satisface la ley de rapidez

$$\frac{d[HBr]}{dt} = k[H_2][Br_2]^{1/2}$$

y, de este modo, para esta reacción la ecuación diferencial se convierte en

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x)^{1/2}$$

donde $x = [HBr]$ y a y b son las concentraciones iniciales de hidrógeno y bromo.

a) Determine x como una función de t en el caso donde $a = b$. Use el hecho de que $x(0) = 0$.

b) Si $a > b$, encuentre t como una función de x. [*Sugerencia:* al llevar a cabo la integración, haga la sustitución $u = \sqrt{b - x}$.]

42. Una esfera con radio 1 m tiene temperatura 15 °C. Está dentro de una esfera concéntrica con radio 2 m y temperatura 25 °C. La temperatura $T(r)$ a una distancia r desde el centro común de las esferas satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dT}{dr} = 0$$

Si hacemos que $S = dT/dr$, entonces S satisface una ecuación diferencial de primer orden. Resuélvala a fin de hallar una expresión para la temperatura $T(r)$ entre las esferas.

43. Se administra una solución de glucosa por vía intravenosa en el torrente sanguíneo con una rapidez constante r. A medida que se añade la glucosa, se convierte en otras sustancias y se elimina del torrente sanguíneo con una rapidez que es proporcional a la concentración en ese momento. De esta manera, un modelo para la concentración $C = C(t)$ de la solución de glucosa en el torrente sanguíneo es

$$\frac{dC}{dt} = r - kC$$

donde k es una constante positiva.

a) Suponga que la concentración en el tiempo $t = 0$ es C_0. Determine la concentración en cualquier tiempo t resolviendo la ecuación diferencial.

b) Suponiendo que $C_0 < r/k$, encuentre $\lim_{t\to\infty} C(t)$ e interprete su respuesta.

44. Cierto país pequeño tiene 10 000 millones de dólares en papel moneda en circulación, y cada día entran a los bancos del país 50 millones. El gobierno decide introducir una nueva moneda y pide a los bancos que reemplacen los billetes viejos por los nuevos, siempre que la moneda antigua llegue a los bancos. Sea $x = x(t)$ la cantidad de la nueva moneda en circulación en el tiempo t, con $x(0) = 0$.

a) Formule un modelo matemático en la forma de un problema con valor inicial que represente el "flujo" de la nueva moneda en circulación.

b) Resuelva el problema con valor inicial hallado en el inciso a).

c) ¿En cuánto tiempo los nuevos billetes representan 90% de la moneda en circulación?

45. Un tanque contiene 1 000 L de salmuera con 15 kg de sal disuelta. El agua pura entra al tanque a razón de 10 L/min. La solución se mantiene completamente mezclada y sale con la misma razón. ¿Cuánta sal está en el tanque a) después de t minutos y b) después de 20 minutos?

46. El aire en una habitación con 180 m^3 de volumen contiene inicialmente 0.15% de dióxido de carbono. Aire fresco con únicamente 0.05% de dióxido de carbono circula hacia adentro de la habitación a razón de 2 m^3/min y el aire mezclado circula hacia fuera en la misma proporción. Halle el porcentaje de dióxido de carbono en la habitación como una función del tiempo. ¿Qué sucede en periodos prolongados?

47. Un tanque con 500 galones de cerveza contiene 4% de alcohol (en volumen). Se bombea cerveza con 6% de alcohol hacia adentro del tanque a razón de 5 gal/min y la mezcla se bombea hacia afuera en la misma proporción. ¿Cuál es el porcentaje de alcohol después de una hora?

48. Un tanque contiene 1 000 L de agua pura. La salmuera que contiene 0.05 kg de sal por litro de agua entra al tanque a razón de 5 L/min. Salmuera que contiene 0.04 kg de sal por litro de agua entra al tanque a razón de 10 L/min. La solución se mantiene totalmente mezclada y sale del tanque a razón de 15 L/min. ¿Cuánta sal está en el tanque a) después de t minutos y b) después de una hora?

49. Cuando cae una gota de lluvia, aumenta de tamaño y, por tanto, su masa en tiempo t es una función de t, $m(t)$. La rapidez de crecimiento de la masa es $km(t)$ para alguna constante positiva k. Cuando se aplica la ley de Newton del movimiento a la gota de lluvia, se obtiene $(mv)' = gm$, donde v es la velocidad de la gota (con dirección hacia abajo) y g es la aceleración debida a la gravedad. La *velocidad terminal* de la gota de lluvia es $\lim_{t\to\infty} v(t)$. Encuentre una expresión para la velocidad terminal de g y k.

50. Un objeto de masa m se mueve horizontalmente a través de un medio que resiste el movimiento con una fuerza que es una función de la velocidad; es decir,

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = m\frac{dv}{dt} = f(v)$$

donde $v = v(t)$ y $s = s(t)$ representan la velocidad y la posición del objeto en el tiempo t, respectivamente. Por ejemplo, considere un bote que se mueve en el agua.

a) Suponga que la fuerza de resistencia es proporcional a la velocidad, es decir, $f(v) = -kv$, k es una constante positiva. (Este modelo es apropiado para valores pequeños de v.) Sean $v(0) = v_0$ y $s(0) = s_0$ los valores iniciales de v y s. Determine v y s en cualquier tiempo t. ¿Cuál es la distancia total que recorre el objeto desde el tiempo $t = 0$?

b) Para valores más grandes de v un mejor modelo se obtiene suponiendo que la fuerza de resistencia es proporcional al cuadrado de la velocidad, es decir, $f(v) = -kv^2$, $k > 0$. (Newton fue el primero en proponer este modelo.) Sean v_0 y s_0 los valores iniciales de v y s. Determine v y s en cualquier tiempo t. ¿Cuál es la distancia total que viaja el objeto en este caso?

51. En Biología, el *crecimiento alómero* se refiere a las relaciones entre tamaños de partes de un organismo (longitud del cráneo y longitud del cuerpo, por ejemplo). Si $L_1(t)$ y $L_2(t)$ son los tamaños de dos órganos en un organismo de edad t, entonces L_1 y L_2 satisfacen la ley alómera si sus tasas de crecimiento específicas son proporcionales:

$$\frac{1}{L_1}\frac{dL_1}{dt} = k\frac{1}{L_2}\frac{dL_2}{dt}$$

donde k es una constante.

a) Utilice la ley alómera para describir una ecuación diferencial que relacione L_1 y L_2 y resuélvala para expresar L_1 como función de L_2.

b) En un estudio de varias especies de algas unicelulares, la constante de proporcionalidad de la ley alómera que relaciona B (biomasa celular) y V (volumen celular) se encontró que es $k = 0.0794$. Exprese B como función de V.

52. La homeostasis se refiere a un estado en el que el contenido de nutrientes de un consumidor es independiente del contenido. En ausencia de la homeostasis, un modelo propuesto por Sterner y Elser está dado por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\theta}\frac{y}{x}$$

donde x y y representan el contenido de nutrientes del alimento y el consumidor, respectivamente, y θ es una constante con $\theta \geqslant 1$.

a) Resuelva la ecuación diferencial

b) ¿Qué ocurre cuando $\theta = 1$? ¿Y qué ocurre cuando $\theta \to \infty$?

53. Sea $A(t)$ el área de un cultivo de tejido en el tiempo t y sea M el área final del tejido cuando se completa el crecimiento. La mayor parte de las divisiones celulares ocurren en la periferia del tejido y el número de células de la periferia es proporcional a $\sqrt{A(t)}$. Así, un modelo razonable para el crecimiento del tejido se obtiene suponiendo que la rapidez de crecimiento del área es proporcional a $\sqrt{A(t)}$ y $M - A(t)$.

a) Formule una ecuación diferencial y empléela para demostrar que el tejido crece más rápido cuando $A(t) = \frac{1}{3}M$.

SAC b) Resuelva la ecuación diferencial con el fin de hallar una expresión para $A(t)$. Use un sistema algebraico computacional para llevar a cabo la integración.

54. De acuerdo con la ley de Newton de la gravitación universal, la fuerza gravitacional sobre un objeto de masa m que ha sido proyectado verticalmente hacia arriba desde la superficie terrestre es

$$F = \frac{mgR^2}{(x + R)^2}$$

donde $x = x(t)$ es la distancia del objeto arriba de la superficie en el tiempo t, R es el radio de la Tierra y g es la aceleración debida a la gravedad. Asimismo, por la segunda ley de Newton, $F = ma = m(dv/dt)$ y, por tanto,

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{mgR^2}{(x + R)^2}$$

a) Suponga que un cohete es lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial v_0. Sea h la altura máxima sobre la superficie alcanzada por el objeto. Demuestre que

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gRh}{R + h}}$$

[*Sugerencia:* por la regla de la cadena, $m(dv/dt) = mv(dv/dx)$.]

b) Calcule $v_e = \lim_{h\to\infty} v_0$. Este límite se llama *velocidad de escape* para la Tierra.

c) Use $R = 3\,960$ mi y $g = 32$ pies/s^2 para calcular v_e en pies por segundo y en millas por segundo.

PROYECTO DE APLICACIÓN ¿QUÉ TAN RÁPIDO DRENA UN TANQUE?

Si el agua (u otro líquido) drena de un tanque, se espera que el flujo sea mayor al principio (cuando la profundidad del agua es máxima) y disminuya poco a poco a medida que disminuye el nivel del agua. Pero se necesita una descripción matemática más precisa de cómo disminuye el flujo, a fin de contestar el tipo de preguntas que hacen los ingenieros: ¿en cuánto tiempo se drena por completo un tanque? ¿Cuánta agua debe contener un tanque a fin de garantizar cierta presión de agua mínima para un sistema de aspersión?

Sea $h(t)$ y $V(t)$ la altura y el volumen de agua en el tanque en el tiempo t. Si el agua sale por un orificio con área a en el fondo del tanque, entonces la ley de Torricelli dice que

$$\boxed{1} \qquad \frac{dV}{dt} = -a\sqrt{2gh}$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad. Así, la rapidez a la cual fluye el agua desde el tanque es proporcional a la raíz cuadrada de la altura del agua.

1. a) Suponga que el tanque es cilíndrico con altura de 6 pies y radio de 2 pies, y el orificio es circular con radio de 1 pulgada. Si se toma $g = 32$ pies/s^2, demuestre que h satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{1}{72}\sqrt{h}$$

b) Resuelva esta ecuación para hallar la altura del agua en el tiempo t, bajo el supuesto de que el tanque está lleno en el tiempo $t = 0$.

c) ¿Cuánto tarda en drenar por completo el agua?

2. Como resultado de la rotación y viscosidad del líquido, el modelo teórico dado por la ecuación 1 no es bastante exacto. En cambio, el modelo

$$\boxed{2} \qquad \frac{dh}{dt} = k\sqrt{h}$$

se emplea con más frecuencia y la constante k (que depende de las propiedades físicas del líquido) se determina de los datos relacionados con el drenado del tanque.

a) Suponga que hacemos un orificio en el costado de una botella cilíndrica y la altura h del agua (arriba del orificio) disminuye de 10 cm a 3 cm en 68 segundos. Use la ecuación 2 a fin de hallar una expresión para $h(t)$. Evalúe $h(t)$ para $t = 10, 20, 30, 40, 50, 60$.

b) Haga un orificio de 4 mm cerca del fondo de la parte cilíndrica de una botella de plástico de bebida gaseosa de dos litros. Adhiera una tira de cinta adhesiva marcada en centímetros de 0 a 10, con 0 que corresponde a la parte superior del orificio. Con un dedo sobre el orificio, llene la botella con agua hasta la marca de 10 cm. Luego quite su dedo del orificio y registre los valores de $h(t)$ para $t = 10, 20, 30, 40, 50, 60$ segundos. (Es probable que encuentre que transcurren 68 segundos para que el nivel disminuya a $h = 3$ cm.) Compare sus datos con los valores de $h(t)$ del inciso a). ¿Qué tan bien predice el modelo los valores reales?

3. En muchas partes del mundo, el agua para los sistemas de aspersión en grandes hoteles y hospitales se suministra por gravedad desde tanques cilíndricos en o cerca de los techos de los edificios. Suponga que un tanque de este tipo tiene radio de 10 pies y que el diámetro de la salida es de 2.5 pulgadas. Un ingeniero tiene que garantizar que la presión del agua será por lo menos 2160 lb/pie^2 por un periodo de 10 minutos. (Cuando se presenta un incendio, el sistema eléctrico podría fallar y podría tomar hasta 10 minutos la activación del generador de emergencia y la bomba de agua.) ¿Qué altura debe especificar el ingeniero para el tanque, a fin de garantizar la presión? (Use el hecho de que la presión del agua a una profundidad de d pies es $P = 62.5d$. Véase la sección 8.3.)

El problema 2b se realiza mejor como una demostración de salón de clases o como un proyecto de grupo con tres alumnos en cada grupo: un cronometrador que indique los segundos, una persona a cargo de la altura cada 10 segundos y alguien que registre estos valores.



© Richard Le Borne, Dept. Mathematics, Tennessee Technological University

4. No todos los tanques de agua tienen forma cilíndrica. Suponga que un tanque tiene área de sección transversal $A(h)$ a la altura h. Entonces el volumen del agua hasta la altura h es $V = \int_0^h A(u)\,du$ y, por tanto, el teorema fundamental del cálculo da $dV/dh = A(h)$. Se deduce que

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}\frac{dh}{dt} = A(h)\frac{dh}{dt}$$

y, por consiguiente, la ley de Torricelli se convierte en

$$A(h)\frac{dh}{dt} = -a\sqrt{2gh}$$

a) Suponga que el tanque tiene la forma de una esfera con radio 2 m y al principio está lleno con agua hasta la mitad. Si el radio del orificio circular es 1 cm y se toma $g = 10\ \text{m/s}^2$, demuestre que h satisface la ecuación diferencial

$$(4h - h^2)\frac{dh}{dt} = -0.0001\sqrt{20h}$$

b) ¿Cuánto tarda en drenar por completo el agua?

PROYECTO DE APLICACIÓN ¿QUÉ ES MÁS RÁPIDO, SUBIR O BAJAR?

Suponga que lanza una bola al aire. ¿Considera que tarda más en alcanzar su altura máxima o en regresar al suelo desde su altura máxima? En este proyecto se resolverá este problema pero, antes de empezar, piense en esa situación y haga una conjetura con base en su intuición física.

Al modelar la fuerza debida a la resistencia del aire, se han empleado varias funciones, dependiendo de las características físicas y la rapidez de la bola. Aquí se usa un modelo lineal, $-pv$, pero un modelo cuadrático ($-pv^2$ en el camino ascendente y pv^2 en el camino descendente) es otra posibilidad para magnitudes de velocidades más altas (véase el ejercicio 50 en la sección 9.3). Para una pelota de golf, los experimentos han mostrado que un buen modelo es $-pv^{1.3}$ hacia arriba y $p|\,v\,|^{1.3}$ hacia abajo. Pero no importa qué función fuerza $-f(v)$ se emplee [donde $f(v) > 0$ para $v > 0$ y $f(v) < 0$ para $v < 0$], la respuesta a la pregunta es la misma. Véase F. Brauer, "What Goes Up Must Come Down, Eventually," *Amer. Math. Monthly* 108 (2001), pp. 437-440.

1. Una bola con masa m se lanza hacia arriba verticalmente desde la superficie de la Tierra con una velocidad inicial positiva v_0. Se supone que las fuerzas que actúan sobre la bola son la fuerza de gravedad y una fuerza retardadora por la resistencia del aire con dirección opuesta a la dirección del movimiento y con magnitud $p\,|\,v(t)\,|$ donde p es una constante positiva y $v(t)$ es la velocidad de la bola en el tiempo t. Tanto en el ascenso como en el descenso, la fuerza total que actúa sobre la bola es $-pv - mg$. [Durante el ascenso, $v(t)$ es positiva y la resistencia actúa hacia abajo; durante el descenso, $v(t)$ es negativa y la resistencia actúa hacia arriba.] Así, por la segunda ley de Newton, la ecuación de movimiento es

$$mv' = -pv - mg$$

Resuelva esta ecuación diferencial para demostrar que la velocidad es

$$v(t) = \left(v_0 + \frac{mg}{p}\right)e^{-pt/m} - \frac{mg}{p}$$

2. Demuestre que la altura de la bola, hasta que choca con el suelo, es

$$y(t) = \left(v_0 + \frac{mg}{p}\right)\frac{m}{p}\left(1 - e^{-pt/m}\right) - \frac{mgt}{p}$$

Se requiere calculadora graficadora o computadora

3. Sea t_1 el tiempo que tarda la bola en alcanzar su altura máxima. Demuestre que

$$t_1 = \frac{m}{p} \ln\left(\frac{mg + pv_0}{mg}\right)$$

Determine este tiempo para una bola con masa 1 kg y velocidad inicial 20 m/s. Suponga que la resistencia de aire es $\frac{1}{10}$ de la rapidez.

4. Sea t_2 el tiempo que la bola cae de regreso a la Tierra. Para la bola particular del problema 3, estime t_2 por medio de una gráfica de la función altura $y(t)$. ¿Qué es más rápido, subir o bajar?

5. En general, no es fácil determinar t_2 porque es imposible resolver la ecuación $y(t) = 0$ en forma explícita. Sin embargo, se puede usar un método directo para determinar si el ascenso o el descenso es más rápido: se determina si $y(2t_1)$ es positiva o negativa. Demuestre que

$$y(2t_1) = \frac{m^2 g}{p^2}\left(x - \frac{1}{x} - 2 \ln x\right)$$

donde $x = e^{pt_1/m}$. Después demuestre que $x > 1$ y la función

$$f(x) = x - \frac{1}{x} - 2 \ln x$$

es creciente para $x > 1$. Use este resultado para decidir si $y(2t_1)$ es positiva o negativa. ¿Qué se puede concluir? ¿Es más rápido el ascenso o el descenso?

9.4 Modelos de crecimiento poblacional

En esta sección se estudian ecuaciones diferenciales que se aplican para modelar el crecimiento de población: la ley de crecimiento natural, la ecuación logística y otras.

Ley de crecimiento natural

Uno de los modelos para el crecimiento poblacional considerado en la sección 9.1 se basó en la suposición de que la población crece a una tasa proporcional al tamaño de la población:

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

¿Es ésa una suposición razonable? Suponga que se tiene una población (de bacterias, por ejemplo) con tamaño $P = 1000$ y en determinado momento crece con una rapidez de $P' = 300$ bacterias por hora. Ahora se toman otras 1000 bacterias del mismo tipo y se colocan en la primera población. Cada mitad de la nueva población creció en una proporción de 300 bacterias por hora. Se esperaría que la población total de 2 000 se incrementara a una tasa de 600 bacterias por hora inicialmente (siempre que haya espacio suficiente y nutrición). De este modo, si se duplica el tamaño, se duplica la proporción de crecimiento. En general, parece razonable que la rapidez de crecimiento deba ser proporcional al tamaño.

En general, si $P(t)$ es el valor de una cantidad y en el tiempo t y si la rapidez de cambio de P con respecto a t es proporcional a su tamaño $P(t)$ en cualquier momento, entonces

1

$$\boxed{\frac{dP}{dt} = kP}$$

donde k es una constante. La ecuación 1 se llama a veces **ley de crecimiento natural**. Si k es positiva, entonces se incrementa la población; si k es negativa, decrece.

Debido a que es una ecuación diferencial separable se puede resolver por los métodos de la sección 9.3:

$$\int \frac{dP}{P} = \int k\,dt$$

$$\ln |P| = kt + C$$

$$|P| = e^{kt+C} = e^C e^{kt}$$

$$P = Ae^{kt}$$

donde A ($= \pm e^C$ o 0) es una constante arbitraria. Para ver el significado de la constante A, se observa que

$$P(0) = Ae^{k \cdot 0} = A$$

Por tanto, A es el valor inicial de la función.

2 La solución del problema con valor inicial

$$\frac{dP}{dt} = kP \qquad P(0) = P_0$$

es

$$P(t) = P_0 e^{kt}$$

Los ejemplos y ejercicios de la aplicación de 2 se proporcionan en la sección 3.8

Otra manera de escribir la ecuación 1 es

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = k$$

la cual dice que la **rapidez de crecimiento relativo** (rapidez de crecimiento dividida por el tamaño de la población) es constante. Por tanto, 2 dice que una población con crecimiento relativo constante debe crecer de forma exponencial.

Se puede considerar emigración (o "recolectores") de una población modificando la ecuación 1; si la rapidez de emigración es una constante m, entonces la rapidez de cambio de la población se representa mediante la ecuación diferencial

3
$$\frac{dP}{dt} = kP - m$$

Vea el ejercicio 15 para la solución y las consecuencias de la ecuación 3.

Modelo logístico

Como se explicó en la sección 9.1, una población suele incrementarse de forma exponencial en sus primeras etapas, pero se estabiliza finalmente y tiende a su capacidad de soporte debido a los recursos limitados. Si $P(t)$ es el tamaño de la población en el tiempo t, se supone que

$$\frac{dP}{dt} \approx kP \qquad \text{si } P \text{ es pequeña}$$

Esto dice que la rapidez de crecimiento inicial está muy cerca de ser proporcional al tamaño. En otras palabras, la rapidez de crecimiento relativa es casi constante cuando la población es pequeña. Pero también se quiere reflejar el hecho de que la rapidez de crecimiento relativa disminuye cuando se incrementa la población P y se vuelve negativa si P excede alguna vez su **capacidad de soporte** M, la población máxima que el ambiente es capaz de sostener a la larga. La expresión más simple para la rapidez de crecimiento relativa que incorpora estas suposiciones es

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = k\left(1 - \frac{P}{M}\right)$$

Al multiplicar por P, se obtiene el modelo para el crecimiento poblacional conocido como **ecuación diferencial logística**

$$\boxed{4} \qquad \boxed{\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right)}$$

Observe de la ecuación 4 que si P es pequeña en comparación con M, entonces P/M es cercano a cero y, por tanto, $dP/dt \approx kP$. Sin embargo, si $P \to M$ (la población se aproxima a su capacidad de soporte), entonces $P/M \to 1$, así que $dP/dt \to 0$. Se puede deducir información acerca de si las soluciones se incrementan o disminuyen directamente de la ecuación 4. Si la población P está entre 0 y M, entonces el lado derecho de la ecuación es positivo, así que $dP/dt > 0$ y la población crece. Pero si la población excede la capacidad de soporte ($P > M$), entonces $1 - P/M$ es negativa, de modo que $dP/dt < 0$ y la población decrece.

Iniciamos el análisis más detallado de la ecuación diferencial logística considerando un campo direccional.

V EJEMPLO 1 Dibuje un campo direccional para la ecuación logística con $k = 0.08$ y capacidad de soporte $M = 1000$. ¿Qué se puede deducir acerca de las soluciones?

SOLUCIÓN En este caso la ecuación diferencial logística es

$$\frac{dP}{dt} = 0.08P\left(1 - \frac{P}{1000}\right)$$

Un campo direccional para esta ecuación se muestra en la figura 1. Se muestra sólo el primer cuadrante porque las poblaciones negativas no son significativas y se tiene interés sólo en lo que sucede después de $t = 0$.

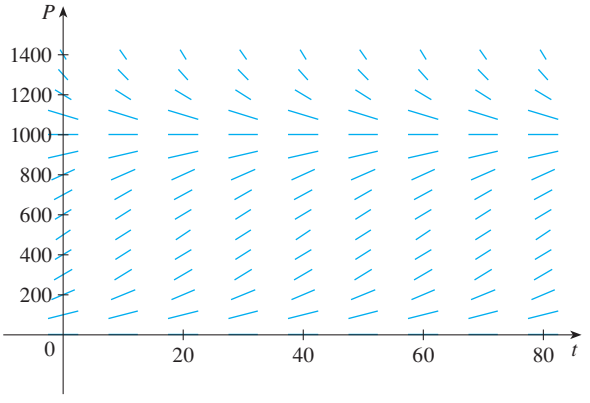


FIGURA 1
Campo direccional para la ecuación logística del ejemplo 1

La ecuación logística es autónoma (dP/dt depende sólo de P, no de t), así que las pendientes son las mismas a lo largo de cualquier recta horizontal. Como se esperaba, las pendientes son positivas para $0 < P < 1000$ y negativas para $P > 1000$.

Las pendientes son pequeñas cuando P se aproxima a 0 o 1000 (la capacidad de soporte). Observe que las soluciones se alejan de la solución de equilibrio $P = 0$ y se mueven hacia la solución de equilibrio $P = 1000$.

En la figura 2 se usa el campo direccional para bosquejar curvas solución con poblaciones iniciales $P(0) = 100$, $P(0) = 400$ y $P(0) = 1300$. Note que las curvas solución que empiezan abajo de $P = 1000$ son crecientes y las que empiezan arriba de $P = 1000$ son decrecientes. Las pendientes son mayores cuando $P \approx 500$ y, en consecuencia, las curvas solución abajo de $P = 1000$ tienen puntos de inflexión cuando $P \approx 500$. De hecho, se puede probar que las curvas solución que empiezan abajo de $P = 500$ tienen un punto de inflexión cuando P es exactamente 500 (véase el ejercicio 11).

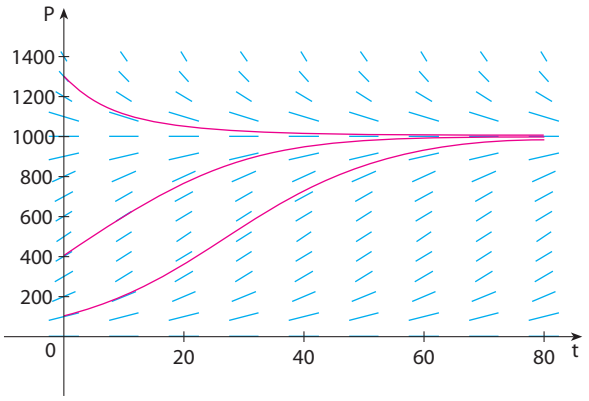


FIGURA 2
Curvas solución para la ecuación logística del ejemplo 1

La ecuación logística 4 es separable y, por tanto, se puede resolver de manera explícita con el método de la sección 9.3. Puesto que

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right)$$

se tiene

$$\boxed{5} \qquad \int \frac{dP}{P(1 - P/M)} = \int k\,dt$$

Para evaluar la integral del lado izquierdo, escribimos

$$\frac{1}{P(1 - P/M)} = \frac{M}{P(M - P)}$$

Empleando fracciones parciales (véase sección 7.4), obtenemos

$$\frac{M}{P(M - P)} = \frac{1}{P} + \frac{1}{M - P}$$

Esto permite reescribir la ecuación 5:

$$\int \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{M - P} \right) dP = \int k \, dt$$

$$\ln |P| - \ln |M - P| = kt + C$$

$$\ln \left| \frac{M - P}{P} \right| = -kt - C$$

$$\left| \frac{M - P}{P} \right| = e^{-kt - C} = e^{-C} e^{-kt}$$

$$\frac{M - P}{P} = Ae^{-kt} \tag{6}$$

donde $A = \pm e^{-C}$. Si la ecuación 6 se resuelve para P, se obtiene

$$\frac{M}{P} - 1 = Ae^{-kt} \quad \Rightarrow \quad \frac{P}{M} = \frac{1}{1 + Ae^{-kt}}$$

por tanto,

$$P = \frac{M}{1 + Ae^{-kt}}$$

Encontramos el valor de A si escribimos $t = 0$ en la ecuación 6. Si $t = 0$, entonces $P = P_0$ (la población inicial), por tanto,

$$\frac{M - P_0}{P_0} = Ae^0 = A$$

Así, la solución para la ecuación logística es

$$P(t) = \frac{M}{1 + Ae^{-kt}} \quad \text{donde } A = \frac{M - P_0}{P_0} \tag{7}$$

Al usar la expresión para $P(t)$ en la ecuación 7, se ve que

$$\lim_{t \to \infty} P(t) = M$$

lo cual era de esperarse.

EJEMPLO 2 Escriba la solución del problema con valor inicial

$$\frac{dP}{dt} = 0.08P\left(1 - \frac{P}{1000}\right) \qquad P(0) = 100$$

y utilícela para hallar los tamaños de población $P(40)$ y $P(80)$. ¿En qué momento la población llega a 900?

SOLUCIÓN La ecuación diferencial es una ecuación logística con $k = 0.08$, capacidad de soporte $M = 1000$, y población inicial $P_0 = 100$. Por tanto, la ecuación 7 da la

población en el tiempo t cuando

$$P(t) = \frac{1000}{1 + Ae^{-0.08t}} \qquad \text{donde } A = \frac{1000 - 100}{100} = 9$$

Así,

$$P(t) = \frac{1000}{1 + 9e^{-0.08t}}$$

Por consiguiente, los tamaños de población cuando $t = 40$ y 80 son

$$P(40) = \frac{1000}{1 + 9e^{-3.2}} \approx 731.6 \qquad P(80) = \frac{1000}{1 + 9e^{-6.4}} \approx 985.3$$

La población llega a 900 cuando

$$\frac{1000}{1 + 9e^{-0.08t}} = 900$$

Resolviendo esta ecuación para t, se obtiene

$$1 + 9e^{-0.08t} = \tfrac{10}{9}$$

$$e^{-0.08t} = \tfrac{1}{81}$$

$$-0.08t = \ln \tfrac{1}{81} = -\ln 81$$

$$t = \frac{\ln 81}{0.08} \approx 54.9$$

De modo que la población llega a 900 cuando t es aproximadamente 55. Como comprobación del trabajo, se grafica la curva de población en la figura 3 y se observa que cruza la recta $P = 900$. El cursor indica que $t \approx 55$.

Compare la curva solución en la figura 3 con la curva solución inferior que se trazó a partir del campo direccional en la figura 2.

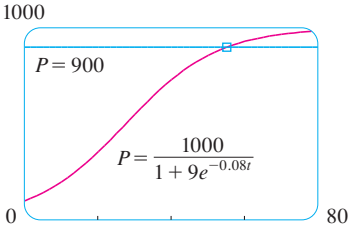


FIGURA 3

Comparación del crecimiento natural y modelos logísticos

En la década de 1930, el biólogo G. F. Gause realizó un experimento con el protozoario *Paramecium* y empleó una ecuación logística para representar sus datos. En la tabla se da la cuenta diaria de la población de protozoarios. Estimó la rapidez de crecimiento relativo inicial como 0.7944 y la capacidad de soporte como 64.

t (días)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
P (observada)	2	3	22	16	39	52	54	47	50	76	69	51	57	70	53	59	57

V EJEMPLO 3 Encuentre los modelos exponencial y logístico para los datos de Gause. Compare los valores predichos con los valores observados y comente acerca del ajuste.

SOLUCIÓN Dada la rapidez de crecimiento relativo $k = 0.7944$ y la población inicial $P_0 = 2$, el modelo exponencial es

$$P(t) = P_0 e^{kt} = 2e^{0.7944t}$$

Gause empleó el mismo valor de k para su modelo logístico. [Esto es razonable porque $P_0 = 2$ es pequeña comparada con la capacidad de soporte ($M = 64$). La ecuación

$$\frac{1}{P_0}\frac{dP}{dt}\bigg|_{t=0} = k\left(1 - \frac{2}{64}\right) \approx k$$

muestra que el valor de k para la ecuación logística es muy cercano al valor para el modelo exponencial.]

Entonces la solución de la ecuación logística en la ecuación 7 da

$$P(t) = \frac{M}{1 + Ae^{-kt}} = \frac{64}{1 + Ae^{-0.7944t}}$$

donde

$$A = \frac{M - P_0}{P_0} = \frac{64 - 2}{2} = 31$$

Por consiguiente,

$$P(t) = \frac{64}{1 + 31e^{-0.7944t}}$$

Estas ecuaciones se emplean para calcular los valores predichos (redondeados hasta el entero más próximo) y se comparan en la tabla.

t (días)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
P (observada)	2	3	22	16	39	52	54	47	50	76	69	51	57	70	53	59	57
P (modelo logístico)	2	4	9	17	28	40	51	57	61	62	63	64	64	64	64	64	64
P (modelo exponencial)	2	4	10	22	48	106	⋯										

Se observa de la tabla y la gráfica de la figura 4 que para los primeros tres o cuatro días el modelo exponencial da resultados comparables a los del modelo logístico más complejo. Sin embargo para $t \geqslant 5$, el modelo exponencial es inexacto, pero el modelo logístico ajusta las observaciones razonablemente bien.

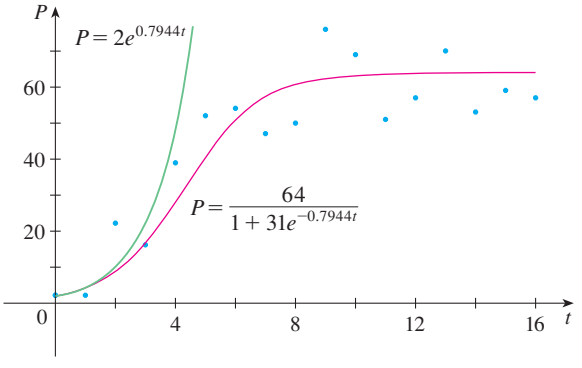


FIGURA 4
Modelos exponencial y logístico para los datos de *Paramecium*

Varios países que antes experimentaron crecimiento exponencial ahora están encontrando que su rapidez de crecimiento poblacional está declinando y el modelo logístico proporciona un buen modelo.

t	$B(t)$	t	$B(t)$
1980	9 847	1992	10 036
1982	9 856	1994	10 109
1984	9 855	1996	10 152
1986	9 862	1998	10 175
1988	9 884	2000	10 186
1990	9 962		

La tabla al margen muestra valores semestrales de $B(t)$, la población de Bélgica, en miles, al tiempo t, desde 1980 hasta 2000. La figura 5 muestra estos puntos de información junto con una función logística desplazada que se obtiene de una calculadora con la capacidad de ajustar una función logística a estos puntos mediante regresión. Es observable que el modelo logístico proporciona un buen ajuste.

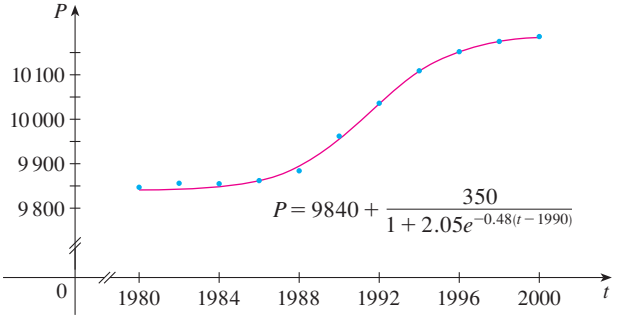


FIGURA 5
Modelo logístico para la población de Bélgica

Otros modelos para el crecimiento poblacional

La ley de crecimiento natural y la ecuación diferencial logística no son las únicas ecuaciones que han sido propuestas para modelar el crecimiento poblacional. En el ejercicio 20 se trabaja con la función de crecimiento de Gompertz y en los ejercicios 21 y 22 se investigan modelos de crecimiento estacionales.

Dos de los otros modelos son modificaciones del modelo logístico. La ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right) - c$$

se ha empleado para modelar poblaciones que están sujetas a la "recolección" de un tipo u otro. (Piense en una población de peces capturados en una proporción constante.) Esta ecuación se explora en los ejercicios 17 y 18.

Para algunas especies hay un nivel mínimo de población m debajo del cual la especie tiende a extinguirse. (Es posible que los adultos no encuentren parejas adecuadas.) Esta clase de poblaciones ha sido representada mediante la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right)\left(1 - \frac{m}{P}\right)$$

donde el factor extra, $1 - m/P$, toma en cuenta las consecuencias de una población escasa (véase el ejercicio 19).

9.4 Ejercicios

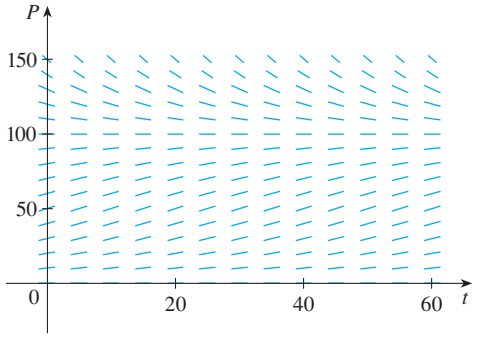
1. Suponga que una población se desarrolla de acuerdo con la ecuación logística

$$\frac{dP}{dt} = 0.05P - 0.0005P^2$$

donde t se mide en semanas.

a) ¿Cuál es la capacidad de soporte? ¿Cuál es el valor de k?

b) Se muestra un campo direccional para esta ecuación. ¿Dónde las pendientes son cercanas a 0? ¿Dónde son mayores? ¿Qué soluciones son crecientes? ¿Cuáles soluciones son decrecientes?



c) Use el campo direccional para bosquejar las soluciones para poblaciones iniciales de 20, 40, 60, 80, 120 y 140. ¿Qué tienen en común estas soluciones? ¿Cómo difieren? ¿Qué soluciones tienen puntos de inflexión? ¿A qué niveles de población se presentan?

d) ¿Cuáles son las soluciones de equilibrio? ¿Cómo se relacionan estas soluciones con las otras?

2. Suponga que una población crece de acuerdo con un modelo logístico con capacidad de soporte de 6000 y $k = 0.0015$ por año.

a) Escriba la ecuación diferencial logística para estos datos.

b) Dibuje un campo direccional (ya sea a mano o con un sistema algebraico computarizado). ¿Qué le dice acerca de las curvas solución?

c) Use el campo direccional para bosquejar las curvas solución para las poblaciones iniciales de 1000, 2000, 4000 y 8000. ¿Qué se puede decir acerca de la concavidad de estas curvas? ¿Cuál es la importancia de los puntos de inflexión?

d) Programe una calculadora o computadora para usar el método de Euler con tamaño de paso $h = 1$ para estimar la población después de 50 años si la población inicial es 1000.

e) Si la población inicial es 1000, escriba una fórmula para la población después de t años. Empléela para determinar la población después de 50 años y compárela con su estimación en el inciso d).

f) Grafique la solución del inciso e) y compare con la curva solución que bosquejó en el inciso c).

3. La pesca del mero del Pacífico ha sido representada por la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = ky\left(1 - \frac{y}{M}\right)$$

donde $y(t)$ es la biomasa (la masa total de los integrantes de la población) en kilogramos en el tiempo t (medido en años), la capacidad de soporte se estima como $M = 8 \times 10^7$ kg, y $k = 0.71$ por año.

a) Si $y(0) = 2 \times 10^7$ kg, calcule la biomasa un año después.

b) ¿En cuánto tiempo la biomasa alcanza 4×10^7 kg?

4. Suponga una población $P(t)$ que satisface

$$\frac{dP}{dt} = 0.4P - 0.001P^2 \qquad P(0) = 50$$

donde t se mide en años.

a) ¿Cuál es la capacidad de soporte?

b) ¿Qué es $P'(0)$?

c) ¿Cuándo alcanzará la población el 50% de su capacidad de soporte?

5. Suponga que una población crece de acuerdo con un modelo logístico con población inicial de 1000 y capacidad de soporte de 10000. Si la población crece a 2500 después de un año ¿cuál será la población después de otros tres años?

6. En la tabla se da el número de células de levadura en un nuevo cultivo de laboratorio.

Tiempo (horas)	Células de levadura	Tiempo (horas)	Células de levadura
0	18	10	509
2	39	12	597
4	80	14	640
6	171	16	664
8	336	18	672

a) Grafique los datos y use la gráfica para estimar la capacidad de soporte para la población de levadura.

b) Use los datos para estimar la tasa de crecimiento relativo inicial.

c) Encuentre un modelo exponencial y un modelo logístico para estos datos.

d) Compare los valores predichos con los valores observados, en una tabla y con gráficas. Comente acerca de qué tan bien ajustan sus modelos los datos.

e) Use el modelo logístico para estimar el número de células de levadura después de 7 horas.

7. La población del mundo fue cercana a 5.3 miles de millones en 1990. La tasa de nacimientos en la década de 1990 varió de 35 a 40 millones por año y la frecuencia de mortalidad varió de 15 a 20 millones por año. Suponga que la capacidad de soporte para la población mundial es 100000 millones.

a) Escriba la ecuación diferencial logística para estos datos. (Debido a que la población inicial es pequeña comparada

con la capacidad de soporte, se puede tomar k como una estimación de la rapidez de crecimiento relativo inicial.)

b) Use el modelo logístico para estimar la población mundial en el año 2000, y compare con la población real de 6100 millones.

c) Use el modelo logístico para estimar la población mundial en los años 2100 y 2500.

d) ¿Cuáles son sus predicciones si la capacidad de soporte es 50 000 millones?

8. a) Haga una suposición en cuanto a la capacidad de soporte para la población de Estados Unidos. Utilícela junto con el hecho de que la población fue de 250 millones en 1990, a fin de formular un modelo logístico para la población de Estados Unidos.

b) Determine el valor de k en su modelo usando el hecho de que la población en el año 2000 fue de 275 millones.

c) Use su modelo para predecir la población de Estados Unidos en los años 2100 y 2200.

d) Por medio de su modelo, prediga el año en que la población de Estados Unidos pasará de 350 millones.

9. Un modelo para la difusión de un rumor, es que la rapidez de difusión es proporcional al producto de la fracción y de la población que ha escuchado el rumor y la fracción que no lo ha escuchado.

a) Escriba una ecuación diferencial que se satisfaga mediante y.

b) Resuelva la ecuación diferencial.

c) Un pequeño pueblo tiene 1000 habitantes. A las 8 A.M., 80 personas han escuchado un rumor. A mediodía la mitad del pueblo lo ha escuchado. ¿En qué tiempo 90% de la población ha escuchado el rumor?

10. Unos biólogos abastecieron un lago con 400 peces y estimaron la capacidad de soporte (la población máxima para los peces de esa especie en ese lago) en 10 000. El número de peces se triplicó en el primer año.

a) Si se supone que el tamaño de la población de peces satisface la ecuación logística, encuentre una expresión para el tamaño de la población después de t años.

b) ¿En cuánto tiempo la población se incrementa a 5 000?

11. a) Demuestre que si P satisface la ecuación logística [4], entonces

$$\frac{d^2P}{dt^2} = k^2P\left(1 - \frac{P}{M}\right)\left(1 - \frac{2P}{M}\right)$$

b) Deduzca que una población crece más rápido cuando alcanza la mitad de su capacidad de soporte.

12. Para un valor fijo de M (por ejemplo $M = 10$), la familia de funciones logísticas dada por la ecuación 7 depende del valor inicial de P_0 y la constante de proporcionalidad k. Grafique varios integrantes de esta familia. ¿Cómo cambia la gráfica cuando varía P_0? ¿Cómo cambia cuando varía k?

13. La tabla proporciona la población semestral de Japón, en miles, desde 1960 hasta 2005.

Año	Población	Año	Población
1960	94 092	1985	120 754
1965	98 883	1990	123 537
1970	104 345	1995	125 341
1975	111 573	2000	126 700
1980	116 807	2005	127 417

Utilice una calculadora graficadora para ajustar tanto una función exponencial como una función logística de esta información. Grafique los puntos de información y ambas funciones, y comente sobre la exactitud de las representaciones. [*Sugerencia:* reste 94 000 de cada una de las cifras de población. A continuación, después de obtener una representación de su calculadora, sume 94 000 para obtener su modelo final. Podría ser útil elegir $t = 0$ para corresponder a 1960 o bien 1980.]

14. La tabla proporciona la población semestral de España, en miles, desde 1955 hasta 2000.

Año	Población	Año	Población
1955	29 319	1980	37 488
1960	30 641	1985	38 535
1965	32 085	1990	39 351
1970	33 876	1995	39 750
1975	35 564	2000	40 016

Utilice una calculadora graficadora para ajustar tanto una función exponencial como una función logística de esta información. Grafique los puntos de información y ambas funciones, y comente sobre la exactitud de las representaciones. [*Sugerencia:* reste 29 000 de cada una de las cifras de población. A continuación, después de obtener un modelo de su calculadora, sume 29 000 para obtener su representación final. Podría ser útil elegir $t = 0$ para corresponder a 1955 o bien 1975.]

15. Considere una población $P = P(t)$ con rapidez de nacimiento y de mortalidad constante α y β, respectivamente y una razón m de emigración constante, donde α, β y m son constantes positivas. Suponga que $\alpha > \beta$. Entonces la razón de cambio de la población en el tiempo t se modela mediante la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP - m \qquad \text{donde } k = \alpha - \beta$$

a) Hallar la solución de esta ecuación que satisface la condición inicial $P(0) = P_0$.

b) ¿Qué condición de m conducirá a una expansión exponencial de la población?

c) ¿Qué condición de m dará como resultado una población constante? ¿Una población que decline?

d) En 1847, la población de Irlanda fue de casi 8 millones y la diferencia entre las tasas de nacimiento relativo y la mortalidad fue de 1.6% de la población. Debido a la escasez de papas en las décadas de 1840 y 1850, casi 210 000 habitantes por

cada año emigraron de Irlanda. ¿En ese tiempo la población se expandió o fue declinante?

16. Sea c un número positivo. Una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dt} = ky^{1+c}$$

donde k es una constante positiva, se le denomina *ecuación del día del juicio final* ya que el exponente en la expresión ky^{1+c} es más grande que el exponente 1 para el crecimiento natural.

a) Determine la solución que satisface la condición inicial $y(0) = y_0$.

b) Demuestre que existe un tiempo finito $t = T$ (del juicio final) tal que $\lim_{t \to T^-} y(t) = \infty$.

c) Una especie especialmente prolífica de conejos tiene el término de crecimiento $My^{1.01}$. Si 2 de tal especie de conejos al principio y en la madriguera tiene 16 conejos después de tres meses, entonces ¿cuándo es el día del juicio final?

17. La ecuación diferencial logística del ejemplo 1 se modificará como sigue

$$\frac{dP}{dt} = 0.08P\left(1 - \frac{P}{1000}\right) - 15$$

a) Suponga que $P(t)$ representa una población de peces en el tiempo t, donde t se mide en semanas. Explique el significado del término (-15).

b) Trace un campo direccional para esta ecuación diferencial.

c) ¿Cuáles son las soluciones de equilibrio?

d) Use el campo direccional para bosquejar varias curvas solución. Describa lo que sucede a la población de peces para diferentes poblaciones iniciales.

SAC e) Resuelva esta ecuación diferencial de manera explícita, ya sea por medio de fracciones parciales o con un sistema algebraico computarizado. Use las poblaciones iniciales 200 y 300. Grafique las soluciones y compare con sus bosquejos del inciso d).

SAC **18.** Considere la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = 0.08P\left(1 - \frac{P}{1000}\right) - c$$

como un modelo para una población de peces, donde t se mide en semanas y c es una constante.

a) Use un SAC para trazar los campos direccionales para varios valores de c.

b) De sus campos direccionales del inciso a), determine los valores de c para los cuales hay por lo menos una solución de equilibrio. ¿Para qué valores de c la población de peces se extingue siempre?

c) Use la ecuación diferencial para probar lo que descubrió en forma gráfica en el inciso b).

d) ¿Qué recomendaría como límite para la captura semanal de esta población de peces?

19. Existe evidencia considerable para apoyar la teoría de que para algunas especies hay una población mínima m tal que las especies se extinguirán si el tamaño de la población cae por debajo de m. Esta condición se puede incorporar en la ecuación logística introduciendo el factor $(1 - m/P)$. Así, el modelo logístico modificado está dado por la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right)\left(1 - \frac{m}{P}\right)$$

a) Use la ecuación diferencial para demostrar que cualquier solución es creciente si $m < P < M$ y decreciente si $0 < P < m$.

b) Para el caso donde $k = 0.08$, $M = 1000$ y $m = 200$, dibuje un campo direccional y utilícelo para bosquejar varias curvas solución. Describa lo que sucede a la población para varias poblaciones iniciales. ¿Cuáles son las soluciones de equilibrio?

c) Resuelva la ecuación diferencial de forma explícita, ya sea por medio de fracciones parciales o con un sistema algebraico computacional. Use la población inicial P_0.

d) Use la solución del inciso c) para demostrar que si $P_0 < m$, entonces la especie se extingue. [*Sugerencia:* demuestre que el numerador en su expresión para $P(t)$ es 0 para algún valor de t.]

20. Otro modelo para una función de crecimiento de una población limitada está dado por la **función de Gompertz**, que es una solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = c \ln\left(\frac{M}{P}\right)P$$

donde c es una constante y M es la capacidad de soporte.

a) Resuelva esta ecuación diferencial.

b) Calcule $\lim_{t \to \infty} P(t)$.

c) Grafique la función de crecimiento de Gompertz para $M = 1000$, $P_0 = 100$ y $c = 0.05$, y compárela con la función logística del ejemplo 2. ¿Cuáles son las semejanzas? ¿Cuáles son las diferencias?

d) Se sabe del ejercicio 11 que la función logística crece más rápido cuando $P = M/2$. Use la ecuación diferencial de Gompertz para demostrar que la función de Gompertz crece más rápido cuando $P = M/e$.

21. En un **modelo de crecimiento estacional**, se introduce una función periódica del tiempo para explicar las variaciones estacionales en la tasa de crecimiento. Tales variaciones podrían, por ejemplo, ser causadas por cambios estacionales en la disponibilidad de alimento.

a) Encuentre la solución del modelo de crecimiento estacional

$$\frac{dP}{dt} = kP\cos(rt - \phi) \qquad P(0) = P_0$$

donde k, r y ϕ son constantes positivas.

b) Grafique la solución para diferentes valores de k, r y ϕ y explique cómo afectan a la solución los valores de k, r y ϕ. ¿Qué puede decir acerca de $\lim_{t \to \infty} P(t)$?

22. Suponga que se modifica la ecuación diferencial del ejercicio 21 como sigue:

$$\frac{dP}{dt} = kP\cos^2(rt - \phi) \qquad P(0) = P_0$$

a) Resuelva esta ecuación diferencial con la ayuda de una tabla de integrales o un SAC.

b) Grafique la solución para varios valores de k, r y ϕ. ¿Cómo afectan a la solución los valores de k, r y ϕ? ¿Qué se puede decir acerca de $\lim_{t\to\infty} P(t)$ en este caso?

23. Las gráficas de las funciones logísticas (figuras 2 y 3) se ven sospechosamente similares a la gráfica de la función tangente hiperbólica (figura 3 en la sección 3.11). Explique la semejanza demostrando que la función logística dada por la ecuación 7 se puede escribir como

$$P(t) = \tfrac{1}{2}M\left[1 + \tanh\left(\tfrac{1}{2}k(t - c)\right)\right]$$

donde $c = (\ln A)/k$. Así, la función logística es en realidad una tangente hiperbólica desplazada.

9.5 Ecuaciones lineales

Una ecuación diferencial **lineal** de primer orden es una que se puede escribir en la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{1}$$

donde P y Q son funciones continuas sobre un determinado intervalo. Este tipo de ecuación se presenta con frecuencia en varias ciencias, como se verá.

Un ejemplo de una ecuación lineal es $xy' + y = 2x$ porque, para $x \neq 0$, se puede escribir en la forma

$$y' + \frac{1}{x}y = 2 \tag{2}$$

Observe que esta ecuación diferencial no es separable porque es imposible factorizar la expresión para y' como una función de x por una función de y. Pero aún se puede resolver la ecuación si se observa, por la regla del producto, que

$$xy' + y = (xy)'$$

y, por tanto, la ecuación se puede reescribir como

$$(xy)' = 2x$$

Si ahora se integran ambos lados de esta ecuación, se obtiene

$$xy = x^2 + C \quad \text{o} \quad y = x + \frac{C}{x}$$

Si se hubiera tenido la ecuación diferencial en la forma de la ecuación 2, se habría tenido que tomar el paso preliminar de multiplicar cada lado de la ecuación por x.

Resulta que toda ecuación diferencial lineal de primer orden se puede resolver de un modo similar al multiplicar ambos lados de la ecuación 1 por una función adecuada $I(x)$ llamada *factor integrante*. Se intenta hallar I de modo que el lado izquierdo de la ecuación 1, cuando se multiplique por $I(x)$, se convierta en la derivada del producto $I(x)y$:

$$I(x)\big(y' + P(x)y\big) = \big(I(x)y\big)' \tag{3}$$

Si se puede hallar tal función I, entonces la ecuación 1 se convierte en

$$\big(I(x)y\big)' = I(x)Q(x)$$

Al integrar ambos lados, se debe tener

$$I(x)y = \int I(x)\,Q(x)\,dx + C$$

de modo que la solución sería

$$y(x) = \frac{1}{I(x)}\left[\int I(x)\,Q(x)\,dx + C\right] \quad \boxed{4}$$

Para hallar tal I, se desarrolla la ecuación 3 y se cancelan términos:

$$I(x)y' + I(x)\,P(x)y = \big(I(x)y\big)' = I'(x)y + I(x)y'$$

$$I(x)\,P(x) = I'(x)$$

Ésta es una ecuación diferencial separable para I, que se resuelve como sigue:

$$\int \frac{dI}{I} = \int P(x)\,dx$$

$$\ln|I| = \int P(x)\,dx$$

$$I = Ae^{\int P(x)\,dx}$$

donde $A = \pm e^{C}$. Se busca un factor integrante particular, no el más general, así que se toma $A = 1$ y se usa

$$I(x) = e^{\int P(x)\,dx} \quad \boxed{5}$$

Así, la ecuación 4 da una fórmula para la solución general de la ecuación 1, donde I se determina mediante la ecuación 5. Sin embargo, en lugar de memorizar esta fórmula, sólo se recuerda la forma del factor integrante.

Para resolver la ecuación diferencial lineal $y' + P(x)\,y = Q(x)$, multiplicamos ambos lados por el **factor integrante** $I(x) = e^{\int P(x)\,dx}$ e integramos ambos lados.

V EJEMPLO 1 Resuelva la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} + 3x^2y = 6x^2$.

SOLUCIÓN La ecuación dada es lineal, puesto que tiene la forma de la ecuación 1 con $P(x) = 3x^2$ y $Q(x) = 6x^2$. Un factor integrante es

$$I(x) = e^{\int 3x^2\,dx} = e^{x^3}$$

Al multiplicar ambos lados de la ecuación diferencial por e^{x^3}, se obtiene

$$e^{x^3}\frac{dy}{dx} + 3x^2e^{x^3}y = 6x^2e^{x^3}$$

o bien,

$$\frac{d}{dx}\left(e^{x^3}y\right) = 6x^2e^{x^3}$$

En la figura 1 se muestran las gráficas de varios miembros de la familia de soluciones del ejemplo 1. Observe que se aproximan a 2 cuando $x \to \infty$.

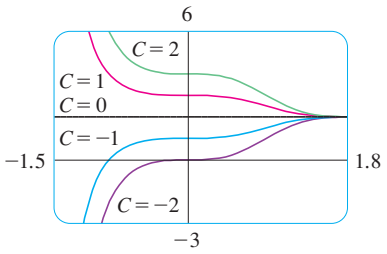


FIGURA 1

Al integrar ambos lados se tiene

$$e^{x^3}y = \int 6x^2e^{x^3}\,dx = 2e^{x^3} + C$$

$$y = 2 + Ce^{-x^3}$$

V EJEMPLO 2 Encuentre la solución del problema con valor inicial

$$x^2y' + xy = 1 \qquad x > 0 \qquad y(1) = 2$$

SOLUCIÓN Se deben dividir primero ambos lados entre el coeficiente de y' para escribir la ecuación diferencial en la forma estándar:

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2} \qquad x > 0 \tag{6}$$

El factor integrante es

$$I(x) = e^{\int (1/x)\,dx} = e^{\ln x} = x$$

Al multiplicar la ecuación 6 por x, se obtiene

$$xy' + y = \frac{1}{x} \quad \text{o} \quad (xy)' = \frac{1}{x}$$

Entonces

$$xy = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C$$

y, de este modo,

$$y = \frac{\ln x + C}{x}$$

La solución del problema de valor inicial del ejemplo 2 se muestra en la figura 2.

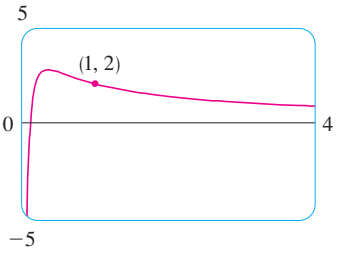


FIGURA 2

Puesto que $y(1) = 2$, se tiene

$$2 = \frac{\ln 1 + C}{1} = C$$

En consecuencia, la solución del problema con valores iniciales es

$$y = \frac{\ln x + 2}{x}$$

EJEMPLO 3 Resuelva $y' + 2xy = 1$.

SOLUCIÓN La ecuación dada está en la forma estándar para una ecuación lineal. Al multiplicar por el factor integrante

$$e^{\int 2x\,dx} = e^{x^2}$$

se obtiene

$$e^{x^2}y' + 2xe^{x^2}y = e^{x^2}$$

o bien,

$$\left(e^{x^2}y\right)' = e^{x^2}$$

Por tanto

$$e^{x^2}y = \int e^{x^2}\,dx + C$$

Aun cuando las soluciones de la ecuación diferencial del ejemplo 3 se pueden expresar en términos de una integral, aun se pueden graficar mediante un sistema algebraico computarizado (figura 3).

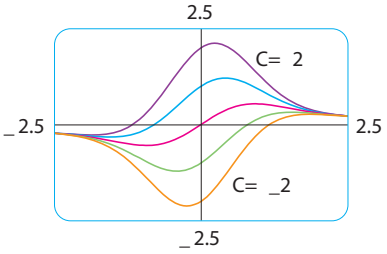


FIGURA 3

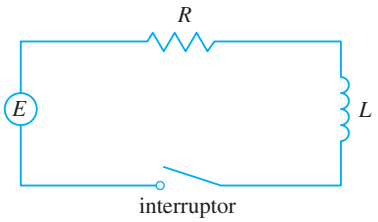


FIGURA 4

Recuerde de la sección 7.5 que $\int e^{x^2}\,dx$ no se puede expresar en términos de funciones elementales. Sin embargo, es una función perfectamente buena y se puede dejar la respuesta como

$$y = e^{-x^2}\int e^{x^2}\,dx + Ce^{-x^2}$$

Otra forma de escribir la solución es

$$y = e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt + Ce^{-x^2}$$

(Se puede elegir cualquier número para el límite de integración inferior.)

Aplicación a circuitos eléctricos

En la sección 9.2 se consideró el circuito eléctrico simple mostrado en la figura 4: una fuerza electromotriz (por lo común, una batería o generador) produce un voltaje de $E(t)$ voltios (V) y una corriente de $I(t)$ amperes (A) en el tiempo t. El circuito también contiene un resistor con una resistencia de R ohms Ω y un inductor con una inductancia de L henrios (H).

La ley de Ohm da la caída de voltaje debida al resistor como RI. La caída de voltaje debida al inductor es $L(dI/dt)$. Una de las leyes de Kirchhoff dice que la suma de las caídas de voltaje es igual al voltaje suministrado $E(t)$. Así, se tiene

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t) \tag{7}$$

que es una ecuación diferencial lineal de primer orden. La solución da la corriente I en el tiempo t.

V EJEMPLO 4 Suponga que en el circuito simple de la figura 4 la resistencia es 12 Ω y la inductancia es 4 H. Si una batería da un voltaje constante de 60 V y el interruptor se cierra cuando $t = 0$ de modo que la corriente empieza con $I(0) = 0$, encuentre a) $I(t)$, b) la corriente después de 1 s y c) el valor límite de la corriente.

SOLUCIÓN

La ecuación diferencial del ejemplo 4 es lineal y separable, así que un método alternativo es resolverla como una ecuación separable (ejemplo 4 de la sección 9.3). Sin embargo, si se reemplaza la batería por un generador, se obtiene una ecuación que es lineal pero no es separable (ejemplo 5).

a) Si se escribe $L = 4$, $R = 12$ y $E(t) = 60$ en la ecuación 7, se obtiene el problema con valores iniciales

$$4\frac{dI}{dt} + 12I = 60 \qquad I(0) = 0$$

o bien,

$$\frac{dI}{dt} + 3I = 15 \qquad I(0) = 0$$

Al multiplicar por el factor integrante $e^{\int 3\,dt} = e^{3t}$, se obtiene

$$e^{3t}\frac{dI}{dt} + 3e^{3t}I = 15e^{3t}$$

$$\frac{d}{dt}(e^{3t}I) = 15e^{3t}$$

$$e^{3t}I = \int 15e^{3t}\,dt = 5e^{3t} + C$$

$$I(t) = 5 + Ce^{-3t}$$

En la figura 5 se muestra cómo la corriente del ejemplo 4 se aproxima a su valor límite.

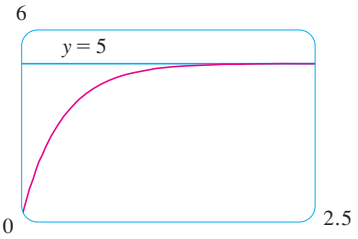


FIGURA 5

Puesto que $I(0) = 0$, se tiene $5 + C = 0$, por tanto, $C = -5$ e

$$I(t) = 5(1 - e^{-3t})$$

b) Después de un segundo, la corriente es

$$I(1) = 5(1 - e^{-3}) \approx 4.75 \text{ A}$$

c) El valor límite de la corriente está dado por

$$\lim_{t \to \infty} I(t) = \lim_{t \to \infty} 5(1 - e^{-3t}) = 5 - 5 \lim_{t \to \infty} e^{-3t} = 5 - 0 = 5$$

EJEMPLO 5 Suponga que la resistencia y la inductancia permanecen como en el ejemplo 4 pero, en lugar de la batería, se usa un generador que produce un voltaje variable de $E(t) = 60 \operatorname{sen} 30t$ volts. Encuentre $I(t)$.

SOLUCIÓN Esta vez la ecuación diferencial se convierte en

$$4\frac{dI}{dt} + 12I = 60 \operatorname{sen} 30t \quad \text{o} \quad \frac{dI}{dt} + 3I = 15 \operatorname{sen} 30t$$

El mismo factor integrante e^{3t} da

$$\frac{d}{dt}(e^{3t}I) = e^{3t}\frac{dI}{dt} + 3e^{3t}I = 15e^{3t} \operatorname{sen} 30t$$

En la figura 6 se muestra la gráfica de la corriente cuando se reemplaza la batería por un generador.

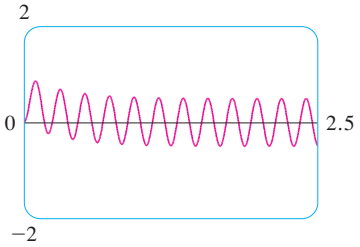


FIGURA 6

Por medio de la fórmula 98 de la tabla de integrales, se tiene

$$e^{3t}I = \int 15e^{3t} \operatorname{sen} 30t\, dt = 15\,\frac{e^{3t}}{909}(3 \operatorname{sen} 30t - 30 \cos 30t) + C$$

$$I = \tfrac{5}{101}(\operatorname{sen} 30t - 10 \cos 30t) + Ce^{-3t}$$

Puesto que $I(0) = 0$ se obtiene

$$-\tfrac{50}{101} + C = 0$$

Por tanto, $I(t) = \tfrac{5}{101}(\operatorname{sen} 30t - 10 \cos 30t) + \tfrac{50}{101}e^{-3t}$

9.5 Ejercicios

1-4 Determine si la ecuación diferencial es lineal.

1. $x - y' = xy$

2. $y' + xy^2 = \sqrt{x}$

3. $y' = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$

4. $y \operatorname{sen} x = x^2y' - x$

5-14 Resuelva la ecuación diferencial.

5. $y' + y = 1$

6. $y' - y = e^x$

7. $y' = x - y$

8. $4x^3y + x^4y' = \operatorname{sen}^3 x$

9. $xy' + y = \sqrt{x}$

10. $y' + y = \operatorname{sen}(e^x)$

11. $\operatorname{sen} x \dfrac{dy}{dx} + (\cos x)y = \operatorname{sen}(x^2)$

12. $x\dfrac{dy}{dx} - 4y = x^4e^x$

13. $(1 + t)\dfrac{du}{dt} + u = 1 + t, \quad t > 0$

14. $t \ln t \dfrac{dr}{dt} + r = te^t$

15-20 Resuelva el problema con valor inicial.

15. $x^2y' + 2xy = \ln x, \quad y(1) = 2$

16. $t^3 \dfrac{dy}{dt} + 3t^2 y = \cos t, \quad y(\pi) = 0$

17. $t \dfrac{du}{dt} = t^2 + 3u, \quad t > 0, \quad u(2) = 4$

18. $2xy' + y = 6x, \quad x > 0, \quad y(4) = 20$

19. $xy' = y + x^2 \operatorname{sen} x, \quad y(\pi) = 0$

20. $(x^2 + 1) \dfrac{dy}{dx} + 3x(y - 1) = 0, \quad y(0) = 2$

21-22 Resuelva la ecuación diferencial y utilice una calculadora o computadora para graficar varios miembros de la familia de soluciones. ¿Cómo cambia la curva solución cuando varía C?

21. $xy' + 2y = e^x$

22. $xy' = x^2 + 2y$

23. Una **ecuación diferencial de Bernoulli** (en honor a James Bernoulli) es de la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

Observe que, si $n = 0$ o 1, la ecuación de Bernoulli es lineal. Para otros valores de n, demuestre que la sustitución $u = y^{1-n}$ transforma la ecuación de Bernoulli en la ecuación lineal

$$\frac{du}{dx} + (1 - n)P(x)u = (1 - n)Q(x)$$

24-25 Use el método del ejercicio 23 para resolver la ecuación diferencial.

24. $xy' + y = -xy^2$

25. $y' + \dfrac{2}{x}y = \dfrac{y^3}{x^2}$

26. Resuelva la ecuación de segundo orden $xy'' + 2y' = 12x^2$ haciendo la sustitución $u = y'$.

27. En el circuito mostrado en la figura 4, una batería suministra un voltaje de 40 V, la inductancia es 2 H, la resistencia es 10 Ω e $I(0) = 0$.
a) Encuentre $I(t)$.
b) Determine la corriente después de 0.1 s.

28. En el circuito mostrado en la figura 4, un generador suministra un voltaje de $E(t) = 40 \operatorname{sen} 60t$ volts, la inductancia es 1 H, la resistencia es 20 Ω e $I(0) = 1$ A.
a) Encuentre $I(t)$.
b) Determine la corriente después de 0.1 s.
c) Use un dispositivo de graficación para dibujar la gráfica de la función corriente.

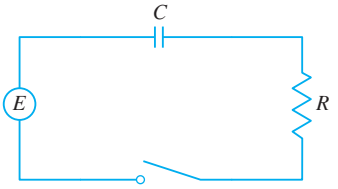
29. En la figura se muestra un circuito que contiene una fuerza electromotriz, un capacitor con capacitancia C farads (F) y un resistor con una resistencia de R ohms (Ω). La caída de voltaje en el capacitor es Q/C, donde Q es la carga (en coulombs), así que en este caso la ley de Kirchhoff da

$$RI + \frac{Q}{C} = E(t)$$

Pero $I = dQ/dt$ (véase el ejemplo 3 en la sección 3.7), de este modo se tiene

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

Suponga que la resistencia es 5 Ω, la capacitancia es 0.05 F, una batería de un voltaje constante de 60 V y la carga inicial es $Q(0) = 0$ C. Encuentre la carga y la corriente en el tiempo t.



30. En el circuito del ejercicio 29, $R = 2$ Ω, $C = 0.01$ F, $Q(0) = 0$ y $E(t) = 10 \operatorname{sen} 60t$. Encuentre la carga y la corriente en el tiempo t.

31. Sea $P(t)$ el nivel de desempeño de alguien que aprende una habilidad como una función de tiempo de entrenamiento t. La gráfica de P se llama *curva de aprendizaje*. En el ejercicio 15 de la sección 9.1 se propuso la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = k[M - P(t)]$$

como un modelo razonable para el aprendizaje, donde k es una constante positiva. Resuélvala como una ecuación diferencial lineal y use su solución para graficar la curva de aprendizaje.

32. Se contrató a dos nuevos trabajadores para una línea de ensamble. Jaime procesó 25 unidades durante la primera hora y 45 unidades durante la segunda hora. Marco procesó 35 unidades durante la primera hora y 50 unidades durante la segunda hora. Por medio del modelo del ejercicio 31, y suponiendo que $P(0) = 0$, estime el número máximo de unidades por hora que cada trabajador es capaz de procesar.

33. En la sección 9.3 se examinaron problemas de mezclas en los que el volumen de líquido permaneció constante y se vio que tales problemas dan lugar a ecuaciones separables. (Véase el ejemplo 6 de esa sección.) Si las relaciones de flujo hacia dentro y hacia fuera del sistema son diferentes, entonces el volumen no es constante y la ecuación diferencial resultante es lineal pero no separable.

Un tanque contiene 100 L de agua. Una solución con una concentración de sal de 0.4 kg/L se agrega en una proporción de 5 L/min. La solución se mantiene mezclada y se drena del tanque a una rapidez de 3 L/min. Si $y(t)$ es la cantidad de sal (en kilogramos) después de t minutos, demuestre que y satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = 2 - \frac{3y}{100 + 2t}$$

Resuelva esta ecuación y determine la concentración después de 20 minutos.

34. Un tanque con una capacidad de 400 L se llena con una mezcla de agua y cloro con una concentración de 0.05 g de cloro por

litro. A fin de reducir la concentración de cloro, se bombea agua nueva hacia el recipiente a razón de 4 L/s. La mezcla se mantiene agitada y se bombea hacia afuera a razón de 10 L/s. Encuentre la cantidad de cloro en el recipiente como una función del tiempo.

35. Un objeto con masa m se deja caer desde el reposo y se supone que la resistencia del aire es proporcional a la rapidez del objeto. Si $s(t)$ es la distancia recorrida después de t segundos, entonces la rapidez es $v = s'(t)$ y la aceleración es $a = v'(t)$. Si g es la aceleración debida a la gravedad, entonces la fuerza hacia abajo sobre el objeto es $mg - cv$, donde c es una constante positiva, y la segunda ley de Newton da

$$m\frac{dv}{dt} = mg - cv$$

a) Resuélvala como una ecuación lineal para demostrar que

$$v = \frac{mg}{c}\left(1 - e^{-ct/m}\right)$$

b) ¿Cuál es la velocidad límite?

c) Encuentre la distancia que ha recorrido el objeto después de t segundos.

36. Si se ignora la resistencia del aire, se puede concluir que los objetos más pesados no caen más rápido que los objetos ligeros. Pero si se toma en cuenta la resistencia del aire, la conclusión cambia. Use la expresión para la velocidad de un objeto que cae en el ejercicio 35a) para hallar dv/dm y demuestre que los objetos más pesados *caen* más rápido que los más ligeros.

37. a) Demuestre que la sustitución $z = 1/P$ transforma la ecuación diferencial logística $P' = kP(1 - P/M)$ en la ecuación diferencial lineal

$$z' + kz = \frac{k}{M}$$

b) Resuelva la ecuación diferencial lineal del inciso a) para obtener una expresión para $P(t)$. Compárela con la cuación 9.4.7.

38. Para considerar la variación estacional en la ecuación diferencial logística, tenemos que hacer que k y M sean funciones de t:

$$\frac{dP}{dt} = k(t)P\left(1 - \frac{P}{M(t)}\right)$$

a) verifique que la sustitución $z = 1/P$ transforma esta ecuación en la ecuación lineal

$$\frac{dz}{dt} + k(t)z = \frac{k(t)}{M(t)}$$

b) Escriba una expresión para la solución de la ecuación lineal del inciso a) y utilícela para demostrar que si la capacidad de carga M es constante, entonces

$$P(t) = \frac{M}{1 + CMe^{-\int k(t)\,dt}}$$

Deduzca que si $\int_0^\infty k(t)\,dt = \infty$, entonces $\lim_{t\to\infty} P(t) = M$. [Esto es cierto si $k(t) = k_0 + a\cos bt$ con $k_0 > 0$, lo cual describe una tasa de crecimiento intrínseco con una variación estacional periódica.]

c) Si k es constante pero M varía, demuestre que

$$z(t) = e^{-kt}\int_0^t \frac{ke^{ks}}{M(s)}\,ds + Ce^{-kt}$$

y utilice la regla de l'Hospital para deducir que si $M(t)$ tiene un límite cuando $t \to \infty$, entonces $P(t)$ tiene el mismo límite.

9.6 Sistemas depredador-presa

Se ha observado una variedad de modelos para el crecimiento de una sola especie que vive sola en un ambiente. En esta sección se consideran modelos más reales que toman en cuenta la interacción de dos especies en el mismo hábitat. Se verá que estos modelos toman la forma de un par de ecuaciones diferenciales vinculadas.

Primero consideramos la situación en que una especie, llamada *presa*, tiene un suministro amplio de alimento y la segunda especie, llamada *depredador*, se alimenta de la presa. Ejemplos de presas y depredadores incluyen conejos y lobos en un bosque aislado, peces y tiburones, pulgones y mariquitas y bacterias y amibas. El modelo tendrá dos variables dependientes, y ambas son funciones del tiempo. Sea $R(t)$ el número de presas (con R que representa conejos) y $W(t)$ el número de depredadores (con W para lobos) en el tiempo t.

En ausencia de depredadores, el suministro amplio de alimento apoyaría el crecimiento exponencial de la presa, es decir,

$$\frac{dR}{dt} = kR \qquad \text{donde } k \text{ es una constante positiva}$$

En ausencia de la presa, se supone que la población de depredadores disminuiría con una

rapidez proporcional a sí misma, es decir,

$$\frac{dW}{dt} = -rW \qquad \text{donde } r \text{ es una constante positiva}$$

Sin embargo, con ambas especies presentes, se supone que la causa principal de muerte entre la presa que está siendo comida por un depredador y los ritmos de natalidad y supervivencia de los depredadores depende de su suministro de alimento variable, es decir, la presa. Se supone también que las dos especies se encuentran entre sí con una frecuencia que es proporcional a ambas poblaciones y, por tanto, es proporcional al producto RW. (Mientras mayor sea la cantidad de cualquier población, es más probable que haya mayor número de encuentros.) Un sistema de dos ecuaciones diferenciales que incorpora estas suposiciones, es como sigue:

W representa el depredador.
R representa la presa.

$$\boxed{1} \qquad \frac{dR}{dt} = kR - aRW \qquad \frac{dW}{dt} = -rW + bRW$$

donde k, r, a y b son constantes positivas. Observe que el término $-aRW$ disminuye la rapidez de crecimiento natural de la presa y el término bRW incrementa la rapidez de crecimiento natural de los depredadores.

El matemático italiano Vito Volterra (1860-1940) propuso las ecuaciones de Lotka-Volterra como un modelo para explicar las variaciones en las poblaciones de tiburones y peces en el mar Adriático.

Las ecuaciones en $\boxed{1}$ se conocen como **ecuaciones depredador-presa**, o **ecuaciones de Lotka-Volterra**. Una **solución** de este sistema de ecuaciones es un par de funciones $R(t)$ y $W(t)$ que describe las poblaciones de presa y depredador como funciones del tiempo. Ya que el sistema está acoplado (R y W aparecen en ambas ecuaciones), no se puede resolver una ecuación y luego la otra; se tienen que resolver en forma simultánea. Desafortunadamente, por lo general es imposible hallar fórmulas explícitas para R y W como funciones de t. Sin embargo, se pueden emplear métodos gráficos para analizar las ecuaciones.

V EJEMPLO 1 Suponga que las poblaciones de conejos y lobos se describen mediante las ecuaciones de Lotka-Volterra $\boxed{1}$ con $k = 0.08$, $a = 0.001$, $r = 0.02$ y $b = 0.00002$. El tiempo t se mide en meses.

a) Encuentre las soluciones constantes (llamadas **soluciones de equilibrio**) e interprete la respuesta.

b) Use el sistema de ecuaciones diferenciales con el fin de hallar una expresión para dW/dR.

c) Dibuje un campo direccional para la ecuación diferencial resultante en el plano RW. Después use ese campo direccional para hallar algunas curvas solución.

d) Suponga que, en algún punto del tiempo, hay 1000 conejos y 40 lobos. Dibuje la curva solución correspondiente y empléela para describir los cambios en ambos niveles de población.

e) Use el inciso d) para bosquejar R y W como funciones de t.

SOLUCIÓN

a) Con los valores dados de k, a, r y b, las ecuaciones de Lotka-Volterra se convierten en

$$\frac{dR}{dt} = 0.08R - 0.001RW$$

$$\frac{dW}{dt} = -0.02W + 0.00002RW$$

Tanto R como W serán constantes si ambas derivadas son 0, es decir,

$$R' = R(0.08 - 0.001W) = 0$$

$$W' = W(-0.02 + 0.00002R) = 0$$

Una solución está dada por $R = 0$ y $W = 0$. (Esto tiene sentido: si no hay conejos o lobos, las poblaciones no se incrementan.) La otra solución constante es

$$W = \frac{0.08}{0.001} = 80 \qquad R = \frac{0.02}{0.00002} = 1000$$

Así que las poblaciones de equilibrio constan de 80 lobos y 1000 conejos. Esto significa que 1000 conejos son suficientes para soportar una población constante de 80 lobos. No hay ni muchos lobos (lo cual daría como resultado menos conejos) ni pocos lobos (lo que produciría más conejos).

b) Usamos la regla de la cadena para eliminar t:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dW}{dR}\frac{dR}{dt}$$

por consiguiente,

$$\frac{dW}{dR} = \frac{\dfrac{dW}{dt}}{\dfrac{dR}{dt}} = \frac{-0.02W + 0.00002RW}{0.08R - 0.001RW}$$

c) Si se considera a W como una función de R, se tiene la ecuación diferencial

$$\frac{dW}{dR} = \frac{-0.02W + 0.00002RW}{0.08R - 0.001RW}$$

Dibujamos el campo direccional para esta ecuación diferencial en la figura 1 y la empleamos para bosquejar varias curvas solución en la figura 2. Si nos movemos a lo largo de una curva solución, se observa cómo cambia la relación entre R y W conforme pasa el tiempo. Observe que al parecer las curvas están cercanas en el sentido de que si se viaja a lo largo de una curva, siempre se vuelve al mismo punto. Observe también que el punto (1000, 80) está dentro de todas las curvas solución. Ese punto se llama *punto de equilibrio* porque corresponde a la solución de equilibrio $R = 1000$, $W = 80$.

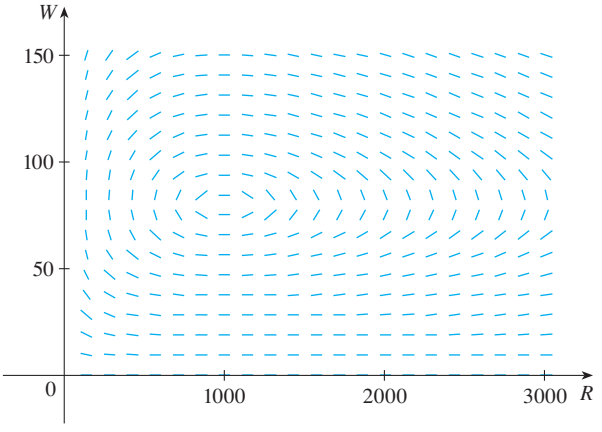


FIGURA 1 Campo direccional para el sistema depredador-presa

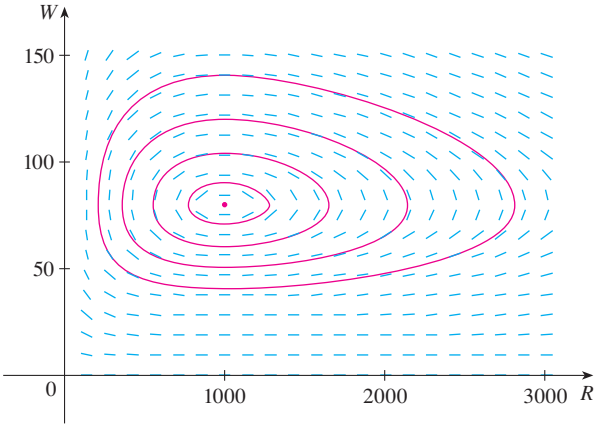


FIGURA 2 Retrato de fase del sistema

Cuando se representan soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales como en la figura 2, nos referimos al plano RW como el **plano fase**, y llamamos **trayectorias de fase** a las curvas solución. Así, una trayectoria de fase es una que se traza mediante las soluciones (R, W) conforme pasa el tiempo. Un **retrato de fase** consta de puntos de equilibrio y trayectorias de fase representativas, como se muestra en la figura 2.

d) Empezar con 1000 conejos y 40 lobos corresponde a trazar la curva solución por el punto $P_0(1000, 40)$. En la figura 3 se muestra esta trayectoria de fase sin el campo direccional. Si se empieza en el punto P_0 en el tiempo $t = 0$ y se incrementa t, ¿se va en el sentido de las manecillas del reloj o al contrario alrededor de la trayectoria fase? Si se escribe $R = 1000$ y $W = 40$ en la primera ecuación diferencial, se obtiene

$$\frac{dR}{dt} = 0.08(1000) - 0.001(1000)(40) = 80 - 40 = 40$$

Puesto que $dR/dt > 0$, se concluye que R es creciente en P_0 y, por tanto, se va en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor de la trayectoria de fase.

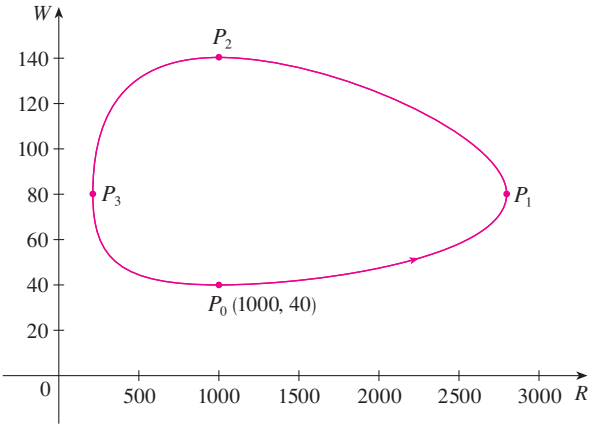


FIGURA 3
Trayectoria de fase por (1000, 40)

Se ve que en P_0 no hay suficientes lobos para mantener un equilibrio entre las poblaciones, así que se incrementa la población de conejos. Eso da como resultado más lobos y, en algún momento, hay tantos lobos que los conejos tienen dificultades para evitarlos. Así, el número de conejos comienza a disminuir (en P_1, donde se estima que R llega a su población máxima de casi 2 800). Esto significa que en algún tiempo posterior la población de lobos comienza a bajar (en P_2, donde $R = 1000$ y $W \approx 140$). Pero esto beneficia a los conejos, así que su población comienza a crecer después (en P_3, donde $W = 80$ y $R \approx 210$). Como consecuencia, la población de lobos finalmente comienza a crecer también. Esto sucede cuando las poblaciones vuelven a sus valores iniciales de $R = 1000$ y $W = 40$, y el ciclo completo comienza de nuevo.

e) De la descripción del inciso d) de cómo aumentan y disminuyen las poblaciones de conejos y lobos, se pueden bosquejar las gráficas de $R(t)$ y $W(t)$. Suponga que los puntos P_1, P_2 y P_3 en la figura 3 se alcanzan en los tiempos t_1, t_2 y t_3. Entonces se pueden bosquejar las gráficas de R y W como en la figura 4.

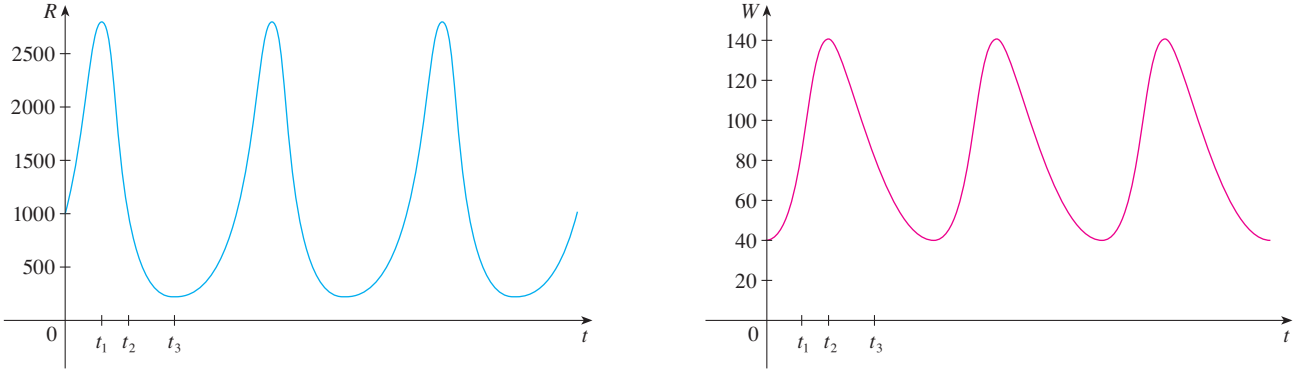


FIGURA 4 Gráficas de las poblaciones de conejos y lobos como funciones del tiempo

TEC En Module 9.6 se pueden cambiar los coeficientes en las ecuaciones Lotka-Volterra y observar los cambios en la trayectoria de fase y las gráficas de población de conejos y lobos.

A fin de facilitar la comparación de las gráficas, se trazan en los mismos ejes, pero con escalas distintas para R y W, como en la figura 5. Observe que los conejos alcanzan sus poblaciones máximas cerca de un cuarto de ciclo antes que los lobos.

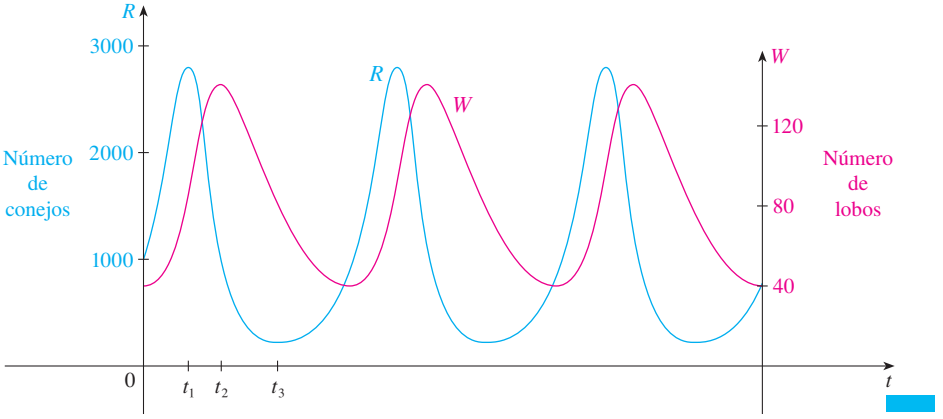


FIGURA 5
Comparación de poblaciones de conejos y lobos

Una parte importante del proceso de modelado, como se analizó en la sección 1.2, es interpretar las conclusiones matemáticas como predicciones del mundo real y probar las predicciones contra datos reales. La *Hudson's Bay Company*, que comenzó a comercializar pieles de animales en Canadá en 1670, ha mantenido registros que datan de la década de 1840. En la figura 6 se muestran las gráficas del número de pieles de la liebre americana y su depredador, el lince de Canadá, comercializadas por la compañía durante un periodo de 90 años. Se puede ver que las oscilaciones acopladas en las poblaciones de liebres y linces predichas por el modelo de Lotka-Volterra ocurren en realidad, y el periodo de estos ciclos es aproximadamente 10 años.

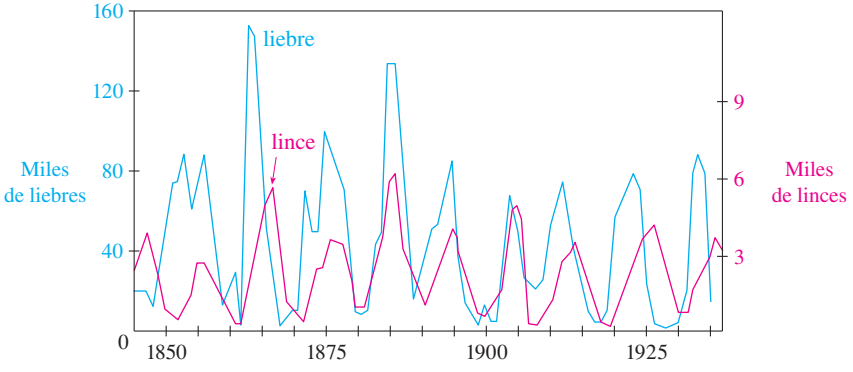


FIGURA 6
Abundancia relativa de liebres y linces de los registros de la *Hudson's Bay Company*

Aunque el modelo relativamente simple de Lotka-Volterra ha tenido cierto éxito en explicar y predecir poblaciones acopladas, se han propuesto modelos más complejos. Una manera de modificar las ecuaciones de Lotka-Volterra es suponer que, en ausencia de depredadores, la presa crece de acuerdo con un modelo logístico con capacidad de carga M. Después las ecuaciones de Lotka-Volterra [1] se reemplazan por el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dR}{dt} = kR\left(1 - \frac{R}{M}\right) - aRW \qquad \frac{dW}{dt} = -rW + bRW$$

Este modelo se investiga en los ejercicios 11 y 12.

Se han propuesto modelos para describir y predecir niveles de población de dos especies que compiten por los mismos recursos o cooperan para beneficio mutuo. Esta clase de modelos se explora en los ejercicios 2-4.

9.6 Ejercicios

1. Para cada sistema depredador-presa, determine cuál de las variables, x o y, representa la población de presas y cuál representa la población de depredadores. ¿El crecimiento de la presa está restringido sólo por los depredadores o también por otros factores? ¿Los depredadores se alimentan sólo de la presa o tienen fuentes de alimento adicionales? Explique.

a) $\dfrac{dx}{dt} = -0.05x + 0.0001xy$

$\dfrac{dy}{dt} = 0.1y - 0.005xy$

b) $\dfrac{dx}{dt} = 0.2x - 0.0002x^2 - 0.006xy$

$\dfrac{dy}{dt} = -0.015y + 0.00008xy$

2. Cada sistema de ecuaciones diferenciales se modela para dos especies que compiten por los mismos recursos o cooperan para beneficio mutuo (plantas que florecen e insectos polinizadores, por ejemplo). Decida si cada sistema describe la competencia o la cooperación y explique por qué es un modelo razonable. (Pregúntese qué efecto tiene en una especie un incremento en la rapidez de crecimiento de la otra.)

a) $\dfrac{dx}{dt} = 0.12x - 0.0006x^2 + 0.00001xy$

$\dfrac{dy}{dt} = 0.08x + 0.00004xy$

b) $\dfrac{dx}{dt} = 0.15x - 0.0002x^2 - 0.0006xy$

$\dfrac{dy}{dt} = 0.2y - 0.00008y^2 - 0.0002xy$

3. El sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dt} = 0.5x - 0.004x^2 - 0.001xy$$

$$\frac{dy}{dt} = 0.4y - 0.001y^2 - 0.002xy$$

es un modelo para la población de dos especies.

a) ¿El modelo describe cooperación o competencia, o una relación depredador-presa?

b) Encuentre las soluciones de equilibrio y explique su significado.

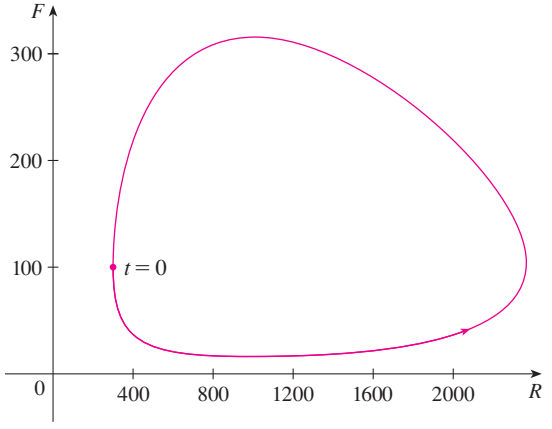
4. Moscas, ranas y cocodrilos coexisten en un ambiente. Para sobrevivir, las ranas comen moscas y los cocodrilos necesitan comer ranas. En ausencia de ranas, la población de moscas crecerá exponencialmente y la población de cocodrilos caerá exponencialmente. En ausencia de cocodrilos y moscas, la población de ranas decaerá exponencialmente. Si $P(t)$, $Q(t)$ y $R(t)$ representan las poblaciones de estas tres especies en el tiempo t, escriba un sistema de ecuaciones diferenciales como modelo para la evolución de ellas. Si las constantes en su ecuación son todas positivas, explique por qué ha usado signos más o menos.

5-6 Se muestra una trayectoria de fase para la población de conejos (R) y zorros (F).

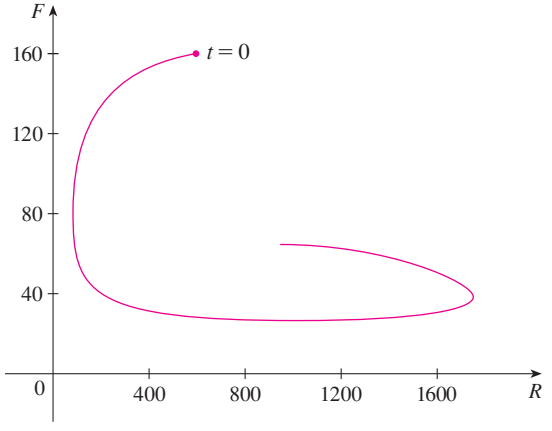
a) Describa cómo cambia cada población a medida que pasa el tiempo.

b) Use su descripción para dibujar un esquema aproximado de las gráficas de R y F como funciones del tiempo.

5.

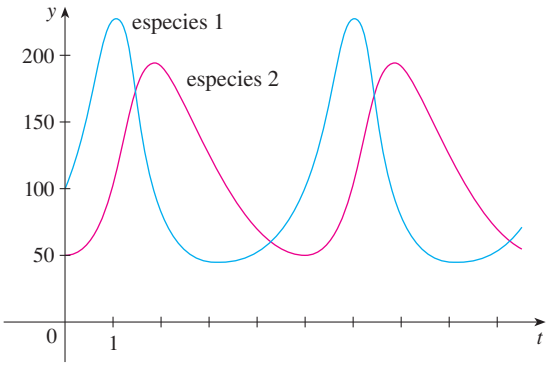


6.

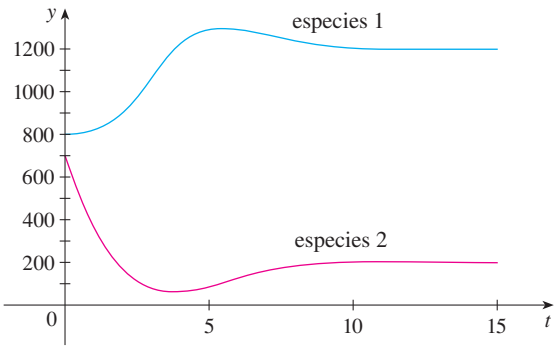


7-8 Se muestran gráficas de población de dos especies. Úselas para trazar la trayectoria de fase correspondiente.

7.



8.



9. En el ejemplo 1b), demostramos que las poblaciones de conejos y de lobos satisfacen la ecuación diferencial

$$\frac{dW}{dR} = \frac{-0.02W + 0.00002RW}{0.08R - 0.001RW}$$

Resuelva esta ecuación diferencial separable para demostrar que

$$\frac{R^{0.02}W^{0.08}}{e^{0.00002R}e^{0.001W}} = C$$

donde C es una constante.

Es imposible resolver esta ecuación para W como función explícita de R (o viceversa). Si cuenta con un SAC que trace gráficas de curva definidas implícitamente, use esta ecuación y su dispositivo para dibujar la curva solución que pasa por el punto (1000, 40) y compárela con la figura 3.

10. Las ecuaciones modelan las poblaciones de pulgones y de mariquitas

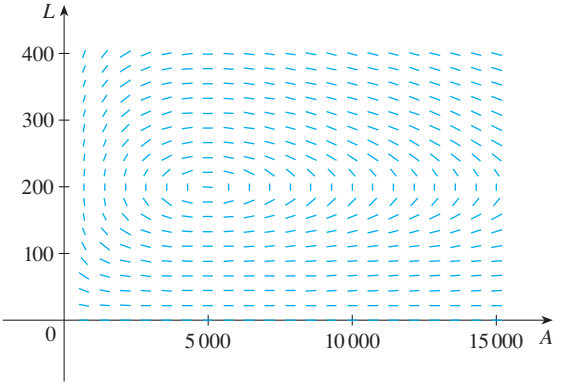
$$\frac{dA}{dt} = 2A - 0.01AL$$

$$\frac{dL}{dt} = -0.5L + 0.0001AL$$

a) Encuentre las soluciones de equilibrio y explique sus significados.

b) Halle una expresión para dL/dA.

c) Se muestra el campo direccional para la ecuación diferencial obtenida en el inciso b). Úselo para trazar un retrato de fase. ¿Qué tienen en común las trayectorias de fase?



d) Suponga que en el tiempo $t = 0$ hay 1000 pulgones y 200 mariquitas. Dibuje la trayectoria de fase correspondiente y empléela para describir cómo cambian ambas poblaciones.

e) Use el inciso d) para construir bosquejos aproximados de las poblaciones de pulgones y mariquitas como funciones de t. ¿Cómo se relacionan las gráficas entre sí?

11. En el ejemplo 1 se emplearon las ecuaciones de Lotka-Volterra para modelar poblaciones de conejos y lobos. Modifique las ecuaciones como sigue:

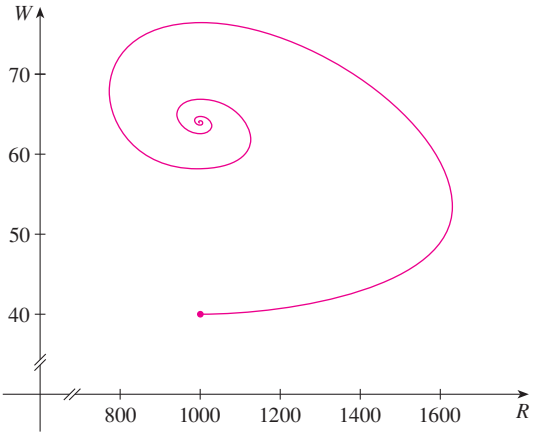
$$\frac{dR}{dt} = 0.08R(1 - 0.0002R) - 0.001RW$$

$$\frac{dW}{dt} = -0.02W + 0.00002RW$$

a) De acuerdo con estas ecuaciones, ¿qué sucede con la población de conejos en ausencia de lobos?

b) Encuentre las soluciones de equilibrio y explique su significado.

c) En la figura se muestra la trayectoria de fase que empieza en el punto (1000, 40). Describa qué sucede finalmente con las poblaciones de conejos y lobos.



d) Bosqueje las gráficas de las poblaciones de conejos y lobos como funciones del tiempo.

SAC **12.** En el ejercicio 10 se modelaron poblaciones de pulgones y mariquitas con un sistema de Lotka-Volterra. Suponga que se modifican esas ecuaciones como sigue:

$$\frac{dA}{dt} = 2A(1 - 0.0001A) - 0.01AL$$

$$\frac{dL}{dt} = -0.5L + 0.0001AL$$

a) En ausencia de mariquitas, ¿qué predice el modelo acerca de los pulgones?

b) Encuentre las soluciones de equilibrio.

c) Determine una expresión para dL/dA.

d) Emplee un sistema computarizado algebraico para trazar un campo direccional para la ecuación diferencial del inciso c). Después use el campo direccional para bosquejar el retrato de fase. ¿Qué tienen en común las trayectorias de fase?

e) Suponga que en el tiempo $t = 0$ hay 1000 pulgones y 200 mariquitas. Dibuje la trayectoria de fase correspondiente y utilícela para describir cómo cambian ambas poblaciones.

f) Use el inciso e) para construir bosquejos aproximados de las poblaciones de pulgones y mariquitas como funciones de t. ¿Cómo se relacionan entre sí las gráficas?

9 Repaso

Verificación de conceptos

1. a) ¿Qué es una ecuación diferencial?
b) ¿Cuál es el orden de una ecuación diferencial?
c) ¿Qué es una condición inicial?

2. ¿Qué se puede decir acerca de las soluciones de la ecuación $y' = x^2 + y^2$ con sólo observar la ecuación diferencial?

3. ¿Qué es un campo direccional para la ecuación diferencial $y' = F(x, y)$?

4. Explique cómo funciona el método de Euler.

5. ¿Qué es una ecuación diferencial separable? ¿Cómo se resuelve?

6. ¿Qué es una ecuación diferencial lineal de primer orden? ¿Cómo se resuelve?

7. a) Escriba una ecuación diferencial que exprese la ley natural de crecimiento. ¿Qué dice en términos de la rapidez de crecimiento relativo?
b) ¿Bajo qué circunstancias es un modelo apropiado para el crecimiento poblacional?
c) ¿Cuáles son las soluciones de esta ecuación?

8. a) Escriba la ecuación logística.
b) ¿Bajo qué circunstancias es un modelo apropiado para el crecimiento poblacional?

9. a) Escriba las ecuaciones de Lotka-Volterra para modelar poblaciones de peces comestibles (F) y tiburones (S).
b) ¿Qué dicen estas ecuaciones acerca de cada población en ausencia de la otra?

Examen rápido Verdadero-Falso

Determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero explique por qué. Si es falso, explique por qué, o dé un ejemplo que refute el enunciado.

1. Todas las soluciones de la ecuación diferencial $y' = -1 - y^4$ son funciones decrecientes.

2. La función $f(x) = (\ln x)/x$ es una solución de la ecuación diferencial $x^2y' + xy = 1$.

3. La ecuación $y' = x + y$ es separable.

4. La ecuación $y' = 3y - 2x + 6xy - 1$ es separable.

5. La ecuación $e^x y' = y$ es lineal.

6. La ecuación $y' + xy = e^y$ es lineal.

7. Si y es la solución del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right) \qquad y(0) = 1$$

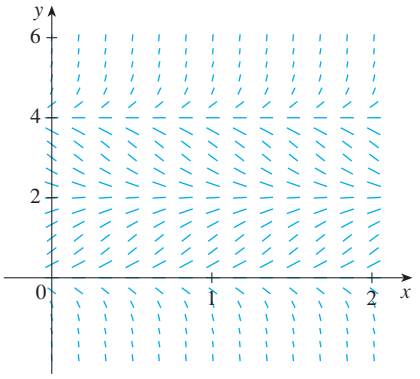
entonces $\lim_{t \to \infty} y = 5$.

Ejercicios

1. a) Se muestra un campo direccional para la ecuación diferencial $y' = y(y-2)(y-4)$. Bosqueje las gráficas de las soluciones que satisfacen las condiciones iniciales dadas.

i) $y(0) = -0.3$ ii) $y(0) = 1$
iii) $y(0) = 3$ iv) $y(0) = 4.3$

b) Si la condición inicial es $y(0) = c$, ¿para qué valores de c es $\lim_{t\to\infty} y(t)$ finito? ¿Cuáles son las soluciones de equilibrio?



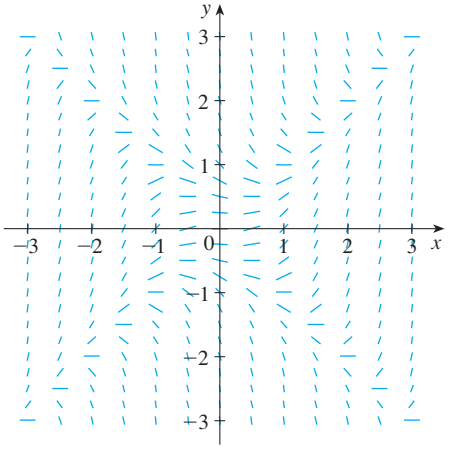
2. a) Bosqueje un campo direccional para la ecuación diferencial $y' = x/y$. Después empléelo para bosquejar las cuatro soluciones que satisfacen las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y(0) = -1$, $y(2) = 1$ y $y(-2) = 1$.

b) Compruebe su trabajo del inciso a) resolviendo la ecuación diferencial en forma explícita. ¿Qué tipo de curva es cada curva solución?

3. a) Se muestra un campo direccional para la ecuación diferencial $y' = x^2 - y^2$. Bosqueje la solución del problema con valor inicial

$$y' = x^2 - y^2 \qquad y(0) = 1$$

Use su gráfica para estimar el valor de $y(0.3)$.



b) Use el método de Euler con tamaño de paso 0.1 para estimar $y(0.3)$, donde $y(x)$ es la solución del problema con valor inicial del inciso a). Compare con su estimación del inciso a).

c) ¿Sobre qué líneas se localizan los centros de los segmentos de recta horizontales del campo direccional del inciso a)? ¿Qué sucede cuando una curva solución cruza estas líneas?

4. a) Use el método de Euler con tamaño de paso 0.2 para estimar $y(0.4)$, donde $y(x)$ es la solución del problema con valor inicial

$$y' = 2xy^2 \qquad y(0) = 1$$

b) Repita el inciso a) con tamaño de paso 0.1.

c) Encuentre la solución exacta de la ecuación diferencial y compare el valor en 0.4 con las aproximaciones de los incisos a) y b).

5-8 Resuelva la ecuación diferencial.

5. $y' = xe^{-\operatorname{sen} x} - y\cos x$

6. $\dfrac{dx}{dt} = 1 - t + x - tx$

7. $2ye^{y^2}y' = 2x + 3\sqrt{x}$

8. $x^2y' - y = 2x^3e^{-1/x}$

9-11 Resuelva el problema con valores iniciales.

9. $\dfrac{dr}{dt} + 2tr = r, \quad r(0) = 5$

10. $(1 + \cos x)y' = (1 + e^{-y})\operatorname{sen} x, \quad y(0) = 0$

11. $xy' - y = x\ln x, \quad y(1) = 2$

12. Resuelva el problema con valores iniciales $y' = 3x^2e^y$, $y(0) = 1$, y grafique la solución.

13-14 Encuentre las trayectorias ortogonales de la familia de curvas.

13. $y = ke^x$

14. $y = e^{kx}$

15. a) Escriba la solución del problema con valor inicial

$$\frac{dP}{dt} = 0.1P\left(1 - \frac{P}{2\,000}\right) \qquad P(0) = 100$$

y utilícela para hallar la población cuando $t = 20$

b) ¿Cuándo la población alcanza 1200?

16. a) La población del mundo era de 5.28 miles de millones en 1990 y 6.07 miles de millones en 2000. Encuentre un modelo exponencial para estos datos y utilícelo para predecir la población mundial del año 2020.

b) De acuerdo con el modelo del inciso a), ¿cuándo la población mundial excederá los 10 000 millones?

c) Use los datos del inciso a) para hallar un modelo logístico de la población. Suponga una capacidad de carga de 100 000 millones. Después use el modelo logístico para predecir la

Se requiere calculadora graficadora o computadora

población en 2020. Compare con su predicción del modelo exponencial.

d) De acuerdo con el modelo logístico, ¿cuándo la población mundial rebasará los 10 000 millones? Compare con su predicción del inciso b).

17. El modelo de crecimiento de von Bertalanffy se usa para predecir la longitud $L(t)$ de un pez en un periodo. Si L_∞ es la mayor longitud para una especie, entonces la hipótesis es que la rapidez de crecimiento de longitud es proporcional a $L_\infty - L$, la longitud por alcanzar.

a) Formule y resuelva una ecuación diferencial a fin de hallar una expresión para $L(t)$.

b) Para la merluza del mar del Norte se ha determinado que $L_\infty = 53$ cm, $L(0) = 10$ cm, y la constante de proporcionalidad es 0.2. ¿En qué se convierte la expresión para $L(t)$ con estos datos?

18. Un tanque contiene 100 L de agua pura. Salmuera que contiene 0.1 kg de sal por litro entra al recipiente a razón de 10 L/min. La solución se mantiene mezclada por completo y sale del tanque a la misma proporción. ¿Cuánta sal hay en el tanque después de 6 minutos?

19. Un modelo para la dispersión de una epidemia es que la rapidez de dispersión es conjuntamente proporcional al número de personas infectadas y al número de personas no infectadas. En un pueblo aislado con 5 000 pobladores, 160 personas tienen una enfermedad al comienzo de la semana y 1200 la tienen al final de la semana. ¿En cuánto tiempo se infecta 80% de la población?

20. La ley de Brentano-Stevens en psicología modela la forma en que un sujeto reacciona a un estímulo. La ley expresa que si R representa la reacción a una cantidad S de estímulo, entonces las cantidades relativas de incremento son proporcionales:

$$\frac{1}{R}\frac{dR}{dt} = \frac{k}{S}\frac{dS}{dt}$$

donde k es una constante positiva. Determine R como una función de S.

21. El transporte de una sustancia por una pared capilar en fisiología pulmonar ha sido modelado mediante la ecuación diferencial

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{R}{V}\left(\frac{h}{k+h}\right)$$

donde h es la concentración de hormonas en el torrente sanguíneo, t es el tiempo, R es la tasa de transporte máximo, V es el volumen del capilar y k es una constante positiva que mide la afinidad entre las hormonas y las enzimas que ayudan al proceso. Resuelva esta ecuación diferencial para hallar una relación entre h y t.

22. Las poblaciones de aves e insectos se modelan por medio de las ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = 0.4x - 0.002xy$$

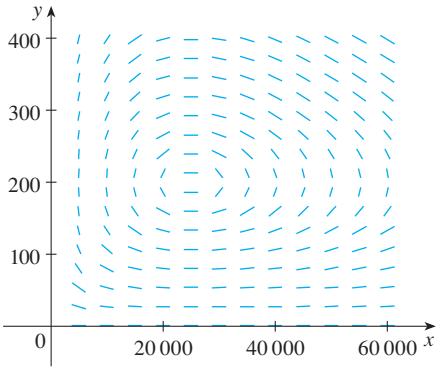
$$\frac{dy}{dt} = -0.2y + 0.000008xy$$

a) ¿Cuál de las variables, x o y, representa la población de aves y cuál representa la población de insectos? Explique.

b) Determine las soluciones de equilibrio y explique su importancia.

c) Encuentre una expresión para dy/dx.

d) Se muestra el campo direccional para la ecuación diferencial del inciso c). Utilícelo para bosquejar la trayectoria de fase que corresponde a poblaciones iniciales de 100 aves y 40 000 insectos. Después use la trayectoria de fase para describir cómo cambian ambas poblaciones.



e) Use el inciso d) para elaborar bosquejos aproximados de las poblaciones de aves e insectos como funciones del tiempo. ¿Cómo se relacionan entre sí estas gráficas?

23. Suponga que el modelo del ejercicio 22 se reemplaza mediante las ecuaciones

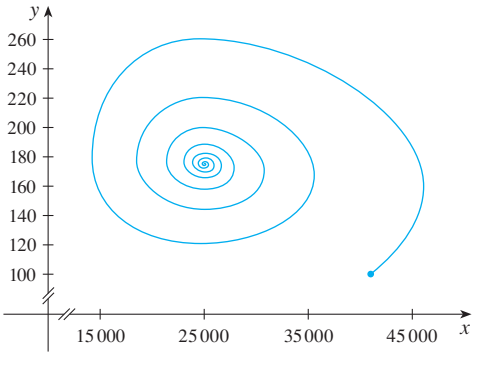
$$\frac{dx}{dt} = 0.4x(1 - 0.000005x) - 0.002xy$$

$$\frac{dy}{dt} = -0.2y + 0.000008xy$$

a) De acuerdo con estas ecuaciones, ¿qué sucede con la población de insectos en ausencia de aves?

b) Determine las soluciones de equilibrio y explique su importancia.

c) En la figura se muestra la trayectoria de fase que comienza con 100 aves y 40 000 insectos. Describa lo que finalmente sucede con las poblaciones de aves e insectos.



d) Bosqueje las gráficas de las poblaciones de aves e insectos como funciones del tiempo.

24. Bárbara pesa 60 kg y está a dieta de 1600 calorías por día, de las cuales 850 son empleadas de forma automática por el metabolismo basal. Ella gasta cerca de 15 cal/kg/día multiplicadas por su peso al hacer ejercicio. Si 1 kg de grasa contiene 10 000 cal y se supone que el almacenaje de calorías en la forma de grasa es 100% eficiente, formule una ecuación diferencial y resuélvala para hallar el peso de Bárbara como una función del tiempo. ¿En última instancia su peso se aproxima a un peso de equilibrio?

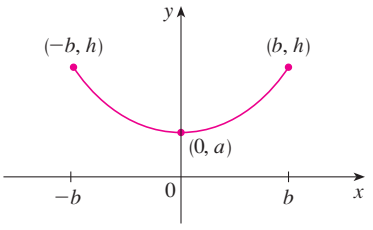
25. Cuando un cable flexible de densidad uniforme se suspende entre dos puntos fijos y cuelga de su propio peso, la forma $y = f(x)$ del cable debe satisfacer una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} = k\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

donde k es una constante positiva. Considere el cable mostrado en la figura.

a) Sea $z = dy/dx$ *en* la ecuación diferencial. Resuelva la ecuación diferencial de primer orden resultante (en z), y después integre para determinar y.

b) Determine la longitud del cable.



Problemas adicionales

1. Encuentre las funciones f tales que f' es continua y

$$[f(x)]^2 = 100 + \int_0^x \{[f(t)]^2 + [f'(t)]^2\}\, dt \qquad \text{para toda } x \text{ real}$$

2. Un alumno olvidó la regla para la derivada del producto y cometió el error de pensar que $(fg)' = f'g'$. Sin embargo, tuvo suerte y obtuvo la respuesta correcta. La función f que usó fue $f(x) = e^{x^2}$ y el dominio de este problema fue el intervalo $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$. ¿Cuál fue la función g?

3. Sea f una función con la propiedad de que $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$ y $f(a + b) = f(a)f(b)$ para los números reales a y b. Demuestre que $f'(x) = f(x)$ para toda x y deduzca que $f(x) = e^x$.

4. Encuentre todas las funciones f que satisfacen la ecuación

$$\left(\int f(x)\, dx\right)\left(\int \frac{1}{f(x)}\, dx\right) = -1$$

5. Hallar la curva $y = f(x)$ de tal manera que $f(x) \geqslant 0$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, y el área bajo la gráfica de f desde 0 hasta x es proporcional a la $(n + 1)$-ésima potencia de $f(x)$.

6. Una *subtangente* es una porción del eje x que se encuentra directamente bajo el segmento de una recta tangente desde el punto de contacto hasta el eje x. Halle las curvas que pasan a través del punto $(c, 1)$ y cuyas subtangentes todas tienen longitud c.

7. Se saca del horno un pastel de durazno a las 5:00 P.M. En ese momento está muy caliente: 100 °C. A las 5:10 P.M., su temperatura es 80 °C; a las 5:20 P.M. está a 65 °C. ¿Cuál es la temperatura en la habitación?

8. Durante la mañana del 2 de febrero comenzó a caer nieve y continuó de forma permanente hacia la tarde. A mediodía, una máquina comenzó a retirar la nieve de una carretera con rapidez constante. La máquina viajó 6 km desde el mediodía hasta la 1 P.M. pero sólo 3 km de la 1 P.M. a las 2 P.M. ¿Cuándo comenzó a caer la nieve? [*Sugerencia:* para comenzar, sea t el tiempo medido en horas después del mediodía; sea $x(t)$ la distancia que recorre la máquina en el tiempo t; después la rapidez de la máquina es dx/dt. Sea b el número de horas antes del mediodía en que comenzó a nevar. Determine una expresión para la altura de la nieve en el tiempo t. Después use la información dada de que la tasa de remoción R (en m^3/h) es constante.]

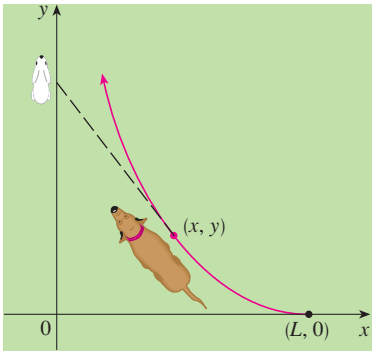


FIGURA PARA EL PROBLEMA 9

9. Un perro ve un conejo que corre en línea recta en un campo abierto y lo persigue. En un sistema coordenado rectangular (como el mostrado en la figura), suponga:

i) El conejo está en el origen y el perro en el punto $(L, 0)$ en el instante en que el perro ve por vez primera al conejo.

ii) El conejo corre en la dirección positiva del eje y y el perro siempre directo hacia el conejo.

iii) El perro corre con la misma rapidez que el conejo.

a) Demuestre que la trayectoria del perro es la gráfica de la función $y = f(x)$, donde y satisface la ecuación diferencial

$$x\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

b) Determine la solución de la ecuación del inciso a) que satisface las condiciones iniciales $y = y' = 0$ cuando $x = L$. [*Sugerencia:* sea $z = dy/dx$ en la ecuación diferencial y resuelva la ecuación de primer orden resultante para hallar z; después integre z para hallar y.]

c) ¿Alguna vez el perro alcanza al conejo?

10. a) Suponga que el perro del problema 9 corre dos veces más rápido que el conejo. Encuentre la ecuación diferencial para la trayectoria del perro. Después resuélvala para hallar el punto donde el perro alcanza al conejo.

b) Suponga que el perro corre a la mitad de la velocidad del conejo. ¿Qué tanto se acerca el perro al conejo? ¿Cuáles son sus posiciones cuando están más próximos?

11. Un ingeniero de planificación para una nueva planta de alumbre debe presentar algunas estimaciones a su compañía considerando la capacidad de un silo diseñado para contener bauxita hasta que se procese en alumbre. El mineral se asemeja al talco rosa y se vacía de un transportador en la parte superior del silo. El silo es un cilindro de 100 pies de alto con un radio de 200 pies. El transportador lleva $60\,000\pi$ pies^3/h y el mineral mantiene una forma cónica cuyo radio es 1.5 veces su altura.

a) Si, en cierto tiempo t, la pila tiene 60 pies de altura, ¿en cuánto tiempo la pila alcanza la parte superior del silo?

b) La administración quiere saber cuánto espacio quedará en el área de piso del silo cuando la pila sea de 60 pies de altura. ¿Qué tan rápido crece el área de piso de la pila a esa altura?

c) Suponga que un cargador comienza a remover el mineral a razón de $20\,000\pi$ pies^3/h cuando la altura de la pila alcanza 90 pies. Suponga que la pila continúa manteniendo su forma. ¿En cuánto tiempo la pila alcanza la parte superior del silo en estas condiciones?

12. Encuentre la curva que pasa por el punto (3, 2) y tiene la propiedad de que si una recta tangente se dibuja en cualquier punto P de la curva, entonces la parte de la recta tangente que yace en el primer cuadrante se biseca en P.

13. Recuerde que la recta normal a una curva en un punto P sobre la curva es la recta que pasa por P y es perpendicular a la recta tangente en P. Determine la curva que pasa por el punto (3, 2) y tiene la propiedad de que si la recta normal se dibuja en cualquier punto sobre la curva, entonces la intersección y de la recta normal es siempre 6.

14. Encuentre las curvas con la propiedad de que si la recta normal se dibuja en cualquier punto P sobre la curva, entonces la parte de la recta normal entre P y el eje x es bisecada por el eje y.

15. Encuentre todas las curvas con la propiedad de que, si una recta es trazada desde el origen a cualquier punto (x, y) sobre la curva, y después se traza la recta tangente a la curva en ese punto extendiéndola hasta cruzar el eje x, el resultado es un triángulo isósceles cuyos lados iguales se intersecan en (x, y).

10 Ecuaciones paramétricas y coordenadas polares



El cometa Hale-Bopp, con su azulada cola de iones y polvo blanco, apareció en el cielo en marzo de 1997. En la sección 10.6 veremos cómo las coordenadas polares proporcionan una ecuación conveniente para la trayectoria de este cometa.

© Dreamstime

Hasta ahora hemos descrito las curvas planas expresando a y como una función de x [$y = f(x)$] o a x como una función de y [$x = g(y)$], o dando una relación entre x y y que define a y implícitamente como una función de x [$f(x, y) = 0$]. En este capítulo estudiaremos dos métodos nuevos para describir curvas.

Algunas curvas, como el cicloide, se manejan mejor cuando x y y están dadas en términos de una tercera variable t llamada parámetro [$x = f(t)$, $y = g(t)$]. Otras curvas, tales como la cardioide, tienen una descripción más conveniente cuando usamos un nuevo sistema de coordenadas, llamado sistema de coordenadas polares.

10.1 Curvas definidas por medio de ecuaciones paramétricas

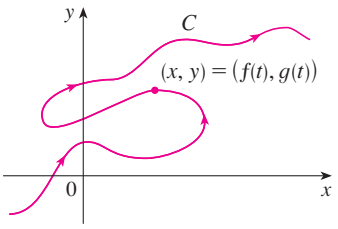


FIGURA 1

Imagine que una partícula se mueve a lo largo de la curva C mostrada en la figura 1. Es imposible describir C por una ecuación de la forma $y = f(x)$ porque C falla en la prueba de la recta vertical. Pero las coordenadas x y y de la partícula son funciones del tiempo t y, por tanto, se puede escribir por medio de $x = f(t)$ y $y = g(t)$. Este par de ecuaciones suele ser una forma más conveniente de describir una curva y da lugar a la siguiente definición.

Suponga que x y y se dan como funciones de una tercera variable t (llamada **parámetro**) mediante las ecuaciones

$$x = f(t) \qquad y = g(t)$$

(llamadas **ecuaciones paramétricas**). Cada valor de t determina un punto (x, y), que se puede representar en un plano coordenado. Cuando t varía, el punto $(x, y) = (f(t), g(t))$ varía y traza una curva C, que llamamos **curva paramétrica**. El parámetro t no necesariamente representa el tiempo y, de hecho, se podría usar una letra distinta a t para el parámetro. Pero en muchas aplicaciones de curvas paramétricas, t denota el tiempo y, por tanto, se puede interpretar a $(x, y) = (f(t), g(t))$ como la posición de una partícula en el tiempo t.

EJEMPLO 1 Bosqueje e identifique la curva definida por las ecuaciones paramétricas

$$x = t^2 - 2t \qquad y = t + 1$$

SOLUCIÓN Cada valor de t da un punto sobre la curva, como se muestra en la tabla. Por ejemplo, si $t = 0$, entonces $x = 0$, $y = 1$ y el punto correspondiente es $(0, 1)$. En la figura 2 se grafican los puntos (x, y) determinados por varios valores del parámetro y se unen para producir una curva.

t	x	y
−2	8	−1
−1	3	0
0	0	1
1	−1	2
2	0	3
3	3	4
4	8	5

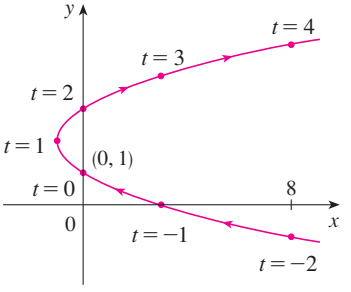


FIGURA 2

Una partícula cuya posición está dada por las ecuaciones paramétricas, se mueve a lo largo de la curva en la dirección de las flechas a medida que t aumenta. Nótese que los puntos consecutivos marcados en la curva aparecen en intervalos de tiempo iguales, pero no a distancias iguales. Esto es porque la partícula desacelera y después acelera cuando aumenta t.

Parece, de la figura 2, que la curva trazada por la partícula es una parábola. Esto se puede confirmar al eliminar el parámetro t como sigue. De la segunda ecuación obtenemos $t = y - 1$ y la sustituimos en la primera ecuación. Esto da

$$x = t^2 - 2t = (y - 1)^2 - 2(y - 1) = y^2 - 4y + 3$$

y por tanto la curva representada por las ecuaciones paramétricas dadas es la parábola $x = y^2 - 4y + 3$.

Esta ecuación en x y y describe *dónde* ha estado la partícula, pero no nos dice *cuándo* ha estado la partícula en un punto particular. Las ecuaciones paramétricas tienen una ventaja, nos dicen *cuándo* estuvo la partícula en un punto y la dirección de su movimiento.

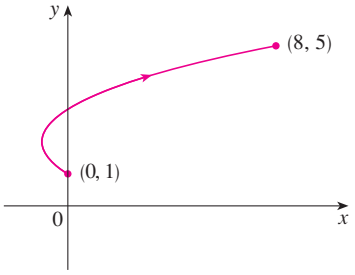


FIGURA 3

En el ejemplo 1 no se restringe el parámetro t, así que asumimos que t puede ser cualquier número real. Pero algunas veces restringiremos a t a un intervalo finito. Por ejemplo, la curva paramétrica

$$x = t^2 - 2t \qquad y = t + 1 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 4$$

que se ve en la figura 3 es la parte de la parábola del ejemplo 1 que empieza en el punto (0, 1) y termina en el punto (8, 5). La punta de la flecha indica la dirección en que se ha trazado la curva cuando t se incrementa de 0 a 4.

En general, la curva con ecuaciones paramétricas

$$x = f(t) \qquad y = g(t) \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

tiene un **punto inicial** $(f(a), g(a))$ y un punto terminal $(f(b), g(b))$.

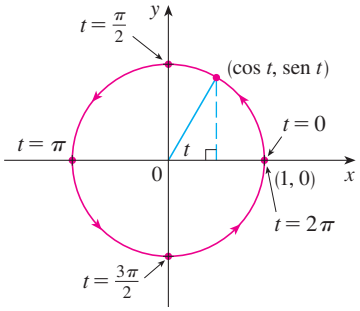


FIGURA 4

V EJEMPLO 2 ¿Qué curva representan las siguientes ecuaciones paramétricas?

$$x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

SOLUCIÓN Si ubicamos los puntos, parece que la curva es una circunferencia, lo que podemos confirmar eliminando t. Observe que

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$$

Así, el punto (x, y) se mueve sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. Observe que en este ejemplo, el parámetro t puede interpretarse como el ángulo (en radianes) que se ve en la figura 4. Cuando t se incrementa de 0 a 2π, el punto $(x, y) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ se mueve una vez alrededor de la circunferencia en dirección contraria a las manecillas del reloj a partir del punto (1, 0).

EJEMPLO 3 ¿Qué curva representan las ecuaciones paramétricas dadas?

$$x = \operatorname{sen} 2t \qquad y = \cos 2t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

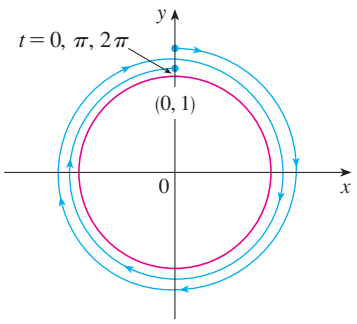


FIGURA 5

SOLUCIÓN Otra vez tenemos

$$x^2 + y^2 = \operatorname{sen}^2 2t + \cos^2 2t = 1$$

así que nuevamente las ecuaciones paramétricas representan la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$. Pero cuando t se incrementa de 0 a 2π, el punto $(x, y) = (\operatorname{sen} 2t, \cos 2t)$ empieza en (0, 1) y se mueve *dos veces* alrededor de la circunferencia en dirección de las manecillas del reloj, como se indica en la figura 5.

Los ejemplos 2 y 3 muestran que diferentes conjuntos de ecuaciones paramétricas pueden representar la misma curva. Así, distinguimos entre una *curva*, como un conjunto de puntos, y una *curva paramétrica*, en la que los puntos están trazados de un modo particular.

EJEMPLO 4 Encuentre las ecuaciones paramétricas de la circunferencia con centro en (h, k) y radio r.

SOLUCIÓN Si tomamos las ecuaciones de la circunferencia unitaria del ejemplo 2 y multiplicamos las expresiones para x y y por r, obtenemos $x = r\cos t$, $y = r\operatorname{sen} t$. Es posible verificar que estas ecuaciones representan una circunferencia con radio r y centro en el origen trazado en dirección contraria a las manecillas del reloj. Ahora desplazamos

h unidades en la dirección x y k unidades en la dirección y, para obtener las ecuaciones paramétricas de la circunferencia (figura 6) con centro (h, k) y radio r:

$$x = h + r\cos t \qquad y = k + r\operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

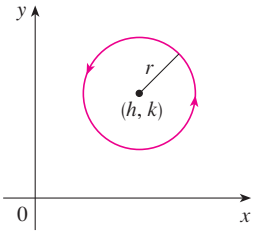


FIGURA 6
$x = h + r\cos t$, $y = k + r\operatorname{sen} t$

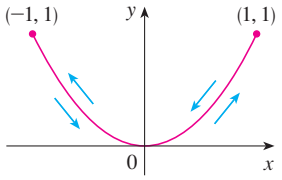


FIGURA 7

V EJEMPLO 5 Trace la curva con ecuaciones paramétricas $x = \operatorname{sen} t$, $y = \operatorname{sen}^2 t$.

SOLUCIÓN Observe que $y = (\operatorname{sen} t)^2 = x^2$ y por tanto el punto se mueve sobre la parábola $y = x^2$. Pero también observe que, como $-1 \leqslant \operatorname{sen} t \leqslant 1$, tenemos $-1 \leqslant x \leqslant 1$, por lo que las ecuaciones paramétricas representan sólo la parte de la parábola para la cual $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Como sen t es periódica, el punto $(x, y) = (\operatorname{sen} t, \operatorname{sen}^2 t)$ se mueve infinitamente en vaivén a lo largo de la parábola desde $(-1, 1)$ hasta $(1, 1)$. (Véase figura 7.)

TEC Module 10.1A proporciona una animación de la relación entre el movimiento a lo largo de la curva paramétrica $x = f(t)$, $y = g(t)$ y el movimiento a lo largo de las gráficas de f y g como funciones de t. Activando TRIG nos da la familia de curvas paramétricas

$$x = a\cos bt \qquad y = c\operatorname{sen} dt$$

Si elegimos $a = b = c = d = 1$ y activamos **animate**, veremos cómo las gráficas de $x = \cos t$ y $y = \operatorname{sen} t$ se relacionan con la circunferencia en el ejemplo 2. Si elegimos $a = b = c = 1$, $d = 2$, veremos las gráficas como en la figura 8. Activando **animate** o moviendo t a la derecha, podremos ver del código de color cómo se mueve con la trayectoria de $x = \cos t$ e $y = \operatorname{sen} 2t$ que corresponden al movimiento a lo largo de la curva paramétrica, llamada **figura de Lissajous**.

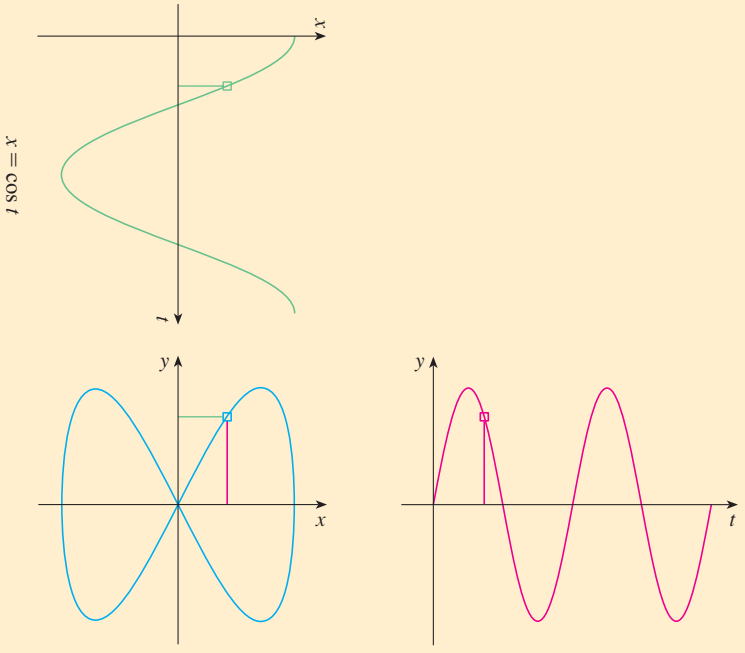


FIGURA 8 $x = \cos t$ $y = \operatorname{sen} 2t$ $y = \operatorname{sen} 2t$

Dispositivos de graficación

La mayor parte de las calculadoras y los programas de graficación se pueden usar para graficar curvas dadas por ecuaciones paramétricas. De hecho, es instructivo observar una curva paramétrica dibujada con una calculadora, porque los puntos se ubican en orden conforme se incrementan los valores del parámetro correspondiente.

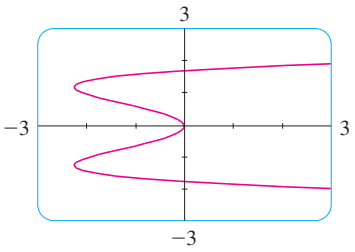


FIGURA 9

EJEMPLO 6 Utilice un dispositivo de graficación para graficar la curva $x = y^4 - 3y^2$.

SOLUCIÓN. Sea $t = y$ el parámetro. Entonces tenemos las ecuaciones

$$x = t^4 - 3t^2 \qquad y = t$$

Usando estas ecuaciones paramétricas para graficar la curva, obtenemos la figura 9. Podríamos resolver la ecuación dada ($x = y^4 - 3y^2$) para y como cuatro funciones de x y graficarlas individualmente, pero las ecuaciones paramétricas proporcionan un método mucho más fácil.

En general, si necesitamos graficar una ecuación de la forma $x = g(y)$, podemos usar las ecuaciones paramétricas

$$x = g(t) \qquad y = t$$

Observe también que las curvas con ecuaciones $y = f(x)$ (aquellas con las que se está familiarizado; gráficas de funciones) también se pueden considerar como curvas con ecuaciones paramétricas

$$x = t \qquad y = f(t)$$

Los dispositivos de graficación son particularmente útiles para trazar curvas complicadas. Por ejemplo, las curvas que se muestran en las figuras 10, 11 y 12 serían virtualmente imposibles de hacer a mano.

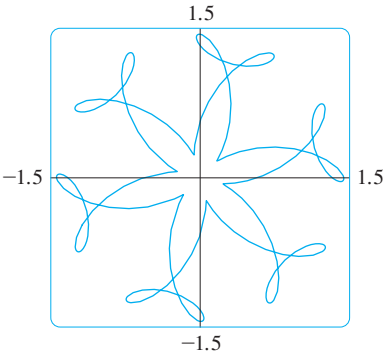


FIGURA 10
$x = \operatorname{sen} t + \frac{1}{2}\cos 5t + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 13t$
$y = \cos t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 5t + \frac{1}{4}\cos 13t$

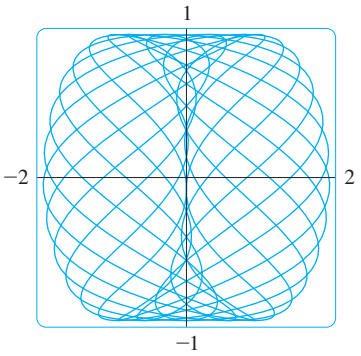


FIGURA 11
$x = \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2.3t$
$y = \cos t$

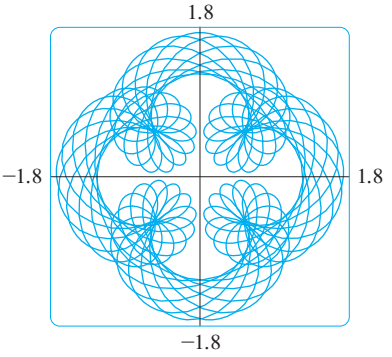


FIGURA 12
$x = \operatorname{sen} t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 5t + \frac{1}{4}\cos 2.3t$
$y = \cos t + \frac{1}{2}\cos 5t + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2.3t$

Uno de los más importantes usos de las curvas paramétricas es el diseño asistido por computadora (CAD). En el proyecto de laboratorio después de la sección 10.2 investigaremos curvas paramétricas especiales, llamadas **curvas de Bézier**, que son ampliamente utilizadas en manufactura, especialmente en la industria automotriz. Estas curvas también se emplean en formas especiales de letras y otros símbolos de impresión en láser.

La cicloide

TEC En Module 10.1B se muestra una animación de la manera en que se forma una cicloide a partir del movimiento de un círculo.

EJEMPLO 7 La curva trazada por un punto P sobre la circunferencia de un círculo cuando éste rueda a lo largo de una recta se llama **cicloide** (véase figura 13). Si el círculo tiene radio r y rueda a lo largo del eje x, y si una posición de P está en el origen, determine las ecuaciones paramétricas para la cicloide.

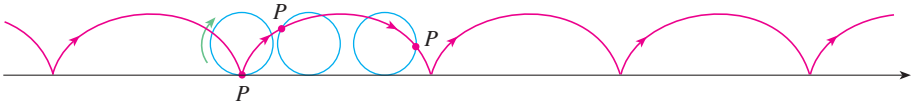


FIGURA 13

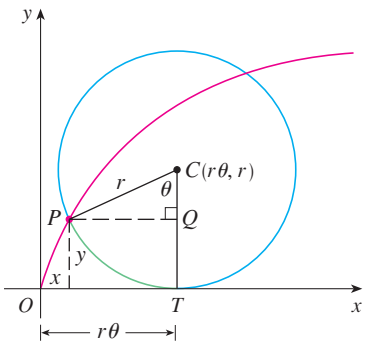


FIGURA 14

SOLUCIÓN Elegimos como parámetro al ángulo de rotación θ del círculo ($\theta = 0$ cuando P está en el origen). Suponga que el círculo ha girado θ radianes. Debido a que el círculo ha estado en contacto con la recta, se ve de la figura 14, que la distancia que ha rodado desde el origen es

$$|OT| = \text{arc } PT = r\theta$$

Por tanto, el centro del círculo es $C(r\theta, r)$. Sean (x, y) las coordenadas de P. Entonces, de la figura 14 vemos que

$$x = |OT| - |PQ| = r\theta - r \operatorname{sen}\theta = r(\theta - \operatorname{sen}\theta)$$

$$y = |TC| - |QC| = r - r\cos\theta = r(1 - \cos\theta)$$

Así que las ecuaciones paramétricas de la cicloide son

$$\boxed{1} \qquad x = r(\theta - \operatorname{sen}\theta) \qquad y = r(1 - \cos\theta) \qquad \theta \in \mathbb{R}$$

Un arco de la cicloide viene de una rotación del círculo y, por tanto, se describe mediante $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Aunque las ecuaciones 1 se obtuvieron de la figura 14, que ilustra el caso donde $0 < \theta < \pi/2$, se puede ver que son válidas para otros valores de θ (véase el ejercicio 39).

Aunque es posible eliminar el parámetro θ de las ecuaciones 1, la ecuación cartesiana resultante en x y y es muy complicada y no es conveniente para trabajar como con las ecuaciones paramétricas.

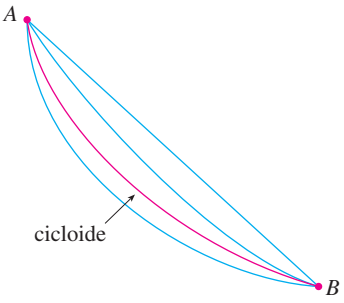


FIGURA 15

Una de las primeras personas en estudiar la cicloide fue Galileo, quien propuso que los puentes se construyeran en forma de cicloides, y quien trató de encontrar el área bajo un arco de una cicloide. Después esta curva surgió en conexión con el **problema de la braquistócrona**: hallar la curva a lo largo de la cual se desliza una partícula en el tiempo más corto (bajo la influencia de la gravedad) de un punto A a un punto B más bajo pero no directamente debajo de A. El matemático suizo John Bernoulli, quien planteó este problema en 1696, demostró que entre las curvas posibles que unen A con B, como en la figura 15, la partícula tomará el menor tiempo de deslizamiento de A a B si la curva es parte de un arco invertido de una cicloide.



FIGURA 16

El físico holandés Huygens demostró que la cicloide es también la solución al **problema de la tautócrona**; es decir, sin importar dónde se coloque una partícula P en una cicloide invertida, le toma el mismo tiempo deslizarse hasta el fondo (véase figura 16). Huygens propuso que los relojes de péndulo (que él inventó) oscilaran en arcos cicloidales, porque en tal caso el péndulo tarda el mismo tiempo en completar una oscilación si oscila por un arco amplio o pequeño.

Familias de curvas paramétricas

V EJEMPLO 8 Investigue la familia de curvas con ecuaciones paramétricas

$$x = a + \cos t \qquad y = a\tan t + \operatorname{sen} t$$

¿Qué tienen estas curvas en común? ¿Cómo cambia su forma cuando a crece?

SOLUCIÓN Se emplea un dispositivo de graficación para producir las gráficas para los casos $a = -2, -1, -0.5, -0.2, 0, 0.5, 1$ y 2 que se muestran en la figura 17. Observe que todas estas curvas (excepto el caso $a = 0$) tienen dos ramas, y ambas se aproximan a la asíntota vertical $x = a$ cuando x se aproxima a a por la izquierda o por la derecha.

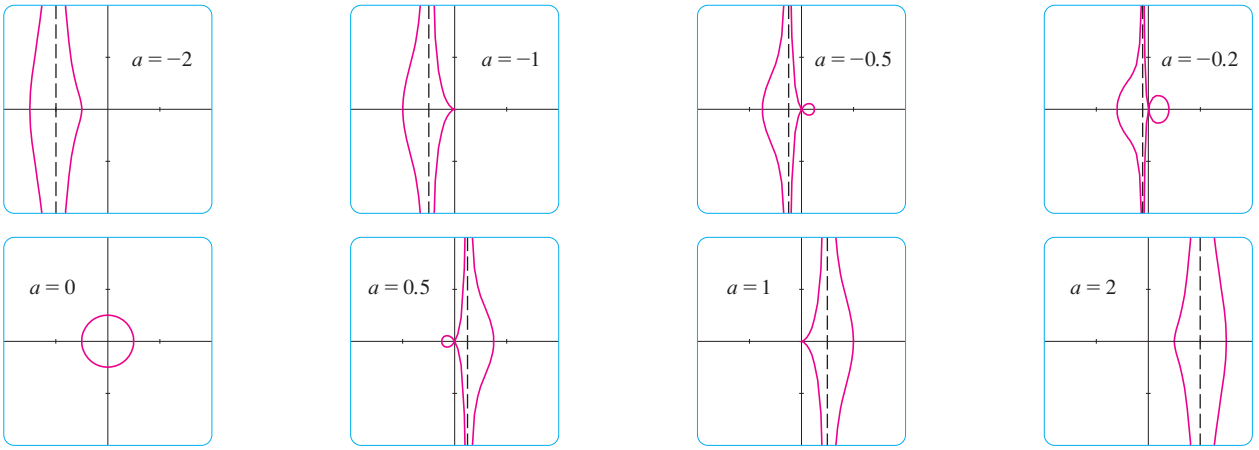


FIGURA 17 Miembros de la familia $x = a + \cos t$, $y = a \tan t + \operatorname{sen} t$, graficadas en el rectángulo de vista $[-4, 4]$ por $[-4, 4]$

Cuando $a < -1$, ambas ramas son suaves, pero cuando a llega a -1, la rama derecha adquiere un punto agudo llamado *cúspide*. Para a entre -1 y 0 la cúspide se convierte en un bucle, que se vuelve más grande conforme a se aproxima a 0. Cuando $a = 0$, ambas ramas se juntan y forman una circunferencia (véase el ejemplo 2). Para a entre 0 y 1, la rama izquierda tiene un bucle, el cual se contrae para volverse una cúspide cuando $a = 1$. Para $a > 1$, las ramas se suavizan de nuevo y cuando a crece más, se curvan menos. Observe que las curvas con a positiva son reflexiones respecto al eje y de las curvas correspondientes con a negativa.

Estas curvas se llaman **concoides de Nicomedes** en honor del erudito de la antigua Grecia, Nicomedes. Las llamó concoides porque la forma de sus ramas externas se asemeja a la concha de un caracol o de un mejillón.

10.1 Ejercicios

1-4 Bosqueje la curva ubicando puntos por medio de las ecuaciones paramétricas. Indique con una flecha la dirección en que se traza la curva cuando t crece.

1. $x = t^2 + t, \quad y = t^2 - t, \quad -2 \leq t \leq 2$

2. $x = t^2, \quad y = t^3 - 4t, \quad -3 \leq t \leq 3$

3. $x = \cos^2 t, \quad y = 1 - \operatorname{sen} t, \quad 0 \leq t \leq \pi/2$

4. $x = e^{-t} + t, \quad y = e^{t} - t, \quad -2 \leq t \leq 2$

5-10

a) Bosqueje la curva usando las ecuaciones paramétricas para ubicar puntos. Indique con una flecha la dirección en la cual se traza la curva cuando t aumenta.

b) Elimine el parámetro para hallar la ecuación cartesiana de la curva.

5. $x = 3 - 4t, \quad y = 2 - 3t$

6. $x = 1 - 2t, \quad y = \frac{1}{2}t - 1, \quad -2 \leq t \leq 4$

7. $x = 1 - t^2, \quad y = t - 2, \quad -2 \leq t \leq 2$

8. $x = t - 1, \quad y = t^3 + 1, \quad -2 \leq t \leq 2$

9. $x = \sqrt{t}, \quad y = 1 - t$

10. $x = t^2, \quad y = t^3$

11-18

a) Elimine el parámetro para hallar una ecuación cartesiana de la curva.

b) Bosqueje la curva e indique con una flecha la dirección en que se traza la curva cuando crece el parámetro.

11. $x = \operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta, \quad y = \cos \frac{1}{2}\theta, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi$

12. $x = \frac{1}{2} \cos \theta, \quad y = 2 \operatorname{sen} \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$

13. $x = \operatorname{sen} t, \quad y = \csc t, \quad 0 < t < \pi/2$

14. $x = e^{t} - 1, \quad y = e^{2t}$

15. $x = e^{2t}, \quad y = t + 1$

16. $y = \sqrt{t + 1}, \quad y = \sqrt{t - 1}$

17. $x = \operatorname{senh} t, \quad y = \cosh t$

18. $x = \tan^2 \theta, \quad y = \sec \theta, \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2$

Se requiere calculadora graficadora o computadora **1.** Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

19-22 Describa el movimiento de una partícula con posición (x, y) cuando t varía en el intervalo dado.

19. $x = 3 + 2\cos t, \quad y = 1 + 2\operatorname{sen} t, \quad \pi/2 \leq t \leq 3\pi/2$

20. $x = 2\operatorname{sen} t, \quad y = 4 + \cos t, \quad 0 \leq t \leq 3\pi/2$

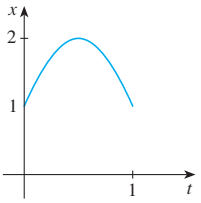
21. $x = 5\operatorname{sen} t, \quad y = 2\cos t, \quad -\pi \leq t \leq 5\pi$

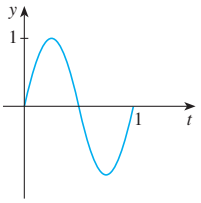
22. $x = \operatorname{sen} t, \quad y = \cos^2 t, \quad -2\pi \leq t \leq 2\pi$

23. Suponga que una curva está dada por las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, donde el rango de f es $[1, 4]$ y el rango de g es $[2, 3]$. ¿Qué podemos decir acerca de la curva?

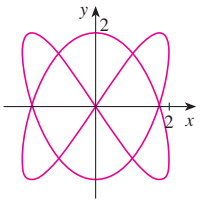
24. Relacione las gráficas de las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$ y $y = g(t)$ en a)-d) con las curvas paramétricas etiquetadas I-IV. Dé razones para sus elecciones.

a)

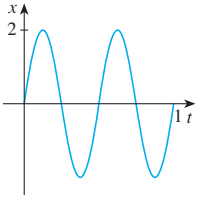


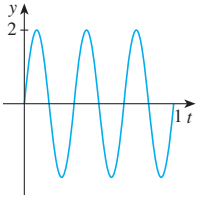


I

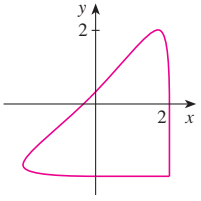


b)

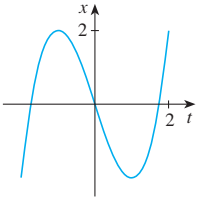


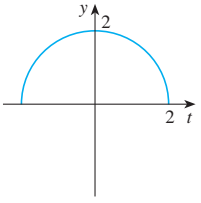


II

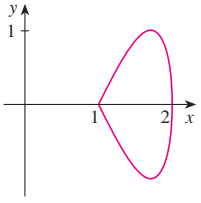


c)

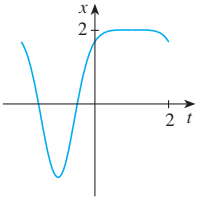


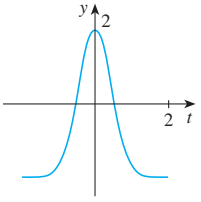


III

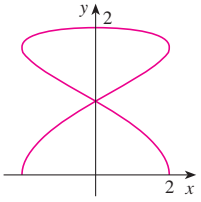


d)



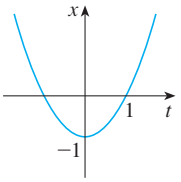


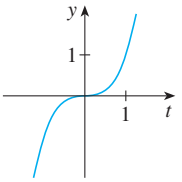
IV



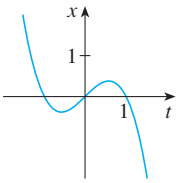
25-27 Use las gráficas de $x = f(t)$ y $y = g(t)$ para bosquejar la curva paramétrica $x = f(t)$, $y = g(t)$. Indique con flechas la dirección en que se traza la curva cuando t crece.

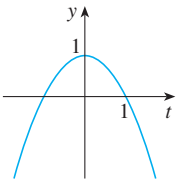
25.



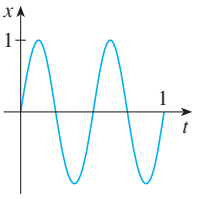


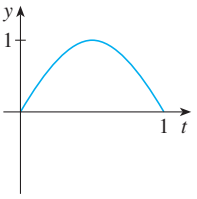
26.





27.





28. Relacione las curvas paramétricas con las curvas etiquetadas I-VI. Dé razones para sus elecciones. (No utilice dispositivos de graficación.)

a) $x = t^4 - t + 1, \quad y = t^2$

b) $x = t^2 - 2t, \quad y = \sqrt{t}$

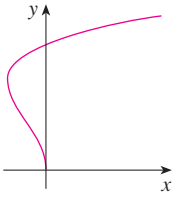
c) $x = \operatorname{sen} 2t, \quad y = \operatorname{sen}(t + \operatorname{sen} 2t)$

d) $x = \cos 5t, \quad y = \operatorname{sen} 2t$

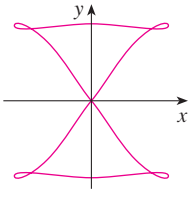
e) $x = t + \operatorname{sen} 4t, \quad y = t^2 + \cos 3t$

f) $x = \dfrac{\operatorname{sen} 2t}{4 + t^2}, \quad y = \dfrac{\cos 2t}{4 + t^2}$

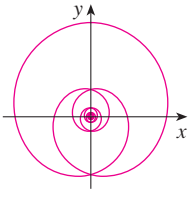
I



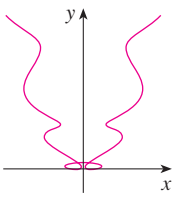
II



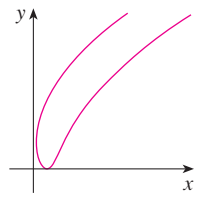
III



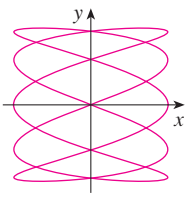
IV



V



VI



29. Grafique la curva $x = y - 2 \operatorname{sen} \pi y$.

30. Grafique las curvas $y = x^3 - 4x$ y $x = y^3 - 4y$, y encuentre sus puntos de intersección con una aproximación de un decimal.

31. a) Demuestre que las ecuaciones paramétricas

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)t \qquad y = y_1 + (y_2 - y_1)t$$

donde $0 \leqslant t \leqslant 1$, describen el segmento de recta que une los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$.

b) Encuentre las ecuaciones paramétricas para representar el segmento de recta de $(-2, 7)$ a $(3, -1)$.

32. Utilice un dispositivo de graficación y el resultado del ejercicio 31a) para dibujar el triángulo con vértices $A(1, 1)$, $B(4, 2)$ y $C(1, 5)$.

33. Encuentre ecuaciones paramétricas para la trayectoria de una partícula que se mueve a lo largo de la circunferencia $x^2 + (y - 1)^2 = 4$ de la manera que se describe.

a) Una vuelta en dirección de las manecillas del reloj, empezando en $(2, 1)$.

b) Tres vueltas en dirección contraria a las manecillas del reloj, empezando en $(2, 1)$

c) Media vuelta en dirección contraria a las manecillas del reloj, empezando en $(0, 3)$.

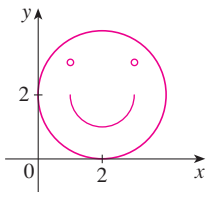
34. a) Encuentre ecuaciones paramétricas para la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. [*Sugerencia*: modifique las ecuaciones de la circunferencia del ejemplo 2.]

b) Utilice estas ecuaciones paramétricas para graficar la elipse cuando $a = 3$ y $b = 1, 2, 4$ y 8.

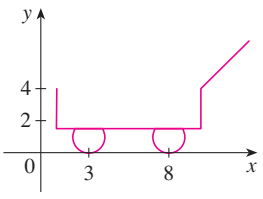
c) ¿Cómo cambia la forma de la elipse cuando b varía?

35-36 Utilice una calculadora graficadora o computadora para reproducir el dibujo

35.



36.



37-38 Compare las curvas representadas por las ecuaciones paramétricas ¿Cómo difieren?

37. a) $x = t^3, \quad y = t^2$ b) $x = t^6, \quad y = t^4$
c) $x = e^{-3t}, \quad y = e^{-2t}$

38. a) $x = t, \quad y = t^{-2}$ b) $x = \cos t, \quad y = \sec^2 t$
c) $x = e^t, \quad y = e^{-2t}$

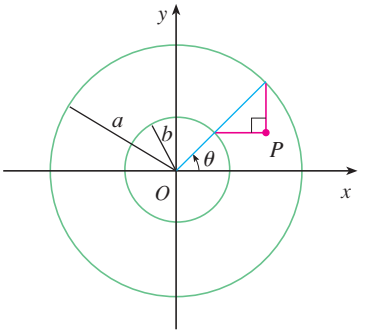
39. Deduzca las ecuaciones 1 para el caso $\pi/2 < \theta < \pi$.

40. Sea P un punto a una distancia d del centro de una circunferencia de radio r. La curva trazada por P cuando el círculo rueda a lo largo de una línea recta se llama **trocoide**. (Piense en el movimiento de un punto sobre el rayo de una rueda de bicicleta.) La cicloide es el caso especial de una trocoide con $d = r$. Utilizando el mismo parámetro θ como para la cicloide y, asumiendo que la recta es el eje de las x y $\theta = 0$ cuando P es uno de sus puntos mínimos, demuestre que las ecuaciones paramétricas de la trocoide son

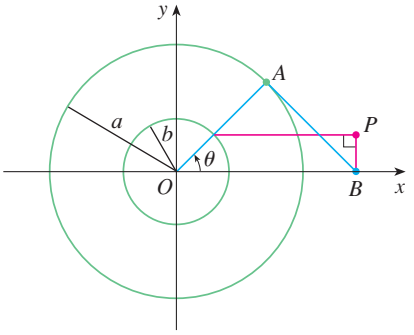
$$x = r\theta - d \operatorname{sen} \theta \qquad y = r - d \cos \theta$$

Trace la trocoide para los casos $d < r$ y $d > r$.

41. Si a y b son números fijos, encuentre las ecuaciones paramétricas para la curva que consiste de todas las posibles posiciones del punto P en la figura, utilizando el ángulo θ como parámetro. Después elimine el parámetro e identifique la curva.



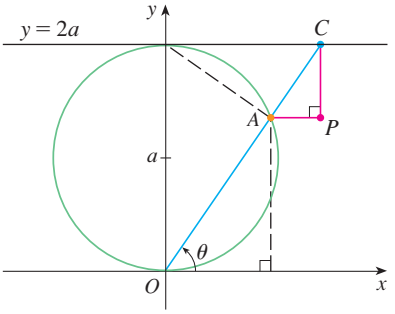
42. Si a y b son números fijos, encuentre las ecuaciones paramétricas de la curva que consiste de todas las posiciones posibles del punto P en la figura, usando el ángulo θ como parámetro. El segmento de recta AB es tangente a la circunferencia más grande.



43. Una curva, llamada **bruja de María Agnesi**, consiste de todas las posibles posiciones del punto P en la figura. Demuestre que las ecuaciones paramétricas para esta curva pueden expresarse como

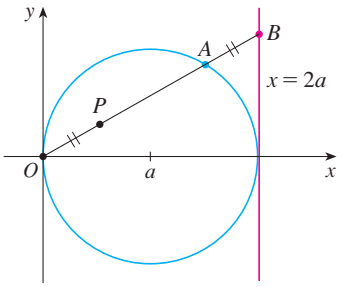
$$x = 2a \cot \theta \qquad y = 2a \operatorname{sen}^2 \theta$$

Trace la curva.



44. a) Encuentre las ecuaciones paramétricas para el conjunto de todos los puntos P como los que se muestran en la figura, tales que $|OP| = |AB|$. (Esta curva se llama **cisoide de Diocles** en honor al sabio griego Diocles, quien introdujo la cisoide como un método gráfico para construir el lado de un cubo cuyo volumen es dos veces el de un cubo dado.)

b) Utilice la descripción geométrica para dibujar a mano un bosquejo de la curva. Verifique su trabajo utilizando las ecuaciones paramétricas para graficar la curva.



45. Suponga que la posición de una partícula en el tiempo t está dada por

$$x_1 = 3 \operatorname{sen} t \qquad y_1 = 2 \cos t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

y la posición de una segunda partícula está dada por

$$x_2 = -3 + \cos t \qquad y_2 = 1 + \operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

a) Grafique las trayectorias de ambas partículas ¿Cuántos puntos de intersección hay?

b) ¿Algunos de estos puntos de intersección son *puntos de colisión*? En otras palabras ¿las partículas están en el mismo lugar al mismo tiempo? Si es así, encuentre los puntos de colisión.

c) Describa qué pasa si la trayectoria de la segunda partícula está dada por

$$x_2 = 3 + \cos t \qquad y_2 = 1 + \operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

46. Si un proyectil es disparado con una velocidad inicial de v_0 metros por segundo a un ángulo α por encima de la horizontal y se supone que la resistencia del aire es despreciable, entonces su posición después de t segundos está dada por las ecuaciones paramétricas

$$x = (v_0 \cos \alpha)t \qquad y = (v_0 \operatorname{sen} \alpha)t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad ($9.8\ \text{m/s}^2$).

a) Si un arma es disparada con $\alpha = 30°$ y $v_0 = 500$ m/s, ¿cuándo caerá la bala al suelo? ¿A qué distancia del arma llegará al suelo? ¿Cuál es la altura máxima que alcanzará la bala?

b) Utilice un dispositivo de graficación para verificar sus respuestas al inciso a). Después grafique la trayectoria del proyectil para otros valores del ángulo α para ver dónde pegará en el suelo. Resuma sus hallazgos.

c) Demuestre que la trayectoria es parabólica eliminando el parámetro.

47. Investigue la familia de curvas definidas por las ecuaciones paramétricas $x = t^2$, $y = t^3 - ct$. ¿Cómo cambia la forma de la curva cuando c crece? Ilustre graficando varios miembros de la familia.

48. Las **curvas catastróficas cola de golondrina** están definidas por las ecuaciones paramétricas $x = 2ct - 4t^3$, $y = -ct^2 + 3t^4$. Grafique varias de estas curvas. ¿Qué características tienen en común las curvas? ¿Cómo cambian cuando c crece?

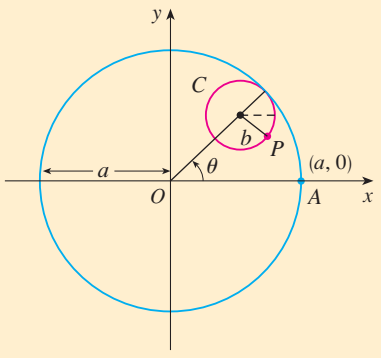
49. Grafique varios miembros de la familia de curvas con ecuaciones paramétricas $x = t + a \cos t$, $y = t + a \operatorname{sen} t$, donde $a > 0$. ¿Cómo cambia la forma de la curva cuando a crece? ¿Para cuáles valores de a la curva tiene un bucle?

50. Grafique varios miembros de la familia de curvas $x = \operatorname{sen} t + \operatorname{sen} nt$, $y = \cos t + \cos nt$ donde n es un entero positivo. ¿Qué características tienen en común las curvas? ¿Qué pasa cuando n crece?

51. Las curvas con ecuaciones $x = a \operatorname{sen} nt$, $y = b \cos t$ se llaman **figuras de Lissajous**. Investigue cómo varían estas curvas cuando varían a, b y n. (Tome n como un entero positivo.)

52. Investigue la familia de curvas definidas por las ecuaciones paramétricas $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} ct$, donde $c > 0$. Empiece por hacer c entero positivo y vea qué pasa con la forma cuando c crece. Después explore algunas de las posibilidades que ocurren cuando c es una fracción.

PROYECTO DE LABORATORIO — CIRCUNFERENCIAS QUE CORREN ALREDEDOR DE CIRCUNFERENCIAS



En este proyecto investigamos familias de curvas, llamadas *hipocicloides* y *epicicloides*, que son generadas por el movimiento de un punto sobre una circunferencia que rueda dentro o fuera de otra circunferencia.

1. Una **hipocicloide** es una curva trazada por un punto fijo P sobre la circunferencia C de radio b cuando C rueda sobre el interior de la circunferencia con centro en O y radio a. Demuestre que si la posición inicial de P es $(a, 0)$ y el parámetro θ se elige como en la figura, entonces las ecuaciones paramétricas de la hipocicloide son

$$x = (a - b)\cos\theta + b\cos\left(\frac{a-b}{b}\theta\right) \qquad y = (a - b)\operatorname{sen}\theta - b\operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{b}\theta\right)$$

Se requiere calculadora graficadora o computadora

TEC Recurra a Module 10.1B para ver cómo se forman las hipocicloides y epicicloides por el movimiento rotatorio de círculos.

2. Utilice un dispositivo de graficación (o el graficador interactivo en TEC Module 10.1B) para dibujar las gráficas de hipocicloides con a entero positivo y $b = 1$. ¿Cómo afecta la gráfica el valor de a? Demuestre que si tomamos $a = 4$, entonces las ecuaciones paramétricas de la hipocicloide se reducen a

$$x = 4\cos^3\theta \qquad y = 4\operatorname{sen}^3\theta$$

Esta curva se llama **hipocicloide de cuatro cúspides**, o un **astroide**.

3. Ahora intente $b = 1$ y $a = n/d$, una fracción donde n y d no tienen factores comunes. Primero haga $n = 1$ e intente determinar gráficamente el efecto del denominador d sobre la forma de la gráfica. Después haga que n varíe mientras d permanece constante. ¿Qué pasa cuando $n = d + 1$?

4. ¿Qué pasa si $b = 1$ y a es irracional? Experimente con un número irracional como $\sqrt{2}$ o $e - 2$. Tome valores cada vez más grandes para θ y especule sobre qué pasaría si se graficara la hipocicloide para todos los valores reales de θ.

5. Si la circunferencia C rueda en el *exterior* del círculo fijo, la curva trazada por P se llama **epicicloide**. Encuentre las ecuaciones paramétricas para la epicicloide.

6. Investigue las posibles formas para las epicicloides. Use métodos semejantes a los problemas 2-4.

10.2 Cálculo con curvas paramétricas

Una vez que hemos visto cómo representar ecuaciones paramétricas, aplicaremos los métodos de cálculo a las curvas paramétricas. En particular, resolveremos problemas que involucran tangentes, áreas, longitudes de arco y áreas de superficies.

Tangentes

Suponga que f y g son funciones derivables y queremos encontrar la recta tangente en un punto sobre la curva donde y también es una función derivable de x. Entonces la regla de la cadena da

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$$

Si $dx/dt \neq 0$, podemos resolver para dy/dx:

Si pensamos la curva como trazada por el movimiento de una partícula, entonces dy/dt y dx/dt son las velocidades verticales y horizontales de la partícula y la fórmula 1 dice que la pendiente de la recta tangente es la razón de estas velocidades.

$$\boxed{1} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} \qquad \text{si} \quad \frac{dx}{dt} \neq 0$$

La ecuación 1 (que puede usted pensar como si se eliminaran las dt) nos posibilita para encontrar la pendiente dy/dx de la recta tangente a una curva paramétrica, sin tener que eliminar el parámetro t. En $\boxed{1}$ se ve que la curva tiene una tangente horizontal cuando $dy/dt = 0$ (siempre que $dx/dt \neq 0$) y tiene una recta tangente vertical cuando $dx/dt = 0$ (siempre que $dy/dt \neq 0$). Esta información es útil para trazar curvas paramétricas.

Como sabemos del capítulo 4, también es útil considerar d^2y/dx^2. Esto lo podemos encontrar reemplazando y por dy/dx en la ecuación 1:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}}$$

⊘ Observe que $\dfrac{d^2y}{dx^2} \neq \dfrac{\dfrac{d^2y}{dt^2}}{\dfrac{d^2x}{dt^2}}$

EJEMPLO 1 Una curva C está definida por las ecuaciones paramétricas $x = t^2$, $y = t^3 - 3t$.
a) Demuestre que C tiene dos rectas tangentes en el punto (3, 0) y encuentre sus ecuaciones.
b) Encuentre el punto sobre C donde la recta tangente es horizontal o vertical.
c) Determine dónde la curva es cóncava hacia arriba o hacia abajo.
d) Trace la curva.

SOLUCIÓN a) Observe que $y = t^3 - 3t = t(t^2 - 3) = 0$ cuando $t = 0$ o $t = \pm\sqrt{3}$. Por tanto, el punto (3, 0) sobre la curva C viene de dos valores del parámetro, $t = \sqrt{3}$ y $t = -\sqrt{3}$. Esto indica que C se cruza a sí misma en (3, 0). Puesto que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{3t^2 - 3}{2t} = \frac{3}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$$

la pendiente de la recta tangente cuando $t = \pm\sqrt{3}$ es $dy/dx = \pm 6/(2\sqrt{3}) = \pm\sqrt{3}$, por lo que las ecuaciones de las rectas tangentes en (3, 0) son

$$y = \sqrt{3}\,(x - 3) \qquad \text{y} \qquad y = -\sqrt{3}\,(x - 3)$$

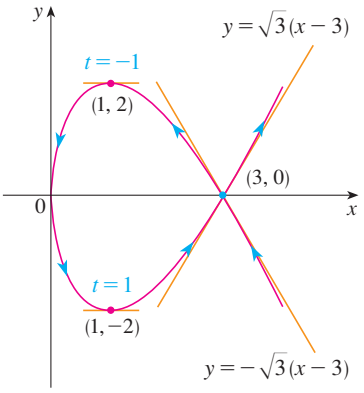


FIGURA 1

b) C tiene una recta tangente horizontal cuando $dy/dx = 0$; esto es, cuando $dy/dt = 0$ y $dx/dt \neq 0$. Puesto que $dy/dt = 3t^2 - 3$, esto sucede cuando $t^2 = 1$, es decir, $t = \pm 1$. Los puntos correspondientes sobre C son (1, −2) y (1, 2). C tiene una recta tangente vertical cuando $dx/dt = 2t = 0$, es decir, $t = 0$. (Observe que ahí $dy/dt \neq 0$.) El punto correspondiente sobre C es (0, 0).
c) Para determinar concavidades calculamos segundas derivadas:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{\dfrac{3}{2}\left(1 + \dfrac{1}{t^2}\right)}{2t} = \frac{3(t^2 + 1)}{4t^3}$$

Así, la curva es cóncava hacia arriba cuando $t > 0$ y cóncava hacia abajo cuando $t < 0$.
d) Utilizando la información de los incisos b) y c), trazamos C en la figura 1.

V EJEMPLO 2
a) Encuentre la recta tangente a la cicloide $x = r(\theta - \operatorname{sen}\theta)$, $y = r(1 - \cos\theta)$ en el punto donde $\theta = \pi/3$ (véase ejemplo 7 de la sección 10.1).
b) ¿En qué puntos la recta tangente es horizontal? ¿Cuándo es vertical?

SOLUCIÓN
a) La pendiente de la recta tangente es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{r\operatorname{sen}\theta}{r(1 - \cos\theta)} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{1 - \cos\theta}$$

Cuando $\theta = \pi/3$, tenemos

$$x = r\left(\frac{\pi}{3} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right) = r\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad y = r\left(1 - \cos\frac{\pi}{3}\right) = \frac{r}{2}$$

y

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sen}(\pi/3)}{1 - \cos(\pi/3)} = \frac{\sqrt{3}/2}{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

Por tanto, la pendiente de la recta tangente es $\sqrt{3}$ y su ecuación es

$$y - \frac{r}{2} = \sqrt{3}\left(x - \frac{r\pi}{3} + \frac{r\sqrt{3}}{2}\right) \qquad \text{o} \qquad \sqrt{3}\,x - y = r\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - 2\right)$$

La recta tangente se traza en la figura 2.

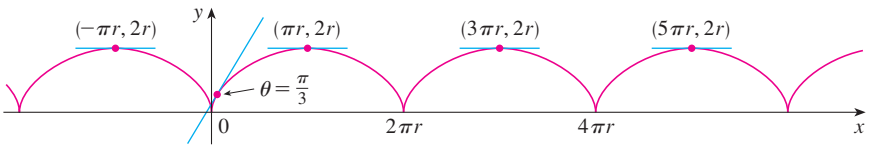


FIGURA 2

b) La recta tangente es horizontal cuando $dy/dx = 0$, lo cual ocurre cuando $\operatorname{sen}\theta = 0$ y $1 - \cos\theta \neq 0$, es decir, $\theta = (2n - 1)\pi$, con n un entero. El punto correspondiente sobre la cicloide es $((2n - 1)\pi r, 2r)$.

Cuando $\theta = 2n\pi$, tanto $dx/d\theta$ como $dy/d\theta$ son cero. De la gráfica, parece que hay rectas tangentes verticales en esos puntos. Esto es verificable por medio de la regla de l'Hospital como sigue:

$$\lim_{\theta \to 2n\pi^+} \frac{dy}{dx} = \lim_{\theta \to 2n\pi^+} \frac{\operatorname{sen}\theta}{1 - \cos\theta} = \lim_{\theta \to 2n\pi^+} \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \infty$$

Un cálculo semejante muestra que $dy/dx \to -\infty$ cuando $\theta \to 2n\pi^-$, así que finalmente existen rectas tangentes verticales cuando $\theta = 2n\pi$, esto es, cuando $x = 2n\pi r$.

Áreas

Sabemos que el área bajo una curva $y = F(x)$ de a a b es $A = \int_a^b F(x)\,dx$, donde $F(x) \geqslant 0$. Si la curva se traza por medio de las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$ y $y = g(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, entonces podemos calcular una fórmula para el área utilizando la regla de la sustitución para integrales definidas como sigue:

Los límites de integración para t se encuentran como de costumbre con la regla de sustitución. Cuando $x = a$, t es α o β. Cuando $x = b$, t es el valor restante.

$$A = \int_a^b y\,dx = \int_\alpha^\beta g(t)f'(t)\,dt \qquad \left[\text{o bien } \int_\beta^\alpha g(t)f'(t)\,dt\right]$$

EJEMPLO 3 Encuentre el área bajo uno de los arcos de la cicloide

$$x = r(\theta - \operatorname{sen}\theta) \qquad y = r(1 - \cos\theta)$$

(Véase figura 3.)

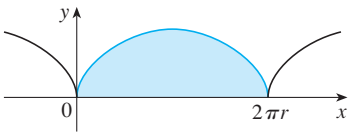


FIGURA 3

SOLUCIÓN Un arco de la cicloide está dado por $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Utilizando la regla de sustitución con $y = r(1 - \cos\theta)$ y $dx = r(1 - \cos\theta)\,d\theta$, tenemos

$$A = \int_0^{2\pi r} y\,dx = \int_0^{2\pi} r(1 - \cos\theta)\,r(1 - \cos\theta)\,d\theta$$

$$= r^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta)^2\,d\theta = r^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta)\,d\theta$$

$$= r^2 \int_0^{2\pi} \left[1 - 2\cos\theta + \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)\right] d\theta$$

$$= r^2\left[\tfrac{3}{2}\theta - 2\operatorname{sen}\theta + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta\right]_0^{2\pi}$$

$$= r^2\left(\tfrac{3}{2} \cdot 2\pi\right) = 3\pi r^2$$

El resultado del ejemplo 3 dice que el área bajo un arco de la cicloide es tres veces el área del círculo que al rodar genera la cicloide (ejemplo 7 de la sección 10.1). Galileo intuyó este resultado pero fue demostrado por el matemático francés Roberval y el matemático italiano Torricelli.

Longitud de arco

Ya sabemos cómo encontrar la longitud L de una curva C dada en la forma $y = F(x)$, $a \leq x \leq b$. La fórmula 8.1.3 dice que si F' es continua, entonces

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \qquad \boxed{2}$$

Suponga que C también se puede describir mediante las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$ y $y = g(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, donde $dx/dt = f'(t) > 0$. Esto significa que C es recorrida una vez, de izquierda a derecha, cuando t se incrementa de α a β y $f(\alpha) = a$, $f(\beta) = b$. Al sustituir la fórmula 1 en la fórmula 2 y usar la regla de sustitución, se obtiene

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left(\frac{dy/dt}{dx/dt}\right)^2} \frac{dx}{dt}\, dt$$

Como $dx/dt > 0$, tenemos

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \qquad \boxed{3}$$

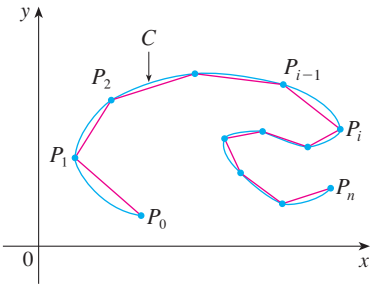


FIGURA 4

Incluso si C no se puede expresar en la forma $y = F(x)$, la fórmula aún es válida pero se obtiene por aproximaciones poligonales. Dividimos el intervalo de parámetro $[\alpha, \beta]$ en n subintervalos de igual ancho Δt. Si $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n$ son los puntos extremo de estos subintervalos, entonces $x_i = f(t_i)$ y $y_i = g(t_i)$ son las coordenadas de los puntos $P_i(x_i, y_i)$ que están sobre C y el polígono con vértices $P_0, P_1, \ldots, P_n$ se aproxima a C (véase figura 4).

Como en la sección 8.1, se define la longitud L de C como el límite de las longitudes de estos polígonos de aproximación cuando $n \to \infty$:

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i|$$

Cuando aplicamos el teorema del valor medio a f sobre el intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, nos da un número t_i^* en (t_{i-1}, t_i) tal que

$$f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(t_i^*)(t_i - t_{i-1})$$

Si hacemos $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, esta ecuación se convierte en

$$\Delta x_i = f'(t_i^*)\, \Delta t$$

Del mismo modo, cuando aplicamos a g, el teorema del valor medio nos da un número t_i^{**} en (t_{i-1}, t_i) tal que

$$\Delta y_i = g'(t_i^{**})\, \Delta t$$

Por tanto

$$\begin{aligned} |P_{i-1}P_i| &= \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{[f'(t_i^*)\,\Delta t]^2 + [g'(t_i^{**})\,\Delta t]^2} \\ &= \sqrt{[f'(t_i^*)]^2 + [g'(t_i^{**})]^2}\, \Delta t \end{aligned}$$

y así

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[f'(t_i^*)]^2 + [g'(t_i^{**})]^2}\, \Delta t \qquad \boxed{4}$$

La suma en 4 se asemeja a una suma de Riemann para la función $\sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}$ pero no es exactamente una suma de Riemann porque, en general, $t_i^* \neq t_i^{**}$. Sin embargo, si f' y g' son continuas, se puede demostrar que el límite en 4 es el mismo como si t_i^* y t_i^{**} fueran iguales, es decir

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt$$

Así, con la notación de Leibniz, se tiene el siguiente resultado, el cual tiene la misma forma que la fórmula 3.

5 Teorema Si una curva C se describe mediante las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, donde f' y g' son continuas sobre $[\alpha, \beta]$ y C es recorrida una sola vez cuando t aumenta desde α hasta β, entonces la longitud de C es

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Observe que la fórmula del teorema 5 es consistente con las fórmulas generales $L = \int ds$ y $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ de la sección 8.1.

EJEMPLO 4 Si usamos la representación de la circunferencia unitaria dada en el ejemplo 2 en la sección 10.1,

$$x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

entonces $dx/dt = -\operatorname{sen} t$ y $dy/dt = \cos t$, de modo que el teorema 5 da

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

como se esperaba. Si, por otro lado, usamos la representación dada en el ejemplo 3 de la sección 10.1,

$$x = \operatorname{sen} 2t \qquad y = \cos 2t \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

entonces $dx/dt = 2\cos 2t$, $dy/dt = -2\operatorname{sen} 2t$, y la integral del teorema 5 da

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\cos^2 2t + 4\operatorname{sen}^2 2t}\, dt = \int_0^{2\pi} 2\, dt = 4\pi$$

Observe que la integral da dos veces la longitud de arco de la circunferencia porque cuando t crece de 0 a 2π, el punto $(\operatorname{sen} 2t, \cos 2t)$ recorre la circunferencia dos veces. En general, cuando se encuentra la longitud de una curva C a partir de una representación paramétrica, debemos asegurarnos que C sea recorrida una sola vez cuando t crece de α a β.

V EJEMPLO 5 Encuentre la longitud de un arco de la cicloide $x = r(\theta - \operatorname{sen}\theta)$, $y = r(1 - \cos\theta)$.

SOLUCIÓN Del ejemplo 3, vemos que un arco se describe por el intervalo del parámetro $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Como

$$\frac{dx}{d\theta} = r(1 - \cos\theta) \qquad \text{y} \qquad \frac{dy}{d\theta} = r\operatorname{sen}\theta$$

tenemos

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(1 - \cos\theta)^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)}\, d\theta$$

$$= r\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos\theta)}\, d\theta$$

El resultado del ejemplo 5 dice que la longitud de un arco de una cicloide es ocho veces el radio del círculo generador (véase la figura 5). El primero en demostrar esto fue Sir Christopher Wren, quien posteriormente fue el arquitecto de la catedral de Saint Paul, en Londres.

Para evaluar esta integral utilizamos la identidad $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ con $\theta = 2x$, la cual da $1 - \cos\theta = 2\operatorname{sen}^2(\theta/2)$. Como $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, tenemos $0 \leqslant \theta/2 \leqslant \pi$ y por tanto $\operatorname{sen}(\theta/2) \geqslant 0$. Por ende,

$$\sqrt{2(1 - \cos\theta)} = \sqrt{4\operatorname{sen}^2(\theta/2)} = 2\left|\operatorname{sen}(\theta/2)\right| = 2\operatorname{sen}(\theta/2)$$

y, por consiguiente

$$L = 2r\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(\theta/2)\, d\theta = 2r[-2\cos(\theta/2)]_0^{2\pi}$$

$$= 2r[2 + 2] = 8r$$

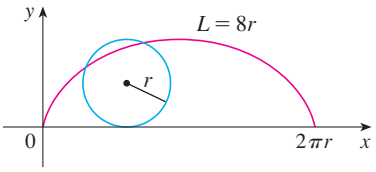


FIGURA 5

Área de una superficie

En la misma forma que para la longitud de arco, se puede adaptar la fórmula 8.2.5 para obtener una fórmula para el área de una superficie. Si la curva dada por las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, se hace rotar en torno al eje x, donde f', g' son continuas y $g(t) \geqslant 0$, entonces el área de la superficie resultante está dada por

$$\boxed{6} \qquad S = \int_\alpha^\beta 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Las fórmulas simbólicas generales $S = \int 2\pi y\, ds$ y $S = \int 2\pi x\, ds$ (fórmulas 8.2.7 y 8.2.8) aún son válidas, pero para curvas paramétricas usamos

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

EJEMPLO 6 Demuestre que el área de la superficie de una esfera de radio r es $4\pi r^2$.

SOLUCIÓN La esfera es obtenida al rotar el semicírculo

$$x = r\cos t \qquad y = r\operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant \pi$$

en torno al eje x. Por tanto, de la fórmula 6, obtenemos

$$S = \int_0^\pi 2\pi r \operatorname{sen} t \sqrt{(-r\operatorname{sen} t)^2 + (r\cos t)^2}\, dt$$

$$= 2\pi\int_0^\pi r\operatorname{sen} t \sqrt{r^2(\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t)}\, dt = 2\pi\int_0^\pi r\operatorname{sen} t \cdot r\, dt$$

$$= 2\pi r^2\int_0^\pi \operatorname{sen} t\, dt = 2\pi r^2(-\cos t)]_0^\pi = 4\pi r^2$$

10.2 Ejercicios

1-2 Encuentre dy/dx.

1. $x = t \operatorname{sen} t, \quad y = t^2 + t$

2. $x = 1/t, \quad y = \sqrt{t}\, e^{-t}$

3-6 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto correspondiente al valor del parámetro dado.

3. $x = 1 + 4t - t^2, \quad y = 2 - t^3; \quad t = 1$

4. $x = t - t^{-1}, \quad y = 1 + t^2; \quad t = 1$

5. $x = t \cos t, \quad y = t \operatorname{sen} t; \quad t = \pi$

6. $x = \operatorname{sen}^3\theta, \quad y = \cos^3\theta; \quad \theta = \pi/6$

7-8 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado por dos métodos: a) sin eliminar el parámetro y b) eliminando primero el parámetro.

7. $x = 1 + \ln t, \quad y = t^2 + 2; \quad (1, 3)$

8. $x = 1 + \sqrt{t}, \quad y = e^{t^2}; \quad (2, e)$

9-10 Encuentre la ecuación de la recta tangente(s) a la curva en el punto dado. Después grafique la curva y la(s) recta(s) tangente(s).

9. $x = 6 \operatorname{sen} t, \quad y = t^2 + t; \quad (0, 0)$

10. $x = \cos t + \cos 2t, \quad y = \operatorname{sen} t + \operatorname{sen} 2t; \quad (-1, 1)$

11-16 Encuentre dy/dx y d^2y/dx^2. ¿Para cuáles valores de t la curva es cóncava hacia arriba?

11. $x = t^2 + 1, \quad y = t^2 + t$

12. $x = t^3 + 1, \quad y = t^2 - t$

13. $x = e^t, \quad y = te^{-t}$

14. $x = t^2 + 1, \quad y = e^t - 1$

15. $x = 2 \operatorname{sen} t, \quad y = 3 \cos t, \quad 0 < t < 2\pi$

16. $x = \cos 2t, \quad y = \cos t, \quad 0 < t < \pi$

17-20 Encuentre los puntos sobre la curva donde la recta tangente es horizontal o vertical. Si dispone de un dispositivo de graficación, grafique la curva para verificar su trabajo.

17. $x = t^3 - 3t, \quad y = t^2 - 3$

18. $x = t^3 - 3t, \quad y = t^3 - 3t^2$

19. $x = \cos\theta, \quad y = \cos 3\theta$

20. $x = e^{\operatorname{sen}\theta}, \quad y = e^{\cos\theta}$

21. Utilice una gráfica para estimar las coordenadas del punto extremo derecho sobre la curva $x = t - t^6$, $y = e^t$. Después utilice cálculo para encontrar las coordenadas exactas.

22. Use una gráfica para estimar las coordenadas del punto más bajo y el de la extrema izquierda sobre la curva $x = t^4 - 2t$, $y = t + t^4$. Después encuentre las coordenadas exactas.

23-24 Grafique la curva en un rectángulo de vista que muestre los aspectos más importantes de la curva.

23. $x = t^4 - 2t^3 - 2t^2, \quad y = t^3 - t$

24. $x = t^4 + 4t^3 - 8t^2, \quad y = 2t^2 - t$

25. Demuestre que la curva $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t \cos t$ tiene dos rectas tangentes en $(0, 0)$ y encuentre sus ecuaciones. Trace la curva.

26. Grafique la curva $x = \cos t + 2 \cos 2t$, $y = \operatorname{sen} t + 2 \operatorname{sen} 2t$ para descubrir dónde se intercepta consigo misma. Después encuentre ecuaciones para ambas rectas tangentes en ese punto.

27. a) Encuentre la pendiente de la recta tangente a la trocoide $x = r\theta - d \operatorname{sen}\theta$, $y = r - d \cos\theta$ en términos de θ. (Véase el ejercicio 40 de la sección 10.1.)
b) Demuestre que si $d < r$, entonces el trocoide no tiene una recta tangente vertical.

28. a) Encuentre la pendiente de la recta tangente al astroide $x = a \cos^3\theta$, $y = a \operatorname{sen}^3\theta$ en términos de θ. (Los astroides se exploran en el proyecto de laboratorio de la página 644.)
b) ¿En qué puntos la recta tangente es horizontal o vertical?
c) ¿En qué puntos la recta tangente tiene pendiente 1 o -1?

29. ¿En qué puntos sobre la curva $x = 2t^3$, $y = 1 + 4t - t^2$ la recta tangente tiene pendiente 1?

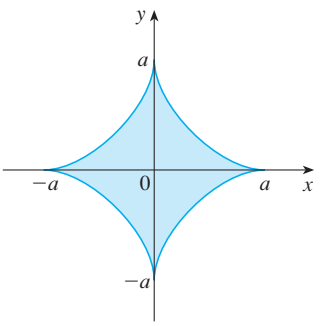
30. Encuentre ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $x = 3t^2 + 1$, $y = 2t^3 + 1$ que pasen por el punto $(4, 3)$.

31. Use las ecuaciones paramétricas de una elipse $x = a \cos\theta$, $y = b \operatorname{sen}\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ para encontrar el área que encierra.

32. Encuentre el área encerrada por la curva $x = t^2 - 2t$, $y = \sqrt{t}$ y el eje y.

33. Encuentre el área encerrada por el eje x y la curva $x = 1 + e^t$, $y = t - t^2$.

34. Encuentre el área de la región encerrada por el astroide $x = a \cos^3\theta$, $y = a \operatorname{sen}^3\theta$. (Los astroides son explorados en el proyecto de laboratorio de la página 644.)



35. Encuentre el área bajo un arco del trocoide del ejercicio 40 en la sección 10.1 para el caso $d < r$.

36. Sea $\mathcal{R}$ la región encerrada por el bucle de la curva en el ejemplo 1.
a) Encuentre el área de $\mathcal{R}$.
b) Si $\mathcal{R}$ gira en torno al eje x, encuentre el volumen del sólido resultante.
c) Encuentre el centroide de $\mathcal{R}$.

37-40 Plantee una integral que represente la longitud de la curva. Después utilice su calculadora para encontrar la longitud con una aproximación de cuatro decimales.

37. $x = t + e^{-t}, \quad y = t - e^{-t}, \quad 0 \leq t \leq 2$

38. $x = t^2 - t, \quad y = t^4, \quad 1 \leq t \leq 4$

39. $x = t - 2 \operatorname{sen} t, \quad y = 1 - 2 \cos t, \quad 0 \leq t \leq 4\pi$

40. $x = t + \sqrt{t}, \quad y = t - \sqrt{t}, \quad 0 \leq t \leq 1$

41-44 Encuentre la longitud exacta de la curva.

41. $x = 1 + 3t^2, \quad y = 4 + 2t^3, \quad 0 \leq t \leq 1$

42. $x = e^t + e^{-t}, \quad y = 5 - 2t, \quad 0 \leq t \leq 3$

43. $x = t \operatorname{sen} t, \quad y = t \cos t, \quad 0 \leq t \leq 1$

44. $x = 3 \cos t - \cos 3t, \quad y = 3 \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 3t, \quad 0 \leq t \leq \pi$

45-46 Grafique la curva y encuentre su longitud.

45. $x = e^t \cos t, \quad y = e^t \operatorname{sen} t, \quad 0 \leq t \leq \pi$

46. $x = \cos t + \ln(\tan \frac{1}{2}t), \quad y = \operatorname{sen} t, \quad \pi/4 \leq t \leq 3\pi/4$

47. Grafique la curva $x = \operatorname{sen} t + \operatorname{sen} 1.5t$, $y = \cos t$ y encuentre su longitud con una aproximación de cuatro decimales.

48. Encuentre la longitud del bucle de la curva $x = 3t - t^3$, $y = 3t^2$.

49. Use la regla de Simpson con $n = 6$ para estimar la longitud de la curva $x = t - e^t$, $y = t + e^t$, $-6 \leq t \leq 6$

50. En el ejercicio 43 de la sección 10.1 se le pidió deducir las ecuaciones paramétricas $x = 2a \cot \theta$, $y = 2a \operatorname{sen}^2\theta$ de la curva llamada bruja de María Agnesi. Use la regla de Simpson con $n = 4$ para estimar la longitud del arco de esta curva dada por $\pi/4 \leq \theta \leq \pi/2$.

51-52 Encuentre la distancia recorrida por la partícula con posición (x, y) cuando t varía en el intervalo dado. Compárela con la longitud de la curva.

51. $x = \operatorname{sen}^2 t, \quad y = \cos^2 t, \quad 0 \leq t \leq 3\pi$

52. $x = \cos^2 t, \quad y = \cos t, \quad 0 \leq t \leq 4\pi$

53. Demuestre que la longitud total de la elipse $x = a \operatorname{sen} \theta$, $y = b \cos \theta$, $a > b > 0$, es

$$L = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta$$

donde e es la excentricidad de la elipse ($e = c/a$, donde $c = \sqrt{a^2 - b^2}$).

54. Encuentre la longitud total del astroide $x = a \cos^3\theta$, $y = a \operatorname{sen}^3\theta$, donde $a > 0$.

55. a) Grafique la **epitrocoide** con ecuaciones

$$x = 11 \cos t - 4 \cos(11t/2)$$
$$y = 11 \operatorname{sen} t - 4 \operatorname{sen}(11t/2)$$

¿Qué intervalo del parámetro da la curva completa?
b) Use su SAC para encontrar la longitud aproximada de esta curva.

56. Una curva llamada **espiral de Cornu** se define por las ecuaciones paramétricas

$$x = C(t) = \int_0^t \cos(\pi u^2/2)\, du$$
$$y = S(t) = \int_0^t \operatorname{sen}(\pi u^2/2)\, du$$

donde C y S son las ecuaciones de Fresnel que se introdujeron en el capítulo 5.
a) Grafique esta curva. ¿Qué pasa cuando $t \to \infty$ y cuando $t \to -\infty$?
b) Encuentre la longitud de la espiral de Cornu desde el origen al punto con valor de parámetro t.

57-60 Plantee una integral que represente el área de la superficie obtenida al rotar la curva dada en torno al eje x. Después utilice su calculadora para encontrar el área de la superficie con una aproximación de cuatro decimales.

57. $x = t \operatorname{sen} t, \quad y = t \cos t, \quad 0 \leq t \leq \pi/2$

58. $x = \operatorname{sen} t, \quad y = \operatorname{sen} 2t, \quad 0 \leq t \leq \pi/2$

59. $x = 1 + te^t, \quad y = (t^2 + 1)e^t, \quad 0 \leq t \leq 1$

60. $x = t^2 - t^3, \quad y = t + t^4, \quad 0 \leq t \leq 1$

61-63 Encuentre el área exacta de la superficie obtenida al rotar la curva dada en torno al eje x.

61. $x = t^3, \quad y = t^2, \quad 0 \leq t \leq 1$

62. $x = 3t - t^3, \quad y = 3t^2, \quad 0 \leq t \leq 1$

63. $x = a \cos^3\theta, \quad y = a \operatorname{sen}^3\theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2$

64. Grafique la curva

$$x = 2 \cos\theta - \cos 2\theta \qquad y = 2 \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen} 2\theta$$

Si esta curva rota en torno al eje x, encuentre el área de la superficie resultante. (Use la gráfica para ayudarse a encontrar el intervalo correcto para el parámetro.)

65-66 Encuentre el área de la superficie generada al rotar la curva dada en torno al eje y.

65. $x = 3t^2, \quad y = 2t^3, \quad 0 \leq t \leq 5$

66. $x = e^t - t, \quad y = 4e^{t/2}, \quad 0 \leq t \leq 1$

67. Si f' es continua y $f'(t) \neq 0$ para $a \leq t \leq b$, demuestre que la curva paramétrica $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$, puede expresarse en la forma $y = F(x)$. [Sugerencia: demuestre que f^{-1} existe.]

68. Use la fórmula 2 para deducir la fórmula 7 de la fórmula 8.2.5 para el caso en el que la curva puede representarse en la forma $y = F(x)$, $a \leq x \leq b$.

69. La **curvatura** en un punto P de una curva está definida como

$$\kappa = \left| \frac{d\phi}{ds} \right|$$

donde ϕ es el ángulo de inclinación de la recta tangente en P, como se ve en la figura. Así, la curvatura es el valor absoluto de la razón de cambio de ϕ con respecto a la longitud de arco. Esto puede considerarse como una medida de la rapidez de cambio de la dirección de la curva en P y la estudiaremos con mucho detalle en el capítulo 13.

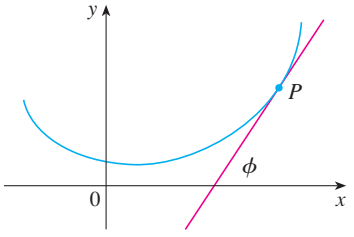
a) Para una curva paramétrica $x = x(t)$, $y = y(t)$, deduzca la fórmula

$$\kappa = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|}{[\dot{x}^2 + \dot{y}^2]^{3/2}}$$

donde los puntos indican derivadas con respecto a t, de manera que $\dot{x} = dx/dt$. [Sugerencia: use $\phi = \tan^{-1}(dy/dx)$ y la fórmula 2 para encontrar $d\phi/dt$. Después use la regla de la cadena para encontrar $d\phi/ds$.]

b) Considerando la curva $y = f(x)$ como la curva paramétrica $x = x$, $y = f(x)$, con parámetro x, demuestre que la fórmula del inciso a) resulta

$$\kappa = \frac{|d^2y/dx^2|}{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}$$



70. a) Use la fórmula del ejercicio 69b) para encontrar la curvatura de la parábola $y = x^2$ en el punto (1, 1).

b) ¿En qué punto esta parábola tiene curvatura máxima?

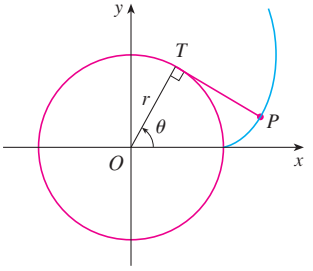
71. Use la fórmula del ejercicio 69a) para encontrar la curvatura de la cicloide $x = \theta - \operatorname{sen}\theta$, $y = 1 - \cos\theta$ en la parte superior de uno de los arcos.

72. a) Demuestre que la curvatura de cada punto de la línea recta es $\kappa = 0$.

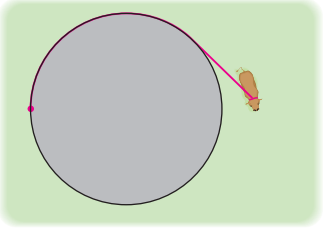
b) Demuestre que la curvatura en cada punto de una circunferencia de radio r es $\kappa = 1/r$.

73. Una cuerda se enrolla alrededor de un círculo y después se desenrolla manteniéndose tensa. La curva trazada por el punto P en el extremo de la cuerda se llama **involuta** del círculo. Si el círculo tiene radio r y centro O y la posición inicial de P es $(r, 0)$, y si el parámetro θ se elige como en la figura, demuestre que las ecuaciones paramétricas de la involuta son

$$x = r(\cos\theta + \theta \operatorname{sen}\theta) \qquad y = r(\operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta)$$



74. Una vaca está atada a un silo con radio r por una cuerda lo suficientemente larga para alcanzar el lado opuesto del silo. Encuentre el área disponible para el apacentamiento de la vaca.



PROYECTO DE LABORATORIO CURVAS DE BÉZIER

Las **curvas de Bézier** se emplean en el diseño auxiliado por computadora y se nombran así en honor al matemático francés Pierre Bézier (1910-1999), quien trabajó en la industria automotriz. Una curva de Bézier está determinada mediante cuatro *puntos de control*, $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ y $P_3(x_3, y_3)$, y se define mediante las ecuaciones paramétricas

$$x = x_0(1 - t)^3 + 3x_1t(1 - t)^2 + 3x_2t^2(1 - t) + x_3t^3$$

$$y = y_0(1 - t)^3 + 3y_1t(1 - t)^2 + 3y_2t^2(1 - t) + y_3t^3$$

Se requiere calculadora graficadora o computadora

donde $0 \leq t \leq 1$. Observe que cuando $t = 0$, se tiene $(x, y) = (x_0, y_0)$ y cuando $t = 1$ se tiene $(x, y) = (x_3, y_3)$, así que la curva empieza en P_0 y termina en P_3.

1. Grafique la curva de Bézier con puntos de control $P_0(4, 1)$, $P_1(28, 48)$, $P_2(50, 42)$ y $P_3(40, 5)$. Enseguida, en la misma pantalla, grafique segmentos de recta P_0P_1, P_1P_2 y P_2P_3. (El ejercicio 31 en la sección 10.1 muestra cómo hacer esto.) Observe que los puntos de control medios P_1 y P_2 no están sobre la curva; la curva empieza en P_0, se dirige hacia P_1 y P_2 sin alcanzarlos y termina en P_3.
2. En la gráfica del problema 1 parece que la recta tangente en P_0 pasa por P_1 y la recta tangente en P_3 pasa por P_2. Demuéstrelo.
3. Intente producir una curva de Bézier con un bucle cambiando el segundo punto de control en el problema 1.
4. Algunas impresoras láser usan las curvas de Bézier para representar letras y otros símbolos. Experimente con puntos de control hasta que encuentre una curva de Bézier que dé una representación razonable de la letra *C*.
5. Se pueden representar formas más complicadas juntando dos o más curvas de Bézier. Suponga que la primera curva de Bézier tiene puntos de control P_0, P_1, P_2, P_3 y la segunda tiene puntos de control P_3, P_4, P_5, P_6. Si se desea unir estos dos trozos de manera suave, entonces las rectas tangentes en P_3 deben corresponderse y, por tanto, los puntos P_2, P_3 y P_4 tienen que estar sobre esta recta tangente común. Con este principio, determine los puntos de control para un par de curvas de Bézier que representen la letra *S*.

10.3 Coordenadas polares

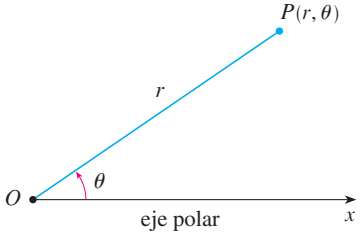


FIGURA 1

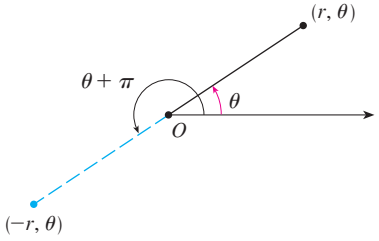


FIGURA 2

Un sistema coordenado representa un punto en el plano mediante un par ordenado de números llamados coordenadas. Por lo general usamos coordenadas cartesianas, que son las distancias dirigidas desde dos ejes perpendiculares. Aquí se describe un sistema coordenado introducido por Newton, llamado **sistema coordenado polar**, que es más conveniente para muchos propósitos.

Se elige un punto en el plano que se llama **polo** (u origen) y se identifica con *O*. Luego se dibuja un rayo (semirrecta) que empieza en *O* llamado **eje polar**. Usualmente, este eje se traza horizontalmente a la derecha, y corresponde al eje *x* positivo en coordenadas cartesianas.

Si *P* es cualquier otro punto en el plano, sea *r* la distancia de 0 a *P* y sea θ el ángulo (por lo regular medido en radianes) entre el eje polar y la recta *OP* como en la figura 1. Entonces el punto *P* se representa mediante el par ordenado (r, θ) y r, θ se llaman **coordenadas polares** de *P*. Se usa la convención de que un ángulo es positivo si se mide en el sentido contrario a las manecillas del reloj desde el eje polar, y negativo si se mide en el sentido de las manecillas del reloj. Si $P = 0$, entonces $r = 0$ y se está de acuerdo en que $(0, \theta)$ representa el polo para cualquier valor de θ.

Extendemos el significado de las coordenadas polares (r, θ) al caso en que r es negativa estando de acuerdo en que, como en la figura 2, los puntos $(-r, \theta)$ y (r, θ) están sobre la misma recta que pasa por 0 y a la misma distancia $|r|$ desde 0, pero en lados opuestos de 0. Si $r > 0$, el punto (r, θ) está en el mismo cuadrante que θ; si $r < 0$, está en el cuadrante sobre el lado opuesto del polo. Observe que $(-r, \theta)$ representa el mismo punto que $(r, \theta + \pi)$.

EJEMPLO 1 Grafique los puntos cuyas coordenadas polares están dadas.

a) $(1, 5\pi/4)$ b) $(2, 3\pi)$ c) $(2, -2\pi/3)$ d) $(-3, 3\pi/4)$

SOLUCIÓN Los puntos se grafican en la figura 3. En el inciso d) el punto $(-3, 3\pi/4)$ se localiza a tres unidades del polo en el cuarto cuadrante porque el ángulo $3\pi/4$ está en el segundo cuadrante y $r = -3$ es negativa.

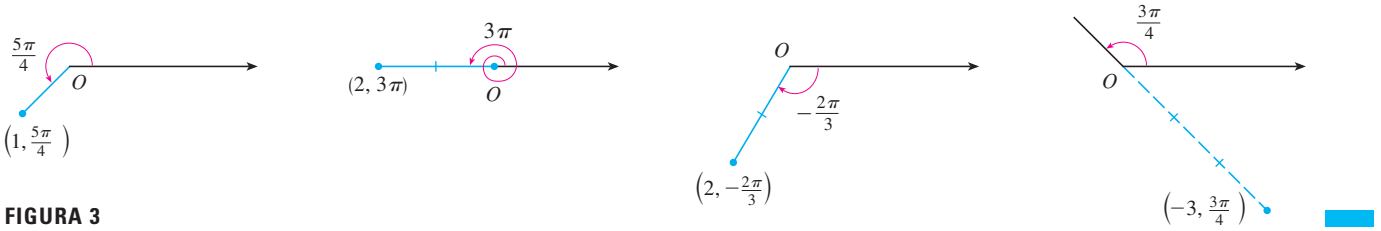


FIGURA 3

En el sistema coordenado cartesiano todo punto tiene sólo una representación, pero en el sistema de coordenadas polares cada punto tiene muchas representaciones. Por ejemplo, el punto $(1, 5\pi/4)$ del ejemplo 1a) se podría escribir como $(1, -3\pi/4)$ o $(1, 13\pi/4)$ o $(-1, \pi/4)$. (Véase la figura 4.)

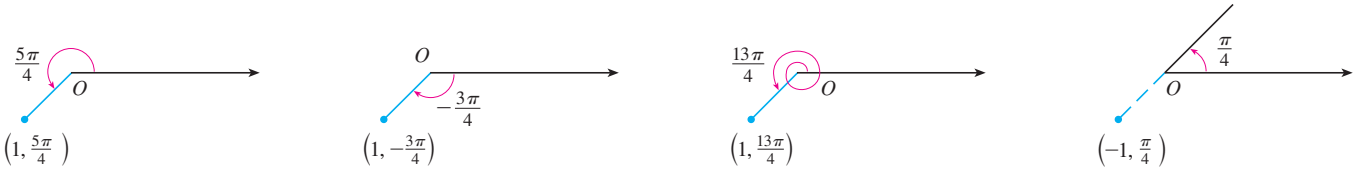


FIGURA 4

De hecho, puesto que una vuelta completa en sentido contrario a las manecillas del reloj está dada por un ángulo 2π, el punto representado por coordenadas polares (r, θ) se representa también por

$$(r, \theta + 2n\pi) \qquad \text{y} \qquad (-r, \theta + (2n + 1)\pi)$$

donde n es cualquier entero.

La conexión entre coordenadas polares y cartesianas se puede ver en la figura 5, en la cual el polo corresponde al origen y el eje polar coincide con el eje x positivo. Si el punto P tiene coordenadas cartesianas (x, y) y coordenadas polares (r, θ), entonces, de la figura, se tiene

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r}$$

de modo que

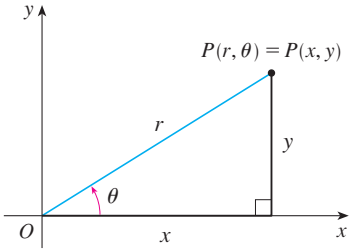


FIGURA 5

1 $$x = r\cos\theta \qquad y = r\operatorname{sen}\theta$$

Aunque las ecuaciones 1 se dedujeron de la figura 5, que ilustra el caso donde $r > 0$ y $0 < \theta < \pi/2$, estas ecuaciones son válidas para todos los valores de r y θ. (Véase la definición general de sen θ y cos θ en el apéndice D.)

Las ecuaciones 1 permiten hallar las coordenadas cartesianas de un punto cuando se conocen las coordenadas polares. Para determinar r y θ cuando se conocen x y y, usamos las ecuaciones

2

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

que pueden deducirse de las ecuaciones 1 o simplemente leyendo la figura 5.

EJEMPLO 2 Convierta el punto $(2, \pi/3)$ de coordenadas polares a cartesianas.

SOLUCIÓN Como $r = 2$ y $\theta = \pi/3$, las ecuaciones 1 dan

$$x = r\cos\theta = 2\cos\frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$y = r\,\text{sen}\,\theta = 2\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Por tanto, el punto en coordenadas cartesianas es $\left(1, \sqrt{3}\right)$.

EJEMPLO 3 Represente el punto con coordenadas cartesianas $(1, -1)$ en términos de coordenadas polares.

SOLUCIÓN Si elegimos r como positiva, entonces la ecuación 2 da

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = -1$$

Como el punto $(1, -1)$ está en el cuarto cuadrante, podemos elegir $\theta = -\pi/4$ o $\theta = 7\pi/4$. Así, una de las posibles respuestas es $\left(\sqrt{2}, -\pi/4\right)$; otra es $(\sqrt{2}, 7\pi/4)$.

NOTA Las ecuaciones 2 no determinan de manera única a θ cuando se dan x y y, porque cuando θ crece en el intervalo $0 \leqslant \theta < 2\pi$ cada valor de $\tan\theta$ ocurre dos veces. Por tanto, al convertir de coordenadas cartesianas a polares, no es suficiente hallar r y θ para satisfacer las ecuaciones 2. Como en el ejemplo 3, se debe elegir θ de modo que el punto (r, θ) esté en el cuadrante correcto.

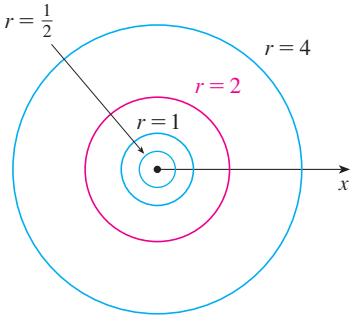


FIGURA 6

Curvas polares

La **gráfica de una ecuación polar** $r = f(\theta)$, o de manera más general $F(r, \theta) = 0$, consiste de todos los puntos P que tienen al menos una representación polar (r, θ) cuyas coordenadas satisfacen la ecuación.

V EJEMPLO 4 ¿Qué curva está representada por la ecuación polar $r = 2$?

SOLUCIÓN La curva consiste de todos los puntos (r, θ) con $r = 2$. Puesto que r representa la distancia del punto al polo, la curva $r = 2$ representa la circunferencia con centro O y radio 2. En general, la ecuación $r = a$ representa una circunferencia con centro O y radio $|a|$. (Véase la figura 6.)

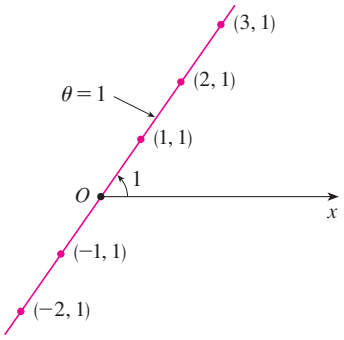


FIGURA 7

EJEMPLO 5 Bosqueje la curva polar $\theta = 1$.

SOLUCIÓN Esta curva consiste de todos los puntos (r, θ) tales que el ángulo polar θ es de 1 radián. Corresponde a la recta que pasa por O y forma un ángulo de 1 radián con el eje polar (véase figura 7). Observe que los puntos $(r, 1)$ sobre la recta con $r > 0$ están en el primer cuadrante, mientras aquellos con $r < 0$ están en el tercer cuadrante.

EJEMPLO 6

a) Trace la curva con ecuación polar $r = 2 \cos \theta$.

b) Encuentre una ecuación cartesiana para esta curva.

SOLUCIÓN

a) En la figura 8 se encuentran los valores de r para algunos valores convenientes de θ y se grafican los puntos correspondientes (r, θ). Después se unen estos puntos para bosquejar la curva, que aparenta ser una circunferencia. Hemos usado sólo valores de θ entre 0 y π, porque si hacemos que θ se incremente más allá de π, obtenemos de nuevo los mismos puntos.

θ	$r = 2 \cos \theta$
0	2
$\pi/6$	$\sqrt{3}$
$\pi/4$	$\sqrt{2}$
$\pi/3$	1
$\pi/2$	0
$2\pi/3$	-1
$3\pi/4$	$-\sqrt{2}$
$5\pi/6$	$-\sqrt{3}$
π	-2

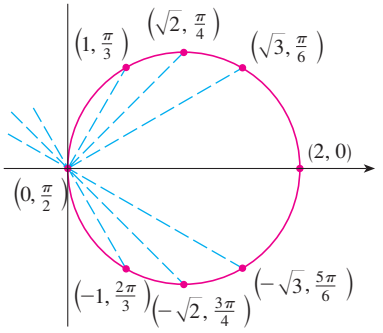


FIGURA 8
Tabla de valores y gráfica de $r = 2 \cos \theta$

b) Para convertir la ecuación dada en una ecuación cartesiana usamos las ecuaciones 1 y 2. De $x = r \cos \theta$ tenemos $\cos \theta = x/r$, de modo que la ecuación $r = 2 \cos \theta$ se convierte en $r = 2x/r$, lo cual da

$$2x = r^2 = x^2 + y^2 \qquad \text{o bien} \qquad x^2 + y^2 - 2x = 0$$

Completando cuadrados obtenemos

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1$$

que es la ecuación de una circunferencia con centro en (1, 0) y radio 1.

En la figura 9 se muestra una ilustración geométrica de que la circunferencia del ejemplo 6 tiene la ecuación $r = 2 \cos \theta$. El ángulo OPQ es un ángulo recto (¿por qué?), así que, $r/2 = \cos \theta$.

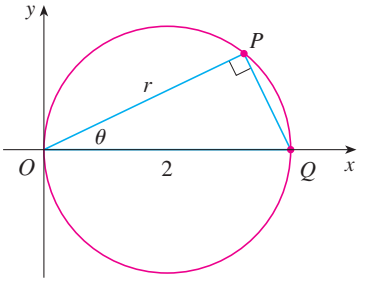


FIGURA 9

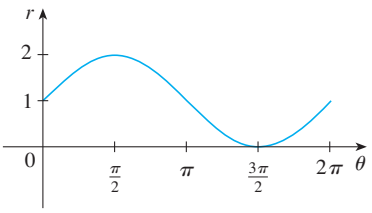


FIGURA 10
$r = 1 + \operatorname{sen}\theta$ en coordenadas cartesianas, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

V EJEMPLO 7 Bosqueje la curva $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$.

SOLUCIÓN En lugar de graficar puntos como en el ejemplo 6, bosquejamos primero la gráfica de $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$ en coordenadas *cartesianas* en la figura 10, desplazando la curva seno hacia arriba una unidad. Esto nos permite leer de un vistazo los valores de r que corresponden a valores crecientes de θ. Por ejemplo, se ve que cuando θ se incrementa de θ a $\pi/2$, r (la distancia desde O) se incrementa de 1 a 2, de modo que se bosqueja la parte correspondiente de la curva polar de la figura 11a). Cuando θ se incrementa de $\pi/2$ a π, la figura 10 muestra que r decrece de 2 a 1, así que se bosqueja la parte siguiente de la curva como en la figura 11b). Cuando θ se incrementa de π a $3\pi/2$, r decrece de 1 a 0, como se muestra en el inciso c). Por último, cuando θ se incrementa de $3\pi/2$ a 2π, r se incrementa de 0 a 1 como se muestra en el inciso d). Si hacemos que θ se incremente más allá de 2π o decrezca más allá de 0, podríamos simplemente volver a trazar nuestra trayectoria. Uniendo las partes de la curva de la figura 11a)-d), se bosqueja la curva completa del inciso e). Esta curva se llama **cardioide** porque tiene forma de corazón.

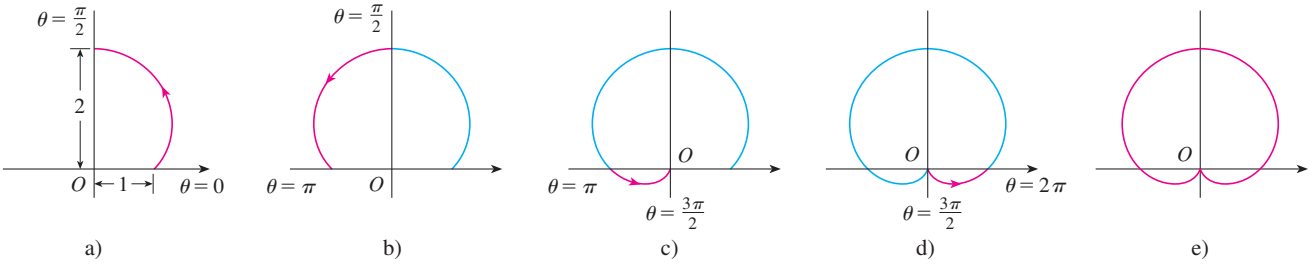


FIGURA 11 Etapas para bosquejar la cardioide $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$

EJEMPLO 8 Bosqueje la curva $r = \cos 2\theta$.

SOLUCIÓN Como en el ejemplo 7, primero se bosqueja $r = \cos 2\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, en coordenadas cartesianas en la figura 12. Cuando θ se incrementa de 0 a $\pi/4$, se observa en la figura 12 que r decrece de 1 a 0 y, de este modo, se dibuja la porción correspondiente a la curva polar de la figura 13 (indicada por ①). Cuando θ se incrementa de $\pi/4$ a $\pi/2$, r va de 0 a -1. Esto significa que la distancia desde O se incrementa de 0 a 1, pero en lugar de estar en el primer cuadrante esta porción de la curva polar (indicada por ②) se ubica en el lado opuesto del polo en el tercer cuadrante. El resto de la curva se traza en forma similar, con flechas y números indicando el orden en el cual se trazan las porciones. La curva resultante tiene cuatro bucles y se llama **rosa de cuatro hojas**.

TEC Module 10.3 ayuda a ver cómo se trazan las curvas polares por medio de animaciones similares a las figuras 10-13.

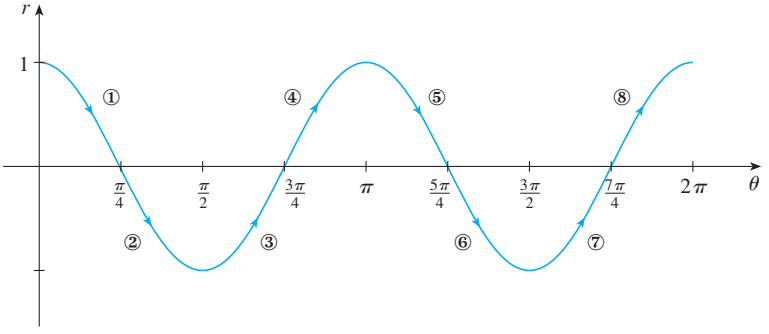


FIGURA 12
$r = \cos 2\theta$ en coordenadas cartesianas

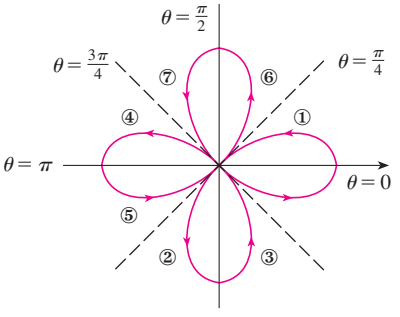


FIGURA 13
Rosa de cuatro hojas $r = \cos 2\theta$

Simetría

Cuando se bosquejan curvas polares, a veces es útil aprovechar la simetría. Las tres reglas siguientes se explican mediante la figura 14.

a) Si una ecuación polar permanece sin cambio cuando θ se reemplaza por $-\theta$, la curva es simétrica respecto al eje polar.

b) Si la ecuación no cambia cuando r se reemplaza por $-r$, o cuando θ se sustituye por $\theta + \pi$ la curva es simétrica respecto al polo. (Esto significa que la curva permanece sin cambio si la rotamos 180° respecto al origen.)

c) Si la ecuación no cambia cuando θ se reemplaza por $\pi - \theta$, la curva es simétrica respecto a la recta vertical $\theta = \pi/2$.

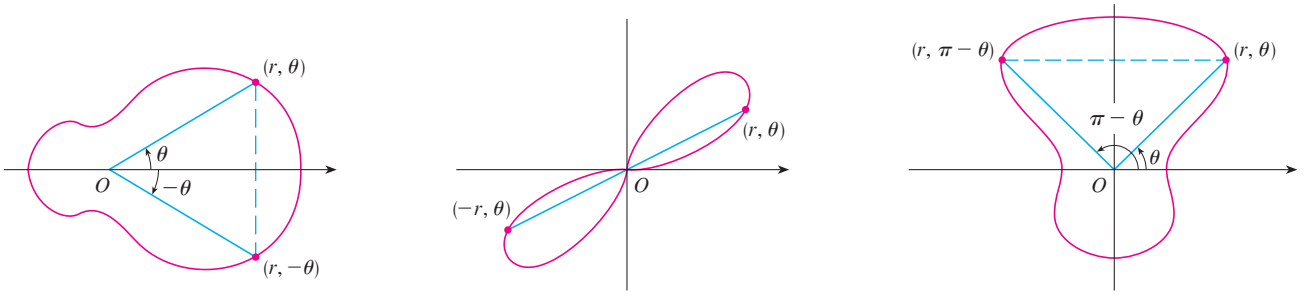


FIGURA 14

Las curvas bosquejadas en los ejemplos 6 y 8 son simétricas respecto al eje polar, porque $\cos(-\theta) = \cos\theta$. Las curvas de los ejemplos 7 y 8 son simétricas respecto a $\theta = \pi/2$ porque $\operatorname{sen}(\pi - \theta) = \operatorname{sen}\theta$ y $\cos 2(\pi - \theta) = \cos 2\theta$. La rosa de cuatro hojas también es simétrica respecto al polo. Estas propiedades de simetría se podrían haber usado para bosquejar las curvas. En el caso del ejemplo 6, sólo se requiere hacer la gráfica de los puntos para $0 \leq \theta \leq \pi/2$ y después reflejar respecto al eje polar para obtener la circunferencia completa.

Tangentes a curvas polares

Para hallar una recta tangente a una curva polar $r = f(\theta)$, se considera θ como un parámetro y escribimos sus ecuaciones paramétricas como

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta \qquad y = r\operatorname{sen}\theta = f(\theta)\operatorname{sen}\theta$$

Después, con el método para hallar pendientes de curvas paramétricas (ecuación 10.2.1) y la regla del producto, tenemos

$$\boxed{3} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}} = \frac{\dfrac{dr}{d\theta}\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta}{\dfrac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta}$$

Las rectas tangentes horizontales se localizan al determinar los puntos donde $dy/d\theta = 0$ (siempre que $dx/d\theta \neq 0$). Del mismo modo, se localizan rectas tangentes verticales en los puntos donde $dx/d\theta = 0$ (siempre $dy/d\theta \neq 0$).

Observe que si se están buscando rectas tangentes en el polo, entonces $r = 0$ y la ecuación 3 se simplifica a

$$\frac{dy}{dx} = \tan\theta \qquad \text{si} \quad \frac{dr}{d\theta} \neq 0$$

En el ejemplo 8 encontramos que $r = \cos 2\theta = 0$ cuando $\theta = \pi/4$ o $3\pi/4$. Esto significa que las rectas $\theta = \pi/4$ y $\theta = 3\pi/4$ (o $y = x$ y $y = -x$) son rectas tangentes a $r = \cos 2\theta$ en el origen.

EJEMPLO 9

a) Para la cardioide $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$ del ejemplo 7, encuentre la pendiente de la recta tangente cuando $\theta = \pi/3$.

b) Encuentre los puntos sobre la cardioide donde la recta tangente es horizontal o vertical.

SOLUCIÓN Al utilizar la ecuación 3 con $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$, se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dr}{d\theta}\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta}{\dfrac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta} = \frac{\cos\theta\ \operatorname{sen}\theta + (1 + \operatorname{sen}\theta)\cos\theta}{\cos\theta\ \cos\theta - (1 + \operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta\,(1 + 2\operatorname{sen}\theta)}{1 - 2\operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}\theta} = \frac{\cos\theta\,(1 + 2\operatorname{sen}\theta)}{(1 + \operatorname{sen}\theta)(1 - 2\operatorname{sen}\theta)}$$

a) La pendiente de la recta tangente en el punto donde $\theta = \pi/3$ es

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\pi/3} = \frac{\cos(\pi/3)(1 + 2\operatorname{sen}(\pi/3))}{(1 + \operatorname{sen}(\pi/3))(1 - 2\operatorname{sen}(\pi/3))} = \frac{\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{3}\right)}{\left(1 + \sqrt{3}/2\right)\left(1 - \sqrt{3}\right)}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{3}}{\left(2 + \sqrt{3}\right)\left(1 - \sqrt{3}\right)} = \frac{1 + \sqrt{3}}{-1 - \sqrt{3}} = -1$$

b) Observe que

$$\frac{dy}{d\theta} = \cos\theta\,(1 + 2\operatorname{sen}\theta) = 0 \qquad \text{cuando} \qquad \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

$$\frac{dx}{d\theta} = (1 + \operatorname{sen}\theta)(1 - 2\operatorname{sen}\theta) = 0 \qquad \text{cuando} \qquad \theta = \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

Debido a eso, hay rectas tangentes horizontales en los puntos $(2, \pi/2)$, $\left(\frac{1}{2}, 7\pi/6\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 11\pi/6\right)$ y rectas tangentes verticales en $\left(\frac{3}{2}, \pi/6\right)$ y $\left(\frac{3}{2}, 5\pi/6\right)$. Cuando $\theta = 3\pi/2$, tanto $dy/d\theta$ como $dx/d\theta$ son 0, así que debemos tener cuidado. Usando la regla de l'Hospital, tenemos

$$\lim_{\theta\to(3\pi/2)^-}\frac{dy}{dx} = \left(\lim_{\theta\to(3\pi/2)^-}\frac{1 + 2\operatorname{sen}\theta}{1 - 2\operatorname{sen}\theta}\right)\left(\lim_{\theta\to(3\pi/2)^-}\frac{\cos\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta}\right)$$

$$= -\frac{1}{3}\lim_{\theta\to(3\pi/2)^-}\frac{\cos\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta} = -\frac{1}{3}\lim_{\theta\to(3\pi/2)^-}\frac{-\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \infty$$

Por simetría,

$$\lim_{\theta\to(3\pi/2)^+}\frac{dy}{dx} = -\infty$$

En estos términos hay una recta tangente vertical en el polo (véase figura 15).

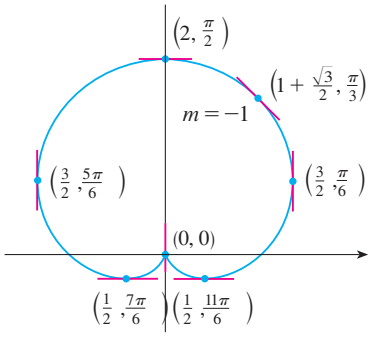


FIGURA 15
Rectas tangentes para $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$

NOTA En lugar de tener que recordar la ecuación 3, se podría usar el método empleado para deducirla. En el caso del ejemplo 9 pudimos escribir

$$x = r\cos\theta = (1 + \operatorname{sen}\theta)\cos\theta = \cos\theta + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta$$

$$y = r\operatorname{sen}\theta = (1 + \operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta$$

Entonces tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{\cos\theta + 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{-\operatorname{sen}\theta + \cos 2\theta} = \frac{\cos\theta + \operatorname{sen} 2\theta}{-\operatorname{sen}\theta + \cos 2\theta}$$

que es equivalente a nuestra expresión previa.

Graficación de curvas polares con dispositivos de graficación

Aunque es útil poder bosquejar a mano curvas polares simples, necesitamos usar una calculadora o computadora cuando tenemos ante nosotros una curva tan complicada como las que se muestran en las figuras 16 y 17.

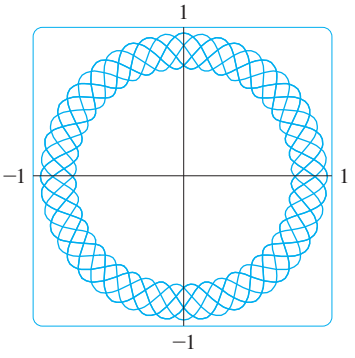


FIGURA 16
$r = \operatorname{sen}^2(2.4\theta) + \cos^4(2.4\theta)$

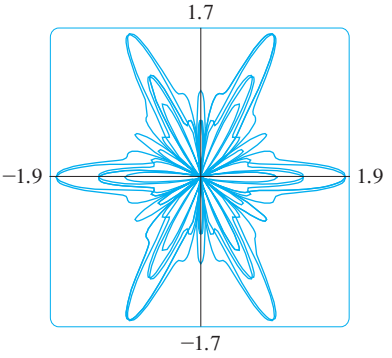


FIGURA 17
$r = \operatorname{sen}^2(1.2\theta) + \cos^3(6\theta)$

Algunos dispositivos de graficación tienen comandos que permiten graficar de manera directa curvas polares. Con otras máquinas se requiere convertir primero a ecuaciones paramétricas. En este caso tomamos la ecuación polar $r = f(\theta)$ y escribimos sus ecuaciones paramétricas como

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta \qquad y = r\operatorname{sen}\theta = f(\theta)\operatorname{sen}\theta$$

Algunas máquinas requieren que el parámetro se llame t en vez de θ.

EJEMPLO 10 Grafique la curva $r = \operatorname{sen}(8\theta/5)$.

SOLUCIÓN Suponemos que el dispositivo de graficación no tiene un comando de graficación polar integrado. En este caso necesitamos trabajar con las correspondientes ecuaciones paramétricas

$$x = r\cos\theta = \operatorname{sen}(8\theta/5)\cos\theta \qquad y = r\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(8\theta/5)\operatorname{sen}\theta$$

En cualquier caso, necesitamos determinar el dominio para θ, así que hacemos la pregunta: ¿cuántas rotaciones completas se requieren hasta que la curva comience a repetirse por sí misma? Si la respuesta es n, entonces

$$\operatorname{sen}\frac{8(\theta + 2n\pi)}{5} = \operatorname{sen}\left(\frac{8\theta}{5} + \frac{16n\pi}{5}\right) = \operatorname{sen}\frac{8\theta}{5}$$

y, por tanto, se requiere que $16n\pi/5$ sea un múltiplo par de π. Esto ocurrirá primero cuando $n = 5$. En consecuencia, graficaremos la curva completa si se especifica que $0 \leqslant \theta \leqslant 10\pi$.

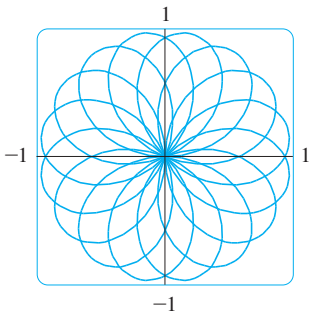


FIGURA 18
$r = \text{sen}(8\theta/5)$

En el ejercicio 53, se le pidió demostrar en forma analítica lo que ya se había descubierto a partir de gráficas como la de la figura 19.

Al cambiar de θ a t, se tienen las ecuaciones

$$x = \text{sen}(8t/5)\cos t \qquad y = \text{sen}(8t/5)\,\text{sen}\, t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 10\pi$$

cuya curva resultante se muestra en la figura 18. Note que esta rosa tiene 16 bucles.

V EJEMPLO 11 Investigue la familia de curvas polares dada por $r = 1 + c\,\text{sen}\,\theta$. ¿Cómo cambia la forma cuando c cambia? (Estas curvas se llaman **limaçones**, palabra francesa para los caracoles, debido a la forma de las curvas para ciertos valores de c.)

SOLUCIÓN En la figura 19 se muestran gráficas dibujadas por computadora para varios valores de c. Para $c > 1$ hay un bucle que se hace pequeño cuando c decrece. Cuando $c = 1$ el bucle desaparece y la curva se convierte en la cardioide que se bosquejó en el ejemplo 7. Para c entre 1 y $\frac{1}{2}$ la cúspide de la cardioide desaparece y se convierte en un "hoyuelo". Cuando c decrece de $\frac{1}{2}$ a 0, la limaçon tiene forma de óvalo. Este óvalo se vuelve más circular cuando $c \to 0$ y cuando $c = 0$ la curva es justo la circunferencia con $r = 1$.

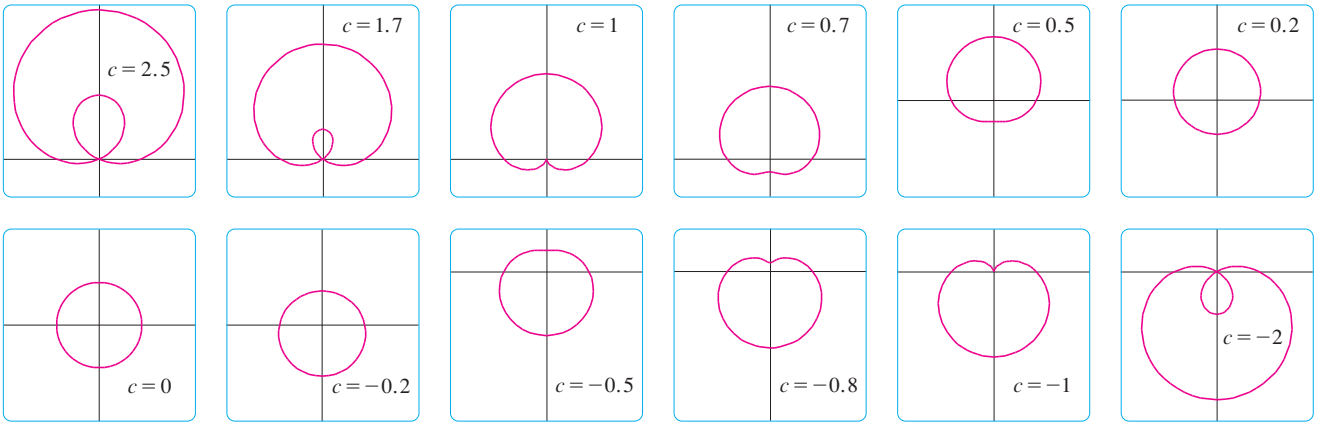


FIGURA 19
Miembros de la familia de limaçones $r = 1 + c\,\text{sen}\,\theta$

Las partes restantes de la figura 19 muestran que cuando c se vuelve negativa, las formas cambian en orden inverso. De hecho, estas curvas son reflexiones respecto al eje horizontal de las curvas correspondientes con c positiva.

Las limaçones son muy útiles en el estudio del movimiento planetario. En particular, la trayectoria de Marte vista desde el planeta Tierra ha sido modelada con una limaçon de un bucle, como en los incisos de la figura 19 con $|c| > 1$.

10.3 Ejercicios

1-2 Grafique los puntos cuyas coordenadas polares están dadas. Después encuentre otros dos pares de coordenadas polares de este punto, uno con $r > 0$ y uno con $r < 0$.

1. a) $(2, \pi/3)$ b) $(1, -3\pi/4)$ c) $(-1, \pi/2)$

2. a) $(1, 7\pi/4)$ b) $(-3, \pi/6)$ c) $(1, -1)$

3-4 Grafique el punto cuyas coordenadas polares están dadas. Luego, determine las coordenadas cartesianas del punto.

3. a) $(1, \pi)$ b) $\left(2, -2\pi/3\right)$ c) $(-2, 3\pi/4)$

4. a) $\left(-\sqrt{2}, 5\pi/4\right)$ b) $(1, 5\pi/2)$ c) $(2, -7\pi/6)$

5-6 Se dan las coordenadas cartesianas de un punto.

i) Encuentre las coordenadas polares (r, θ) del punto, donde $r > 0$ y $0 \leqslant \theta < 2\pi$.
ii) Determine las coordenadas polares (r, θ) del punto, donde $r < 0$ y $0 \leqslant \theta < 2\pi$.

5. a) $(2, -2)$ b) $\left(-1, \sqrt{3}\right)$

6. a) $\left(3\sqrt{3}, 3\right)$ b) $(1, -2)$

7-12 Bosqueje la región en el plano que consiste de todos los puntos cuyas coordenadas polares satisfacen las condiciones dadas

7. $r \geq 1$

8. $0 \leq r < 2, \quad \pi \leq \theta \leq 3\pi/2$

9. $r \geq 0, \quad \pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4$

10. $1 \leq r \leq 3, \quad \pi/6 < \theta < 5\pi/6$

11. $2 < r < 3, \quad 5\pi/3 \leq \theta \leq 7\pi/3$

12. $r \geq 1, \quad \pi \leq \theta \leq 2\pi$

13. Encuentre la distancia entre los puntos con coordenadas polares $(2, \pi/3)$ y $(4, 2\pi/3)$.

14. Encuentre una fórmula para la distancia entre los puntos con coordenadas polares (r_1, θ_1) y (r_2, θ_2).

15-20 Identifique la curva encontrando una ecuación cartesiana para la curva.

15. $r^2 = 5$

16. $r = 4 \sec\theta$

17. $r = 2\cos\theta$

18. $\theta = \pi/3$

19. $r^2\cos 2\theta = 1$

20. $r = \tan\theta \sec\theta$

21-26 Encuentre una ecuación polar para la curva representada por las ecuaciones cartesianas dadas.

21. $y = 2$

22. $y = x$

23. $y = 1 + 3x$

24. $4y^2 = x$

25. $x^2 + y^2 = 2cx$

26. $xy = 4$

27-28 Para cada una de las curvas descritas, decida con qué ecuación se expresaría más fácilmente, con una polar o una cartesiana. Después escriba una ecuación para la curva.

27. a) Una recta que pasa por el origen que forma un ángulo de $\pi/6$ con el eje x positivo.
b) Una recta vertical que pasa por el punto (3, 3).

28. a) Una circunferencia con radio 5 y centro (2, 3).
b) Una circunferencia centrada en el origen con radio 4.

29-46 Bosqueje la curva con la ecuación polar dada, graficando primero r como una función de θ en coordenadas cartesianas.

29. $r = -2\,\text{sen}\,\theta$

30. $r = 1 - \cos\theta$

31. $r = 2(1 + \cos\theta)$

32. $r = 1 + 2\cos\theta$

33. $r = \theta, \ \theta \geq 0$

34. $r = \ln\theta, \ \theta \geq 1$

35. $r = 4\,\text{sen}\,3\theta$

36. $r = \cos 5\theta$

37. $r = 2\cos 4\theta$

38. $r = 3\cos 6\theta$

39. $r = 1 - 2\,\text{sen}\,\theta$

40. $r = 2 + \text{sen}\,\theta$

41. $r^2 = 9\,\text{sen}\,2\theta$

42. $r^2 = \cos 4\theta$

43. $r = 2 + \text{sen}\,3\theta$

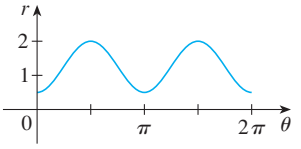
44. $r^2\theta = 1$

45. $r = 1 + 2\cos 2\theta$

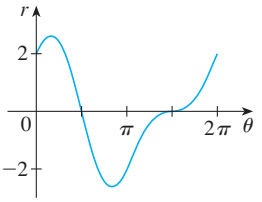
46. $r = 3 + 4\cos\theta$

47-48 La figura muestra una gráfica de r como una función de θ en coordenadas cartesianas. Utilícela para bosquejar la correspondiente curva polar.

47.



48.



49. Demuestre que la curva polar $r = 4 + 2\sec\theta$ (llamada **concoide**) tiene la recta $x = 2$ como asíntota vertical demostrando que $\lim_{r\to\pm\infty} x = 2$. Utilice este hecho para ayudarse a dibujar la concoide.

50. Demuestre que la curva $r = 2 - \csc\theta$ (también una concoide) tiene la recta $y = -1$ como una asíntota horizontal demostrando que $\lim_{r\to\pm\infty} y = -1$. Utilice este hecho para ayudarse a trazar la concoide.

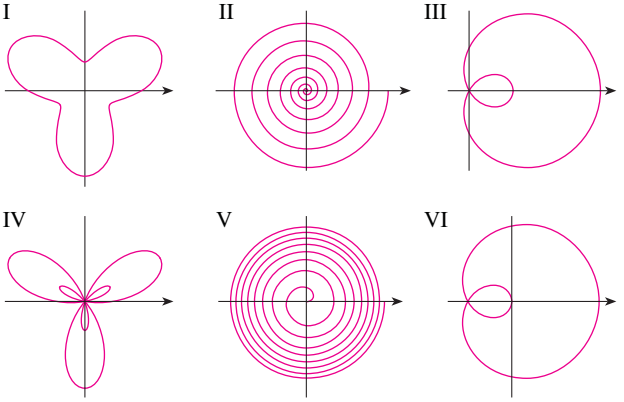
51. Demuestre que la curva $r = \text{sen}\,\theta\tan\theta$ (llamada **cisoide de Diocles**) tiene la recta $x = 1$ como una asíntota vertical. Demuestre también que toda la curva está dentro de la banda vertical $0 \leq x < 1$. Utilice estos hechos para ayudarse a trazar la cisoide.

52. Bosqueje la curva $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2$.

53. a) En el ejemplo 11, la gráfica sugiere que la limaçon $r = 1 + c\,\text{sen}\,\theta$ tiene un bucle interior cuando $|c| > 1$. Demuestre que esto es cierto y encuentre los valores de θ que corresponden a este bucle interior.
b) En la figura 19 parece que la limaçon pierde su hoyuelo cuando $c = \frac{1}{2}$. Demuéstrelo.

54. Relacione las ecuaciones polares con las gráficas I-VI. Dé razones para sus elecciones. (No utilice dispositivos de graficación.)

a) $r = \sqrt{\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq 16\pi$
b) $r = \theta^2, \quad 0 \leq \theta \leq 16\pi$
c) $r = \cos(\theta/3)$
d) $r = 1 + 2\cos\theta$
e) $r = 2 + \text{sen}\,3\theta$
f) $r = 1 + 2\,\text{sen}\,3\theta$



55-60 Encuentre la pendiente de la recta tangente para la curva polar dada en el punto especificado por el valor de θ.

55. $r = 2 \operatorname{sen} \theta, \quad \theta = \pi/6$

56. $r = 2 - \operatorname{sen} \theta, \quad \theta = \pi/3$

57. $r = 1/\theta, \quad \theta = \pi$

58. $r = \cos(\theta/3), \quad \theta = \pi$

59. $r = \cos 2\theta, \quad \theta = \pi/4$

60. $r = 1 + 2\cos\theta, \quad \theta = \pi/3$

61-64 Encuentre los puntos sobre la curva dada donde la recta tangente es horizontal o vertical.

61. $r = 3\cos\theta$

62. $r = 1 - \operatorname{sen}\theta$

63. $r = 1 + \cos\theta$

64. $r = e^{\theta}$

65. Demuestre que la ecuación polar $r = a \operatorname{sen}\theta + b\cos\theta$, donde $ab \neq 0$, representa una circunferencia y encuentre su centro y radio.

66. Demuestre que las curvas $r = a \operatorname{sen}\theta$ y $r = a\cos\theta$ se cortan en ángulos rectos.

67-72 Utilice un dispositivo de graficación para trazar la curva polar. Elija el intervalo para el parámetro para asegurarse que se trace toda la curva.

67. $r = 1 + 2\operatorname{sen}(\theta/2)$ (nefroide de Freeth)

68. $r = \sqrt{1 - 0.8\operatorname{sen}^2\theta}$ (hipopede)

69. $r = e^{\operatorname{sen}\theta} - 2\cos(4\theta)$ (curva mariposa)

70. $r = |\tan\theta|^{|\cot\theta|}$ (curva valentina)

71. $r = 1 + \cos^{999}\theta$ (curva PacMan)

72. $r = \operatorname{sen}^2(4\theta) + \cos(4\theta)$

73. ¿Cómo se relacionan las gráficas de $r = 1 + \operatorname{sen}(\theta - \pi/6)$ y $r = 1 + \operatorname{sen}(\theta - \pi/3)$ con la gráfica de $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$? En general, ¿cómo se relaciona la gráfica de $r = f(\theta - \alpha)$ con la gráfica de $r = f(\theta)$?

74. Utilice una gráfica para estimar la coordenada y de los puntos superiores sobre la curva $r = \operatorname{sen} 2\theta$. Después utilice su calculadora para encontrar el valor exacto.

75. Investigue la familia de curvas con ecuaciones polares $r = 1 + c\cos\theta$, donde c es un número real. ¿Cómo cambia la forma de la curva cuando c cambia?

76. Investigue la familia de curvas polares

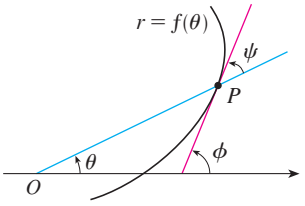
$$r = 1 + \cos^n\theta$$

donde n es un entero positivo. ¿Cómo cambia la forma de la curva cuando n crece? ¿Qué pasa cuando n es muy grande? Explique la forma para n muy grande considerando la gráfica de r como una función de θ en coordenadas cartesianas.

77. Sea P un número cualquiera (excepto el origen) sobre la curva $r = f(\theta)$. Si ψ es el ángulo entre la recta tangente en P y la recta radial OP, demuestre que

$$\tan\psi = \frac{r}{dr/d\theta}$$

[Sugerencia: Observe que $\psi = \phi - \theta$ en la figura.]



78. a) Utilice el ejercicio 77 para demostrar que el ángulo entre la recta tangente y la recta radial es $\psi = \pi/4$ en todo punto sobre la curva $r = e^{\theta}$.

b) Ilustre el inciso a) graficando la curva y la recta tangente en los puntos donde $\theta = 0$ y $\pi/2$.

c) Demuestre que cualquier curva polar $r = f(\theta)$ con la propiedad de que el ángulo ψ entre la recta radial y la recta tangente es una constante que debe tener la forma $r = Ce^{k\theta}$, donde C y k son constantes.

PROYECTO DE LABORATORIO FAMILIAS DE CURVAS POLARES

En este proyecto descubrirá lo interesante y bello que pueden ser las formas de las familias de curvas polares. También verá cómo cambia la forma de las curvas cuando varían las constantes.

1. a) Investigue la familia de curvas definida por las ecuaciones polares $r = \operatorname{sen} n\theta$, donde n es un entero positivo. ¿Cómo se relaciona n con el número de bucles?

b) ¿Qué pasa si la ecuación del inciso a) se reemplaza por $r = |\operatorname{sen} n\theta|$?

2. Una familia de curvas está dada por las ecuaciones $r = 1 + c \operatorname{sen} n\theta$, donde c es un número real y n es un entero positivo. ¿Cómo cambia la forma de la gráfica cuando n crece? ¿Cómo cambia cuando c cambia? Ilustre graficando suficientes miembros de la familia para apoyar sus conclusiones.

Se requiere calculadora graficadora o computadora

3. Una familia de curvas tiene las ecuaciones polares

$$r = \frac{1 - a\cos\theta}{1 + a\cos\theta}$$

Investigue cómo cambian las gráficas cuando el número a cambia. En particular, debe usted identificar la transición de los valores de a para los cuales la forma básica de la curva cambia.

4. El astrónomo Giovanni Cassini (1625-1712) estudió la familia de curvas con ecuaciones polares

$$r^4 - 2c^2r^2\cos 2\theta + c^4 - a^4 = 0$$

donde a y c son números reales positivos. Estas curvas se llaman **óvalos de Cassini** aunque tienen la forma de óvalo sólo para ciertos valores de a y c. (Cassini pensó que estas curvas podían representar órbitas planetarias mejor que las elipses de Kepler.) Investigue la variedad de formas que estas curvas pueden tener. En particular, ¿cómo se relacionan a y c con cada una cuando la curva se divide en dos partes?

10.4 Áreas y longitudes en coordenadas polares

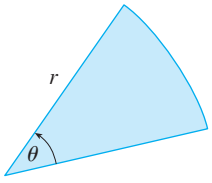


FIGURA 1

En esta sección desarrollamos la fórmula para el área de una región cuya frontera está dada por una ecuación polar. Necesitamos utilizar la fórmula para el área de un sector de un círculo:

$$A = \tfrac{1}{2}r^2\theta \qquad \boxed{1}$$

donde, como se ve en la figura 1, r es el radio y θ es la medida en radianes del ángulo central. La fórmula 1 se sigue del hecho de que el área de un sector es proporcional a su ángulo central: $A = (\theta/2\pi)\pi r^2 = \frac{1}{2}r^2\theta$. (Véase también el ejercicio 35 de la sección 7.3.)

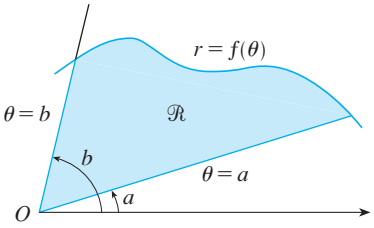


FIGURA 2

Sea $\mathcal{R}$ la región, ilustrada en la figura 2, acotada por la curva polar $r = f(\theta)$ y por los rayos $\theta = a$ y $\theta = b$, donde f es una función positiva continua y donde $0 < b - a \leq 2\pi$. Dividimos el intervalo $[a, b]$ en subintervalos con puntos extremos $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ e igual ancho $\Delta\theta$. Entonces los rayos $\theta = \theta_i$ dividen a $\mathcal{R}$ en n pequeñas regiones con ángulo central $\Delta\theta = \theta_i - \theta_{i-1}$. Si elegimos θ_i^* en el i-ésimo subintervalo $[\theta_{i-1}, \theta_i]$, entonces el área ΔA_i de la i-ésima región está aproximada por el área del sector de un círculo con ángulo central $\Delta\theta$ y radio $f(\theta_i^*)$. (Véase la figura 3.)

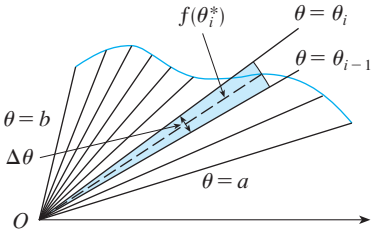


FIGURA 3

Así, de la fórmula 1 tenemos

$$\Delta A_i \approx \tfrac{1}{2}[f(\theta_i^*)]^2\,\Delta\theta$$

y por tanto una aproximación al área A de $\mathcal{R}$ es

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}[f(\theta_i^*)]^2\,\Delta\theta \qquad \boxed{2}$$

En la figura 3 parece que la aproximación en 2 mejora cuando $n \to \infty$. Pero las sumas en 2 son sumas de Riemann para la función $g(\theta) = \frac{1}{2}[f(\theta)]^2$, de modo que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}[f(\theta_i^*)]^2\,\Delta\theta = \int_a^b \tfrac{1}{2}[f(\theta)]^2\,d\theta$$

Por tanto parece plausible (y de hecho puede demostrarse) que la fórmula para el área A de la región polar de la región $\mathcal{R}$ es

3
$$A = \int_a^b \tfrac{1}{2}[f(\theta)]^2\,d\theta$$

Usualmente, la fórmula 3 se escribe como

4
$$A = \int_a^b \tfrac{1}{2}r^2\,d\theta$$

con el entendido de que $r = f(\theta)$. Observe la semejanza entre las fórmulas 1 y 4.

Cuando aplicamos la fórmula 3 o 4 es útil pensar que el área es barrida por un rayo que rota alrededor de O empezando con un ángulo a y terminando en un ángulo b.

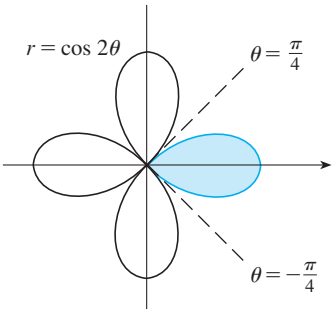


FIGURA 4

V EJEMPLO 1 Encuentre el área encerrada por un bucle de cuatro pétalos $r = \cos 2\theta$.

SOLUCIÓN La curva $r = \cos 2\theta$ se bosquejó en el ejemplo 8 de la sección 10.3. Observe de la figura 4 que la región encerrada por el bucle de la derecha es barrido por un rayo que rota de $\theta = -\pi/4$ a $\theta = \pi/4$. Por tanto, la fórmula 4 da

$$A = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tfrac{1}{2}r^2\,d\theta = \tfrac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 2\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/4} \cos^2 2\theta\,d\theta$$

$$A = \int_0^{\pi/4} \tfrac{1}{2}(1 + \cos 4\theta)\,d\theta = \tfrac{1}{2}\left[\theta + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 4\theta\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8}$$

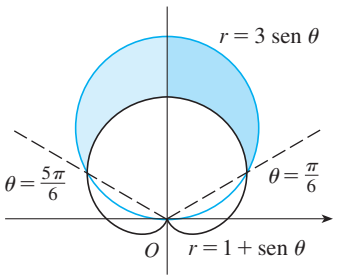


FIGURA 5

V EJEMPLO 2 Encuentre el área de la región que está dentro de la circunferencia $r = 3 \operatorname{sen}\theta$ y fuera del cardioide $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$.

SOLUCIÓN El cardioide (véase ejemplo 7 en la sección 10.3) y la circunferencia están trazadas en la figura 5 y la región deseada está sombreada. Los valores de a y b en la fórmula 4 se determinan encontrando los puntos de intersección de las dos curvas. La intersección de éstas se da cuando $3 \operatorname{sen}\theta = 1 + \operatorname{sen}\theta$, lo que da $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$, así que $\theta = \pi/6, 5\pi/6$. El área deseada puede encontrarse restando el área dentro del cardioide entre $\theta = \pi/6$ y $\theta = 5\pi/6$ del área dentro de la circunferencia de $\pi/6$ a $5\pi/6$. Así

$$A = \tfrac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} (3 \operatorname{sen}\theta)^2\,d\theta - \tfrac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} (1 + \operatorname{sen}\theta)^2\,d\theta$$

Como la región es simétrica respecto al eje vertical $\theta = \pi/2$, podemos escribir

$$\begin{aligned} A &= 2\left[\tfrac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/2} 9 \operatorname{sen}^2\theta\,d\theta - \tfrac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/2} (1 + 2\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta)\,d\theta\right] \\ &= \int_{\pi/6}^{\pi/2} (8 \operatorname{sen}^2\theta - 1 - 2\operatorname{sen}\theta)\,d\theta \\ &= \int_{\pi/6}^{\pi/2} (3 - 4\cos 2\theta - 2\operatorname{sen}\theta)\,d\theta \qquad [\text{debido a que } \operatorname{sen}^2\theta = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)] \\ &= 3\theta - 2\operatorname{sen} 2\theta + 2\cos\theta\Big]_{\pi/6}^{\pi/2} = \pi \end{aligned}$$

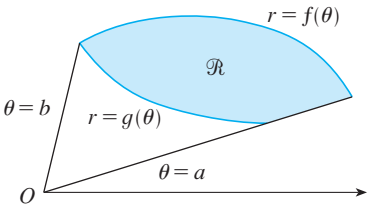


FIGURA 6

En el ejemplo 2 se ilustra el procedimiento para hallar el área de la región acotada por dos curvas polares. En general, sea $\mathcal{R}$ una región, como la que se ilustra en la figura 6, que está acotada por curvas con ecuaciones polares $r = f(\theta)$, $r = g(\theta)$, $\theta = a$ y $\theta = b$, donde $f(\theta) \geqslant g(\theta) \geqslant 0$ y $0 < b - a \leqslant 2\pi$. El área A de $\mathcal{R}$ se encuentra restando el área bajo $r = g(\theta)$ del área bajo $r = f(\theta)$, de modo que utilizando la fórmula 3 se tiene

$$A = \int_a^b \tfrac{1}{2}[f(\theta)]^2\,d\theta - \int_a^b \tfrac{1}{2}[g(\theta)]^2\,d\theta$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_a^b \left([f(\theta)]^2 - [g(\theta)]^2\right) d\theta$$

PRECAUCIÓN El hecho de que un solo punto tenga muchas representaciones en coordenadas polares, dificulta a veces hallar todos los puntos de intersección de dos curvas polares. Por ejemplo, es obvio de la figura 5 que la circunferencia y la cardioide tienen tres puntos de intersección; sin embargo, en el ejemplo 2 se resolvieron las ecuaciones $r = 3 \operatorname{sen} \theta$ y $r = 1 + \operatorname{sen} \theta$ y se hallaron sólo dos puntos $\left(\frac{3}{2}, \pi/6\right)$ y $\left(\frac{3}{2}, 5\pi/6\right)$. El origen también es un punto de intersección, pero no se puede determinar resolviendo las ecuaciones de las curvas porque el origen no tiene representación única en coordenadas polares que satisfaga ambas ecuaciones. Observe que, cuando se representa como $(0, 0)$ o $(0, \pi)$, el origen satisface $r = 3 \operatorname{sen} \theta$ y, por tanto, está dentro de la circunferencia; cuando se representa como $(0, 3\pi/2)$, satisface $r = 1 + \operatorname{sen} \theta$ y, por consiguiente, está sobre la cardioide. Considere dos puntos que se mueven a lo largo de las curvas cuando el valor de parámetro θ se incrementa de 0 a 2π. Sobre una curva el origen se alcanza en $\theta = 0$ y $\theta = \pi$; sobre la otra curva se alcanza en $\theta = 3\pi/2$. Los puntos no chocan en el origen porque llegan en diferentes tiempos, aunque allí se cortan las curvas.

Así, para hallar *todos* los puntos de intersección de dos curvas polares, se recomienda dibujar las gráficas de ambas curvas. Es especialmente conveniente usar una calculadora o computadora como medio auxiliar para esta tarea.

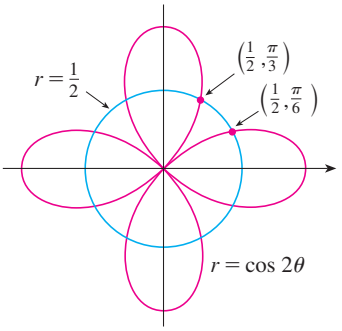


FIGURA 7

EJEMPLO 3 Encuentre los puntos de intersección de la curvas $r = \cos 2\theta$ y $r = \frac{1}{2}$.

SOLUCIÓN Si resolvemos las ecuaciones $r = \cos 2\theta$ y $r = \frac{1}{2}$, obtenemos $\cos 2\theta = \frac{1}{2}$ y, por tanto, $2\theta = \pi/3, 5\pi/3, 7\pi/3, 11\pi/3$. Así, los valores de θ entre 0 y 2π que satisfacen ambas ecuaciones son $\theta = \pi/6, 5\pi/6, 7\pi/6, 11\pi/6$. Hemos encontrado cuatro puntos de intersección: $\left(\frac{1}{2}, \pi/6\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 5\pi/6\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 7\pi/6\right)$ y $\left(\frac{1}{2}, 11\pi/6\right)$.

Sin embargo, podemos ver de la figura 7 que las curvas tienen otros cuatro puntos de intersección: $\left(\frac{1}{2}, \pi/3\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 2\pi/3\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 4\pi/3\right)$ y $\left(\frac{1}{2}, 5\pi/3\right)$. Estos puntos pueden encontrarse utilizando la simetría o advirtiendo que la otra ecuación de la circunferencia es $r = -\frac{1}{2}$ y después resolviendo las ecuaciones $r = \cos 2\theta$ y $r = -\frac{1}{2}$.

Longitud de arco

Para determinar la longitud de una curva polar $r = f(\theta)$, $a \leqslant \theta \leqslant b$, consideramos θ como un parámetro y escribimos las ecuaciones paramétricas de la curva como

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta \qquad y = r\operatorname{sen}\theta = f(\theta)\operatorname{sen}\theta$$

Usando la regla del producto y derivando con respecto a θ obtenemos

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta \qquad \frac{dy}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta$$

así, utilizando $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$, tenemos

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \cos^2\theta - 2r\frac{dr}{d\theta}\cos\theta\,\operatorname{sen}\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \operatorname{sen}^2\theta + 2r\frac{dr}{d\theta}\operatorname{sen}\theta\,\cos\theta + r^2\cos^2\theta$$

$$= \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2$$

Suponiendo que f' es continua, podemos utilizar el teorema 10.2.5 para expresar la longitud de arco como

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

Por tanto, la longitud de una curva con ecuación polar $r = f(\theta)$, $a \leq \theta \leq b$, es

$$L = \int_a^b \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta \qquad (5)$$

V EJEMPLO 4 Encuentre la longitud de la cardioide $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$.

SOLUCIÓN La cardioide se muestra en la figura 8. (La trazamos en el ejemplo 7 de la sección 10.3.) Su longitud total está dada por el intervalo del parámetro $0 \leq \theta \leq 2\pi$, así que la fórmula 5 da

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 + \operatorname{sen}\theta)^2 + \cos^2\theta}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2\operatorname{sen}\theta}\, d\theta$$

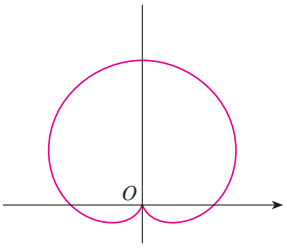


FIGURA 8
$r = 1 + \operatorname{sen}\theta$

Podríamos haber evaluado esta integral multiplicando y dividiendo el integrando por $\sqrt{2 - 2\operatorname{sen}\theta}$, o podríamos utilizar la computadora. En cualquier caso, encontramos que la longitud de la cardioide es $L = 8$.

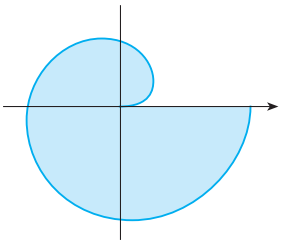
10.4 Ejercicios

1-4 Encuentre el área de la región acotada por las curvas dadas y que están en el sector especificado.

1. $r = e^{-\theta/4}$, $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$
2. $r = \cos\theta$, $0 \leq \theta \leq \pi/6$
3. $r^2 = 9\operatorname{sen} 2\theta$, $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$
4. $r = \tan\theta$, $\pi/6 \leq \theta \leq \pi/3$

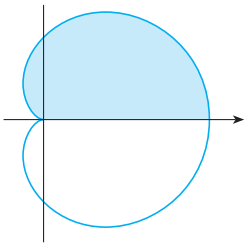
5-8 Encuentre el área de la región sombreada

5.



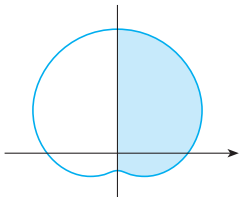
$r = \sqrt{\theta}$

6.



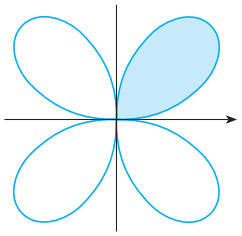
$r = 1 + \cos\theta$

7.



$r = 4 + 3 \operatorname{sen} \theta$

8.



$r = \operatorname{sen} 2\theta$

9-12 Trace la curva y encuentre el área que encierra.

9. $r = 2 \operatorname{sen} \theta$

10. $r = 1 - \operatorname{sen} \theta$

11. $r = 3 + 2 \cos \theta$

12. $r = 4 + 3 \operatorname{sen} \theta$

13-16 Grafique la curva y encuentre el área que encierra.

13. $r = 2 + \operatorname{sen} 4\theta$

14. $r = 3 - 2 \cos 4\theta$

15. $r = \sqrt{1 + \cos^2(5\theta)}$

16. $r = 1 + 5 \operatorname{sen} 6\theta$

17-21 Encuentre el área de la región encerrada por uno de los bucles de la curva.

17. $r = 4 \cos 3\theta$

18. $r^2 = \operatorname{sen} 2\theta$

19. $r = \operatorname{sen} 4\theta$

20. $r = 2 \operatorname{sen} 5\theta$

21. $r = 1 + 2 \operatorname{sen} \theta$ (bucle interno)

22. Encuentre el área encerrada por el bucle de la **astrofoide** $r = 2 \cos \theta - \sec \theta$.

23-28 Encuentre el área de la región que está dentro de la primera curva y fuera de la segunda curva.

23. $r = 2 \cos \theta, \quad r = 1$

24. $r = 1 - \operatorname{sen} \theta, \quad r = 1$

25. $r^2 = 8 \cos 2\theta, \quad r = 2$

26. $r = 2 + \operatorname{sen} \theta, \quad r = 3 \operatorname{sen} \theta$

27. $r = 3 \cos \theta, \quad r = 1 + \cos \theta$

28. $r = 3 \operatorname{sen} \theta, \quad r = 2 - \operatorname{sen} \theta$

29-34 Encuentre el área de la región que está dentro de ambas curvas.

29. $r = \sqrt{3} \cos \theta, \quad r = \operatorname{sen} \theta$

30. $r = 1 + \cos \theta, \quad r = 1 - \cos \theta$

31. $r = \operatorname{sen} 2\theta, \quad r = \cos 2\theta$

32. $r = 3 + 2 \cos \theta, \quad r = 3 + 2 \operatorname{sen} \theta$

33. $r^2 = \operatorname{sen} 2\theta, \quad r^2 = \cos 2\theta$

34. $r = a \operatorname{sen} \theta, \quad r = b \cos \theta, \quad a > 0, \ b > 0$

35. Encuentre el área dentro del bucle más grande y fuera del bucle más pequeño de la limaçon $r = \frac{1}{2} + \cos \theta$.

36. Encuentre el área entre el bucle más grande y el bucle más pequeño encerrado de la curva $r = 1 + 2 \cos 3\theta$

37-42 Encuentre todos los puntos de intersección de las curvas dadas.

37. $r = 1 + \operatorname{sen} \theta, \quad r = 3 \operatorname{sen} \theta$

38. $r = 1 - \cos \theta, \quad r = 1 + \operatorname{sen} \theta$

39. $r = 2 \operatorname{sen} 2\theta, \quad r = 1$

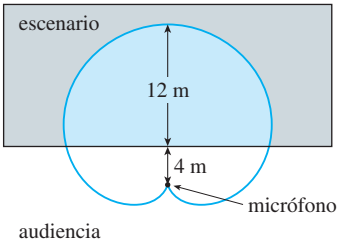
40. $r = \cos 3\theta, \quad r = \operatorname{sen} 3\theta$

41. $r = \operatorname{sen} \theta, \quad r = \operatorname{sen} 2\theta$

42. $r^2 = \operatorname{sen} 2\theta, \quad r^2 = \cos 2\theta$

43. Los puntos de intersección de la cardioide $r = 1 + \operatorname{sen} \theta$ y el bucle en espiral $r = 2\theta$, $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$, no se pueden encontrar exactamente. Utilice un dispositivo de graficación para aproximar los valores de θ en los que se intersecan. Después use estos valores para estimar el área que está dentro de ambas curvas.

44. Cuando se graban programas en vivo, es frecuente que los ingenieros de sonido utilicen un micrófono con un fonocaptor en forma de cardioide porque suprime ruido de la audiencia. Suponga que el micrófono se coloca a 4 m del frente del escenario (como en la figura) y la frontera de la región de captación óptima está dada por la cardioide $r = 8 + 8 \operatorname{sen} \theta$, donde r se mide en metros y el micrófono está en el polo. Los músicos quieren conocer el área que tendrán en el escenario dentro del campo óptimo de captación del micrófono. Conteste esta pregunta.



45-48 Encuentre la longitud exacta de la curva polar.

45. $r = 2 \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$

46. $r = 5^{\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

47. $r = \theta^2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

48. $r = 2(1 + \cos \theta)$

49-50 Encuentre la longitud exacta de la curva. Utilice una gráfica para determinar el intervalo del parámetro.

49. $r = \cos^4(\theta/4)$

50. $r = \cos^2(\theta/2)$

51-54 Utilice una calculadora para encontrar la longitud de la curva con una aproximación de cuatro decimales. Si es necesario, grafique la curva para determinar el intervalo del parámetro.

51. Un bucle de la curva $r = \cos 2\theta$

52. $r = \tan\theta, \quad \pi/6 \leq \theta \leq \pi/3$

53. $r = \operatorname{sen}(6 \operatorname{sen}\theta)$

54. $r = \operatorname{sen}(\theta/4)$

55. a) Utilice la fórmula 10.2.6 para demostrar que el área de la superficie generada al rotar la curva polar

$$r = f(\theta) \qquad a \leq \theta \leq b$$

(donde f' es continua y $0 \leq a < b \leq \pi$) en torno al eje polar es

$$S = \int_a^b 2\pi r \operatorname{sen}\theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

b) Utilice la fórmula del inciso a) para encontrar el área de la superficie generada al rotar la lemniscata $r^2 = \cos 2\theta$ en torno al eje polar.

56. a) Encuentre una fórmula para el área de la superficie generada al rotar la curva polar $r = f(\theta)$, $a \leq \theta \leq b$ (donde f' es continua y $0 \leq a < b \leq \pi$), en torno a la recta $\theta = \pi/2$.

b) Encuentre el área de la superficie generada al hacer rotar la lemniscata $r^2 = \cos 2\theta$ en torno a la recta $\theta = \pi/2$.

10.5 Secciones cónicas

En esta sección daremos definiciones geométricas de las parábolas, elipses e hipérbolas, y deduciremos sus ecuaciones estándar. Se llaman **secciones cónicas**, o **cónicas**, porque resultan de cortar un cono con un plano, como se muestra en la figura 1.

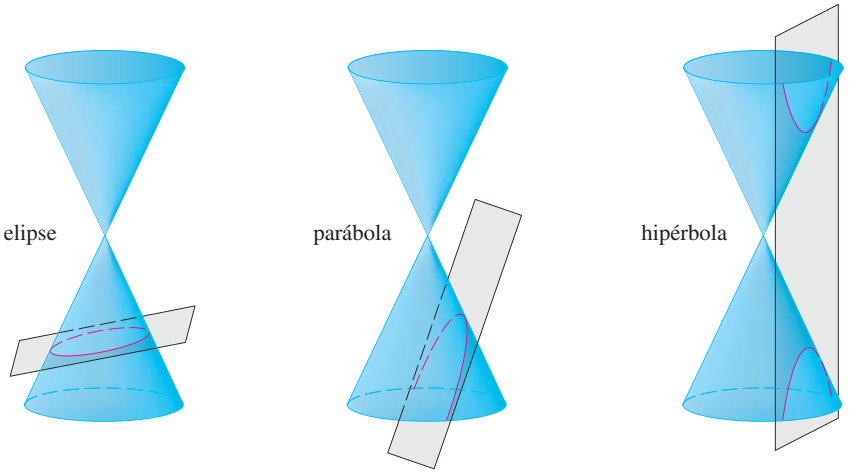


FIGURA 1
Cónicas

Parábolas

Una parábola es el conjunto de puntos en el plano que equidistan de un punto fijo F (llamado **foco**) y una recta fija (llamada **directriz**). Esta definición se ilustra en la figura 2. Observe que el punto a la mitad entre el foco y la directriz está sobre la parábola y se llama **vértice**. La recta perpendicular a la directriz que pasa por el foco se llama **eje** de la parábola.

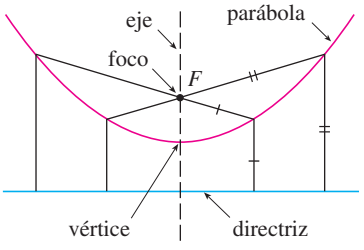


FIGURA 2

En el siglo XVI Galileo demostró que la trayectoria de un proyectil disparado al aire con un ángulo respecto al suelo, es una parábola. Desde entonces, las formas parabólicas se han usado en el diseño de los faros de automóviles, telescopios reflectores y puentes suspendidos. (Véase en el problema 20 de la página 271 para la propiedad de reflexión de parábolas que las hace tan útiles.)

Se obtiene una ecuación particularmente simple para una parábola si se coloca su vértice en el origen y su directriz paralela al eje x como en la figura 3. Si el foco está en el punto $(0, p)$, entonces la directriz tiene la ecuación $y = -p$. Si $P(x, y)$ es cualquier punto

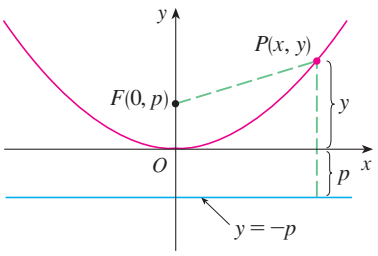


FIGURA 3

sobre la parábola, entonces la distancia de P al foco es

$$|PF| = \sqrt{x^2 + (y - p)^2}$$

y la distancia de P a la directriz es $|y + p|$. (La figura 3 ilustra el caso donde $p > 0$.) La propiedad que define a una parábola es que estas distancias son iguales:

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = |y + p|$$

Una ecuación equivalente se obtiene elevando al cuadrado y simplificando:

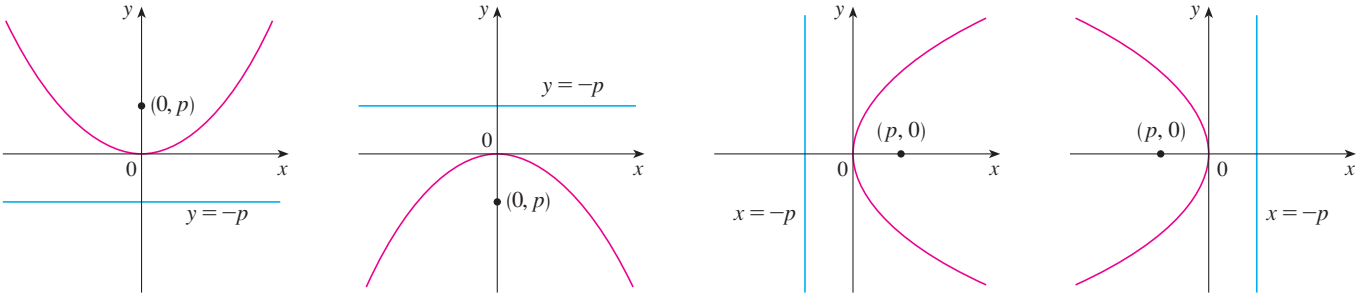
$$x^2 + (y - p)^2 = |y + p|^2 = (y + p)^2$$
$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$$
$$x^2 = 4py$$

1 La ecuación de la parábola con foco $(0, p)$ y directriz $y = -p$ es

$$x^2 = 4py$$

Si escribimos $a = 1/(4p)$, entonces la ecuación estándar de una parábola 1 se convierte en $y = ax^2$. Abre hacia arriba si $p > 0$ y hacia abajo si $p < 0$ [véase figura 4, incisos a) y b)]. La gráfica es simétrica con respecto al eje y porque 1 permanece sin cambio cuando x se sustituye por $-x$.

Si intercambiamos x y y en 1, obtenemos



a) $x^2 = 4py$, $p > 0$ b) $x^2 = 4py$, $p < 0$ c) $y^2 = 4px$, $p > 0$ d) $y^2 = 4px$, $p < 0$

FIGURA 4

2

$$y^2 = 4px$$

que es una ecuación de la parábola con foco en $(p, 0)$ y directriz $x = -p$. (Intercambiar x y y equivale a reflejar respecto a la recta $y = x$.) La parábola abre hacia la derecha si $p > 0$ y hacia la izquierda si $p < 0$ [véase figura 4, incisos c) y d)]. En ambos casos, la gráfica es simétrica respecto al eje x, que es el eje de la parábola.

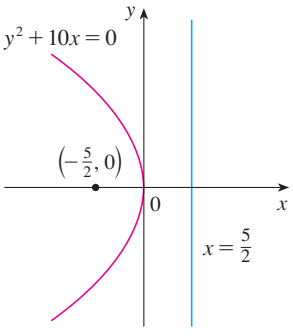


FIGURA 5

EJEMPLO 1 Encuentre el foco y la directriz de la parábola $y^2 + 10x = 0$ y bosqueje la gráfica.

SOLUCIÓN Si se escribe la ecuación como $y^2 = -10x$ y se compara con la ecuación 2, se ve que $4p = -10$, de modo que $p = -\frac{5}{2}$. Así, el foco es $(p, 0) = \left(-\frac{5}{2}, 0\right)$ y la directriz es $x = \frac{5}{2}$. El bosquejo se muestra en la figura 5.

Elipses

Una **elipse** es el conjunto de puntos en un plano cuya suma de sus distancias a dos puntos fijos F_1 y F_2 es una constante (véase figura 6). Estos dos puntos fijos se llaman **focos** (plural del lugar geométrico foco). Una de las leyes de Kepler es que las órbitas de los planetas en el sistema solar son elipses con el Sol en un foco.

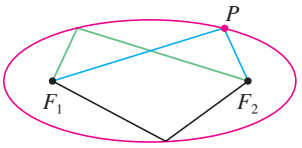


FIGURA 6

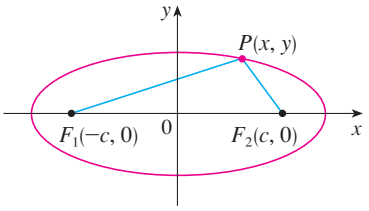


FIGURA 7

Con el fin de obtener la ecuación más simple para una elipse, colocamos los focos en el eje x en los puntos $(-c, 0)$ y $(c, 0)$ como en la figura 7, de modo que el origen esté a la mitad entre los focos. Sea $2a > 0$ la suma de las distancias de un punto de la elipse a los focos. Entonces $P(x, y)$ es un punto sobre la elipse cuando

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a$$

es decir,
$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a$$

o bien,
$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

Al elevar al cuadrado ambos lados, tenemos

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2$$

que podemos simplificar como
$$a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = a^2 + cx$$

Elevando al cuadrado otra vez:

$$a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$$

lo que resulta
$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Del triángulo F_1F_2P de la figura 7 se ve que $2c < 2a$, así que $c < a$, y por tanto, $a^2 - c^2 > 0$. Por conveniencia, sea $b^2 = a^2 - c^2$. Entonces la ecuación de la elipse se convierte en $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ o, si ambos lados se dividen entre a^2b^2,

$$\boxed{3} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Puesto que $b^2 = a^2 - c^2 < a^2$, se deduce que $b < a$. Las intersecciones con el eje x se encuentran al hacer $y = 0$. Entonces $x^2/a^2 = 1$, o bien $x^2 = a^2$, de modo que $x = \pm a$. Los puntos correspondientes $(a, 0)$ y $(-a, 0)$ se llaman **vértices** de la elipse y el segmento de recta que une los vértices se llama **eje mayor**. Para hallar las intersecciones con el eje y hacemos $x = 0$ y obtenemos $y^2 = b^2$, de modo que $y = \pm b$. El segmento de recta que une $(0, b)$ y $(0, -b)$ es el **eje menor**. La ecuación 3 no cambia si x se sustituye por $-x$ o y se reemplaza por $-y$, así que la elipse es simétrica respecto a ambos ejes. Observe que si los focos coinciden, entonces $c = 0$, de modo que $a = b$ y la elipse se convierte en una circunferencia con radio $r = a = b$.

Un resumen de esta discusión es el que se muestra (véase figura 8).

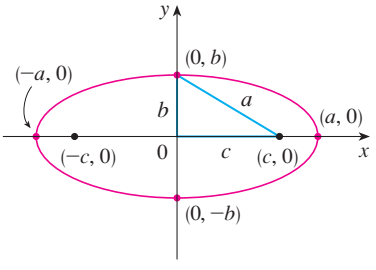


FIGURA 8

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \ a \geqslant b$

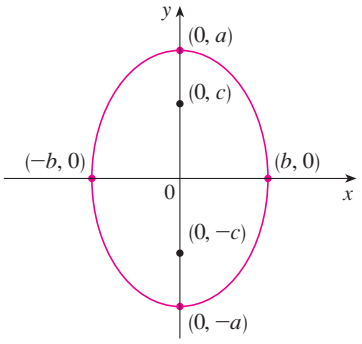


FIGURA 9
$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,\ a \geqslant b$

4 La elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad a \geqslant b > 0$$

tiene focos $(\pm c, 0)$, donde $c^2 = a^2 - b^2$ y vértices $(\pm a, 0)$.

Si los focos de una elipse se localizan en el eje y en $(0, \pm c)$, entonces podemos hallar su ecuación al intercambiar x y y en 4. (Véase figura 9.)

5 La elipse

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \qquad a \geqslant b > 0$$

tiene focos $(0, \pm c)$, donde $c^2 = a^2 - b^2$ y vértices $(0, \pm a)$.

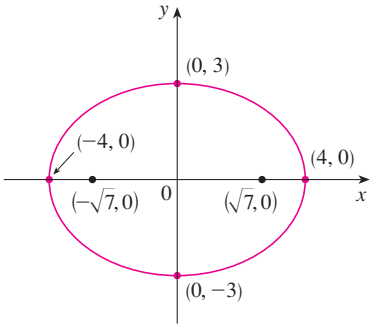


FIGURA 10
$9x^2 + 16y^2 = 144$

V EJEMPLO 2 Bosqueje la gráfica de $9x^2 + 16y^2 = 144$ y localice los focos.

SOLUCIÓN Dividimos ambos lados de la ecuación entre 144:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

La ecuación está ahora en la forma estándar para una elipse, así que tenemos $a^2 = 16$, $b^2 = 9$, $a = 4$ y $b = 3$. Las intersecciones con el eje x son ± 4 y las intersecciones con el eje y son ± 3. También, $c^2 = a^2 - b^2 = 7$, de modo que $c = \sqrt{7}$ y los focos son $(\pm\sqrt{7}, 0)$. La gráfica se bosqueja en la figura 10.

V EJEMPLO 3 Obtenga la ecuación de la elipse con focos $(0, \pm 2)$ y vértices $(0, \pm 3)$.

SOLUCIÓN Al usar la notación de 5, se tiene $c = 2$ y $a = 3$. Entonces obtenemos $b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 4 = 5$, así que la ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Otra forma de escribir la ecuación es $9x^2 + 5y^2 = 45$.

Al igual que las parábolas, las elipses tienen una propiedad de reflexión interesante que tiene consecuencias prácticas. Si se coloca una fuente de luz o sonido en un foco con secciones transversales elípticas, entonces toda la luz o sonido se refleja de la superficie al otro foco (véase el ejercicio 65). Este principio se usa en *litotripsia*, un tratamiento para cálculos renales. Un reflector con sección transversal elíptica se coloca de tal manera que el cálculo está en un foco. Ondas sonoras de alta intensidad generadas en el otro foco, se reflejan hacia el cálculo y lo destruyen sin dañar el tejido circundante. Se ahorra al paciente el traumatismo de la cirugía y se recupera en pocos días.

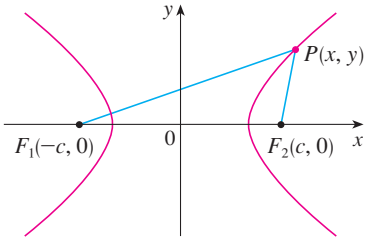


FIGURA 11
P está sobre la hipérbola cuando $|PF_1| - |PF_2| = \pm 2a$.

Hipérbolas

Una **hipérbola** es el conjunto de todos los puntos en un plano cuya diferencia de sus distancias a dos puntos fijos F_1 y F_2 (los focos) es una constante. Esta definición se ilustra en la figura 11.

Las hipérbolas aparecen con frecuencia como gráficas de ecuaciones en química, física, biología y economía (ley de Boyle, ley de Ohm, curvas de oferta y demanda). Una aplicación

particularmente importante de las hipérbolas se encuentra en los sistemas de navegación desarrollados en las guerras mundiales I y II (véase el ejercicio 51).

Observe que la definición de una hipérbola es similar a la de una elipse; el único cambio es que la suma de las distancias se convirtió en una diferencia de distancias. De hecho, la deducción de la ecuación de una hipérbola es también similar a la que se dio antes para una elipse. Se deja al ejercicio 52 demostrar que cuando los focos están sobre el eje x en $(\pm c, 0)$ y la diferencia de distancias es $|PF_1| - |PF_2| = \pm 2a$, entonces la ecuación de la hipérbola es

$$\boxed{6} \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde $c^2 = a^2 + b^2$. Observe que las intersecciones con el eje x son de nuevo $\pm a$ y los puntos $(a, 0)$ y $(-a, 0)$ son los **vértices** de la hipérbola. Pero si hacemos $x = 0$ en la ecuación 6 obtenemos $y^2 = -b^2$, lo cual es imposible, así que no hay intersección con el eje y. La hipérbola es simétrica respecto a ambos ejes.

Para analizar más la hipérbola, de la ecuación 6 obtenemos

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \geqslant 1$$

Esto demuestra que $x^2 \geqslant a^2$, de modo que $|x| = \sqrt{x^2} \geqslant a$. Por consiguiente, tenemos que $x \geqslant a$ o $x \leqslant -a$. Esto significa que la hipérbola consta de dos partes, llamadas *ramas*.

Cuando dibujamos una hipérbola, es útil dibujar primero sus **asíntotas**, que son las rectas discontinuas $y = (b/a)x$ y $y = -(b/a)x$ mostradas en la figura 12. Ambas ramas de la hipérbola se aproximan a las asíntotas; es decir, se acercan de manera arbitraria a las asíntotas. [Véase el ejercicio 73 en la sección 4.5, donde estas rectas se muestran como una asíntota inclinada.]

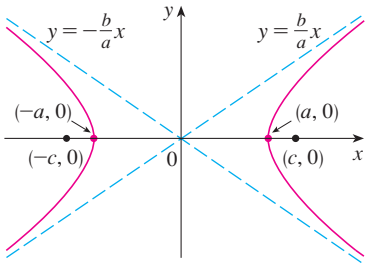


FIGURA 12
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

7 La hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

tiene focos $(\pm c, 0)$, donde $c^2 = a^2 + b^2$, vértices $(\pm a, 0)$ y asíntotas $y = \pm(b/a)x$.

Si los focos de una hipérbola están en el eje y, entonces al invertir los roles de x y y obtenemos la siguiente información, que se ilustra en la figura 13.

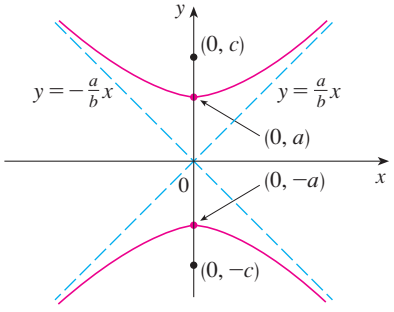


FIGURA 13
$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

8 La hipérbola

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

tiene focos $(0, \pm c)$, donde $c^2 = a^2 + b^2$, vértices $(0, \pm a)$ y asíntotas $y = \pm(a/b)x$.

EJEMPLO 4 Encuentre los focos y las asíntotas de la hipérbola $9x^2 - 16y^2 = 144$ y bosqueje su gráfica.

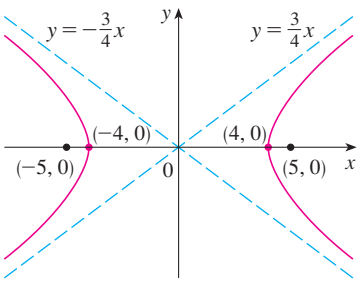


FIGURA 14
$9x^2 - 16y^2 = 144$

SOLUCIÓN Si dividimos ambos lados de la ecuación entre 144, resulta

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

lo cual es de la forma dada en [7] con $a = 4$ y $b = 3$. Como $c^2 = 16 + 9 = 25$, los focos son $(\pm 5, 0)$. Las asíntotas son las rectas $y = \frac{3}{4}x$ y $y = -\frac{3}{4}x$. La gráfica se muestra en la figura 14.

EJEMPLO 5 Encuentre los focos y la ecuación de la hipérbola con vértices $(0, \pm 1)$ y asíntota $y = 2x$.

SOLUCIÓN De [8] y la información dada, vemos que $a = 1$ y $a/b = 2$. Así, $b = a/2 = \frac{1}{2}$ y $c^2 = a^2 + b^2 = \frac{5}{4}$. Los focos son $\left(0, \pm\sqrt{5}/2\right)$ y la ecuación de la hipérbola es

$$y^2 - 4x^2 = 1$$

Cónicas desplazadas

Como se discute en el apéndice, las cónicas se desplazan tomando las ecuaciones estándar [1], [2], [4], [5], [7] y [8] y reemplazamos x y y por $x - h$ y $y - k$.

EJEMPLO 6 Encuentre una ecuación de la elipse con focos $(2, -2)$, $(4, -2)$ y vértices $(1, -2)$, $(5, -2)$.

SOLUCIÓN El eje mayor es el segmento de recta que une los vértices $(1, -2)$, $(5, -2)$ y tiene longitud 4, de manera que $a = 2$. La distancia entre los focos es 2, por lo que $c = 1$. Así $b^2 = a^2 - c^2 = 3$. Como el centro de la elipse es $(3, -2)$, reemplazamos x y y en [4] por $x - 3$ y $y + 2$ para obtener

$$\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{3} = 1$$

como la ecuación de la elipse.

V EJEMPLO 7 Trace la cónica $9x^2 - 4y^2 - 72x + 8y + 176 = 0$ y encuentre sus focos.

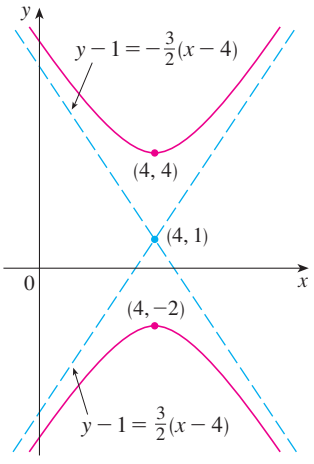


FIGURA 15
$9x^2 - 4y^2 - 72x + 8y + 176 = 0$

SOLUCIÓN Completamos los cuadrados como sigue:

$$4(y^2 - 2y) - 9(x^2 - 8x) = 176$$

$$4(y^2 - 2y + 1) - 9(x^2 - 8x + 16) = 176 + 4 - 144$$

$$4(y-1)^2 - 9(x-4)^2 = 36$$

$$\frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x-4)^2}{4} = 1$$

Ésta es de la forma [8] excepto que x y y son reemplazadas por $x - 4$ y $y - 1$. Así $a^2 = 9$, $b^2 = 4$ y $c^2 = 13$. La hipérbola es desplazada cuatro unidades a la derecha y una unidad hacia arriba. Los focos son $\left(4, 1 + \sqrt{13}\right)$ y $\left(4, 1 - \sqrt{13}\right)$ y los vértices son $(4, 4)$ y $(4, -2)$. Las asíntotas son $y - 1 = \pm\frac{3}{2}(x - 4)$. El trazo de la hipérbola se da en la figura 15.

10.5 Ejercicios

1-8 Encuentre el vértice, focos y directriz de la parábola y trace su gráfica.

1. $x^2 = 6y$

2. $2y^2 = 5x$

3. $2x = -y^2$

4. $3x^2 + 8y = 0$

5. $(x + 2)^2 = 8(y - 3)$

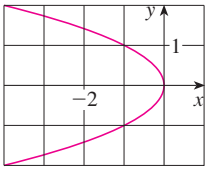
6. $x - 1 = (y + 5)^2$

7. $y^2 + 2y + 12x + 25 = 0$

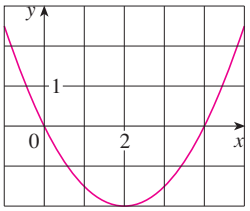
8. $y + 12x - 2x^2 = 16$

9-10 Encuentre la ecuación de la parábola. Después determine los focos y la directriz.

9.



10.



11-16 Encuentre los vértices y focos de la elipse y trace su gráfica.

11. $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

12. $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{8} = 1$

13. $x^2 + 9y^2 = 9$

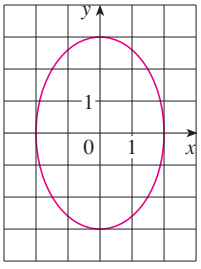
14. $100x^2 + 36y^2 = 225$

15. $9x^2 - 18x + 4y^2 = 27$

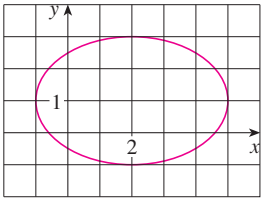
16. $x^2 + 3y^2 + 2x - 12y + 10 = 0$

17-18 Encuentre la ecuación de la elipse. Después encuentre sus focos.

17.



18.



19-24 Encuentre los vértices, focos y asíntotas de la hipérbola y trace su gráfica.

19. $\dfrac{y^2}{25} - \dfrac{x^2}{9} = 1$

20. $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{64} = 1$

21. $x^2 - y^2 = 100$

22. $y^2 - 16x^2 = 16$

23. $4x^2 - y^2 - 24x - 4y + 28 = 0$

24. $y^2 - 4x^2 - 2y + 16x = 31$

25-30 Identifique el tipo de sección cónica cuya ecuación se da y encuentre los vértices y los focos.

25. $x^2 = y + 1$

26. $x^2 = y^2 + 1$

27. $x^2 = 4y - 2y^2$

28. $y^2 - 8y = 6x - 16$

29. $y^2 + 2y = 4x^2 + 3$

30. $4x^2 + 4x + y^2 = 0$

31-48 Encuentre la ecuación para la cónica que satisface las condiciones dadas.

31. Parábola, vértice $(0, 0)$, foco $(1, 0)$

32. Parábola, foco $(0, 0)$, directriz $y = 6$

33. Parábola, foco $(-4, 0)$, directriz $x = 2$

34. Parábola, foco $(3, 6)$, vértice $(3, 2)$

35. Parábola, vértice $(2, 3)$, eje vertical, que pasa por $(1, 5)$

36. Parábola, eje horizontal, que pasa por $(-1, 0)$, $(1, -1)$ y $(3, 1)$

37. Elipse, focos $(\pm 2, 0)$, vértices $(\pm 5, 0)$

38. Elipse, focos $(0, \pm 5)$, vértices $(0, \pm 13)$

39. Elipse, focos $(0, 2)$, $(0, 6)$, vértices $(0, 0)$, $(0, 8)$

40. Elipse, focos $(0, -1)$, $(8, -1)$, vértice $(9, -1)$

41. Elipse, centro $(-1, 4)$, vértice $(-1, 0)$, foco $(-1, 6)$

42. Elipse, focos $(\pm 4, 0)$, que pasa por $(-4, 1.8)$

43. Hipérbola, vértices $(\pm 3, 0)$, focos $(\pm 5, 0)$

44. Hipérbola, vértices $(0, \pm 2)$, focos $(0, \pm 5)$

45. Hipérbola, vértices $(-3, -4)$, $(-3, 6)$, focos $(-3, -7)$, $(-3, 9)$

46. Hipérbola, vértices $(-1, 2)$, $(7, 2)$, focos $(-2, 2)$, $(8, 2)$

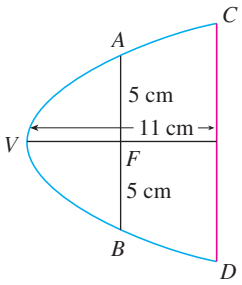
47. Hipérbola, vértices $(\pm 3, 0)$, asíntotas $y = \pm 2x$

48. Hipérbola, focos $(2, 0)$, $(2, 8)$, asíntotas $y = 3 + \frac{1}{2}x$ y $y = 5 - \frac{1}{2}x$

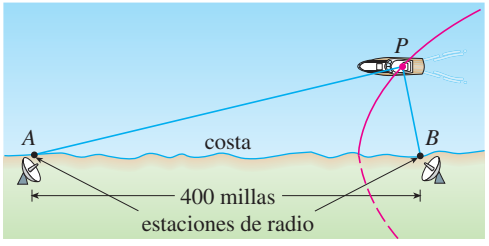
1. Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

49. El punto en una órbita lunar próxima a la superficie de la Luna se llama *perilunio*, y el punto más alejado de la superficie se llama *apolunio*. La nave espacial *Apolo 11* se colocó en una órbita lunar elíptica con altitud de perilunio de 110 km y altitud de apolunio de 314 km (arriba de la Luna). Encuentre una ecuación para esta elipse si el radio de la Luna es de 1728 km y su centro está en uno de los focos.

50. En la figura se muestra una sección transversal de un reflector parabólico. El bulbo se localiza en el foco y la abertura en el foco es de 10 cm.
a) Encuentre una ecuación de la parábola.
b) Determine el diámetro de la abertura $|CD|$, a 11 cm del vértice.



51. En el sistema de navegación por radio LORAN (LOng RAnge Navigation), dos estaciones de radio localizadas en A y B, transmiten en forma simultánea señales a un barco o un avión localizado en P. La computadora de a bordo convierte la diferencia de tiempo de recibir estas señales en una diferencia de distancia $|PA| - |PB|$, y esto, de acuerdo con la definición de una hipérbola, localiza al barco o avión en una rama de una hipérbola (véase la figura). Suponga que la estación B se localiza a 400 millas al este de la estación A sobre la costa. Un barco recibe la señal de B 1200 microsegundos (μs) antes de recibir la señal de A.
a) Si se supone que la señal de radio viaja a una rapidez de 980 pies/μs, encuentre la ecuación de la hipérbola sobre la que se localiza el barco.
b) Si el barco se dirige al norte de B, ¿qué tan lejos de la costa está el barco?



52. Use la definición de hipérbola para deducir la ecuación 6 para una hipérbola con focos $(\pm c, 0)$ y vértices $(\pm a, 0)$.

53. Demuestre que la función definida por la rama superior de la hipérbola $y^2/a^2 - x^2/b^2 = 1$ es cóncava hacia arriba.

54. Encuentre la ecuación para la elipse con focos (1, 1) y $(-1, -1)$ y eje principal de longitud 4.

55. Determine el tipo de curva representada por la ecuación

$$\frac{x^2}{k} + \frac{y^2}{k-16} = 1$$

en cada uno de los siguientes casos: a) $k > 16$, b) $0 < k < 16$, y c) $k < 0$.
d) Demuestre que todas las curvas en los incisos a) y b) tienen los mismos focos, sin importar el valor de k.

56. a) Demuestre que la ecuación de la recta tangente a la parábola $y^2 = 4px$ en el punto (x_0, y_0) puede expresarse como

$$y_0 y = 2p(x + x_0)$$

b) ¿Cuál es la intersección de esta recta tangente con el eje x? Use este hecho para dibujar la recta tangente.

57. Demuestre que las rectas tangentes a la parábola $x^2 = 4py$ trazadas desde cualquier punto sobre la directriz son perpendiculares.

58. Demuestre que si una elipse y una hipérbola tienen los mismos focos, entonces sus rectas tangentes en cada punto de intersección son perpendiculares.

59. Use ecuaciones paramétricas y la regla de Simpson con $n = 8$ para estimar la circunferencia de la elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$.

60. El planeta Plutón viaja en una órbita elíptica alrededor del Sol (en un foco). La longitud del eje mayor es 1.18×10^{10} km y la longitud del eje menor es 1.14×10^{10} km. Use la regla de Simpson con $n = 10$ para estimar la distancia que viaja el planeta durante una órbita completa alrededor del Sol.

61. Encuentre el área de la región encerrada por la hipérbola $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ y la recta vertical que pasa por un foco.

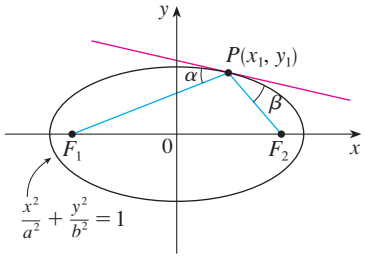
62. a) Si una elipse gira alrededor de su eje mayor, encuentre el volumen del sólido resultante.
b) Si gira alrededor de su eje menor, encuentre el volumen resultante.

63. Encuentre el centroide de la región encerrada por el eje x y la mitad superior de la elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$.

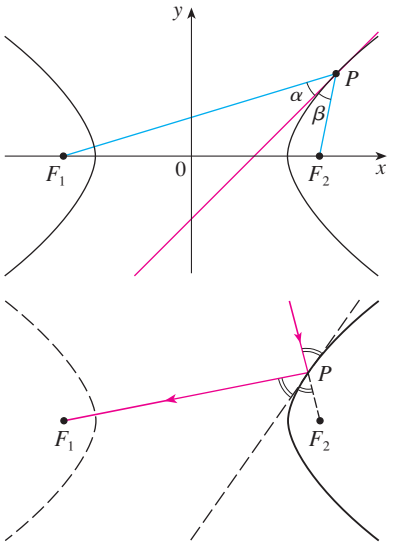
64. a) Calcule el área de la superficie del elipsoide generado al rotar una elipse en torno a su eje mayor.
b) ¿Cuál es el área de la superficie si la elipse rota en torno de su eje menor?

65. Sea $P(x_1, y_1)$ un punto sobre la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ con focos F_1 y F_2 y sean α y β los ángulos entre las rectas

PF_1, PF_2 y la elipse como se ve en la figura. Demuestre que $\alpha = \beta$. Esto explica cómo funcionan las cúpulas susurrantes y la litotricia. El sonido que viene de un foco se refleja y pasa por el otro foco. [*Sugerencia:* use la fórmula del problema 19 de la página 271 para demostrar que $\tan \alpha = \tan \beta$.]



66. Sea $P(x_1, y_1)$ un punto sobre la hipérbola $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ con focos F_1 y F_2 y sean α y β los ángulos entre las rectas PF_1, PF_2 y la hipérbola como se ilustra en la figura. Demuestre que $\alpha = \beta$. (Ésta es la propiedad de reflexión de la hipérbola. Demuestra que la luz dirigida a un foco F_2 de un espejo hiperbólico, se refleja hacia el otro foco F_1.)



10.6 Secciones cónicas en coordenadas polares

En la sección precedente definimos la parábola en términos de un foco y una directriz, pero definimos la elipse y la hipérbola en términos de dos focos. En esta sección se da un tratamiento más unificado de los tres tipos de secciones cónicas en términos de un foco y la directriz. Además, si colocamos el foco en el origen, entonces una sección cónica tiene una ecuación polar simple, la cual es una descripción cómoda del movimiento de planetas, satélites y cometas.

1 Teorema Sea F un punto fijo (llamado **foco**) y l una recta fija (llamada **directriz**) en un plano. Sea e un número positivo fijo (llamado **excentricidad**). El conjunto de todos los puntos P en el plano, tales que

$$\frac{|PF|}{|Pl|} = e$$

(esto es, la razón de la distancia desde F a la distancia desde l es la constante e) es una sección cónica. La cónica es

a) una elipse si $e < 1$

b) una parábola si $e = 1$

c) una hipérbola si $e > 1$

DEMOSTRACIÓN Observe que si la excentricidad es $e = 1$, entonces $|PF| = |Pl|$ y, de este modo, la condición dada simplemente se convierte en la definición de una parábola según se da en la sección 10.5.

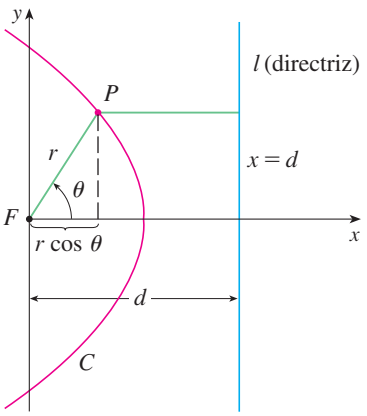


FIGURA 1

Colocamos el foco F en el origen y la directriz paralela al eje y y d unidades a la derecha. Así, la directriz tiene ecuación $x = d$ y es perpendicular al eje polar. Si el punto P tiene coordenadas polares (r, θ), vemos de la figura 1 que

$$|PF| = r \qquad |Pl| = d - r\cos\theta$$

Así, la condición $|PF|/|Pl| = e$ o $|PF| = e\,|Pl|$ resulta

$$\boxed{2} \qquad r = e(d - r\cos\theta)$$

Si elevamos al cuadrado ambas partes de esta ecuación polar y la convertimos a coordenada rectangulares, obtenemos

$$x^2 + y^2 = e^2(d - x)^2 = e^2(d^2 - 2dx + x^2)$$

o bien,

$$(1 - e^2)x^2 + 2de^2x + y^2 = e^2d^2$$

Después de completar los cuadrados, tenemos

$$\boxed{3} \qquad \left(x + \frac{e^2d}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{e^2d^2}{(1 - e^2)^2}$$

Si $e < 1$, reconocemos a la ecuación 3 como la ecuación de una elipse. De hecho, es de la forma

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde

$$\boxed{4} \qquad h = -\frac{e^2d}{1 - e^2} \qquad a^2 = \frac{e^2d^2}{(1 - e^2)^2} \qquad b^2 = \frac{e^2d^2}{1 - e^2}$$

En la sección 10.5 encontramos que el foco de una elipse está a una distancia c del centro, donde

$$\boxed{5} \qquad c^2 = a^2 - b^2 = \frac{e^4d^2}{(1 - e^2)^2}$$

Esto demuestra que

$$c = \frac{e^2d}{1 - e^2} = -h$$

y confirma que el foco como se definió en el teorema 1 significa lo mismo que el foco definido en la sección 10.5. Se deduce también de las ecuaciones 4 y 5 que la excentricidad está dada por

$$e = \frac{c}{a}$$

Si $e > 1$, entonces $1 - e^2 < 0$ y vemos que la ecuación 3 representa una hipérbola. Tal y como se hizo antes, se podría reescribir la ecuación 3 en la forma

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

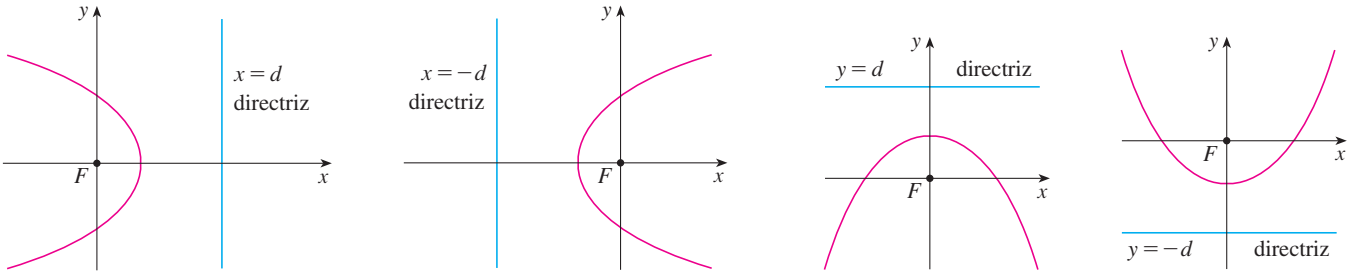
y vemos que

$$e = \frac{c}{a} \qquad \text{donde} \quad c^2 = a^2 + b^2$$

Al resolver la ecuación 2 para r, vemos que la ecuación polar de la cónica mostrada en la figura 1 se puede expresar como

$$r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta}$$

Si se elige que la directriz esté a la izquierda del foco como $x = -d$, o si se elige la directriz paralela al eje polar como $y = \pm d$, entonces la ecuación polar de la cónica está dada por el siguiente teorema, que se ilustra mediante la figura 2. (Véanse los ejercicios 21-23.)



a) $r = \dfrac{ed}{1 + e\cos\theta}$ b) $r = \dfrac{ed}{1 - e\cos\theta}$ c) $r = \dfrac{ed}{1 + e\,\text{sen}\,\theta}$ d) $r = \dfrac{ed}{1 - e\,\text{sen}\,\theta}$

FIGURA 2
Ecuación polar de la cónica

6 Teorema Una ecuación polar de la forma

$$r = \frac{ed}{1 \pm e\cos\theta} \qquad \text{o} \qquad r = \frac{ed}{1 \pm e\,\text{sen}\,\theta}$$

representa una sección cónica con excentricidad e. La cónica es una elipse si $e < 1$, una parábola si $e = 1$, o una hipérbola si $e > 1$.

V EJEMPLO 1 Encuentre la ecuación polar para una parábola que tiene su foco en el origen y cuya directriz es la recta $y = -6$.

SOLUCIÓN Al usar el teorema 6 con $e = 1$ y $d = 6$, y emplear el inciso d) de la figura 2, vemos que la ecuación de la parábola es

$$r = \frac{6}{1 - \text{sen}\,\theta}$$

V EJEMPLO 2 Una cónica está dada por la ecuación polar

$$r = \frac{10}{3 - 2\cos\theta}$$

Encuentre la excentricidad, identifique la cónica, localice la directriz y bosqueje la cónica.

SOLUCIÓN Al dividir numerador y denominador entre 3, se escribe la ecuación como

$$r = \frac{\frac{10}{3}}{1 - \frac{2}{3}\cos\theta}$$

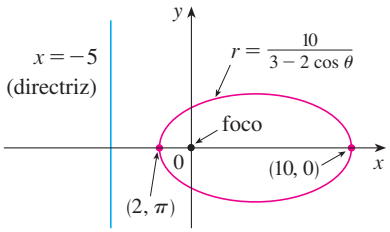


FIGURA 3

Del teorema 6 vemos que esta ecuación representa una elipse con $e = \frac{2}{3}$. Puesto que $ed = \frac{10}{3}$, tenemos

$$d = \frac{\frac{10}{3}}{e} = \frac{\frac{10}{3}}{\frac{2}{3}} = 5$$

de manera que la directriz tiene la ecuación cartesiana $x = -5$. Cuando $\theta = 0$, $r = 10$; cuando $\theta = \pi$, $r = 2$. Así que los vértices tienen coordenadas polares $(10, 0)$ y $(2, \pi)$. La elipse se bosqueja en la figura 3.

EJEMPLO 3 Bosqueje la cónica $r = \dfrac{12}{2 + 4 \operatorname{sen} \theta}$.

SOLUCIÓN Escribiendo la ecuación en la forma

$$r = \frac{6}{1 + 2 \operatorname{sen} \theta}$$

vemos que la excentricidad es $e = 2$ y, por tanto, la ecuación representa una hipérbola. Puesto que $ed = 6$, $d = 3$ y la directriz tiene ecuación $y = 3$. Los vértices ocurren cuando $\theta = \pi/2$ y $3\pi/2$, de modo que son $(2, \pi/2)$ y $(-6, 3\pi/2) = (6, \pi/2)$. También es útil graficar las intersecciones con el eje x. Éstas ocurren cuando $\theta = 0, \pi$; en ambos casos $r = 6$. Para más exactitud, podríamos dibujar las asíntotas. Observe que $r \to \pm\infty$ cuando $1 + 2 \operatorname{sen} \theta \to 0^+$ o 0^- y $1 + 2 \operatorname{sen} \theta = 0$ cuando $\operatorname{sen} \theta = -\frac{1}{2}$. Así, las asíntotas son paralelas a los rayos $\theta = 7\pi/6$ y $\theta = 11\pi/6$. La hipérbola se bosqueja en la figura 4.

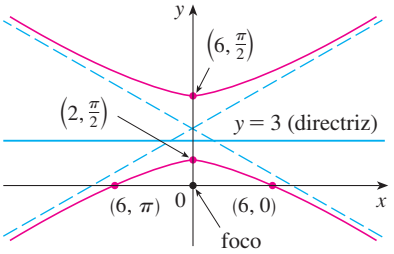


FIGURA 4
$r = \dfrac{12}{2 + 4 \operatorname{sen} \theta}$

Al hacer girar secciones cónicas, es mucho más conveniente usar ecuaciones polares que cartesianas. Se usa el hecho (véase el ejercicio 73 de la sección 10.3) de que la gráfica de $r = f(\theta - \alpha)$ es la gráfica de $r = f(\theta)$ rotada en sentido contrario a las manecillas del reloj en torno al origen por un ángulo α.

V EJEMPLO 4 Si la elipse del ejemplo 2 se hace girar por un ángulo $\pi/4$ en torno al origen, determine una ecuación polar y grafique la elipse resultante.

SOLUCIÓN La ecuación de la elipse rotada se obtiene reemplazando θ con $\theta - \pi/4$ en la ecuación dada en el ejemplo 2. Así que la nueva ecuación es

$$r = \frac{10}{3 - 2 \cos(\theta - \pi/4)}$$

Usamos esta ecuación para graficar la elipse rotada en la figura 5. Observe que la elipse ha sido rotada en torno a su foco izquierdo.

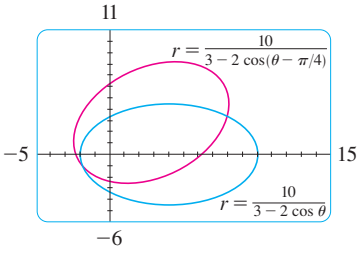


FIGURA 5

En la figura 6 utilizamos una computadora para bosquejar varias cónicas para mostrar el efecto de variar la excentricidad e. Observe que cuando e es cercana a 0 la elipse es casi circular, mientras que se vuelve más alargada cuando $e \to 1^-$. Cuando $e = 1$, por supuesto, la cónica es una parábola.

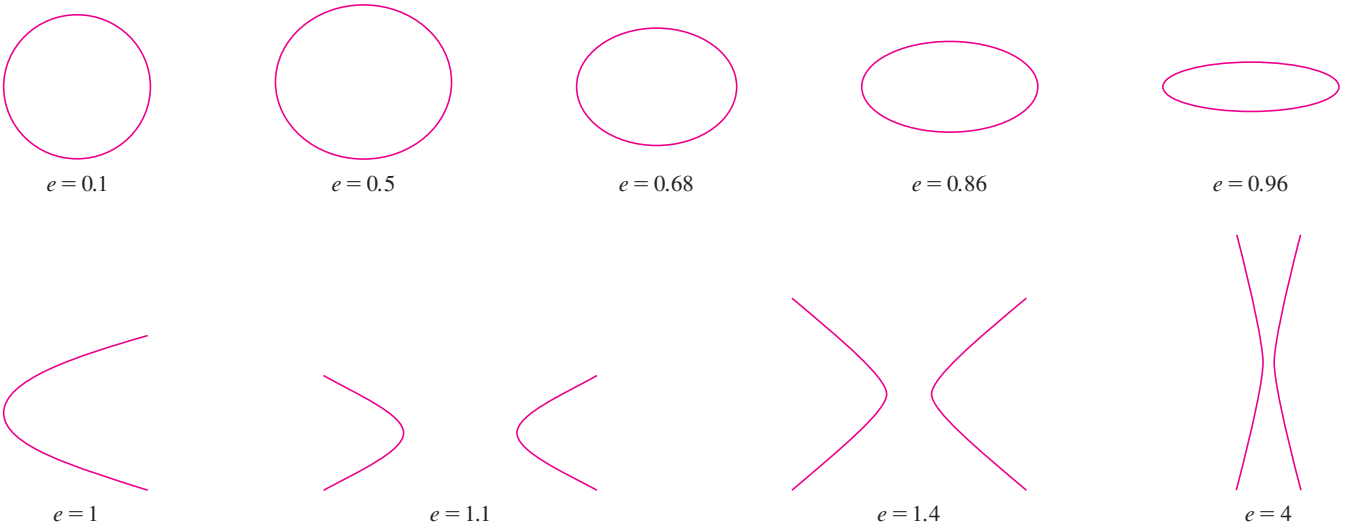


FIGURA 6

Leyes de Kepler

En 1609 el matemático y astrónomo alemán Johannes Kepler, con base en enormes cantidades de datos astronómicos, publicó las siguientes tres leyes del movimiento planetario.

Leyes de Kepler

1. Un planeta gira alrededor del Sol en órbita elíptica con el Sol en uno de los focos.
2. La recta que une el Sol con un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.
3. El cuadrado del periodo de revolución de un planeta es proporcional al cubo de la longitud del eje mayor de su órbita.

Aun cuando Kepler formuló sus leyes en términos del movimiento de planetas alrededor del Sol, se aplican igualmente bien al movimiento de lunas, cometas, satélites y otros cuerpos que giran sujetos a una sola fuerza gravitacional. En la sección 13.4 se demuestra cómo deducir las leyes de Kepler a partir de las leyes de Newton. Aquí se emplea la primera ley de Kepler, junto con la ecuación polar de una elipse, para calcular cantidades de interés en astronomía.

Para fines de cálculos astronómicos, es útil expresar la ecuación de una elipse en términos de su excentricidad e y su semieje mayor a. Podemos expresar la distancia d del foco a la directriz en términos de a si usamos 4:

$$a^2 = \frac{e^2 d^2}{(1 - e^2)^2} \quad \Rightarrow \quad d^2 = \frac{a^2(1 - e^2)^2}{e^2} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{a(1 - e^2)}{e}$$

Entonces $ed = a(1 - e^2)$. Si la directriz es $x = d$, entonces la ecuación polar es

$$r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos\theta}$$

7 La ecuación polar de una elipse con foco en el origen, semieje mayor a, excentricidad e y directriz $x = d$ se puede expresar en la forma

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos\theta}$$

Las posiciones de un planeta que sean más cercanas al Sol, y más lejanas a éste, se denominan **perihelio** y **afelio**, respectivamente, y corresponden a los vértices de la elipse. (Véase figura 7.) Las distancias del Sol al perihelio y afelio reciben el nombre de **distancia al perihelio** y **distancia al afelio**, respectivamente. En la figura 1 el Sol está en el foco F, de modo que en el perihelio se tiene $\theta = 0$ y, de la ecuación 7,

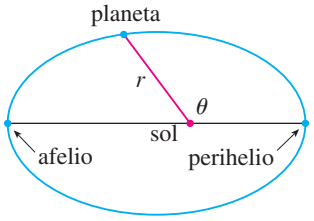


FIGURA 7

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos 0} = \frac{a(1 - e)(1 + e)}{1 + e} = a(1 - e)$$

Del mismo modo, en el afelio $\theta = \pi$ y $r = a(1 + e)$.

8 La distancia al perihelio de un planeta al Sol es $a(1 - e)$ y la distancia al afelio es $a(1 + e)$.

EJEMPLO 5

a) Encuentre una ecuación polar aproximada para la órbita elíptica de la Tierra alrededor del Sol (en un foco), dado que la excentricidad es alrededor de 0.017 y la longitud del eje mayor es de unos 2.99×10^8 km.

b) Encuentre la distancia de la Tierra al Sol en el perihelio y el afelio.

SOLUCIÓN

a) La longitud del eje mayor es $2a = 2.99 \times 10^8$, por lo que $a = 1.495 \times 10^8$. Un dato es que $e = 0.017$ y, por tanto, de la ecuación 7, una ecuación de la órbita de la Tierra alrededor del Sol es

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos\theta} = \frac{(1.495 \times 10^8)[1 - (0.017)^2]}{1 + 0.017\cos\theta}$$

o, aproximadamente,

$$r = \frac{1.49 \times 10^8}{1 + 0.017\cos\theta}$$

b) De 8, la distancia al perihelio de la Tierra al Sol es

$$a(1 - e) \approx (1.495 \times 10^8)(1 - 0.017) \approx 1.47 \times 10^8 \text{ km}$$

y la distancia al afelio es

$$a(1 + e) \approx (1.495 \times 10^8)(1 + 0.017) \approx 1.52 \times 10^8 \text{ km}$$

10.6 Ejercicios

1-8 Escriba una ecuación polar de una cónica con el foco en el origen y los datos dados.

1. Elipse, excentricidad $\frac{1}{2}$, directriz $x = 4$
2. Parábola, directriz $x = -3$
3. Hipérbola, excentricidad 1.5, directriz $y = 2$
4. Hipérbola, excentricidad 3, directriz $x = 3$
5. Parábola, vértice $(4, 3\pi/2)$
6. Elipse, excentricidad 0.8, vértice $(1, \pi/2)$
7. Elipse, excentricidad $\frac{1}{2}$, directriz $r = 4 \sec\theta$
8. Hipérbola, excentricidad 3, directriz $r = -6 \csc\theta$

9-16 a) Encuentre la excentricidad, b) identifique la cónica, c) dé una ecuación de la directriz y d) bosqueje la cónica.

9. $r = \dfrac{4}{5 - 4\operatorname{sen}\theta}$
10. $r = \dfrac{12}{3 - 10\cos\theta}$
11. $r = \dfrac{2}{3 + 3\operatorname{sen}\theta}$
12. $r = \dfrac{3}{2 + 2\cos\theta}$
13. $r = \dfrac{9}{6 + 2\cos\theta}$
14. $r = \dfrac{8}{4 + 5\operatorname{sen}\theta}$
15. $r = \dfrac{3}{4 - 8\cos\theta}$
16. $r = \dfrac{10}{5 - 6\operatorname{sen}\theta}$

17. a) Encuentre la excentricidad y la directriz de la cónica $r = 1/(1 - 2\operatorname{sen}\theta)$ y grafique la cónica y su directriz.
    b) Si esta cónica se hace girar en sentido contrario a las manecillas del reloj en torno al origen con un ángulo $3\pi/4$, escriba la ecuación resultante y grafique su curva.
18. Grafique la cónica $r = 4/(5 + 6\cos\theta)$ y su directriz. También grafique la cónica obtenida al girar esta curva en torno al origen con un ángulo $\pi/3$.
19. Grafique las cónicas $r = e/(1 - e\cos\theta)$ con $e = 0.4, 0.6, 0.8$ y 1.0 en una pantalla común. ¿Cómo afecta el valor de e la forma de la curva?
20. a) Grafique las cónicas $r = ed/(1 + e\operatorname{sen}\theta)$ para $e = 1$ y varios valores de d. ¿Cómo afecta el valor de d la forma de la cónica?
    b) Grafique estas cónicas para $d = 1$ y varios valores de e. ¿Cómo afecta el valor de e la forma de la cónica?
21. Demuestre que una cónica con foco en el origen, excentricidad e y directriz $x = -d$ tiene la ecuación polar
$$r = \frac{ed}{1 - e\cos\theta}$$
22. Demuestre que una cónica con foco en el origen, excentricidad e y directriz $y = d$ tiene la ecuación polar
$$r = \frac{ed}{1 + e\operatorname{sen}\theta}$$
23. Demuestre que una cónica con foco en el origen, excentricidad e y directriz $y = -d$ tiene la ecuación polar
$$r = \frac{ed}{1 - e\operatorname{sen}\theta}$$
24. Demuestre que las parábolas $r = c/(1 + \cos\theta)$ y $r = d/(1 - \cos\theta)$ se cortan en ángulos rectos.
25. La órbita de Marte alrededor del Sol es una elipse con excentricidad 0.093 y semieje mayor de 2.28×10^8 km. Encuentre una ecuación polar para la órbita.
26. La órbita de Júpiter tiene excentricidad de 0.048 y la longitud del eje mayor es 1.56×10^9 km. Encuentre una ecuación polar para la órbita.
27. La órbita del cometa Halley, visto por última vez en 1986 y que debe volver en 2062, es una elipse con excentricidad 0.97 y un foco en el Sol. La longitud de su eje principal es 36.18 UA. [Una unidad astronómica (UA) es la distancia media entre la Tierra y el Sol, cerca de 93 millones de millas.] Encuentre una ecuación polar para la órbita del cometa Halley. ¿Cuál es la distancia máxima desde el cometa al Sol?
28. El cometa Hale-Bopp, descubierto en 1995, tiene una órbita elíptica con excentricidad 0.9951 y la longitud del eje mayor es 356.5 UA. Encuentre una ecuación polar para la órbita de este cometa. ¿Qué tan cerca del Sol llega?


© Dreamstime

29. El planeta Mercurio viaja en una órbita elíptica con excentricidad 0.206. Su distancia mínima del Sol es 4.6×10^7 km. Determine su distancia máxima del Sol.
30. La distancia desde el planeta Plutón al Sol es de 4.43×10^9 km en el perihelio y 7.37×10^9 km en el afelio. Halle la excentricidad de la órbita de Plutón.
31. Con los datos del ejercicio 29, calcule la distancia que recorre el planeta Mercurio durante una órbita completa alrededor del Sol. (Si su calculadora o sistema algebraico computarizado evalúa integrales definidas, utilícelo. De lo contrario, use la regla de Simpson.)

10 Repaso

Verificación de conceptos

1. a) ¿Qué es una curva paramétrica?
b) ¿Cómo se bosqueja una curva paramétrica?

2. a) ¿Cómo se encuentra la pendiente de una recta tangente a una curva paramétrica?
b) Determine el área debajo de una curva paramétrica.

3. Escriba una expresión para cada una de las siguientes descripciones:
a) La longitud de una curva paramétrica.
b) El área de la superficie obtenida al hacer girar una curva paramétrica en torno al eje x.

4. a) Use un diagrama para explicar el significado de las coordenadas polares (r, θ) de un punto.
b) Escriba ecuaciones que expresen las coordenadas cartesianas (x, y) de un punto en términos de las coordenadas polares.
c) ¿Que ecuaciones usaría para obtener las coordenadas polares de un punto si conociera las coordenadas cartesianas?

5. a) ¿Cómo determina la pendiente de una recta tangente a una curva polar?
b) ¿Cómo calcula el área de una región acotada por una curva polar?
c) ¿Cómo halla la longitud de una curva polar?

6. a) Dé una definición geométrica de una parábola.
b) Escriba una ecuación de una parábola con foco $(0, p)$ y directriz $y = -p$. ¿Qué pasa si el foco es $(p, 0)$ y la directriz es $x = -p$?

7. a) Dé una definición de una elipse en términos de los focos.
b) Escriba una ecuación para la elipse con focos $(\pm c, 0)$ y vértices $(\pm a, 0)$.

8. a) Dé una definición de una hipérbola en términos de los focos.
b) Escriba una ecuación para la hipérbola con focos $(\pm c, 0)$ y vértices $(\pm a, 0)$.
c) Escriba ecuaciones para las asíntotas de la hipérbola del inciso b).

9. a) ¿Cuál es la excentricidad de una sección cónica?
b) ¿Qué se puede decir acerca de la excentricidad si la sección cónica es una elipse? ¿Una hipérbola? ¿Una parábola?
c) Escriba una ecuación polar para una sección cónica con excentricidad e y directriz $x = d$. ¿Qué pasa si la directriz es $x = -d$? ¿$y = d$? ¿$y = -d$?

Exámen rápido Verdadero-Falso

Determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que refute el enunciado.

1. Si la curva paramétrica $x = f(t)$, $y = g(t)$ satisface $g'(1) = 0$, entonces tiene una recta tangente horizontal cuando $t = 1$.

2. Si $x = f(t)$ y $y = g(t)$ son derivables dos veces, entonces

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y/dt^2}{d^2x/dt^2}$$

3. La longitud de la curva $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$, es $\int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt$.

4. Si un punto se representa por (x, y) en coordenadas cartesianas (donde $x \neq 0$) y (r, θ) en coordenadas polares, entonces $\theta = \tan^{-1}(y/x)$.

5. Las curvas polares $r = 1 - \operatorname{sen} 2\theta$ y $r = \operatorname{sen} 2\theta - 1$ tienen la misma gráfica.

6. Las ecuaciones $r = 2$, $x^2 + y^2 = 4$ y $x = 2 \operatorname{sen} 3t$, $y = 2 \cos 3t$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ tienen la misma gráfica.

7. Las ecuaciones paramétricas $x = t^2$, $y = t^4$ tienen la misma gráfica que $x = t^3$, $y = t^6$.

8. La gráfica de $y^2 = 2y + 3x$ es una parábola.

9. Una recta tangente a una parábola corta la parábola sólo una vez.

10. Una hipérbola nunca corta su directriz.

Ejercicios

1-4 Bosqueje la curva paramétrica y elimine el parámetro para hallar la ecuación cartesiana de la curva.

1. $x = t^2 + 4t, \quad y = 2 - t, \quad -4 \leq t \leq 1$

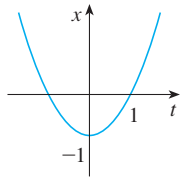
2. $x = 1 + e^{2t}, \quad y = e^t$

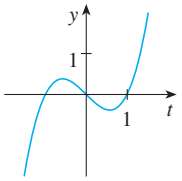
3. $x = \cos\theta, \quad y = \sec\theta, \quad 0 \leq \theta < \pi/2$

4. $x = 2\cos\theta, \quad y = 1 + \operatorname{sen}\theta$

5. Escriba tres diferentes conjuntos de ecuaciones paramétricas para la curva $y = \sqrt{x}$.

6. Use las gráficas de $x = f(t)$ y $y = g(t)$ para bosquejar la curva paramétrica $x = f(t)$, $y = g(t)$. Indique con flechas la dirección en que se traza la curva cuando se incrementa t.





7. a) Ubique el punto con coordenadas polares $(4, 2\pi/3)$. A continuación encuentre sus coordenadas cartesianas.
b) Las coordenadas cartesianas de un punto son $(-3, 3)$. Encuentre dos conjuntos de coordenadas polares para el punto.

8. Trace la región formada de puntos cuyas coordenadas polares satisfacen $1 \leq r/2$ y $\pi/6 \leq \theta \leq 5\pi/6$.

9-16 Bosqueje la curva polar.

9. $r = 1 - \cos\theta$

10. $r = \operatorname{sen} 4\theta$

11. $r = \cos 3\theta$

12. $r = 3 + \cos 3\theta$

13. $r = 1 + \cos 2\theta$

14. $r = 2\cos(\theta/2)$

15. $r = \dfrac{3}{1 + 2\operatorname{sen}\theta}$

16. $r = \dfrac{3}{2 - 2\cos\theta}$

17-18 Encuentre la ecuación polar para la curva representada por la ecuación cartesiana dada.

17. $x + y = 2$

18. $x^2 + y^2 = 2$

19. La curva con ecuación polar $r = (\operatorname{sen}\theta)/\theta$ se llama **caracoloide**. Use una gráfica de r como una función de θ en coordenadas cartesianas para bosquejar la caracoloide a mano. Después grafíquela con una máquina para comprobar su bosquejo.

20. Grafique la elipse $r = 2/(4 - 3\cos\theta)$ y su directriz. Grafique también la elipse obtenida por rotación en torno al origen por un ángulo de $2\pi/3$.

21-24 Encuentre la pendiente de la recta tangente a la curva dada en el punto correspondiente al valor especificado del parámetro.

21. $x = \ln t, \; y = 1 + t^2; \quad t = 1$

22. $x = t^3 + 6t + 1, \quad y = 2t - t^2; \quad t = -1$

23. $r = e^{-\theta}; \quad \theta = \pi$

24. $r = 3 + \cos 3\theta; \quad \theta = \pi/2$

25-26 Encuentre dy/dx y d^2y/dx^2.

25. $x = t + \operatorname{sen} t, \quad y = t - \cos t$

26. $x = 1 + t^2, \quad y = t - t^3$

27. Use una gráfica para estimar las coordenadas del punto mínimo sobre la curva $x = t^3 - 3t$, $y = t^2 + t + 1$. Después use el cálculo para determinar las coordenadas exactas.

28. Encuentre el área encerrada por el bucle de la curva del ejercicio 27.

29. ¿En qué puntos la curva

$$x = 2a\cos t - a\cos 2t \qquad y = 2a\operatorname{sen} t - a\operatorname{sen} 2t$$

tiene rectas tangentes verticales y horizontales? Use esta información como ayuda para bosquejar la curva.

30. Determine el área encerrada por la curva del ejercicio 29.

31. Obtenga el área encerrada por la curva $r^2 = 9\cos 5\theta$.

32. Halle el área encerrada por el bucle interior de la curva $r = 1 - 3\operatorname{sen}\theta$.

33. Encuentre los puntos de intersección de las curvas $r = 2$ y $r = 4\cos\theta$.

34. Obtenga los puntos de intersección de las curvas $r = \cot\theta$ y $r = 2\cos\theta$.

35. Determine el área de la región que está dentro de ambas circunferencias $r = 2\operatorname{sen}\theta$ y $r = \operatorname{sen}\theta + \cos\theta$.

36. Halle el área de la región que está dentro de la curva $r = 2 + \cos 2\theta$ pero fuera de la curva $r = 2 + \operatorname{sen}\theta$.

37-40 Encuentre la longitud de la curva.

37. $x = 3t^2, \quad y = 2t^3, \quad 0 \leq t \leq 2$

38. $x = 2 + 3t, \quad y = \cosh 3t, \quad 0 \leq t \leq 1$

39. $r = 1/\theta, \quad \pi \leq \theta \leq 2\pi$

40. $r = \operatorname{sen}^3(\theta/3), \quad 0 \leq \theta \leq \pi$

Se requiere calculadora graficadora o computadora SAC Se requiere sistema algebraico computarizado

41-42 Calcule el área de la superficie obtenida al hacer girar la curva dada en torno al eje x.

41. $x = 4\sqrt{t}, \quad y = \dfrac{t^3}{3} + \dfrac{1}{2t^2}, \quad 1 \leqslant t \leqslant 4$

42. $x = 2 + 3t, \quad y = \cosh 3t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

43. Las curvas definidas por las ecuaciones paramétricas

$$x = \frac{t^2 - c}{t^2 + 1} \qquad y = \frac{t(t^2 - c)}{t^2 + 1}$$

se llaman **estrofoides** (de una palabra griega que significa torcer). Investigue cómo varían estas curvas cuando varía c.

44. Una familia de curvas tiene ecuaciones polares $r^a = |\operatorname{sen} 2\theta|$ donde a es un número positivo. Investigue cómo cambian estas curvas cuando cambia a.

45-48 Encuentre los focos y vértices y bosqueje la gráfica.

45. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{8} = 1$

46. $4x^2 - y^2 = 16$

47. $6y^2 + x - 36y + 55 = 0$

48. $25x^2 + 4y^2 + 50x - 16y = 59$

49. Encuentre una ecuación de la elipse con focos $(\pm 4, 0)$ y vértices $(\pm 5, 0)$.

50. Encuentre una ecuación de la parábola con focos $(2, 1)$ y directriz $x = -4$.

51. Halle una ecuación de la hipérbola con focos $(0, \pm 4)$ y asíntotas $y = \pm 3x$.

52. Encuentre una ecuación de la elipse con focos $(3, \pm 2)$ y un eje con longitud 8.

53. Obtenga una ecuación para la elipse que comparte un vértice y un foco con la parábola $x^2 + y = 100$ y que tiene su otro foco en el origen.

54. Demuestre que si m es cualquier número real, entonces hay exactamente dos rectas de pendiente m que son tangentes a la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ y sus ecuaciones son $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$.

55. Encuentre una ecuación polar para la elipse con foco en el origen, excentricidad $\frac{1}{3}$ y directriz con ecuación $r = 4 \sec \theta$.

56. Demuestre que los ángulos entre el eje polar y las asíntotas de la hipérbola $r = ed/(1 - e \cos \theta)$, $e > 1$, están dados por $\cos^{-1}(\pm 1/e)$.

57. Una curva llamada **folium de Descartes** está definida por las ecuaciones paramétricas

$$x = \frac{3t}{1 + t^3} \qquad y = \frac{3t^2}{1 + t^3}$$

a) Demuestre que si (a, b) está sobre la curva, entonces (b, a) también lo está; es decir, la curva es simétrica respecto a la recta $y = x$. ¿En dónde se interseca la curva con esta recta?
b) Encuentre los puntos sobre la curva donde las rectas tangentes son horizontales o verticales.
c) Demuestre que la recta $y = -x - 1$ es una asíntota oblicua.
d) Trace la curva.
e) Demuestre que una ecuación cartesiana de esta curva es $x^3 + y^3 = 3xy$.
f) Demuestre que la ecuación polar puede expresarse en la forma

$$r = \frac{3 \sec \theta \tan \theta}{1 + \tan^3 \theta}$$

g) Encuentre el área encerrada por el bucle de esta curva.
h) Demuestre que el área del bucle es la misma que el área que está entre la asíntota y las ramas infinitas de la curva. (Utilice un sistema algebraico computarizado para evaluar la integral.)

Problemas adicionales

1. Una curva está definida mediante las ecuaciones paramétricas

$$x = \int_1^t \frac{\cos u}{u}\,du \qquad y = \int_1^t \frac{\operatorname{sen} u}{u}\,du$$

Encuentre la longitud del arco de la curva desde el origen hasta el punto más próximo donde hay una recta tangente vertical.

2. a) Encuentre los puntos máximo y mínimo de la curva $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$.

b) Bosqueje la curva. (Observe que es simétrica con respecto a ambos ejes y a ambas rectas $y = \pm x$, de modo que es suficiente considerar inicialmente $y \geqslant x \geqslant 0$.)

SAC c) Emplee coordenadas polares y un sistema algebraico computarizado para hallar el área encerrada por la curva.

3. ¿Cuál es el rectángulo de vista más pequeño que contiene a cada miembro de la familia de curvas polares $r = 1 + c \operatorname{sen} \theta$, donde $0 \leqslant c \leqslant 1$? Ilustre su respuesta graficando varios miembros de la familia en este rectángulo de vista.

4. Se colocan cuatro insectos en cuatro esquinas de un cuadrado con longitud a. Los insectos avanzan en sentido contrario a las manecillas del reloj a la misma rapidez, y cada uno avanza directamente hacia el siguiente insecto todo el tiempo. Se aproximan al centro del cuadrado a lo largo de trayectorias espirales.

a) Obtenga la ecuación polar de la trayectoria de un insecto al suponer que el polo está en el centro del cuadrado. (Use el hecho de que la recta que une a un insecto con el siguiente es tangente a la trayectoria del insecto.)

b) Encuentre la distancia recorrida por un insecto en el momento que se encuentra con los otros insectos en el centro.

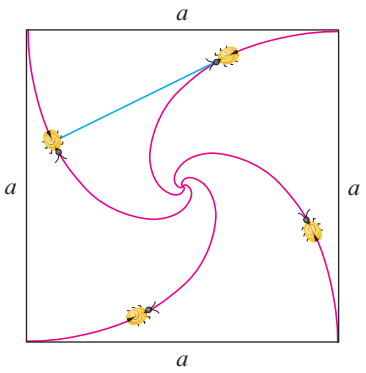


FIGURA PARA EL PROBLEMA 4

5. Demuestre que cualquier recta tangente a una hipérbola toca la hipérbola a la mitad del camino entre los puntos de intersección de la recta tangente y las asíntotas.

6. Una circunferencia C de radio $2r$ tiene su centro en el origen. Un círculo de radio r rueda sin resbalar en dirección contraria al giro de las manecillas del reloj alrededor de C. Un punto P está situado en un radio fijo del círculo giratorio a una distancia b de su centro, $0 < b < r$. [Vea las partes i) e ii) de la figura.] Sea L la recta desde el centro de C al centro del círculo giratorio y sea θ el ángulo que L forma con el eje x positivo.

a) Usando θ como un perímetro, demuestre que las ecuaciones paramétricas de la trayectoria trazada por P son

$$x = b\cos 3\theta + 3r\cos\theta \qquad y = b\operatorname{sen} 3\theta + 3r\operatorname{sen}\theta$$

Nota: Si $b = 0$, la trayectoria es una circunferencia de radio $3r$; si $b = r$, la trayectoria es una *epicicloide*. La trayectoria trazada por P para $0 < b < r$ se llama *epitrocoide*.

b) Grafique la curva para varios valores de b entre 0 y r.

c) Demuestre que un triángulo equilátero puede inscribirse en el epitrocoide y que su centroide está sobre la circunferencia de radio b con centro en el origen.

Nota: Éste es el principio del motor rotatorio Wankel. Cuando el triángulo equilátero gira con sus vértices en el epitrocoide, su centroide recorre una circunferencia cuyo centro está en el centro de la curva.

d) En casi todos los motores rotatorios, los lados de los triángulos equiláteros son sustituidos por arcos de circunferencia con centro en los vértices opuestos como en la parte iii) de la figura. (Entonces el diámetro del rotor es constante.) Demuestre que el rotor se ajusta en el epitrocoide si $b \leqslant \frac{3}{2}(2 - \sqrt{3})r$.

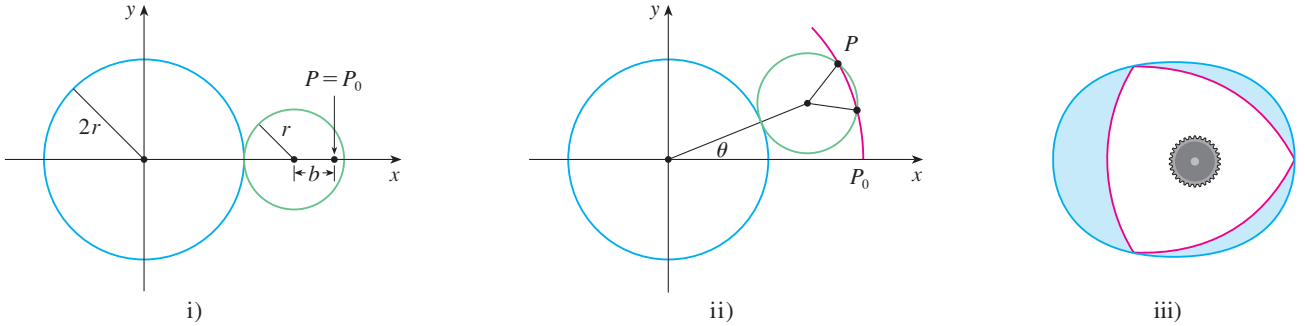


FIGURA PARA EL PROBLEMA 6

11 Sucesiones y series infinitas



En la última sección de este capítulo le pediremos que utilice una serie para deducir una fórmula para determinar la velocidad de una onda oceánica.

© Epic Stock / Shutterstock

En *Un previo de Cálculo*, hicimos una breve introducción de las sucesiones y series en relación con las paradojas de Zenón y la representación decimal de números. Su importancia en el Cálculo se deriva de la idea de Newton de representar funciones como sumas de sucesiones infinitas. Por ejemplo, para encontrar áreas, con frecuencia integraba una función expresándola primero como una serie y después integrando cada uno de sus términos. En la sección 11.10 trataremos de seguir esta idea con el fin de integrar funciones como e^{-x^2}. (Recuerde que anteriormente nos vimos incapacitados para enfrentar esto.) Muchas de las funciones que aparecen en física matemática y química, tales como las funciones de Bessel, están definidas como sumas de series, así que es muy importante familiarizarse con los conceptos básicos de convergencia de sucesiones y series infinitas.

Los físicos también usan las series en otro modo, tal como veremos en la sección 11.11. En el estudio de fenómenos tan diversos como la óptica, relatividad especial y electromagnetismo, los físicos analizan los fenómenos reemplazándolos primero por unos cuantos términos de las series que los representan.

11.1 Sucesiones

Una **sucesión** se puede pensar como una lista de números escritos en un orden definido:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots,\ a_n,\ldots$$

El número a_1 recibe el nombre de *primer término,* a_2 es el *segundo término* y, en general, a_n es el *n-ésimo término.* Aquí tratamos exclusivamente con sucesiones infinitas, por lo que cada término a_n tiene un sucesor a_{n+1}.

Observe que para todo entero positivo n hay un número correspondiente a_n, por lo que una sucesión se puede definir como una función cuyo dominio es el conjunto de enteros positivos. Pero usualmente escribimos a_n en lugar de la notación de función $f(n)$ para el valor de la función en el número n.

NOTACIÓN La sucesión $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ también se denota mediante

$$\{a_n\} \qquad \text{o} \qquad \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

EJEMPLO 1 Algunas sucesiones se pueden definir dando una fórmula para el n-ésimo término. En los ejemplos siguientes se ofrecen tres descripciones de la sucesión: una en la que se aplica la notación anterior, en otra se aplica una fórmula definida y en la tercera se escriben los términos de la sucesión. Observe que la n no tiene que empezar en 1.

a) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ $\quad a_n = \dfrac{n}{n+1}$ $\quad \left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \ldots, \dfrac{n}{n+1}, \ldots\right\}$

b) $\left\{\dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n}\right\}$ $\quad a_n = \dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n}$ $\quad \left\{-\dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{9}, -\dfrac{4}{27}, \dfrac{5}{81}, \ldots, \dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n}, \ldots\right\}$

c) $\{\sqrt{n-3}\}_{n=3}^{\infty}$ $\quad a_n = \sqrt{n-3},\ n \geqslant 3$ $\quad \{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n-3}, \ldots\}$

d) $\left\{\cos\dfrac{n\pi}{6}\right\}_{n=0}^{\infty}$ $\quad a_n = \cos\dfrac{n\pi}{6},\ n \geqslant 0$ $\quad \left\{1, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}, 0, \ldots, \cos\dfrac{n\pi}{6}, \ldots\right\}$

V EJEMPLO 2 Encuentre una fórmula para el término general a_n de la sucesión

$$\left\{\frac{3}{5}, -\frac{4}{25}, \frac{5}{125}, -\frac{6}{625}, \frac{7}{3\,125}, \ldots\right\}$$

y suponga que el patrón de los primeros términos continúa.

SOLUCIÓN Sabemos que

$$a_1 = \frac{3}{5} \qquad a_2 = -\frac{4}{25} \qquad a_3 = \frac{5}{125} \qquad a_4 = -\frac{6}{625} \qquad a_5 = \frac{7}{3\,125}$$

Observe que los numeradores de estas fracciones empiezan con 3 y se incrementan una unidad al pasar al siguiente término. El segundo término tiene numerador 4, el siguiente numerador es 5; en general, el *n-ésimo* término tendrá como numerador $n + 2$. Los denominadores son las potencias de 5, de modo que a_n tiene por denominador 5^n. El

signo de los términos es alternadamente positivo y negativo, por lo que es necesario multiplicar por una potencia de -1. En el ejemplo 1b) el factor $(-1)^n$ significa que empieza con un término negativo. Como aquí se busca iniciar con un término positivo, usamos $(-1)^{n-1}$, o bien $(-1)^{n+1}$. Por tanto

$$a_n = (-1)^{n-1}\frac{n+2}{5^n}$$

EJEMPLO 3 En este caso hay algunas sucesiones que no tienen una ecuación que las defina en forma simple.

a) La sucesión $\{p_n\}$, donde p_n es la población mundial el 1 de enero del año n.

b) Sea a_n el n-ésimo dígito en la expansión decimal del número e, entonces $\{a_n\}$ es una sucesión bien definida cuyos primeros términos son

$$\{7, 1, 8, 2, 8, 1, 8, 2, 8, 4, 5, \ldots\}$$

c) Las condiciones siguientes definen en forma recursiva la **sucesión de Fibonacci** $\{f_n\}$

$$f_1 = 1 \qquad f_2 = 1 \qquad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \qquad n \geqslant 3$$

Cada uno de los términos es la suma de los dos anteriores. Los primeros términos son

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots\}$$

Esta sucesión surgió cuando el matemático italiano del siglo XIII, a quien se conoce como Fibonacci, resolvió un problema que se relacionaba con la cría de conejos (véase ejercicio 83).

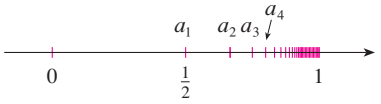


FIGURA 1

Una sucesión como la del ejemplo 1a), $a_n = n/(n+1)$, se puede representar dibujando sus términos en una recta numérica como en la figura 1, o trazando la gráfica como en la figura 2. Observe que, como una sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos, su gráfica consta de puntos aislados con coordenadas

$$(1, a_1) \qquad (2, a_2) \qquad (3, a_3) \qquad \ldots \qquad (n, a_n) \qquad \ldots$$

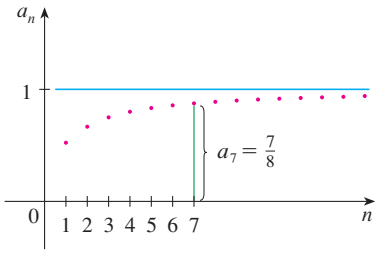


FIGURA 2

De acuerdo con las figuras 1 o 2, parece que los términos de la sucesión $a_n = n/(n+1)$ se aproximan a 1 cuando n es suficientemente grande. De hecho, la diferencia

$$1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

se puede hacer tan pequeña como se quiera al incrementar suficientemente n. Lo anterior se indica escribiendo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

En general, la notación

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

significa que los términos de la sucesión $\{a_n\}$ se aproximan a L cuando n se incrementa suficientemente. Observe que la definición siguiente del límite de una sucesión es muy parecida a la definición de límite de una función en el infinito dada en la sección 2.6.

1 Definición Una sucesión $\{a_n\}$ tiene el **límite** L y lo expresamos como

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \qquad \text{o} \qquad a_n \to L \text{ cuando } n \to \infty$$

si podemos hacer que los términos a_n se aproximen a L tanto como se quiera tomando n lo suficientemente grande. Si $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe, se dice que la sucesión **converge** (o que es **convergente**). De lo contrario, se dice que la sucesión **diverge** (o es **divergente**).

En la figura 3 se ilustra la definición 1 mostrando las gráficas de dos sucesiones que tienen como límite L.

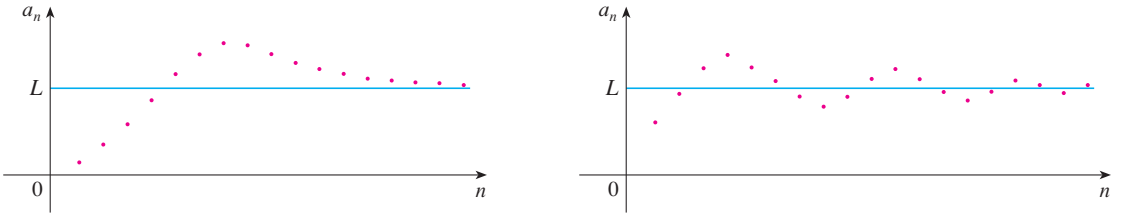


FIGURA 3
Gráficas de dos sucesiones con $\lim_{n\to\infty} a_n = L$

Una versión más precisa de la definición 1 es como sigue.

2 Definición Una sucesión $\{a_n\}$ tiene el **límite** L y lo expresamos como

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \qquad \text{o bien} \qquad a_n \to L \text{ cuando } n \to \infty$$

si para todo $\varepsilon > 0$ hay un correspondiente entero N tal que

$$\text{si} \qquad n > N \qquad \text{entonces} \qquad |a_n - L| < \varepsilon$$

Compare esta definición con la definición 2.6.7.

La definición 2 se ilustra mediante la figura 4, en la cual los términos a_1, a_2, a_3,… se localizan sobre una recta numérica. No importa qué tan pequeño se elija un intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, existe una N tal que todos los términos de la sucesión desde a_{N+1} en adelante deben estar en ese intervalo.

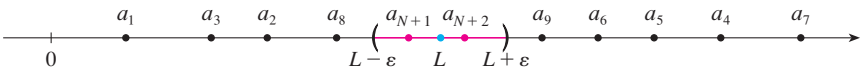


FIGURA 4

Otra ilustración de la definición 2 es la figura 5. Los puntos sobre la gráfica de $\{a_n\}$ deben estar entre las rectas horizontales $y = L + \varepsilon$ y $y = L - \varepsilon$ si $n > N$. Esta imagen debe ser válida, sin importar qué tan pequeño se haya escogido ε, pero usualmente se requiere un valor de ε mucho muy pequeño y un valor de N mucho muy grande.

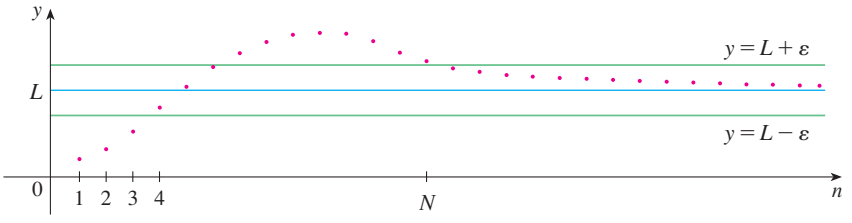


FIGURA 5

Si comparamos la definición 2 con la definición 2.6.7 veremos que la única diferencia entre $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ es que se requiere que n sea un entero. En este sentido se tiene el siguiente teorema, ilustrado en la figura 6.

3 Teorema Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ y $f(n) = a_n$ cuando n es un entero, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

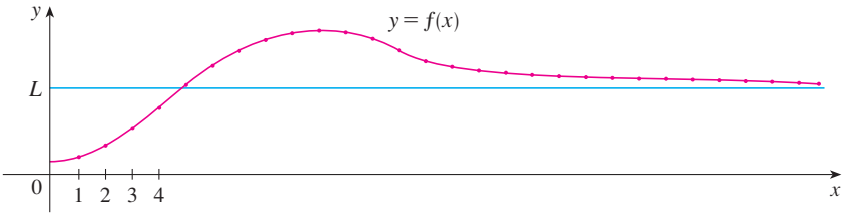


FIGURA 6

En particular, puesto que ya sabemos que $\lim_{x\to\infty} (1/x^r) = 0$, cuando $r > 0$ (teorema 2.6.5), se tiene

4
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^r} = 0 \qquad \text{si } r > 0$$

Si a_n es muy grande cuando n es muy grande, usamos la notación $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. La siguiente definición precisa es parecida a la definición 2.6.9.

5 Definición $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ significa que para todo número positivo M existe un entero N tal que

$$\text{si} \qquad n > N \qquad \text{entonces} \qquad a_n > M$$

Si $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, entonces la sucesión $\{a_n\}$ es divergente pero de una manera especial. Se dice que $\{a_n\}$ diverge a ∞.

Las leyes de los límites dadas en la sección 2.3 también se cumplen para los límites de sucesiones y sus demostraciones son similares.

Leyes de los límites para las sucesiones

Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son sucesiones convergentes y c es una constante, entonces

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} ca_n = c \lim_{n\to\infty} a_n \qquad \lim_{n\to\infty} c = c$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} \quad \text{si } \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n^p = \left[\lim_{n\to\infty} a_n\right]^p \quad \text{si } p > 0 \text{ and } a_n > 0$$

El teorema de la compresión también se puede adaptar a las sucesiones como sigue (véase figura 7).

El teorema de la compresión para sucesiones

Si $a_n \leq b_n \leq c_n$ para $n \geq n_0$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, entonces $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

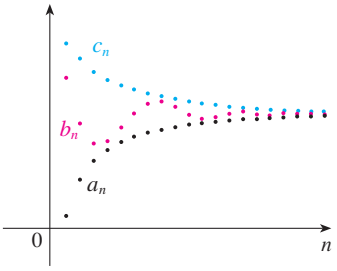


FIGURA 7
La sucesión $\{b_n\}$ está comprimida entre las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{c_n\}$.

Otro hecho útil respecto a los límites de sucesiones se evidencia en el teorema siguiente cuya demostración se deja para el ejercicio 87.

6 Teorema Si $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

EJEMPLO 4 Determine $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1}$.

SOLUCIÓN El método es similar al que usamos en la sección 2.6: dividir tanto el numerador como el denominador entre la potencia más alta de n del denominador y luego aplicar las leyes de los límites.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\dfrac{1}{n}} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}}$$

$$= \frac{1}{1+0} = 1$$

Esto demuestra que la conjetura que hicimos antes a partir de las figuras 1 y 2 era correcta.

Aquí usamos la ecuación 4 con $r = 1$.

EJEMPLO 5 La sucesión $a_n = \dfrac{n}{\sqrt{10+n}}$, ¿es convergente o divergente?

SOLUCIÓN Como en el ejemplo 4, dividimos el numerador y el denominador entre n:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{10+n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\dfrac{10}{n^2} + \dfrac{1}{n}}} = \infty$$

porque el numerador es una constante y el denominador se aproxima a cero, así que $\{a_n\}$ es divergente.

EJEMPLO 6 Determine $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n}$.

SOLUCIÓN Observe que tanto el numerador como el denominador tienden a infinito cuando $n \to \infty$. No se puede aplicar directamente la regla de l'Hospital porque no se aplica a sucesiones, sino a funciones de una variable real. Sin embargo, se puede aplicar la regla de l'Hospital a la función relacionada $f(x) = (\ln x)/x$ y obtener

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

Por tanto, de acuerdo con el teorema 3

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$$

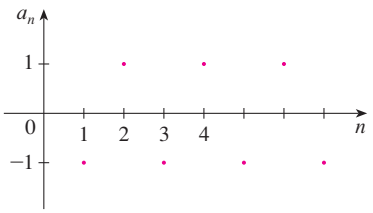


FIGURA 8

La gráfica de la sucesión del ejemplo 8 se muestra en la figura 9 y apoya nuestra respuesta.

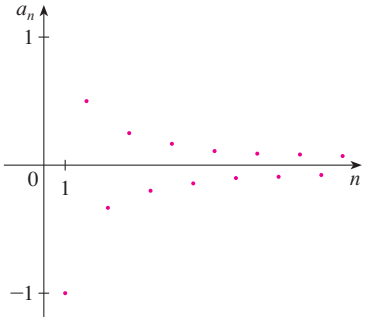


FIGURA 9

EJEMPLO 7 Determine si la sucesión $a_n = (-1)^n$ es convergente o divergente.

SOLUCIÓN Si escribimos algunos términos de la sucesión obtenemos

$$\{-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots\}$$

La gráfica de esta sucesión se muestra en la figura 8. Como los términos oscilan entre 1 y -1 en forma infinita, a_n no se aproxima a ningún número. Por tanto, $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$ no existe; la sucesión $\{(-1)^n\}$ es divergente.

EJEMPLO 8 Evalúe $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$ si éste existe.

SOLUCIÓN Primero calculamos el límite del valor absoluto:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Por tanto, de acuerdo con el teorema 6,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$$

El siguiente teorema dice que si acoplamos una función continua a los términos de una sucesión convergente, el resultado también es convergente. La demostración se deja para el ejercicio 88.

7 Teorema Si $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ y la función f es continua en L, entonces

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(L)$$

EJEMPLO 9 Encuentre $\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}(\pi/n)$.

SOLUCIÓN Como la función seno es continua en 0, el teorema 7 nos permite escribir

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}(\pi/n) = \operatorname{sen}\left(\lim_{n\to\infty} (\pi/n) \right) = \operatorname{sen} 0 = 0$$

Creando gráficas de sucesiones
Algunos sistemas algebraicos computarizados contienen comandos especiales que permiten crear sucesiones y dibujarlas directamente. Sin embargo, con la mayoría de las calculadoras para trazar gráficas se pueden dibujar sucesiones usando ecuaciones paramétricas. Por ejemplo, la sucesión del ejemplo 10 se puede dibujar introduciendo las ecuaciones paramétricas

$$x = t \qquad y = t!/t^t$$

y dibujando en el modo punto (*dot mode*), iniciando con $t = 1$; se establece el t-ésimo paso igual a 1. El resultado se muestra en la figura 10.

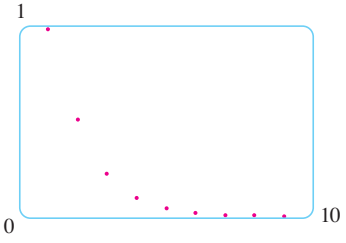


FIGURA 10

V EJEMPLO 10 Analice la convergencia de la sucesión $a_n = n!/n^n$, donde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$.

SOLUCIÓN Tanto numerador como denominador se aproximan al infinito cuando $n \to \infty$, pero no cabe utilizar la regla de l'Hospital ($x!$ no está definida cuando x no es un número entero). Escribamos algunos términos para ver si es posible intuir qué pasa con a_n cuando n es muy grande:

$$a_1 = 1 \qquad a_2 = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2} \qquad a_3 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3}$$

$$\boxed{8} \qquad a_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n}{n \cdot n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}$$

Esta expresión y la gráfica de la figura 10 sugieren que los términos están decreciendo y parecen aproximarse a cero. Para confirmar esto, observe de la ecuación 8 que

$$a_n = \frac{1}{n} \left(\frac{2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n}{n \cdot n \cdot \cdots \cdot n} \right)$$

Observe que la expresión entre paréntesis es a lo más 1 porque el numerador es menor que (o igual) al denominador. Así que

$$0 < a_n \leqslant \frac{1}{n}$$

Sabemos que $1/n \to 0$ cuando $n \to \infty$, así que $a_n \to 0$ cuando $n \to \infty$ por el teorema de la compresión.

V EJEMPLO 11 ¿Para qué valores de r es convergente la sucesión $\{r^n\}$?

SOLUCIÓN Sabemos, por la sección 2.6 y las gráficas de las funciones exponenciales de la sección 1.5, que $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$ para $a > 1$ y $\lim_{x\to\infty} a^x = 0$ para $0 < a < 1$. Por tanto, si hacemos $a = r$ y usamos el teorema 3 tenemos

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} \infty & \text{si } r > 1 \\ 0 & \text{si } 0 < r < 1 \end{cases}$$

Es obvio que

$$\lim_{n\to\infty} 1^n = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} 0^n = 0$$

Si $-1 < r < 0$, entonces $0 < |r| < 1$, de modo que

$$\lim_{n\to\infty} |r^n| = \lim_{n\to\infty} |r|^n = 0$$

y, por tanto, $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ de acuerdo con el teorema 6. Si $r \leqslant -1$, entonces $\{r^n\}$ diverge como en el ejemplo 7. En la figura 11 se ilustran las gráficas de varios valores de r. (El caso de $r = -1$ se muestra en la figura 8.)

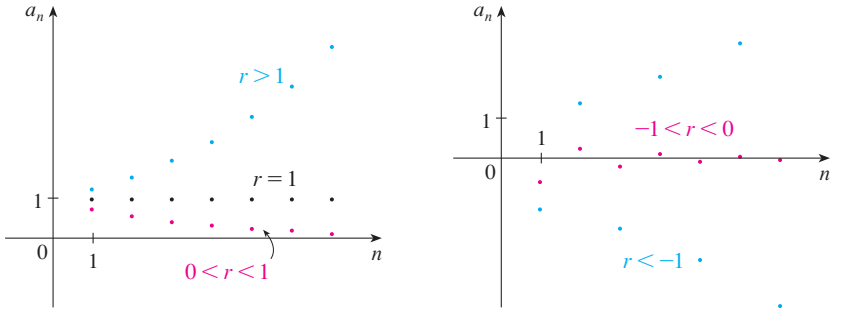


FIGURA 11
La sucesión $a_n = r^n$

Los resultados del ejemplo 11 se resumen para uso futuro como sigue:

9 La sucesión $\{r^n\}$ es convergente si $-1 < r \leqslant 1$ y divergente para todos los otros valores de r.

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < r < 1 \\ 1 & \text{si } r = 1 \end{cases}$$

10 Definición Una sucesión $\{a_n\}$ se llama **creciente** si $a_n < a_{n+1}$, para toda $n \geqslant 1$, es decir, $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$. Si $a_n > a_{n+1}$ para toda $n \geqslant 1$ se denomina **decreciente**. Una sucesión es **monótona** si es creciente o decreciente.

EJEMPLO 12 La sucesión $\left\{\dfrac{3}{n+5}\right\}$ es decreciente porque

$$\frac{3}{n+5} > \frac{3}{(n+1)+5} = \frac{3}{n+6}$$

El lado derecho es menor porque tiene un denominador mayor.

y, por tanto, $a_n > a_{n+1}$, para toda $n \geq 1$.

EJEMPLO 13 Demuestre que la sucesión $a_n = \dfrac{n}{n^2+1}$ es decreciente.

SOLUCIÓN 1 Debemos demostrar que $a_{n+1} < a_n$, es decir,

$$\frac{n+1}{(n+1)^2+1} < \frac{n}{n^2+1}$$

Esta desigualdad es equivalente a la obtenida por multiplicación cruzada:

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{(n+1)^2+1} < \frac{n}{n^2+1} &\iff (n+1)(n^2+1) < n[(n+1)^2+1] \\ &\iff n^3+n^2+n+1 < n^3+2n^2+2n \\ &\iff 1 < n^2+n \end{aligned}$$

Puesto que $n \geq 1$, sabemos que la desigualdad $n^2 + n > 1$ es verdadera. Por tanto, $a_{n+1} < a_n$ y también que $\{a_n\}$ es decreciente.

SOLUCIÓN 2 Considere la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$:

$$f'(x) = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} < 0 \qquad \text{siempre que } x^2 > 1$$

En estos términos, f es decreciente sobre $(1, \infty)$ así que $f(n) > f(n+1)$, por tanto $\{a_n\}$ es decreciente.

11 Definición Una sucesión $\{a_n\}$ está **acotada por arriba** si existe un número M tal que

$$a_n \leq M \qquad \text{para toda } n \geq 1$$

Está **acotada por abajo** si existe un número m tal que

$$m \leq a_n \qquad \text{para toda } n \geq 1$$

Si está acotada por arriba y por abajo, entonces $\{a_n\}$ es una **sucesión acotada**.

Por ejemplo, la sucesión $a_n = n$ está acotada por abajo ($a_n > 0$), pero no por arriba. La sucesión $a_n = n/(n+1)$ está acotada porque $0 < a_n < 1$ para toda n.

Sabemos que no toda sucesión acotada es convergente [por ejemplo, la sucesión $a_n = (-1)^n$ satisface $-1 \leq a_n \leq 1$, pero es divergente del ejemplo 7] y no toda

sucesión monótona es convergente ($a_n = n \to \infty$). Pero si una sucesión es tanto acotada *como* monótona, entonces tiene que ser convergente. Este hecho se demuestra en la forma del teorema 12, pero intuitivamente se entiende por qué es cierto viendo la figura 12. Si $\{a_n\}$ es creciente y $a_n \leq M$ para toda n, entonces los términos están forzados a juntarse y aproximarse a un número L.

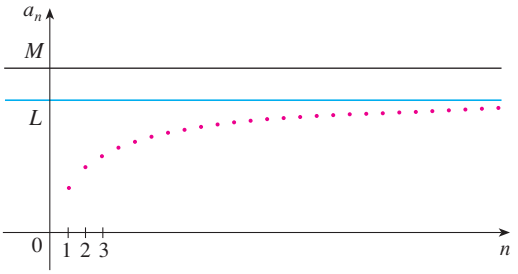


FIGURA 12

La demostración del teorema 12 se apoya en el **axioma de completez** para el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, que dice que si S es un conjunto no vacío de números reales que tiene una cota superior M ($x \leq M$ para toda x en S), entonces S tiene una **mínima cota superior** b. (Esto significa que b es una cota superior para S, pero si M es cualquier otra cota superior, entonces $b \leq M$.) El axioma de completez expresa el hecho de que la recta de los números reales no tiene brechas o agujeros.

12 Teorema de la sucesión monótona Toda sucesión acotada y monótona es convergente.

DEMOSTRACIÓN Suponga que $\{a_n\}$ es una sucesión creciente. Puesto que $\{a_n\}$ está acotada, el conjunto $S = \{a_n | n \geq 1\}$ posee una cota superior. De acuerdo con el axioma de completez, tiene una mínima cota superior L. Dado $\varepsilon > 0$, $L - \varepsilon$ *no* es una cota superior para S (puesto que L es la *mínima* cota superior). Por tanto,

$$a_N > L - \varepsilon \qquad \text{para algún entero } N$$

Pero la sucesión es creciente de modo que $a_n \geq a_N$ para toda $n > N$. En estos términos, si $n > N$

$$a_n > L - \varepsilon$$

de manera que

$$0 \leq L - a_n < \varepsilon$$

puesto que $a_n \leq L$. Así que,

$$|L - a_n| < \varepsilon \qquad \text{siempre que } n > N$$

así que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

Una demostración similar (aplicando la máxima cota inferior) funciona si $\{a_n\}$ es decreciente.

La demostración del teorema 12 demuestra que una sucesión que es creciente y acotada por arriba es convergente. (De igual manera, una sucesión decreciente que está acotada por abajo es convergente.) Este hecho se aplica muchas veces al trabajar con series infinitas.

EJEMPLO 14 Investigue la sucesión $\{a_n\}$ definida por la *relación recursiva*

$$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \tfrac{1}{2}(a_n + 6) \qquad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

SOLUCIÓN Para empezar se calculan los primeros términos:

$$a_1 = 2 \qquad a_2 = \tfrac{1}{2}(2 + 6) = 4 \qquad a_3 = \tfrac{1}{2}(4 + 6) = 5$$

$$a_4 = \tfrac{1}{2}(5 + 6) = 5.5 \qquad a_5 = 5.75 \qquad a_6 = 5.875$$

$$a_7 = 5.9375 \qquad a_8 = 5.96875 \qquad a_9 = 5.984375$$

Con frecuencia, la inducción matemática se aplica cuando se trabaja con sucesiones recursivas. Véase página 76 donde se encuentra un análisis del principio de inducción matemática.

Estos términos iniciales hacen pensar que la sucesión es creciente y que los términos se aproximan a 6. Para confirmar que la sucesión es creciente, utilizamos inducción matemática para demostrar que $a_{n+1} > a_n$ para toda $n \geqslant 1$. Esto es cierto para $n = 1$ porque $a_2 = 4 > a_1$. Si suponemos que se cumple para $n = k$, entonces tenemos

$$a_{k+1} > a_k$$

de modo que $$a_{k+1} + 6 > a_k + 6$$

y $$\tfrac{1}{2}(a_{k+1} + 6) > \tfrac{1}{2}(a_k + 6)$$

Por esto $$a_{k+2} > a_{k+1}$$

Ya se dedujo que $a_{n+1} > a_n$ es cierta para $n = k + 1$. Por tanto, la desigualdad se cumple para toda n por inducción.

Luego de verificar que $\{a_n\}$ está acotada demostrando que $a_n < 6$ para toda n. (Puesto que la sucesión es creciente, sabemos que tiene una cota inferior: $a_n \geqslant a_1 = 2$ para toda n.) Sabemos que $a_1 < 6$, de modo que la aseveración es cierta para $n = 1$. Supongamos que se cumple para $n = k$. Entonces

$$a_k < 6$$

de este modo $$a_k + 6 < 12$$

y $$\tfrac{1}{2}(a_k + 6) < \tfrac{1}{2}(12) = 6$$

Así que $$a_{k+1} < 6$$

Esto demuestra, por inducción matemática, que $a_n < 6$ para toda n.

Como la sucesión $\{a_n\}$ es creciente y acotada, el teorema 12 garantiza que tiene un límite. El teorema no dice cuál es el valor del límite, pero ahora que sabemos que $L = \lim_{n\to\infty} a_n$ existe, podemos aplicar la relación recursiva para escribir

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{2}(a_n + 6) = \tfrac{1}{2}\Big(\lim_{n\to\infty} a_n + 6\Big) = \tfrac{1}{2}(L + 6)$$

En el ejercicio 70 se pide una demostración de este hecho.

Como $a_n \to L$, se infiere igualmente que $a_{n+1} \to L$ (también cuando $n \to \infty$, $n + 1 \to \infty$). De este modo tenemos

$$L = \tfrac{1}{2}(L + 6)$$

Al resolver esta ecuación para L, determinamos que $L = 6$, tal como se había predicho.

11.1 Ejercicios

1. a) ¿Qué es una sucesión?
b) ¿Qué significa decir que $\lim_{n\to\infty} a_n = 8$?
c) ¿Qué significa decir que $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$?

2. a) ¿Qué es una sucesión convergente? Dé dos ejemplos.
b) ¿Qué es una sucesión divergente? Dé dos ejemplos.

3-12 Liste los primeros cinco términos de la sucesión.

3. $a_n = \dfrac{2n}{n^2 + 1}$

4. $a_n = \dfrac{3^n}{1 + 2^n}$

5. $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{5^n}$

6. $a_n = \cos\dfrac{n\pi}{2}$

7. $a_n = \dfrac{1}{(n+1)!}$

8. $a_n = \dfrac{(-1)^n n}{n! + 1}$

9. $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 5a_n - 3$

10. $a_1 = 6, \quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n}$

11. $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1 + a_n}$

12. $a_1 = 2, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+1} = a_n - a_{n-1}$

13-18 Encuentre una fórmula para el término general a_n de la sucesión, suponiendo que se mantenga el patrón de los primeros términos.

13. $\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \ldots\}$

14. $\{1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots\}$

15. $\{-3, 2, -\frac{4}{3}, \frac{8}{9}, -\frac{16}{27}, \ldots\}$

16. $\{5, 8, 11, 14, 17, \ldots\}$

17. $\{\frac{1}{2}, -\frac{4}{3}, \frac{9}{4}, -\frac{16}{5}, \frac{25}{6}, \ldots\}$

18. $\{1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \ldots\}$

19-22. Calcule, con una aproximación de cuatro decimales, los primeros diez términos de la sucesión y úselos para graficar a mano la sucesión. ¿Parece tener límite la sucesión? Si es así, calcúlelo. Si no, explique por qué.

19. $a_n = \dfrac{3n}{1 + 6n}$

20. $a_n = 2 + \dfrac{(-1)^n}{n}$

21. $a_n = 1 + (-\frac{1}{2})^n$

22. $a_n = 1 + \dfrac{10^n}{9^n}$

23-56 Determine si la sucesión converge o diverge. Si converge, encuentre el límite.

23. $a_n = 1 - (0.2)^n$

24. $a_n = \dfrac{n^3}{n^3 + 1}$

25. $a_n = \dfrac{3 + 5n^2}{n + n^2}$

26. $a_n = \dfrac{n^3}{n + 1}$

27. $a_n = e^{1/n}$

28. $a_n = \dfrac{3^{n+2}}{5^n}$

29. $a_n = \tan\left(\dfrac{2n\pi}{1 + 8n}\right)$

30. $a_n = \sqrt{\dfrac{n+1}{9n+1}}$

31. $a_n = \dfrac{n^2}{\sqrt{n^3 + 4n}}$

32. $a_n = e^{2n/(n+2)}$

33. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}$

34. $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1} n}{n + \sqrt{n}}$

35. $a_n = \cos(n/2)$

36. $a_n = \cos(2/n)$

37. $\left\{\dfrac{(2n-1)!}{(2n+1)!}\right\}$

38. $\left\{\dfrac{\ln n}{\ln 2n}\right\}$

39. $\left\{\dfrac{e^n + e^{-n}}{e^{2n} - 1}\right\}$

40. $a_n = \dfrac{\tan^{-1} n}{n}$

41. $\{n^2 e^{-n}\}$

42. $a_n = \ln(n+1) - \ln n$

43. $a_n = \dfrac{\cos^2 n}{2^n}$

44. $a_n = \sqrt[n]{2^{1+3n}}$

45. $a_n = n \operatorname{sen}(1/n)$

46. $a_n = 2^{-n} \cos n\pi$

47. $a_n = \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^n$

48. $a_n = \dfrac{\operatorname{sen} 2n}{1 + \sqrt{n}}$

49. $a_n = \ln(2n^2 + 1) - \ln(n^2 + 1)$

50. $a_n = \dfrac{(\ln n)^2}{n}$

51. $a_n = \arctan(\ln n)$

52. $a_n = n - \sqrt{n+1}\sqrt{n+3}$

53. $\{0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, \ldots\}$

54. $\{\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots\}$

55. $a_n = \dfrac{n!}{2^n}$

56. $a_n = \dfrac{(-3)^n}{n!}$

57–63 Con la ayuda de una gráfica de la sucesión, establezca si ésta es convergente o divergente. Si la sucesión es convergente, conjeture el valor del límite a partir de la gráfica y luego demuestre su conjetura. (Vea la nota al margen de la página 695 relacionada con la advertencia sobre las gráficas de sucesiones.)

57. $a_n = 1 + (-2/e)^n$

58. $a_n = \sqrt{n}\,\operatorname{sen}(\pi/\sqrt{n})$

59. $a_n = \sqrt{\dfrac{3 + 2n^2}{8n^2 + n}}$

60. $a_n = \sqrt[n]{3^n + 5^n}$

61. $a_n = \dfrac{n^2 \cos n}{1 + n^2}$

62. $a_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n - 1)}{n!}$

63. $a_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n - 1)}{(2n)^n}$

64. a) Determine si la sucesión definida como sigue es convergente o divergente:

$$a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = 4 - a_n \qquad \text{para } n \geqslant 1$$

b) ¿Qué ocurre si el primer término es $a_1 = 2$?

65. Si se invierten 1000 dólares a 6% de interés compuesto anualmente, entonces n años después la inversión tiene un valor de $a_n = 1000(1.06)^n$ dólares.
a) Determine los primeros cinco términos de la sucesión $\{a_n\}$.
b) ¿La sucesión es convergente o divergente? Explique.

66. Si se depositan 100 dólares al final de cada mes en una cuenta que paga 3% de interés al año capitalizado mensualmente, la cantidad de interés acumulado después de n meses está dada por la sucesión

$$I_n = 100\left(\frac{1.0025^n - 1}{0.0025} - n\right)$$

a) Encuentre los primeros seis términos de la sucesión.
b) ¿Cuánto interés habrá obtenido después de dos años?

67. En una granja piscícola se tienen 5 000 bagres en su estanque de crías. El número de bagres aumenta en 8% al mes y el productor cosecha 300 bagres al mes.
a) Demuestre que la población P_n de bagres después de n meses está dada periódicamente por

$$P_n = 1.08P_{n-1} - 300 \qquad P_0 = 5000$$

b) ¿Cuántos bagres hay en el estanque después de seis meses?

68. Determine los primeros 40 términos de la sucesión definida por

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n & \text{si } a_n \text{ es un número par} \\ 3a_n + 1 & \text{si } a_n \text{ es un número impar} \end{cases}$$

y $a_1 = 11$. Haga lo mismo si $a_1 = 25$. Conjeture respecto al tipo de sucesión.

69. ¿Para qué valores de r converge la sucesión $\{nr^n\}$?

70. a) Si $\{a_n\}$ es convergente, demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n$$

b) Una sucesión $\{a_n\}$ se define por $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = 1/(1 + a_n)$ para $n \geqslant 1$. Si suponemos que $\{a_n\}$ es convergente, calcule su límite.

71. Suponga que sabemos que $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente y que todos sus términos están entre los números 5 y 8. Explique por qué la sucesión tiene un límite. ¿Qué puede decir respecto al valor del límite?

72–78 Determine si la sucesión es creciente, decreciente o es no monótona. ¿Está acotada la sucesión?

72. $a_n = (-2)^{n+1}$

73. $a_n = \dfrac{1}{2n + 3}$

74. $a_n = \dfrac{2n - 3}{3n + 4}$

75. $a_n = n(-1)^n$

76. $a_n = ne^{-n}$

77. $a_n = \dfrac{n}{n^2 + 1}$

78. $a_n = n + \dfrac{1}{n}$

79. Encuentre el límite de la sucesión

$$\left\{\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots\right\}$$

80. Una sucesión $\{a_n\}$ está dada por $a_1 = \sqrt{2}$ $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$.
a) Mediante inducción u otro método, demuestre que $\{a_n\}$ es creciente y que su cota superior es 3. Aplique el teorema de sucesión monótona para demostrar que $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe.
b) Determine $\lim_{n\to\infty} a_n$.

81. Demuestre que la sucesión definida por

$$a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n}$$

es creciente y $a_n < 3$ para toda n. Deduzca que $\{a_n\}$ es convergente y encuentre su límite.

82. Demuestre que la sucesión definida por

$$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \frac{1}{3 - a_n}$$

satisface $0 < a_n \leqslant 2$ y es decreciente. Deduzca que la sucesión es convergente y encuentre su límite.

83. a) Fibonacci planteó el problema siguiente: Suponga que los conejos viven toda la vida, que cada mes todas las parejas tienen un nuevo par de conejitos, los cuales empiezan a ser productivos a la edad de dos meses. Si empieza con una pareja de recién nacidos, ¿cuántas parejas de conejos tendrá en el n-ésimo mes? Demuestre que la respuesta es f_n, donde $\{f_n\}$ es la sucesión de Fibonacci que se define en el ejemplo 3c).

b) Sea $a_n = f_{n+1}/f_n$ demuestre que $a_{n-1} = 1 + 1/a_{n-2}$. Suponiendo que $\{a_n\}$ es convergente, determine su límite.

84. a) Sea $a_1 = a$, $a_2 = f(a)$, $a_3 = f(a_2) = f(f(a))$,..., $a_{n+1} = f(a_n)$, donde f es una función continua. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, demuestre que $f(L) = L$.

b) Ilustre el inciso a) haciendo $f(x) = \cos x$, $a = 1$, y estimando el valor de L con una aproximación de cinco cifras decimales.

85. a) Mediante una gráfica, deduzca el valor del límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^5}{n!}$$

b) Con una gráfica de la sucesión del inciso a) calcule los valores más pequeños de N que corresponden a $\varepsilon = 0.1$ y $\varepsilon = 0.001$ en la definición 2.

86. Aplique directamente la definición 2 para demostrar que $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ cuando $|r| < 1$.

87. Demuestre el teorema 6.

[*Sugerencia*: utilice la definición 2 o el teorema de la compresión.]

88. Demuestre el teorema 7.

89. Demuestre que si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y $\{b_n\}$ es acotada, entonces $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = 0$.

90. Sea $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

a) Demuestre que si $0 \leqslant a < b$, entonces

$$\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b - a} < (n + 1)b^n$$

b) Deduzca que $b^n[(n + 1)a - nb] < a^{n+1}$.

c) Utilice $a = 1 + 1/(n + 1)$ y $b = 1 + 1/n$ del inciso b) para demostrar que $\{a_n\}$ es creciente.

d) Use $a = 1$ y $b = 1 + 1/(2n)$ en el inciso b) para demostrar que $a_{2n} < 4$.

e) Mediante los incisos c) y d) demuestre que $a_n < 4$ para toda n.

f) Utilice el teorema 12 para demostrar que $\lim_{n\to\infty} (1 + 1/n)^n$ existe. (El límite es e. Véase la ecuación 3.6.6.)

91. Sean a y b números positivos con $a > b$. Sea a_1 la media aritmética y b_1 la media geométrica:

$$a_1 = \frac{a + b}{2} \qquad b_1 = \sqrt{ab}$$

Repita el proceso de modo que, en general

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

a) Mediante la inducción matemática demuestre que

$$a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n$$

b) Deduzca que tanto $\{a_n\}$ como $\{b_n\}$ son convergentes.

c) Demuestre que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$. Gauss llamó al valor común de estos límites la **media aritmética-geométrica** de los números a y b.

92. a) Demuestre que si $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = L$ y $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = L$, entonces $\{a_n\}$ es convergente y $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

b) Si $a_1 = 1$ y

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + a_n}$$

calcule los primeros ocho términos de la sucesión $\{a_n\}$. Luego use el inciso a) para demostrar que $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$. Esto da el **desarrollo en fracción continua**

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}$$

93. El tamaño de una población inalterada de peces se ha modelado mediante la fórmula

$$p_{n+1} = \frac{bp_n}{a + p_n}$$

donde p_n es la población de peces después de n años, y a y b son constantes positivas que dependen de las especies y su medio ambiente. Suponga que la población en el año 0 es $p_0 > 0$.

a) Demuestre que si $\{p_n\}$ es convergente, entonces los únicos valores posibles de este límite son 0 y $b - a$.

b) Demuestre que $p_{n+1} < (b/a)p_n$.

c) Mediante el inciso b) demuestre que si $a > b$, entonces $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$; en otras palabras, la población muere.

d) Ahora suponga que $a < b$. Demuestre que si $p_0 < b - a$, entonces $\{p_n\}$ es creciente y $0 < p_n < b - a$. Demuestre que si $p_0 > b - a$, entonces $\{p_n\}$ es decreciente y $p_n > b - a$. Deduzca que si $a < b$, entonces $\lim_{n\to\infty} p_n = b - a$.

PROYECTO DE LABORATORIO SAC SUCESIONES LOGÍSTICAS

Una sucesión que surge en ecología como un modelo para el crecimiento poblacional se define por medio de la **ecuación logística en diferencias**

$$p_{n+1} = kp_n(1 - p_n)$$

donde p_n mide el tamaño de la población de la n-ésima generación de una sola especie. Para mantener manejables los números, p_n es una fracción del tamaño máximo de la población, de modo que $0 \leq p_n \leq 1$. Observe que la forma de la ecuación es similar a la ecuación diferencial logística de la sección 9.4. El modelo discreto, con sucesiones en lugar de funciones continuas, es preferible para modelar las poblaciones de insectos, donde el apareamiento y la muerte ocurren de un modo periódico.

Un ecologista se interesa en predecir el tamaño de la población a medida que el tiempo avanza, y plantea estas preguntas: ¿se estabilizará en un valor límite?, ¿cambiará de manera cíclica?, o bien, ¿mostrará un comportamiento aleatorio?

Escriba un programa para calcular los n primeros términos de esta sucesión con una población inicial p_0, donde $0 < p_0 < 1$. Con este programa efectúe lo siguiente:

1. Calcule 20 o 30 términos de la sucesión para $p_0 = \frac{1}{2}$ y para dos valores de k tales que $1 < k < 3$. Grafique cada sucesión. ¿Parecen converger? Repita para un valor distinto de p_0 entre 0 y 1. ¿El límite depende del valor elegido de p_0? ¿Depende del valor elegido de k?
2. Calcule términos de la sucesión para un valor de k entre 3 y 3.4 y dibújelos. ¿Qué observa con respecto al comportamiento de los términos?
3. Experimente con valores de k entre 3.4 y 3.5. ¿Qué sucede con los términos?
4. Para valores de k entre 3.6 y 4, calcule y dibuje por lo menos 100 términos y comente el comportamiento de la sucesión. ¿Qué sucede si cambia p_0 por 0.001? Este tipo de comportamiento se llama *caótico* y lo muestran poblaciones de insectos bajo ciertas condiciones.

SAC Se requiere sistema algebraico computarizado

11.2 Series

¿A qué nos referimos cuando expresamos un número como decimal infinito? Por ejemplo, qué significa escribir

$$\pi = 3.14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288\ \ldots$$

El actual récord de π ha sido calculado con 2 576 980 370 000 decimales (más de dos trillones) de lugares decimales por T. Daisuke y su equipo.

La convención que hay detrás de nuestra notación decimal es que cualquier número se puede escribir como una suma infinita. Aquí, el significado es que

$$\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \frac{9}{10^5} + \frac{2}{10^6} + \frac{6}{10^7} + \frac{5}{10^8} + \cdots$$

donde los puntos suspensivos (…) indican que la suma continúa por siempre y que cuantos más términos agreguemos, estaremos más cerca del valor verdadero de π.

En general, si tratamos de sumar los términos de una sucesión infinita $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, obtenemos una expresión de la forma

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \quad \boxed{1}$$

que se denomina **serie infinita** (o sólo **serie**) y se denota con el símbolo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{o} \qquad \sum a_n$$

Pero, ¿tiene sentido hablar de suma de un infinito de términos?

Sería imposible encontrar la suma finita de la serie

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + n + \cdots$$

porque si empezamos a sumar los términos, obtenemos sumas acumulativas 1, 3, 6, 10, 15, 21, . . . y después del n-ésimo término, llegamos a $n(n + 1)/2$, lo cual resulta muy grande cuando n se incrementa.

n	Suma de los primeros n términos
1	0.50000000
2	0.75000000
3	0.87500000
4	0.93750000
5	0.96875000
6	0.98437500
7	0.99218750
10	0.99902344
15	0.99996948
20	0.99999905
25	0.99999997

Sin embargo, si empezamos por sumar los términos de la serie

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

obtenemos $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \frac{31}{32}, \frac{63}{64}, \ldots, 1 - 1/2^n, \ldots$ En la tabla se puede ver que cuando se suman más y más términos, estas *sumas parciales* se vuelven más y más cercanas a 1. (Véase también la figura 11 en un *Previo al cálculo* en la página 6.) De hecho, al sumar suficientes términos de la serie es posible hacer que las sumas parciales sean tan cercanas a 1 como se quiera. Así que es razonable decir que la suma de esta serie infinita es igual a 1 y escribir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1$$

Usaremos una idea similar para determinar si una serie general $\boxed{1}$ tiene o no tiene suma. Consideremos las **sumas parciales**

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

y, en general,

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Estas sumas parciales forman una nueva sucesión $\{s_n\}$, la cual puede tener o no tener un límite. Si $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ existe (como un número finito), entonces, como en el ejemplo anterior, se llama suma de la serie infinita $\Sigma\, a_n$.

2 Definición Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$, sea s_n la n-ésima suma parcial:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Si la sucesión $\{s_n\}$ es convergente y $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ existe como un número real, entonces la serie $\sum a_n$ se dice **convergente** y se escribe

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = s \qquad \text{o} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

El número s se llama **suma** de la serie. Si la sucesión $\{s_n\}$ es divergente, entonces la serie es **divergente**.

Así, la suma de una serie es el límite de la sucesión de sumas parciales. Así, cuando escribimos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$, queremos decir que al sumar suficientes términos de la serie podemos llegar tan cerca como queramos al número s. Observe que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Compare con la integral impropia

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} f(x)\,dx$$

Para determinar esa integral se integra desde 1 hasta t y después se hace que $t \to \infty$. En el caso de series, se suma desde 1 hasta n y después se hace que $n \to \infty$.

EJEMPLO 1 Supongamos que sabemos que la suma de los primeros n términos de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{2n}{3n + 5}$$

Entonces la suma de la serie es el límite de la sucesión $\{s_n\}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3n + 5} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3 + \frac{5}{n}} = \frac{2}{3}$$

En el ejemplo 1 estamos *dando* una expresión para la suma de los primeros n términos, pero usualmente no es fácil *encontrar* tal expresión. Sin embargo, en el ejemplo 2, nos topamos con una famosa serie para la cual podemos encontrar una fórmula explícita para s_n.

EJEMPLO 2 Un importante ejemplo de una serie infinita es la **serie geométrica**

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \qquad a \neq 0$$

Cada término se obtiene a partir del término precedente multiplicándolo por la **razón común** r. (Ya hemos considerado el caso especial cuando $a = \frac{1}{2}$ y $r = \frac{1}{2}$ de la página 704.)

Si $r = 1$, entonces $s_n = a + a + \cdots + a = na \to \pm\infty$. Puesto que $\lim_{n\to\infty} s_n$ no existe, la serie geométrica diverge en este caso.

Si $r \neq 1$, tenemos

$$s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$

y

$$rs_n = \quad ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n$$

La figura 1 proporciona una demostración geométrica del resultado del ejemplo 2. Si los triángulos se construyen como se indica y s es la suma de la serie, entonces, por triángulos semejantes

$$\frac{s}{a} = \frac{a}{a - ar} \quad \text{por lo que} \quad s = \frac{a}{1 - r}$$

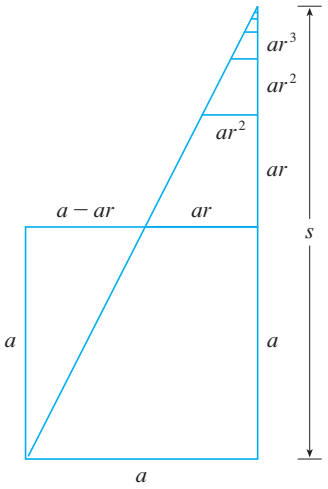


FIGURA 1

En palabras: la suma de una serie geométrica convergente es

$$\frac{\text{primer término}}{1 - \text{razón común}}$$

Al restar estas ecuaciones obtenemos

$$s_n - rs_n = a - ar^n$$

$$s_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \qquad \boxed{3}$$

Si $-1 < r < 1$, sabemos de (11.1.9) que $r_n \to 0$ cuando $n \to \infty$, así que

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{a}{1 - r} - \frac{a}{1 - r} \lim_{n\to\infty} r^n = \frac{a}{1 - r}$$

Así, cuando $|r| < 1$, la serie geométrica es convergente y su suma es $a/(1 - r)$.

Si $r \leq -1$ o bien, $r > 1$, la sucesión $\{r^n\}$ es divergente de acuerdo con (11.1.9) y de ese modo, según la ecuación 3, $\lim_{n\to\infty} s_n$ no existe. Por tanto, la serie geométrica diverge en esos casos.

Los resultados del ejemplo 2 se resumen como:

4 La serie geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots$$

es convergente si $|r| < 1$ y su suma es

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1 - r} \qquad |r| < 1$$

Si $|r| \geq 1$, la serie geométrica es divergente.

V EJEMPLO 3 Calcule la suma de la serie geométrica

$$5 - \tfrac{10}{3} + \tfrac{20}{9} - \tfrac{40}{27} + \cdots$$

SOLUCIÓN El primer término es $a = 5$ y la razón común es $r = -\frac{2}{3}$. Como $|r| = \frac{2}{3} < 1$, la serie es convergente por 4 y su suma es

$$5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + \cdots = \frac{5}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{5}{\frac{5}{3}} = 3$$

¿Qué se quiere realmente decir cuando afirmamos que la suma de la serie del ejemplo 3 es 3? Naturalmente, no podemos sumar un infinito de términos uno más uno. Pero, de acuerdo con la definición 2, la suma total es el límite de la sucesión de sumas parciales. De este modo, al efectuar la suma de suficientes términos, nos acercamos tanto como queramos al número 3. La tabla muestra las primeras diez sumas parciales s_n y en la gráfica de la figura 2 se ilustra cómo la sucesión de las sumas parciales se aproxima a 3.

n	s_n
1	5.000000
2	1.666667
3	3.888889
4	2.407407
5	3.395062
6	2.736626
7	3.175583
8	2.882945
9	3.078037
10	2.947975

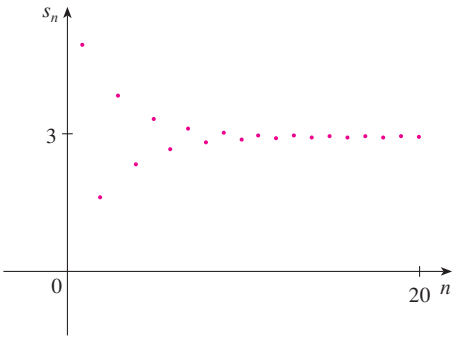


FIGURA 2

EJEMPLO 4 La serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n}3^{1-n}$, ¿es convergente o divergente?

SOLUCIÓN Escribamos el n-ésimo término de la serie en la forma ar^{n-1}:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n}3^{1-n} = \sum_{n=1}^{\infty} (2^2)^n 3^{-(n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} 4\left(\tfrac{4}{3}\right)^{n-1}$$

Otra manera de identificar a y r es escribir los primeros términos.

$$4 + \tfrac{16}{3} + \tfrac{64}{9} + \cdots$$

Identificamos esta serie como una serie geométrica con $a = 4$ y $r = \frac{4}{3}$. Como $r > 1$, la serie diverge, de acuerdo con 4.

V EJEMPLO 5 Escribimos el número $2.3\overline{17} = 2.3171717$ como una razón de enteros

SOLUCIÓN

$$2.3171717\ldots = 2.3 + \frac{17}{10^3} + \frac{17}{10^5} + \frac{17}{10^7} + \cdots$$

Después del primer término tenemos una serie geométrica con $a = 17/10^3$ y $r = 1/10^2$. Debido a esto,

$$2.3\overline{17} = 2.3 + \frac{\frac{17}{10^3}}{1 - \frac{1}{10^2}} = 2.3 + \frac{\frac{17}{1000}}{\frac{99}{100}}$$

$$= \frac{23}{10} + \frac{17}{990} = \frac{1147}{495}$$

EJEMPLO 6 Encuentre la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, donde $|x| < 1$.

SOLUCIÓN Observe que esta serie inicia con $n = 0$ y por eso el primer término $x^0 = 1$. (En las series, se adopta la convención de que $x^0 = 1$ aun cuando $x = 0$.) De este modo,

TEC En Module 11.2 se explora una serie que depende de un ángulo θ en un triángulo y permite ver qué tan rápido converge la serie cuando varía θ.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

Ésta es una serie geométrica con $a = 1$ y $r = x$. Puesto que $|r| = |x| < 1$, converge, y de acuerdo con 4 se tiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1 - x} \qquad 5$$

EJEMPLO 7 Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ es convergente, y determine su suma.

SOLUCIÓN Ésta no es una serie geométrica, de modo que regresamos a la definición de una serie convergente y calculamos las sumas parciales.

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

Esta expresión se puede simplificar utilizando la descomposición en fracciones parciales

$$\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$$

Observe que los términos se cancelan por pares. Éste es un ejemplo de una **suma telescópica**. Debido a las cancelaciones, la suma se colapsa (tal y como se colapsan los telescopios de los piratas), justamente en dos términos.

(Véase la sección 7.4.) Así tenemos que,

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

y de este modo $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - 0 = 1$

Por tanto, la serie dada es convergente y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

En la figura 3 se ilustra el ejemplo 7 y se muestra la gráfica de la sucesión de términos $a_n = 1/n(n+1)$ y la sucesión $\{s_n\}$ de sumas parciales. Observe que $a_n \to 0$ y $s_n \to 1$. Véanse los ejercicios 76 y 77, en donde se tratan dos interpretaciones geométricas del ejemplo 7.

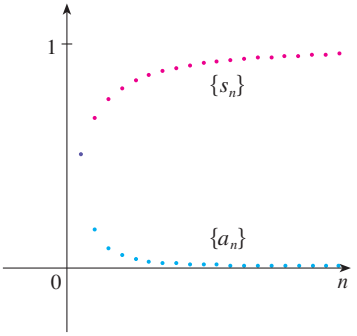


FIGURA 3

V EJEMPLO 8 Demuestre que la **serie armónica**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

es divergente.

SOLUCIÓN Para esta serie particular, es conveniente considerar las sumas parciales s_2, s_4, s_8, s_{16}, s_{32}, ... y demostrar que se hacen muy grandes.

$$\begin{aligned} s_2 &= 1 + \tfrac{1}{2} \\ s_4 &= 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) > 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right) = 1 + \tfrac{2}{2} \\ s_8 &= 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}\right) \\ &> 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8}\right) \\ &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1 + \tfrac{3}{2} \\ s_{16} &= 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{5} + \cdots + \tfrac{1}{8}\right) + \left(\tfrac{1}{9} + \cdots + \tfrac{1}{16}\right) \\ &> 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{8} + \cdots + \tfrac{1}{8}\right) + \left(\tfrac{1}{16} + \cdots + \tfrac{1}{16}\right) \\ &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1 + \tfrac{4}{2} \end{aligned}$$

En forma similar, $s_{32} > 1 + \frac{5}{2}$, $s_{64} > 1 + \frac{6}{2}$, y, en general

$$s_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$$

El método usado en el ejemplo 8 para demostrar que la serie armónica diverge es original del francés Nicole Oresme (1323-1382).

Esto demuestra que $s_{2^n} \to \infty$ cuando $n \to \infty$ y por eso $\{s_n\}$ es divergente. Debido a eso, la serie armónica diverge.

6 Teorema Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

DEMOSTRACIÓN Sea $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Entonces, $a_n = s_n - s_{n-1}$. Puesto que $\Sigma\, a_n$ es convergente, la sucesión $\{s_n\}$ es convergente. Sea $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. Como $n - 1 \to \infty$ cuando $n \to \infty$, también se tiene $\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} \\ &= s - s = 0\end{aligned}$$

NOTA 1 Con cualquier *serie* $\Sigma\, a_n$ se asocian *dos sucesiones:* la sucesión $\{s_n\}$ de sus sumas parciales y la sucesión $\{a_n\}$ de sus términos. Si $\Sigma\, a_n$ es convergente, entonces el límite de la sucesión $\{s_n\}$ es s (la suma de la serie) y, como establece el teorema 6, el límite de la sucesión $\{a_n\}$ es 0.

NOTA 2 En general, el inverso del teorema 6 no se cumple. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, no podemos concluir que $\Sigma\, a_n$ es convergente. Observe que para la serie armónica $\Sigma 1/n$ tenemos $a_n = 1/n \to \infty$ cuando $n \to \infty$, pero ya demostramos en el ejemplo 8 que $\Sigma 1/n$ es divergente.

7 La prueba de la divergencia Si $\lim_{n\to\infty} a_n$ no existe o si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

La prueba de la divergencia se infiere del teorema 6 porque si la serie no es divergente, entonces es convergente y, por tanto, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

EJEMPLO 9 Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{5n^2 + 4}$ es divergente.

SOLUCIÓN

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{5n^2 + 4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5 + 4/n^2} = \frac{1}{5} \neq 0$$

De modo que la serie diverge de acuerdo con la prueba de la divergencia.

NOTA 3 Si encontramos que $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, sabemos que $\Sigma\, a_n$ es divergente. Si tiene que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, *nada* sabemos con respecto a la convergencia o la divergencia de $\Sigma\, a_n$. Recuerde la advertencia de la nota 2: si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, la serie $\Sigma\, a_n$ podría ser convergente o divergente.

8 Teorema Si $\Sigma\, a_n$ y $\Sigma\, b_n$ son series convergentes, entonces también lo son las series $\Sigma\, ca_n$ (donde c es una constante), $\Sigma\, (a_n + b_n)$ y $\Sigma\, (a_n - b_n)$, y

i) $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Estas propiedades de las series convergentes se infieren de las leyes de los límites correspondientes a las sucesiones de la sección 11.1. Por ejemplo, aquí se demuestra la parte ii) del teorema 8:

Sea

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad t_n = \sum_{i=1}^{n} b_i \qquad t = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

La n-ésima suma parcial de la serie $\sum (a_n + b_n)$ es

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)$$

y, usando la ecuación 5.2.10, tenemos

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} u_n &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} b_i \\ &= \lim_{n\to\infty} s_n + \lim_{n\to\infty} t_n = s + t\end{aligned}$$

Por tanto, $\sum (a_n + b_n)$ es convergente y su suma es

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = s + t = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

EJEMPLO 10 Determine la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n} \right)$.

SOLUCIÓN La serie $\sum 1/2^n$ es una serie geométrica con $a = \frac{1}{2}$ y $r = \frac{1}{2}$, de modo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

En el ejemplo 7 encontramos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Así, por el teorema 8, la serie dada es convergente y

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n} \right) &= 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\ &= 3 \cdot 1 + 1 = 4\end{aligned}$$

NOTA 4 Una cantidad finita de términos no afecta la convergencia o divergencia de una serie. Por ejemplo, supongamos que somos capaces de demostrar que la serie

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 1}$$

es convergente. Puesto que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{9} + \frac{3}{28} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 1}$$

se infiere que toda la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n/(n^3 + 1)$ es convergente. Asimismo, si sabemos que la serie $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces toda la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{N} a_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$$

es también convergente.

11.2 Ejercicios

1. a) ¿Cuál es la diferencia entre una sucesión y una serie?
b) ¿Qué es una serie convergente? ¿Qué es una serie divergente?

2. Explique qué significa decir que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5$.

3-4 Calcule la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ cuyas sumas parciales están dadas.

3. $s_n = 2 - 3(0.8)^n$

4. $s_n = \dfrac{n^2 - 1}{4n^2 + 1}$

5-8 Calcule los primeros ocho términos de la sucesión de sumas parciales con una aproximación de cuatro decimales. ¿Las series aparentan que convergen o divergen?

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+\sqrt{n}}$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$

9-14 Encuentre por lo menos 10 sumas parciales de las series. Grafique tanto la sucesión de los términos como la sucesión de las sumas parciales en la misma pantalla. ¿Cómo parece ser la serie, convergente o divergente? Si es convergente, determine la suma. Si es divergente, explique por qué.

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{(-5)^n}$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos n$

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+4}}$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{n+1}}{10^n}$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$

14. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$

15. Sea $a_n = \dfrac{2n}{3n+1}$.
a) Determine si $\{a_n\}$ es convergente.
b) Determine si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

16. a) Explique la diferencia entre

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^{n} a_j$$

b) Explique la diferencia entre

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{n} a_j$$

17-26 Determine si la serie geométrica es convergente o divergente. Si es convergente, calcule la suma.

17. $3 - 4 + \frac{16}{3} - \frac{64}{9} + \cdots$

18. $4 + 3 + \frac{9}{4} + \frac{27}{16} + \cdots$

19. $10 - 2 + 0.4 - 0.08 + \cdots$

20. $2 + 0.5 + 0.125 + 0.03125 + \cdots$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 6(0.9)^{n-1}$

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(-9)^{n-1}}$

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{4^n}$

24. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{2})^n}$

25. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{3^{n+1}}$

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{3^{n-1}}$

27-42 Determine si la serie es convergente o divergente. Si es convergente, encuentre su suma.

27. $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{15} + \cdots$

28. $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{1}{27} + \frac{2}{81} + \frac{1}{243} + \frac{2}{729} + \cdots$

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{3n-1}$

30. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+2)}{(k+3)^2}$

31. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{3^n}$

32. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3^n}{2^n}$

33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{2}$

34. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} [(0.8)^{n-1} - (0.3)^n]$

35. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)$

36. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}$

37. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{3}\right)^k$

38. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (\cos 1)^k$

39. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arctan n$

40. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5^n} + \frac{2}{n}\right)$

41. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e^n} + \frac{1}{n(n+1)}\right)$

42. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^2}$

43-48 Determine si la serie es convergente o divergente al expresar s_n como suma telescópica (como en el ejemplo 7). Si es convergente, encuentre su suma.

43. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}$

44. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n}{n+1}$

45. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+3)}$

46. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos\frac{1}{n^2} - \cos\frac{1}{(n+1)^2}\right)$

47. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{1/n} - e^{1/(n+1)}\right)$

48. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3-n}$

49. Sea $x = 0.99999\ldots$
a) ¿Qué piensa usted, que $x < 1$ o que $x = 1$?
b) Sume una serie geométrica para determinar el valor de x.
c) ¿Cuántas representaciones decimales tiene el 1?
d) ¿Cuáles números tienen más de una representación decimal?

50. Una sucesión de términos está definida por

$$a_1 = 0 \qquad a_n = (5 - n)a_{n-1}$$

Calcule $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

51-56 Exprese el número como una razón de enteros.

51. $0.\overline{8} = 0.8888\ldots$

52. $0.\overline{46} = 0.46464646\ldots$

53. $2.\overline{516} = 2.516516516\ldots$

54. $10.1\overline{35} = 10.135353535\ldots$

55. $1.5\overline{342}$

56. $7.\overline{12345}$

57-63 Calcule los valores de x para los cuales la serie converge. Determine la suma de la serie para dichos valores de x.

57. $\sum_{n=1}^{\infty} (-5)^n x^n$

58. $\sum_{n=1}^{\infty} (x + 2)^n$

59. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x - 2)^n}{3^n}$

60. $\sum_{n=0}^{\infty} (-4)^n (x - 5)^n$

61. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{x^n}$

62. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^n x}{3^n}$

63. $\sum_{n=0}^{\infty} e^{nx}$

64. Hemos visto que una serie armónica es una serie divergente cuyos términos se aproximan a 0. Demuestre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

es otra serie con esta propiedad.

SAC **65-66** Utilice el comando de las fracciones parciales en su sistema algebraico computarizado para encontrar una expresión conveniente para la suma parcial, y luego use esta expresión para encontrar la suma de la serie. Compruebe su respuesta usando directamente el sistema algebraico a la suma de la serie.

65. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + 3n + 1}{(n^2 + n)^3}$

66. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^5 - 5n^3 + 4n}$

67. Si la n-ésima suma parcial de una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es

$$s_n = \frac{n - 1}{n + 1}$$

determine a_n y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

68. Si la n-ésima suma parcial de una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es $s_n = 3 - n2^{-n}$, determine a_n y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

69. Un paciente toma 150 mg de una droga a la misma hora cada día. Justo antes de tomar cada tableta, 5% de la droga permanece en el cuerpo.
a) ¿Qué cantidad de la droga está en el cuerpo después de la tercera tableta? ¿Después de la n-ésima tableta?
b) ¿Qué cantidad de la droga queda en el cuerpo a largo plazo?

70. Después de la inyección de una dosis D de insulina, la concentración de insulina en un sistema del paciente decae exponencialmente, así que puede expresarse como De^{-at}, donde t representa el tiempo en horas y a es una constante positiva.
a) Si la dosis D se inyecta cada T horas, escriba una expresión para la suma de la concentración residual justo antes de la $(n + 1)$-ésima inyección.
b) Determine la concentración límite antes de inyectar.
c) Si la concentración de insulina debe siempre permanecer en, o por encima de un valor crítico C, determine la dosis mínima de D en términos de C, a y T.

71. Cuando el dinero se gasta en bienes y servicios, los que reciben el dinero también gastan un poco de él. Las personas que reciben algo del dinero gastado dos veces, gastarán algo de dicho dinero, y así sucesivamente. Los economistas llaman a esta reacción en cadena *efecto multiplicador.* En un hipotético pueblo aislado, el gobierno local inicia el proceso gastando D dólares. Suponga que cada persona que recibe dinero gasta $100c\%$ y ahorra $100s\%$ del dinero. Los valores c y s se denominan *propensión marginal al consumo* y *propensión marginal al ahorro* y, naturalmente, $c + s = 1$.
a) Sea S_n el total de lo gastado que ha sido generado después de n transacciones. Determine una ecuación para S_n.
b) Demuestre que $\lim_{n\to\infty} S_n = kD$, donde $k = 1/s$. La cantidad k se llama el *multiplicador.* ¿Cuál es el multiplicador si la propensión marginal al consumo es 80%?

Nota: El gobierno federal de Estados Unidos usa este principio para justificar el gasto que muestra déficit. Los bancos utilizan este principio para justificar los préstamos de un gran porcentaje del dinero que reciben como depósito.

72. Una cierta pelota tiene la propiedad de que cada vez que cae desde una altura h sobre una superficie nivelada y dura, rebota hasta una altura rh, donde $0 < r < 1$. Suponga que la pelota cae desde una altura inicial de H metros.
a) Suponiendo que la pelota continúa rebotando de manera indefinida, calcule la distancia total que recorre.
b) Calcule el tiempo total que la pelota viaja. (Use el hecho de que la pelota cae $\frac{1}{2}gt^2$ metros en t segundos.)
c) Suponga que cada vez que la pelota golpea la superficie con velocidad v rebota con velocidad $-kv$, donde $0 < k < 1$. ¿Cuánto tiempo le tomará a la pelota llegar al reposo?

73. Encuentre el valor de c si

$$\sum_{n=2}^{\infty} (1 + c)^{-n} = 2$$

74. Encuentre el valor de c tal que

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{nc} = 10$$

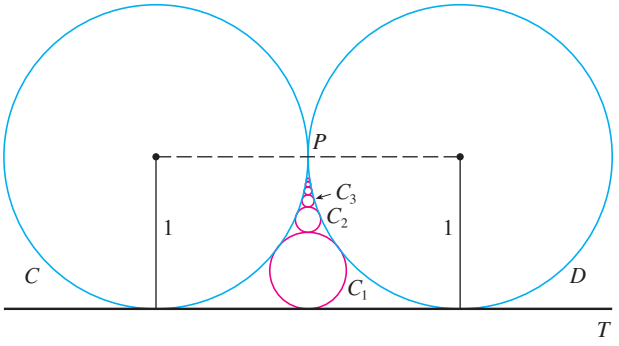
75. En el ejemplo 8 se demostró que la serie armónica es divergente. Aquí se resume otro método, haciendo uso del hecho de que $e^x > 1 + x$ para cualquier $x > 0$. (Véase el ejercicio 4.3.78.)

Si s_n es la n-ésima suma parcial de la serie armónica, demuestre que $e^{s_n} > n + 1$. ¿Por qué esto implica que la serie armónica es divergente?

76. Grafique las curvas $y = x^n$, $0 \leq x \leq 1$, para $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ sobre una misma pantalla. Determinando las áreas entre las curvas sucesivas, de una demostración geométrica del hecho, demostrado en el ejemplo 7, de que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

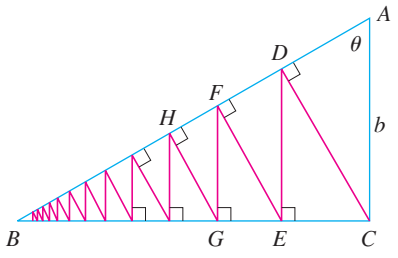
77. En la figura se muestran dos circunferencias C y D de radio 1 que se tocan en P. T es una tangente común; C_1 es la circunferencia que toca C, D y T; C_2 es la circunferencia que toca C, D y C_1; C_3 es la circunferencia que toca C, D y C_2. Este procedimiento puede continuar en forma indefinida y produce una sucesión infinita de circunferencias $\{C_n\}$. Encuentre una expresión para el diámetro de C_n y, de ese modo, proporcione otra demostración geométrica del ejemplo 7.



78. Un triángulo rectángulo ABC está definido con $\angle A = \theta$ y $|AC| = b$. CD se traza perpendicular a AB, DE se traza en forma perpendicular a BC, $EF \perp AB$, y este proceso continúa en forma indefinida como se ilustra en la figura. Determine la longitud total de todas las perpendiculares

$$|CD| + |DE| + |EF| + |FG| + \cdots$$

en términos de b y θ.



79. ¿Qué es lo que está mal en el cálculo siguiente?

$$\begin{aligned} 0 &= 0 + 0 + 0 + \cdots \\ &= (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots \\ &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \\ &= 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots \\ &= 1 + 0 + 0 + 0 + \cdots = 1 \end{aligned}$$

(Guido Ubaldus pensaba que esto demostraba la existencia de Dios, porque "se había creado algo de la nada".)

80. Suponga que sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n \neq 0)$ es una serie convergente. Demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/a_n$ es una serie divergente.

81. Demuestre el inciso i) del teorema 8.

82. Si $\sum a_n$ es divergente y $c \neq 0$, demuestre que $\sum ca_n$ es divergente.

83. Si $\sum a_n$ es convergente y $\sum b_n$ es divergente, demuestre que la serie $\sum (a_n + b_n)$ es divergente. [*Sugerencia:* argumente por contradicción.]

84. Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son divergentes, ¿necesariamente $\sum (a_n + b_n)$ es divergente?

85. Suponga que una serie $\sum a_n$ consta de términos positivos y sus sumas parciales s_n cumplen con la desigualdad $s_n \leq 1000$ para toda n. Explique por qué $\sum a_n$ debe ser convergente.

86. La sucesión de Fibonacci se define en la sección 11.1 mediante las ecuaciones

$$f_1 = 1, \quad f_2 = 1, \quad fn = f_{n-1} + f_{n-2} \quad n \geq 3$$

Demuestre que cada uno de los siguientes enunciados es cierto.

a) $\dfrac{1}{f_{n-1} f_{n+1}} = \dfrac{1}{f_{n-1} f_n} - \dfrac{1}{f_n f_{n+1}}$

b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{f_{n-1} f_{n+1}} = 1$

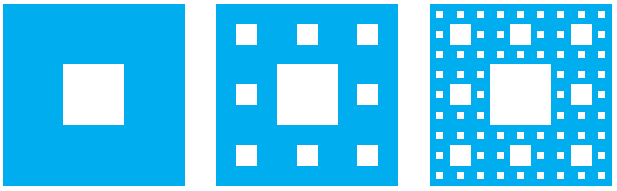
c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{f_n}{f_{n-1} f_{n+1}} = 2$

87. El **conjunto de Cantor**, nombrado así en honor al matemático alemán Georg Cantor (1845-1918), se construye como se señala a continuación. Empiece con el intervalo cerrado [0, 1] y retire el intervalo abierto $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Esto deja los dos intervalos $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ y $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ y luego elimine el intervalo abierto constituido por el tercio medio de cada uno. De este modo quedan cuatro intervalos y de nuevo elimine el tercio medio de cada uno de ellos. Continúe este procedimiento de manera indefinida eliminando en cada paso el tercio medio de cada intervalo que queda del paso anterior. El conjunto de Cantor consiste en los números que quedan en [0, 1] después de que todos esos intervalos se han eliminado.

a) Demuestre que la longitud total de todos los intervalos que se eliminan es 1. A pesar de eso, el conjunto de Cantor contiene un infinito de números. Proporcione ejemplos de algunos números del conjunto de Cantor.

b) El **tapete de Sierpinski** es un equivalente en dos dimensiones del conjunto de Cantor. Se construye eliminando el noveno central de un cuadrado de lado 1, y luego se elimina el centro de cada uno de los ocho

cuadrados restantes, y así sucesivamente. (En la figura se ilustran los primeros tres pasos de la construcción.) Demuestre que la suma de las áreas de los cuadrados eliminados es 1. Esto significa que el área del tapete de Sierpinski es cero.



88. a) Una sucesión $\{a_n\}$ se define recursivamente mediante la ecuación $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2})$ para $n \geqslant 3$, donde a_1 y a_2 son números reales. Experimente con varios valores de a_1 y a_2 y con la ayuda de su calculadora conjeture el límite de la sucesión.

b) Encuentre $\lim_{n\to\infty} a_n$ en términos de a_1 y a_2 expresando $a_{n+1} - a_n$ en función de $a_2 - a_1$ y sume una serie.

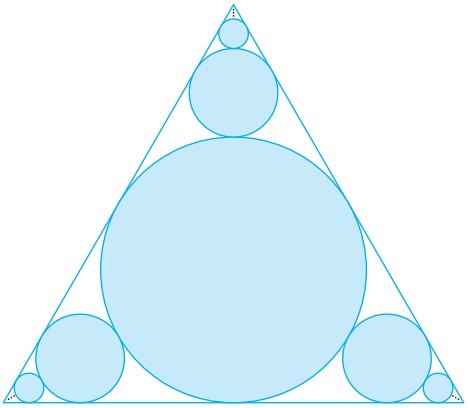
89. Considere la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n/(n+1)!$.

a) Calcule las sumas parciales s_1, s_2, s_3 y s_4. ¿Reconoce los denominadores? Mediante el patrón conjeture una fórmula para s_n.

b) Aplique la inducción matemática para demostrar su conjetura.

c) Demuestre que la serie infinita dada es convergente y calcule su suma.

90. En la figura hay un infinito de círculos que se aproximan a los vértices de un triángulo equilátero. Cada círculo toca otros círculos y los lados del triángulo. Si el triángulo tiene lados que miden una unidad de longitud, calcule el área total que ocupan los círculos.



11.3 La prueba de la integral y estimación de sumas

En general, es difícil determinar la suma exacta de una serie. Podemos lograrlo en el caso de series geométricas y las series $\sum 1/[n(n+1)]$ porque en cada uno de estos casos es posible encontrar una fórmula simple para la n-ésima suma parcial s_n. Pero por lo regular no es fácil descubrir tal fórmula. Por tanto, en las siguientes secciones se tratan varias pruebas que permiten determinar si una serie es convergente o divergente sin que se tenga que encontrar en forma explícita su suma. (En algunos casos, los métodos permiten determinar unas buenas estimaciones de la suma.) El primer método utiliza integrales impropias.

Empecemos por investigar las series cuyos términos son los recíprocos de los cuadrados de los enteros positivos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

n	$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}$
5	1.4636
10	1.5498
50	1.6251
100	1.6350
500	1.6429
1000	1.6439
5000	1.6447

No hay una fórmula sencilla para la suma s_n de los primeros n términos, pero la tabla generada mediante una computadora de los valores, dados en el margen, sugiere que las sumas parciales se aproximan a un número cercano a 1.64 cuando $n \to \infty$ y de este modo parece como si la serie fuera convergente.

Podemos confirmar esta impresión con un razonamiento geométrico. En la figura 1 se ilustra la curva $y = 1/x^2$ y algunos rectángulos que se encuentran abajo de la curva. La base de cada uno de los rectángulos es un intervalo de longitud igual a 1; la altura es igual al valor de la función $y = 1/x^2$ en el extremo derecho del intervalo.

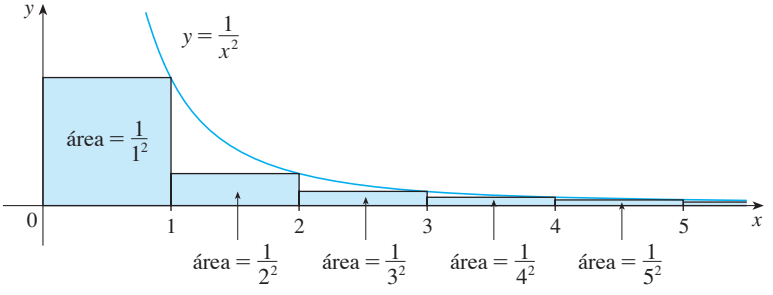


FIGURA 1

De este modo, la suma de las áreas de los rectángulos es

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

Si excluimos el primer rectángulo, el área total de los rectángulos restantes es menor que el área bajo la curva $y = 1/x^2$ para $x \geq 1$, que es el valor de la integral $\int_1^{\infty}(1/x^2)\,dx$. En la sección 7.8 descubrimos que esta integral impropia es convergente y que tiene un valor de 1. De modo que la figura muestra que todas las sumas parciales son menores que

$$\frac{1}{1^2}+\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx=2$$

Así, las sumas parciales están acotadas. También sabemos que las sumas parciales son crecientes porque todos los términos son positivos. Por lo tanto, las sumas parciales convergen, de acuerdo con el teorema de la sucesión monótona, de manera que la serie es convergente. La suma de la serie (el límite de las sumas parciales) es también menor que 2:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots<2$$

[El matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783) calculó que la suma exacta de esta serie es $\pi^2/6$, pero la demostración de esto es muy difícil. (Véase el problema 6 en los Problemas adicionales después del capítulo 15.)]

Ahora veamos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\cdots$$

n	$s_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{i}}$
5	3.2317
10	5.0210
50	12.7524
100	18.5896
500	43.2834
1000	61.8010
5000	139.9681

La tabla de valores de s_n, hace pensar que las sumas parciales no se aproximan a un número finito, de modo que se sospecha que la serie dada podría ser divergente. Otra vez usamos una imagen para confirmarlo. En la figura 2 se muestra la curva $y = 1/\sqrt{x}$, pero esta vez se usan rectángulos cuya parte superior queda por *encima* de la curva.

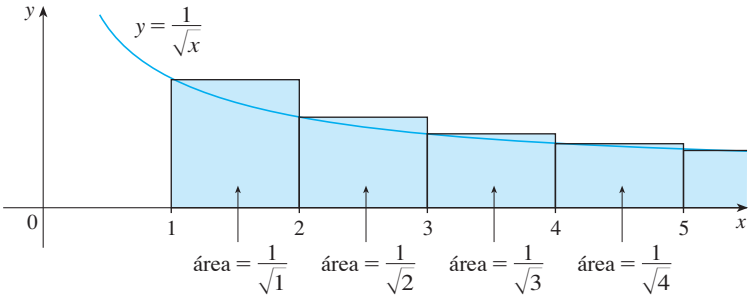


FIGURA 2

La base de cada uno de los rectángulos es un intervalo de longitud 1. La altura es igual al valor de la función $y = 1/\sqrt{x}$ en el extremo *izquierdo* del intervalo. Así que la suma de las áreas de todos los rectángulos es

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

Esta área total es mayor que el área bajo la curva $y = 1/\sqrt{x}$ para $x \geq 1$, que es igual a la

integral $\int_1^\infty \left(1/\sqrt{x}\right) dx$. Pero según la sección 7.8, esta integral impropia es divergente. En otras palabras, el área bajo la curva es infinita. Así que la suma de la serie debe ser infinita; es decir, la serie es divergente.

El mismo tipo de razonamiento geométrico aplicado para estas dos series, se puede hacer para demostrar la prueba siguiente. (La demostración se encuentra al final de esta sección.)

Prueba de la integral Suponga que f es una función continua, positiva y decreciente sobre $[1, \infty)$ y sea $a_n = f(n)$. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente si y sólo si la integral impropia $\int_1^\infty f(x)\,dx$ es convergente. En otras palabras:

i) Si $\int_1^\infty f(x)\,dx$ es convergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

ii) Si $\int_1^\infty f(x)\,dx$ es divergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

NOTA Cuando use la prueba de la integral no es necesario iniciar la serie o la integral en $n = 1$. Por ejemplo, al probar la serie

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n-3)^2} \qquad \text{usamos} \qquad \int_4^\infty \frac{1}{(x-3)^2}\,dx$$

Asimismo, no es necesario que f sea *siempre* decreciente. Lo importante es que f sea *finalmente* decreciente, es decir, decreciente para x más grande que algún número N. En consecuencia $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ es convergente, de modo que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente de acuerdo con la nota 4 de la sección 11.2.

EJEMPLO 1 Pruebe la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

SOLUCIÓN La función $f(x) = 1/(x^2 + 1)$ es continua, positiva y decreciente sobre $[1, \infty)$ de modo que aplicamos la prueba de la integral:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{t\to\infty} \tan^{-1}x\Big]_1^t$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left(\tan^{-1}t - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Por tanto, $\int_1^\infty 1/(x^2 + 1)\,dx$ es una integral convergente y si es así, de acuerdo con la prueba de la integral, la serie $\sum 1/(n^2 + 1)$ es convergente.

V EJEMPLO 2 ¿Para qué valores de p la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ es convergente?

SOLUCIÓN Si $p < 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} (1/n^p) = \infty$. Si $p = 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} (1/n^p) = 1$. En cualquier caso $\lim_{n\to\infty} (1/n^p) \neq 0$, por lo que la serie dada es divergente de acuerdo con la prueba de la divergencia (11.2.7).

Si $p > 0$, entonces la función $f(x) = 1/x^p$ es evidentemente continua, positiva y decreciente sobre $[1, \infty)$. En el capítulo 7 [véase (7.8.2)] encontramos que

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx \text{ converge si } p > 1 \text{ y diverge si } p \leq 1$$

Para usar la prueba de la integral necesitamos evaluar $\int_1^\infty f(x)\,dx$ y, por tanto, tenemos que hallar una antiderivada de f. Es frecuente que esto sea difícil o imposible, de modo que también necesitamos otras pruebas para convergencia.

De la prueba de la integral se infiere que la serie $\sum 1/n^p$ converge si $p > 1$ y diverge si $0 < p \leq 1$. (En el caso de $p = 1$, esta serie es la serie armónica estudiada en el ejemplo 8 de la sección 11.2.)

La serie del ejemplo 2 se llama **serie *p***. Esto es importante en el resto de este capítulo, de modo que se resumen los resultados del ejemplo 2 para referencia futura como se indica a continuación.

1 La serie p $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ es convergente si $p > 1$ y divergente si $p \leq 1$.

EJEMPLO 3

a) La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots$$

es convergente porque es una serie p con $p = 3 > 1$.

b) La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \cdots$$

es divergente porque es una serie p con $p = \frac{1}{3} < 1$.

NOTA *No* debemos inferir que, de acuerdo con la prueba de la integral, la suma de la serie es igual al valor de la integral. De hecho,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \text{en tanto que} \qquad \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = 1$$

Por tanto, en general

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \neq \int_1^{\infty} f(x)\, dx$$

V EJEMPLO 4 Determine si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ es convergente o divergente.

SOLUCIÓN La función $f(x) = (\ln x)/x$ es positiva y continua para $x > 1$ porque la función logaritmo es continua. Pero no es obvio si f es decreciente o no lo es, de modo que al calcular su derivada:

$$f'(x) = \frac{(1/x)x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Por tanto, $f'(x) < 0$ cuando $\ln x > 1$, es decir, $x > e$. Se sigue que f es decreciente cuando $x > e$, de manera que podemos aplicar la prueba de la integral:

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x}\, dx = \lim_{t \to \infty} \int_1^t \frac{\ln x}{x}\, dx = \lim_{t \to \infty} \frac{(\ln x)^2}{2} \Bigg]_1^t$$

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{(\ln t)^2}{2} = \infty$$

Puesto que esta integral impropia es divergente, la serie $\sum (\ln n)/n$ también es divergente de acuerdo con la prueba de la integral.

Estimación de la suma de una serie

Suponga que pudimos aplicar la prueba de la integral para demostrar que una serie $\sum a_n$ es convergente y que queremos encontrar una aproximación a la suma s de la serie. Por supuesto, cualquier suma parcial s_n es una aproximación a s porque $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. Pero, ¿qué tan buena es esa aproximación? Para saberlo, necesitamos estimar el tamaño del **residuo**.

$$R_n = s - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots$$

El residuo R_n es el error que se comete cuando s_n, la suma de los primeros n términos, se usa como una aproximación a la suma total.

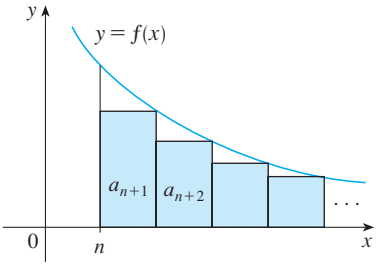


FIGURA 3

Usamos la misma notación y las ideas que en la prueba de la integral, suponiendo que f es decreciente sobre $[n, \infty)$. Al comparar las áreas de los rectángulos con el área bajo $y = f(x)$ para $x > n$ en la figura 3, vemos que

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots \leqslant \int_n^\infty f(x)\,dx$$

Asimismo, en la figura 4 vemos que

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots \geqslant \int_{n+1}^\infty f(x)\,dx$$

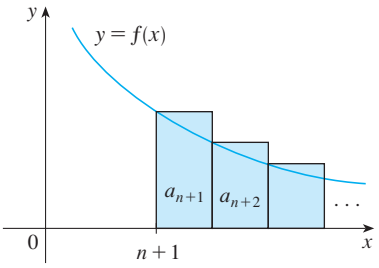


FIGURA 4

De este modo hemos demostrado la siguiente estimación de error.

1 Estimación del residuo para la prueba de la integral Supongamos que $f(k) = a_k$, donde f es una función continua, positiva y decreciente para $x \geqslant n$ y $\sum a_n$ es convergente. Si $R_n = s - s_n$, entonces

$$\int_{n+1}^\infty f(x)\,dx \leqslant R_n \leqslant \int_n^\infty f(x)\,dx$$

V EJEMPLO 5

a) Obtenga un valor aproximado de la suma de la serie $\sum 1/n^3$ usando la suma de los primeros 10 términos. Estime el error involucrado en esta aproximación.
b) ¿Cuántos términos se requieren para asegurar que la suma no difiere en más de 0.0005?

SOLUCIÓN En los incisos a) y b) necesitamos conocer $\int_n^\infty f(x)\,dx$. Con $f(x) = 1/x^3$, que satisface las condiciones de la prueba integral, tenemos

$$\int_n^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_n^t = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{2n^2}\right) = \frac{1}{2n^2}$$

a) Aproximando la suma de la serie por la 10-ésima suma parcial, tenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3} \approx s_{10} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{10^3} \approx 1.1975$$

De acuerdo con el residuo estimado en 2, tenemos

$$R_{10} \leqslant \int_{10}^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{1}{2(10)^2} = \frac{1}{200}$$

De modo que el tamaño del error es cuanto mucho de 0.005.

b) La precisión de 0.0005 quiere decir que debemos encontrar un valor de n tal que $R_n \leq 0.0005$. Puesto que

$$R_n \leq \int_n^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{1}{2n^2}$$

queremos que $$\frac{1}{2n^2} < 0.0005$$

Al resolver esta desigualdad, obtenemos

$$n^2 > \frac{1}{0.001} = 1000 \quad \text{o bien} \quad n > \sqrt{1000} \approx 31.6$$

Necesitamos 32 términos para garantizar una precisión dentro de 0.0005.

Si sumamos s_n a cada miembro de las desigualdades en 2, obtenemos

$$\boxed{3} \qquad s_n + \int_{n+1}^\infty f(x)\,dx \leq s \leq s_n + \int_n^\infty f(x)\,dx$$

porque $s_n + R_n = s$. Las desigualdades en 3 dan una cota inferior y una cota superior para s. Estas cotas proporcionan una aproximación más certera a la suma de la serie que la suma parcial s_n.

Aunque Euler calculó la suma exacta de las series p para $p = 2$, no se ha encontrado la suma para $p = 3$. Sin embargo, en el ejemplo 6 mostramos cómo *estimar* esta suma.

EJEMPLO 6 Use 3 con $n = 10$ para estimar la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

SOLUCIÓN Las desigualdades en 3 resultan

$$s_{10} + \int_{11}^\infty \frac{1}{x^3}\,dx \leq s \leq s_{10} + \int_{10}^\infty \frac{1}{x^3}\,dx$$

Del ejemplo 5 sabemos que

$$\int_n^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{1}{2n^2}$$

de modo que $$s_{10} + \frac{1}{2(11)^2} \leq s \leq s_{10} + \frac{1}{2(10)^2}$$

Si usamos $s_{10} \approx 1.197532$, obtenemos

$$1.201664 \leq s \leq 1.202532$$

Si aproximamos s por el punto medio de este intervalo, entonces el error es a lo más la mitad de la longitud del intervalo. Así que,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \approx 1.2021 \qquad \text{con error} \quad < 0.0005$$

Si comparamos el ejemplo 6 con el ejemplo 5, observamos que la estimación mejorada en 3 es mucho mejor que la estimación $s \approx s_n$. Para que el error sea menor que 0.0005 tenemos que usar 32 términos en el ejemplo 5, pero sólo 10 términos en el ejemplo 6.

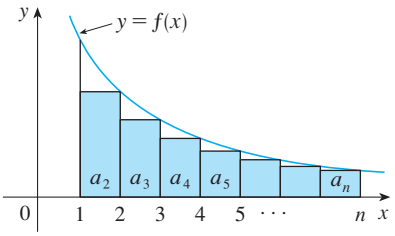


FIGURA 5

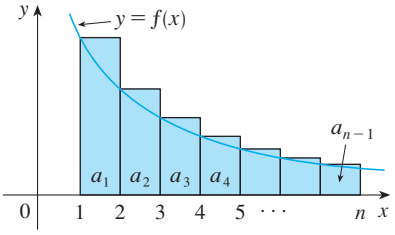


FIGURA 6

Demostración de la prueba de la integral

Ya hemos visto la idea básica en que se apoya la demostración de la prueba de la integral en las figuras 1 y 2 para las series $\sum 1/n^2$ y $\sum 1/\sqrt{n}$. En el caso de la serie general $\sum a_n$, véanse las figuras 5 y 6. El área del primer rectángulo sombreado de la figura 5 es el valor de f en el extremo derecho de $[1, 2]$, es decir, $f(2) = a_2$. De esta manera, al comparar las áreas de los rectángulos sombreados con el área bajo $y = f(x)$ desde 1 hasta n observamos que

$$\boxed{4} \qquad a_2 + a_3 + \cdots + a_n \leqslant \int_1^n f(x)\,dx$$

(Observe que esta desigualdad depende del hecho de que f es decreciente.) De manera similar, en la figura 6 se muestra que

$$\boxed{5} \qquad \int_1^n f(x)\,dx \leqslant a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$$

i) Si $\int_1^\infty f(x)\,dx$ es convergente, entonces $\boxed{4}$ da

$$\sum_{i=2}^{n} a_i \leqslant \int_1^n f(x)\,dx \leqslant \int_1^\infty f(x)\,dx$$

puesto que $f(x) \geqslant 0$. Por tanto

$$s_n = a_1 + \sum_{i=2}^{n} a_i \leqslant a_1 + \int_1^\infty f(x)\,dx = M$$

Como $s_n \leqslant M$ para toda n, la sucesión $\{s_n\}$ está acotada por arriba. Asimismo,

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geqslant s_n$$

como $a_{n+1} = f(n + 1) \geqslant 0$. En estos términos, $\{s_n\}$ es una sucesión acotada creciente y, de este modo, es convergente de acuerdo con el teorema de la sucesión monótona (11.1.12). Esto significa que $\sum a_n$ es convergente.

ii) Si $\int_1^\infty f(x)\,dx$ es divergente, entonces $\int_1^n f(x)\,dx \to \infty$ cuando $n \to \infty$ porque $f(x) \geqslant 0$. Pero con $\boxed{5}$ obtenemos

$$\int_1^n f(x)\,dx \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} a_i = s_{n-1}$$

y por tanto $s_{n-1} \to \infty$. Esto implica que $s_n \to \infty$, luego entonces $\sum a_n$ diverge.

11.3 Ejercicios

1. Dibuje una gráfica para demostrar que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1.3}} < \int_1^\infty \frac{1}{x^{1.3}}\,dx$$

¿Qué puede concluir con respecto a la serie?

2. Suponga que f es una función continua, positiva y decreciente para $x \geqslant 1$ y $a_n = f(n)$. En una gráfica acomode las tres cantidades siguientes en orden creciente.

$$\int_1^6 f(x)\,dx \qquad \sum_{i=1}^{5} a_i \qquad \sum_{i=2}^{6} a_i$$

3–8 Mediante la prueba de la integral determine si la serie es convergente o divergente.

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n}}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n + 1)^3}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n + 4}}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1}$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$

9-26 Determine si la serie es convergente o divergente.

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sqrt{2}}}$

10. $\sum_{n=3}^{\infty} n^{-0.9999}$

11. $1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} + \frac{1}{125} + \cdots$

12. $1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{4}} + \frac{1}{5\sqrt{5}} + \cdots$

13. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots$

14. $\frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{11} + \frac{1}{14} + \frac{1}{17} + \cdots$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} + 4}{n^2}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3 + 1}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4}$

18. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3n - 4}{n^2 - 2n}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 6n + 13}$

21. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

22. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n^2}$

24. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2}{e^n}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n^3}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4 + 1}$

27-28 Explique por qué no es posible utilizar la prueba de la integral para determinar si la serie es convergente.

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi n}{\sqrt{n}}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{1 + n^2}$

29-32 Determine los valores de p para los cuales la serie es convergente.

29. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$

30. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \, [\ln(\ln n)]^p}$

31. $\sum_{n=1}^{\infty} n(1 + n^2)^p$

32. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$

33. La función zeta de Riemann ζ se define como

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

y se usa en teoría de los números para estudiar la distribución de los números primos. ¿Cuál es el dominio de ζ?

34. Leonhard Euler calculó la suma exacta de la serie p para $p = 2$:

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

(Veáse página 715.) Use este hecho para encontrar la suma de cada serie:

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

b) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}$

35. Euler también encontró la suma para la serie p con $p = 4$:

$$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Utilice el resultado de Euler para encontrar la suma de las series:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n}\right)^4$

b) $\sum_{k=5}^{\infty} \frac{1}{(k-2)^4}$

36. a) Calcule la suma parcial s_{10} de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^4$. Estime el error al usar s_{10} como aproximación a la suma de la serie.
b) Use 3 con $n = 10$ para conseguir una estimación mejorada de la suma.
c) Compare su estimación en el inciso b) con el valor exacto dado en el ejercicio 35.
d) Calcule un valor de n tal que s_n no difiera más de 0.00001 del valor de la suma.

37. a) Mediante la suma de los primeros 10 términos, estime la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$. ¿Qué tan buena es la estimación?
b) Mejore esta estimación usando 3 con $n = 10$.
c) Compare su estimación en el inciso b) con el valor exacto dado en el ejercicio 34.
d) Encuentre un valor de n que dé la certeza de que el error en la aproximación $s \approx s_n$ es menor que 0.001.

38. Calcule la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^5$ con una aproximación de tres cifras decimales.

39. Estime $\sum_{n=1}^{\infty} (2n + 1)^{-6}$ con una aproximación de cinco decimales.

40. ¿Cuántos términos de la serie $\sum_{n=2}^{\infty} 1/[n(\ln n)^2]$ se necesitarían sumar para calcular la suma que no difiera de 0.01?

41. Demuestre que si queremos aproximar la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1.001}$ de modo que el error sea menor de 5 en la novena cifra decimal, entonces ¡necesitamos sumar más de $10^{11\,301}$ términos!

SAC **42.** a) Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln n)^2/n^2$ es convergente.
b) Encuentre una cota superior para el error en la aproximación $s \approx s_n$.
c) ¿Cuál es el valor más pequeño de n tal que esta cota superior sea menor que 0.05?
d) Encuentre s_n para este valor de n.

43. a) Mediante [4] demuestre que si s_n es la n-ésima suma parcial de la serie armónica, entonces

$$s_n \leq 1 + \ln n$$

b) La serie armónica diverge, pero muy lentamente. Con ayuda del inciso a) demuestre que la suma del primer millón de términos es menor que 15 y que la suma de los primeros mil millones de términos es menor que 22.

44. Siga los pasos siguientes para demostrar que la sucesión

$$t_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

tiene un límite. (El valor del límite se denota con γ y se denomina constante de Euler.)

a) Dibuje un diagrama como la figura 6 con $f(x) = 1/x$ e interprete t_n como un área [o use [5]] para demostrar que $t_n > 0$ para toda n.

b) Interprete

$$t_n - t_{n+1} = [\ln(n + 1) - \ln n] - \frac{1}{n + 1}$$

como una diferencia de áreas para demostrar que $t_n - t_{n+1} > 0$. Por tanto, $\{t_n\}$ es una sucesión decreciente.

c) Use el teorema de la sucesión monótona para demostrar que $\{t_n\}$ es convergente.

45. Determine todos los valores positivos de b para los cuales la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b^{(\ln n)}$ converge.

46. Encuentre todos los valores de c para los que converge la siguiente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c}{n} - \frac{1}{n + 1} \right)$$

11.4 Pruebas por comparación

En las pruebas por comparación, la idea es comparar una serie dada con una serie que ya se sabe que es convergente o divergente. Por ejemplo, la serie

$$\boxed{1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$$

nos recuerda la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n$, que es una serie geométrica con $a = \frac{1}{2}$ y $r = \frac{1}{2}$, por lo que es convergente. Como la serie [1] es similar a la serie convergente, se presiente que también debe ser convergente. De hecho, así es. La desigualdad

$$\frac{1}{2^n + 1} < \frac{1}{2^n}$$

demuestra que la serie dada [1] tiene términos menores que los de la serie geométrica y, por tanto, todas las sumas parciales son también más pequeñas que 1 (la suma de la serie geométrica). Esto quiere decir que las sumas parciales forman una sucesión creciente acotada, la cual es convergente. Asimismo, se infiere que la suma de la serie es menor que la suma de la serie geométrica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1} < 1$$

Un razonamiento similar se puede usar para demostrar la prueba siguiente, la cual se aplica sólo a series cuyos términos son positivos. La primera parte dice que si tenemos una serie cuyos términos son *menores* que los de una serie *convergente* conocida, entonces nuestra serie también es convergente. La segunda parte establece que si empezamos con una serie cuyos términos son *mayores* que los de una serie *divergente* conocida, entonces también es divergente.

La prueba por comparación Supongamos que $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son series con términos positivos.

i) Si $\sum b_n$ es convergente y $a_n \leq b_n$ para toda n, entonces $\sum a_n$ también es convergente.

ii) Si $\sum b_n$ es divergente y $a_n \geq b_n$ para toda n, entonces $\sum a_n$ también es divergente.

Es importante estar atento a la distinción entre sucesión y serie. Una sucesión es un listado de números y una serie es una suma. Con cada serie $\sum a_n$ hay dos sucesiones asociadas: la sucesión $\{a_n\}$ de términos y la sucesión $\{b_n\}$ de sumas parciales.

DEMOSTRACIÓN

i) Sea $\quad s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad t_n = \sum_{i=1}^{n} b_i \qquad t = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Puesto que ambas series tienen términos positivos, las sucesiones $\{s_n\}$ y $\{t_n\}$ son crecientes ($s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geqslant s_n$). Asimismo, $t_n \to t$, así que $t_n \leqslant t$ para toda n. Como $a_i \leqslant b_i$ tenemos $s_n \leqslant t_n$. De este modo, $s_n \leqslant t$ para toda n. Esto significa que $\{s_n\}$ es creciente y está acotada superiormente y, por tanto, converge por el teorema de sucesiones monótonas. Así, $\sum a_n$ es convergente.

ii) Si $\sum b_n$ es divergente, entonces $t_n \to \infty$ (puesto que $\{t_n\}$ es creciente). Pero $a_i \geqslant b_i$, de modo que $s_n \geqslant t_n$. Así que $s_n \to \infty$. Por tanto, $\sum a_n$ diverge.

Serie estándar usada con la prueba por comparación

Por supuesto, al usar la prueba por comparación es necesario tener alguna serie conocida $\sum b_n$ para los fines de la comparación. La mayoría de las veces se usa una de estas series:

- Una serie p [$\sum 1/n^p$ que converge si $p > 1$ y diverge si $p \leqslant 1$; véase (11.3.1)]
- Una serie geométrica [$\sum ar^{n-1}$ es convergente si $|r| < 1$ y es divergente si $|r| \geqslant 1$; véase (11.2.4)]

EJEMPLO 1 Determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{5}{2n^2 + 4n + 3}$ es convergente o divergente.

SOLUCIÓN En el caso de n grande el término dominante en el denominador es $2n^2$, de modo que compararemos la serie dada con la serie $\sum 5/(2n^2)$. Observe que

$$\frac{5}{2n^2 + 4n + 3} < \frac{5}{2n^2}$$

porque el lado izquierdo tiene un denominador más grande. (En la notación de la prueba por comparación, a_n está en el lado izquierdo y b_n en el lado derecho.) Ya sabemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2} = \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

es convergente porque es una constante por una serie p con $p = 2 > 1$. Por tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2 + 4n + 3}$$

es convergente de acuerdo con el inciso i) de la prueba por comparación.

NOTA 1 Aunque la condición $a_n \leqslant b_n$ o bien, $a_n \geqslant b_n$ en la prueba por comparación es para toda n, es necesario verificar sólo que se cumple para $n \geqslant N$, donde N es algún entero establecido, porque la convergencia de una serie no está afectada por un número finito de términos. Lo anterior se ilustra con el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 2 Pruebe si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\ln k}{k}$ es convergente o divergente.

SOLUCIÓN Usamos la prueba de la integral para investigar esta serie en el ejemplo 4 de la sección 11.3, pero también es posible probarla por comparación con la serie armónica. Observe que $ln\ k > 1$ para $k \geqslant 3$ y de esa manera

$$\frac{\ln k}{k} > \frac{1}{k} \qquad k \geqslant 3$$

Sabemos que $\Sigma 1/k$ es divergente (serie p con $p = 1$). Así que la serie dada es divergente de acuerdo con la prueba por comparación.

NOTA 2 Los términos de la serie que estamos probando deben ser menores que los de una serie convergente, o mayores que los de una serie divergente. Si los términos son más grandes que los términos de una serie convergente, o bien, menores que los de una serie divergente, entonces la prueba por comparación no aplica. Por ejemplo, considere la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$$

La desigualdad

$$\frac{1}{2^n - 1} > \frac{1}{2^n}$$

es inútil en cuanto a la prueba por comparación porque $\Sigma\, b_n = \Sigma \left(\frac{1}{2}\right)^n$ es convergente y $a_n > b_n$. Sin embargo, la impresión es que $\Sigma\, 1/(2^n - 1)$ tiene que ser convergente porque es muy parecida a la serie geométrica convergente $\Sigma \left(\frac{1}{2}\right)^n$. En tales casos podemos aplicar la prueba siguiente.

Los ejercicios 40 y 41 tratan los casos $c = 0$ y $c = \infty$.

Prueba por comparación del límite Suponga que Σa_n y Σb_n son series con términos positivos. Si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$$

donde c es un número finito y $c > 0$, entonces ambas series convergen o ambas divergen.

DEMOSTRACIÓN Sean m y M números positivos tales que $m < c < M$. Como a_n/b_n está cercano a c para n grande, existe un entero N tal que

$$m < \frac{a_n}{b_n} < M \qquad \text{cuando } n > N$$

y por tanto

$$mb_n < a_n < Mb_n \qquad \text{cuando } n > N$$

Si Σb_n es convergente, también lo es ΣMb_n. Así Σa_n es convergente según el inciso i) por la prueba por comparación. Si Σb_n diverge también Σmb_n es divergente y por el inciso ii) de la prueba por comparación Σa_n diverge.

EJEMPLO 3 Pruebe si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$ es convergente o divergente.

SOLUCIÓN Usamos la prueba por comparación del límite con

$$a_n = \frac{1}{2^n - 1} \qquad b_n = \frac{1}{2^n}$$

y obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/(2^n - 1)}{1/2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - 1/2^n} = 1 > 0$$

Puesto que existe este límite y $\sum 1/2^n$ es una serie geométrica convergente, la serie dada converge de acuerdo con la prueba por comparación del límite.

EJEMPLO 4 Determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n^2 + 3n}{\sqrt{5 + n^5}}$ es convergente o divergente.

SOLUCIÓN La parte dominante del numerador es $2n^2$ y la parte dominante del denominador es $\sqrt{n^5} = n^{5/2}$. Esto sugiere efectuar

$$a_n = \frac{2n^2 + 3n}{\sqrt{5 + n^5}} \qquad b_n = \frac{2n^2}{n^{5/2}} = \frac{2}{n^{1/2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + 3n}{\sqrt{5 + n^5}} \cdot \frac{n^{1/2}}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^{5/2} + 3n^{3/2}}{2\sqrt{5 + n^5}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \dfrac{3}{n}}{2\sqrt{\dfrac{5}{n^5} + 1}} = \frac{2 + 0}{2\sqrt{0 + 1}} = 1$$

Puesto que $\sum b_n = 2\sum 1/n^{1/2}$ es divergente (es una serie p con $p = \frac{1}{2} < 1$), la serie dada diverge de acuerdo con la prueba por comparación del límite.

Observe que al probar muchas series encontramos una serie de comparación adecuada $\sum b_n$ conservando sólo las potencias más altas en el numerador y en el denominador.

Estimación de sumas

Si hemos usado la prueba por comparación para demostrar que una serie $\sum a_n$ es convergente por comparación con una serie $\sum b_n$, entonces se puede hacer una estimación de la suma $\sum a_n$ al comparar los residuos. Como en la sección 11.3, consideremos el residuo

$$R_n = s - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$$

En cuanto a la serie de comparación $\sum b_n$ consideremos el residuo correspondiente

$$T_n = t - t_n = b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots$$

Puesto que $a_n \leqslant b_n$ para toda n, tenemos $R_n \leqslant T_n$. Si $\sum b_n$ es una serie p, podemos estimar su residuo T_n como en la sección 11.3. Si $\sum b_n$ es una serie geométrica, entonces T_n es la suma de una serie geométrica y podemos sumarla exactamente (véanse ejercicios 35 y 36). En cualquier caso, sabemos que R_n es menor que T_n.

V EJEMPLO 5 Con la suma de los primeros 100 términos aproxime la suma de la serie $\sum 1/(n^3 + 1)$. Estime el error involucrado en esta aproximación.

SOLUCIÓN Como

$$\frac{1}{n^3 + 1} < \frac{1}{n^3}$$

la serie dada es convergente de acuerdo con la prueba por comparación. El residuo T_n para la serie de comparación $\sum 1/n^3$ ya lo hemos estimado en el ejemplo 5 de la sección 11.3 por medio de la estimación del residuo por la prueba de la integral. Allí encontramos que

$$T_n \leqslant \int_n^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{1}{2n^2}$$

Por tanto, el residuo R_n de la serie dada cumple con

$$R_n \leqslant T_n \leqslant \frac{1}{2n^2}$$

Con $n = 100$ tenemos

$$R_{100} \leqslant \frac{1}{2(100)^2} = 0.00005$$

Con una calculadora programable o una computadora, resulta que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 1} \approx \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n^3 + 1} \approx 0.6864538$$

con un error menor que 0.00005.

11.4 Ejercicios

1. Supongamos que Σa_n y Σb_n son series con términos positivos y que se sabe que Σb_n es convergente.
   a) Si $a_n > b_n$ para toda n, ¿qué podemos decir respecto a Σa_n? ¿Por qué?
   b) Si $a_n < b_n$ para toda n, ¿qué podemos decir respecto a Σa_n? ¿Por qué?

2. Suponga que Σa_n y Σb_n son series con términos positivos y que se sabe que Σb_n es divergente.
   a) Si $a_n > b_n$ para toda n, ¿qué podemos decir de Σa_n? ¿Por qué?
   b) Si $a_n < b_n$ para toda n, ¿qué podemos decir respecto a Σa_n? ¿Por qué?

3-32 Determine si la serie es convergente o divergente.

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^3 + 1}$

4. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3}{n^4 - 1}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 1}{n\sqrt{n}}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - 1}{n^2\sqrt{n}}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{3 + 10^n}$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{5^n - 1}$

9. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$

10. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \operatorname{sen}^2 k}{1 + k^3}$

11. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{k}}{\sqrt{k^3 + 4k + 3}}$

12. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k - 1)(k^2 - 1)}{(k + 1)(k^2 + 4)^2}$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^{1.2}}$

14. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n - 1}$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+1}}{3^n - 2}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{3n^4 + 1}}$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n + 3}$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 4^n}{1 + 3^n}$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 4^n}{n + 6^n}$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n + 2}}{2n^2 + n + 1}$

22. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n + 2}{(n + 1)^3}$

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 + 2n}{(1 + n^2)^2}$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 5n}{n^3 + n + 1}$

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^4 + 1}}{n^3 + n^2}$

26. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2 - 1}}$

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 e^{-n}$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n}$

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

30. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

31. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$

32. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}$

33-36 Mediante la suma de los primeros 10 términos, obtenga un valor aproximado de la suma de la serie. Estime el error.

33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4 + 1}}$

34. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 n}{n^3}$

35. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 5^{-n} \cos^2 n$

36. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + 4^n}$

37. El significado de la representación decimal de un número $0.d_1d_2d_3\ldots$ (donde el dígito d_i es uno de los números 0, 1, 2,…,9) es que

$$0.d_1d_2d_3d_4\ldots = \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \frac{d_4}{10^4} + \cdots$$

Demuestre que esta serie siempre es convergente.

1. Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

38. ¿Para qué valores de p la serie $\sum_{n=2}^{\infty} 1/(n^p \ln n)$ es convergente?

39. Demuestre que si $a_n \geqslant 0$ y $\sum a_n$ converge, entonces $\sum a_n^2$ también converge.

40. a) Suponga que $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son series con términos positivos y que $\sum b_n$ es convergente. Demuestre que si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

entonces $\sum a_n$ también es convergente.

b) Mediante el inciso a) demuestre que la serie converge.

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$ ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}\, e^n}$

41. a) Suponga que $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son series con términos positivos y que $\sum b_n$ es divergente. Demuestre que si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$$

entonces $\sum a_n$ también es divergente.

b) Use el inciso a) para demostrar que la serie es divergente.

i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

42. Proporcione un ejemplo de un par de series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ con términos positivos donde $\lim_{n\to\infty} (a_n/b_n) = 0$ y $\sum b_n$ diverge, pero $\sum a_n$ converge. [Compare con el ejercicio 40.]

43. Demuestre que si $a_n > 0$ y $\lim_{n\to\infty} n a_n \neq 0$, entonces $\sum a_n$ es divergente.

44. Demuestre que si $a_n > 0$ y $\sum a_n$ es convergente, entonces $\sum \ln(1 + a_n)$ es convergente.

45. Si $\sum a_n$ es una serie convergente con términos positivos, ¿es cierto que $\sum \operatorname{sen}(a_n)$ también es convergente?

46. Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son series convergentes con términos positivos, ¿es cierto que $\sum a_n b_n$ también es convergente?

11.5 Series alternantes

Las pruebas de convergencia que se han examinado hasta ahora se aplican sólo a series con términos positivos. En esta sección y en la siguiente, se estudia cómo tratar con series cuyos términos no son necesariamente positivos. De particular importancia son las *series alternantes,* cuyos términos se alternan en signo.

Una **serie alternante** es una serie cuyos términos son alternadamente positivos y negativos. Aquí hay dos ejemplos:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \frac{5}{6} + \frac{6}{7} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{n}{n+1}$$

De acuerdo con estos ejemplos, el n-ésimo término de una serie alternante es de la forma

$$a_n = (-1)^{n-1} b_n \qquad \text{o bien} \qquad a_n = (-1)^n b_n$$

donde b_n es un número positivo. (De hecho, $b_n = |a_n|$.)

La siguiente prueba establece que si los términos de una serie alternante decrecen hacia 0 en valor absoluto, entonces la serie converge.

Prueba de la serie alternante Si la serie alternante

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + b_5 - b_6 + \cdots \qquad b_n > 0$$

cumple con

i) $b_{n+1} \leqslant b_n$ para toda n

ii) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

entonces la serie es convergente.

Antes de proporcionar la demostración vea la figura 1, la cual es una representación de la idea en que se apoya la demostración. Primero dibujamos $s_1 = b_1$ sobre una recta numérica. Para determinar s_2 restamos b_2, de modo que s_2 está a la izquierda de s_1. Luego, para determinar s_3 sumamos b_3, de modo que s_3 está a la derecha de s_2. Pero como $b_3 < b_2$, s_3 está a la izquierda de s_1. Al continuar de esta manera, observamos que las sumas parciales oscilan hacia atrás y hacia adelante. Puesto que $b_n \to 0$, los pasos sucesivos se vuelven más y más pequeños. Las sumas parciales pares s_2, s_4, s_6,... se incrementan, y decrecen las sumas parciales impares s_1, s_3, s_5,.... Así, parece plausible que ambas converjan en el mismo número s, el cual es la suma de la serie. Por consiguiente, en la demostración siguiente se consideran por separado las sumas parciales pares e impares.

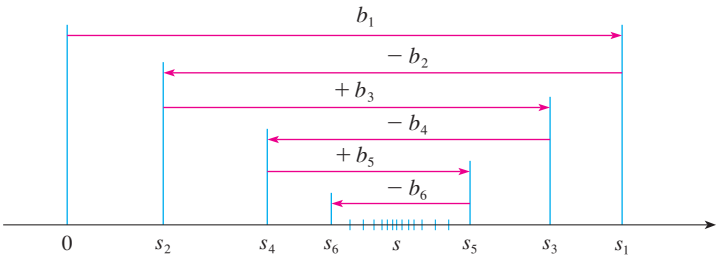


FIGURA 1

DEMOSTRACIÓN DE LA PRUEBA DE LA SERIE ALTERNANTE Primero consideramos las sumas parciales pares:

$$s_2 = b_1 - b_2 \geqslant 0 \qquad \text{puesto que } b_2 \leqslant b_1$$

$$s_4 = s_2 + (b_3 - b_4) \geqslant s_2 \qquad \text{puesto que } b_4 \leqslant b_3$$

En general $s_{2n} = s_{2n-2} + (b_{2n-1} - b_{2n}) \geqslant s_{2n-2}$ puesto que $b_{2n} \leqslant b_{2n-1}$

Por esto $$0 \leqslant s_2 \leqslant s_4 \leqslant s_6 \leqslant \cdots \leqslant s_{2n} \leqslant \cdots$$

Pero también podemos escribir

$$s_{2n} = b_1 - (b_2 - b_3) - (b_4 - b_5) - \cdots - (b_{2n-2} - b_{2n-1}) - b_{2n}$$

Todos los términos entre paréntesis son positivos, de modo que $s_{2n} \leqslant b_1$ para toda n. Por tanto, la sucesión $\{s_{2n}\}$ de las sumas parciales pares se incrementa y está acotada por arriba. Debido a eso, de acuerdo con el teorema de la sucesión monótona es convergente. Llamemos s a su límite, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n} = s$$

Ahora calculemos el límite de las sumas parciales impares:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} &= \lim_{n\to\infty} (s_{2n} + b_{2n+1}) \\
&= \lim_{n\to\infty} s_{2n} + \lim_{n\to\infty} b_{2n+1} \\
&= s + 0 \qquad \text{[según la condición ii)]} \\
&= s
\end{aligned}$$

Puesto que tanto la suma parcial par como la suma parcial impar convergen a s, tenemos $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ (véase el ejercicio 92a) de la sección 11.1), por lo que la serie es convergente.

En la figura 2 se ilustra el ejemplo 1; se muestran las gráficas de los términos $a_n = (-1)^{n-1}/n$ y las sumas parciales s_n. Observe cómo los valores de s_n van en zigzag dentro del límite, el cual al parecer está alrededor de 0.7. De hecho, la suma exacta de la serie es $\ln 2 \approx 0.693$ (véase ejercicio 36).

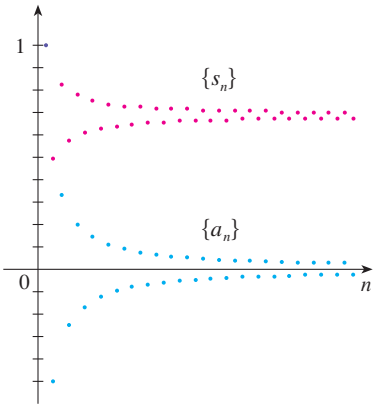


FIGURA 2

V EJEMPLO 1 La serie armónica alternante

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

cumple con

$$\text{i) } b_{n+1} < b_n \qquad \text{porque} \qquad \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

$$\text{ii) } \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

de modo que la serie es convergente de acuerdo con la prueba de la serie alternante.

V EJEMPLO 2 La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3n}{4n-1}$ es alternante pero

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{4n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{4 - \frac{1}{n}} = \frac{3}{4}$$

por lo que la condición ii) no se cumple. En cambio, veamos el límite del n-ésimo término de la serie:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n 3n}{4n-1}$$

Este límite no existe, de modo que la serie es divergente de acuerdo con la prueba de la divergencia.

EJEMPLO 3 Pruebe si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3+1}$ es convergente o divergente.

SOLUCIÓN La serie dada es alternante, de modo que tratemos de comprobar las condiciones i) y ii) de la prueba de la serie alternante.

A diferencia de la situación en el ejemplo 1, no es obvio que la sucesión dada por $b_n = n^2/(n^3+1)$ sea decreciente. Sin embargo, si consideramos la función relacionada $f(x) = x^2/(x^3+1)$, encontramos que

$$f'(x) = \frac{x(2 - x^3)}{(x^3+1)^2}$$

Puesto que se consideran sólo x positivas, $f'(x) < 0$ si $2 - x^3 < 0$, es decir, $x > \sqrt[3]{2}$. De esta manera, f es decreciente sobre el intervalo $(\sqrt[3]{2}, \infty)$. Esto significa que $f(n+1) < f(n)$ y, por tanto, $b_{n+1} < b_n$ cuando $n \geqslant 2$. (La desigualdad $b_2 < b_1$ se puede comprobar de manera directa, pero lo que realmente importa es que la sucesión $\{b_n\}$ decrece con el tiempo.)

En lugar de verificar la condición i) de la prueba de la serie alternante calculando una derivada, puede comprobar que $b_{n+1} < b_n$ directamente usando la técnica de la solución 1 del ejemplo 13 de la sección 11.1.

La condición ii) se comprueba rápidamente

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n^3}} = 0$$

Así, la serie es convergente de acuerdo con la prueba de la serie alternante.

Estimando sumas

Una suma parcial s_n de cualquier serie convergente se puede usar como una aproximación a una suma total s, pero no se recurre mucho a esto, a menos que se estime la exactitud de la aproximación. El error involucrado al usar $s \approx s_n$ es el residuo $R_n = s - s_n$. El teorema siguiente establece que para las series que cumplen con la condición de la prueba de la serie alternante, el tamaño del error es menor que b_{n+1}, lo cual es el valor absoluto del primer término ignorado.

Desde el punto de vista de la geometría podemos ver por qué el teorema de estimación para series alternantes es verdadero al examinar la figura 1 (en la página 728). Observe que $s - s_4 < b_5, |s - s_5| < b_6$ y así sucesivamente. Note también que s queda entre dos sumas parciales consecutivas.

Teorema de estimación para series alternantes Si $s = \Sigma(-1)^{n-1} b_n$ es la suma de una serie alternante que cumple con

$$\text{i) } b_{n+1} \leq b_n \qquad \text{y} \qquad \text{ii) } \lim_{n \to \infty} b_n = 0$$

entonces

$$|R_n| = |s - s_n| \leq b_{n+1}$$

DEMOSTRACIÓN Sabemos de la demostración para la prueba de series alternantes que s queda entre dos sumas parciales consecutivas s_n y s_{n+1}. (Ya hemos demostrado que s es mayor que todas las sumas parciales pares. Un argumento similar demuestra que s es menor que todas las sumas impares.) Se infiere que

$$|s - s_n| \leq |s_{n+1} - s_n| = b_{n+1}$$

Por definición, $0! = 1$

V EJEMPLO 4 Calcule la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ con una aproximación de tres cifras decimales.

SOLUCIÓN Primero observamos que la serie es convergente de acuerdo con la prueba de la serie alternante porque

$$\text{i) } \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!\,(n+1)} < \frac{1}{n!}$$

$$\text{ii) } 0 < \frac{1}{n!} < \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{por tanto} \quad \frac{1}{n!} \to 0 \quad \text{cuando } n \to \infty$$

Para ver cuántos términos necesitamos usar en nuestra aproximación, escribamos los primeros términos de la serie

$$s = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \cdots$$
$$= 1 - 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{24} - \tfrac{1}{120} + \tfrac{1}{720} - \tfrac{1}{5040} + \cdots$$

Observe que

$$b_7 = \tfrac{1}{5040} < \tfrac{1}{5000} = 0.0002$$

y

$$s_6 = 1 - 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{24} - \tfrac{1}{120} + \tfrac{1}{720} \approx 0.368056$$

De acuerdo con el teorema de la estimación de la serie alternante, se sabe que

$$|s - s_6| \leq b_7 < 0.0002$$

En la sección 11.10 se demuestra que $e^x = \Sigma_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ para toda x, de modo que el resultado del ejemplo 4 es en realidad una aproximación al número e^{-1}.

Este error de menos de 0.0002 no afecta la tercera cifra decimal, de modo que tenemos $s \approx 0.368$ que es correcta hasta la tercera cifra decimal.

NOTA La regla de que el error (al usar s_n para aproximarse a s) es menor que el primer término ignorado es en general válida sólo para series alternantes que cumplen con las condiciones del teorema de la estimación de la serie alternante. La regla no se aplica a otros tipos de series.

11.5 Ejercicios

1. a) ¿Qué es una serie alternante?
b) ¿En qué condiciones una serie alternante converge?
c) Si estas condiciones se cumplen, ¿qué puede decir con respecto al residuo después de n términos?

2-20 Pruebe las series para ver si son convergentes o divergentes.

2. $\frac{2}{3} - \frac{2}{5} + \frac{2}{7} - \frac{2}{9} + \frac{2}{11} - \cdots$

3. $-\frac{2}{5} + \frac{4}{6} - \frac{6}{7} + \frac{8}{8} - \frac{10}{9} + \cdots$

4. $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} - \cdots$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+4)}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n-1}{2n+1}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\sqrt{n^3+2}}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{2n+3}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3+4}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n e^{-n}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} e^{2/n}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \arctan n$

15. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{1+\sqrt{n}}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos n\pi}{2^n}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^n}{n!}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

21-22 Grafique las sucesiones de términos y la sucesión de sumas parciales en la misma pantalla. Utilice la gráfica para hacer una estimación de la suma de las series. Después utilice el teorema de la estimación de las series alternantes para estimar la suma con una aproximación de cuatro decimales.

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-0.8)^n}{n!}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{8^n}$

23-26 Demuestre que la serie es convergente. ¿Cuántos términos de la serie necesitamos sumar para determinar la suma con la exactitud señalada?

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^6}$ $(|\text{error}| < 0.00005)$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\,5^n}$ $(|\text{error}| < 0.0001)$

25. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{10^n n!}$ $(|\text{error}| < 0.000005)$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n e^{-n}$ $(|\text{error}| < 0.01)$

27-30 Obtenga un valor aproximado de la suma de la serie con una aproximación de cuatro cifras decimales.

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^6}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^2}{10^n}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n n!}$

31. ¿Es la 50a. suma parcial s_{50} de la serie alternante $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}/n$ una sobreestimación o una subestimación de la suma total? Explique.

32-34 ¿Para qué valores de p es convergente cada serie?

32. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$

33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+p}$

34. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(\ln n)^p}{n}$

35. Demuestre que la serie $\sum (-1)^{n-1} b_n$, donde $b_n = 1/n$ si n es impar y $b_n = 1/n^2$ si n es par, es divergente. ¿Por qué no aplica la prueba de la serie alternante?

36. Siga los pasos siguientes para demostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$$

Sean h_n y s_n las sumas parciales de las series armónica y armónica alternante.

a) Demuestre que $s_{2n} = h_{2n} - h_n$.

b) Según el ejercicio 44 de la sección 11.3 tenemos

$$h_n - \ln n \to \gamma \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

y, por tanto,

$$h_{2n} - \ln(2n) \to \gamma \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

Apoyándose en estos hechos y el inciso a), demuestre que $s_{2n} \to \ln 2$ cuando $n \to \infty$.

11.6 Convergencia absoluta y las pruebas de la razón y la raíz

Dada una serie $\sum a_n$, podemos considerar las series correspondientes

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots$$

cuyos términos son los valores absolutos de los términos de la serie original.

Hay pruebas para la convergencia para series con términos positivos y para series alternantes. Pero, ¿y si los signos de los términos cambian de manera irregular? En el ejemplo 3, se observa que la idea de la convergencia absoluta ayuda algunas veces en tales casos.

1 Definición Una serie $\sum a_n$ es llamada **absolutamente convergente** si la serie de valores absolutos $\sum |a_n|$ es convergente.

Observe que si $\sum a_n$ es una serie con términos positivos, entonces $|a_n| = a_n$ y por, tanto, la convergencia absoluta es lo mismo que la convergencia en este caso.

EJEMPLO 1 La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$$

es absolutamente convergente porque

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

es una serie p convergente ($p = 2$).

EJEMPLO 2 Ya sabemos que la serie armónica alternante

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

es convergente (véase ejemplo 1 de la sección 11.5), pero no es absolutamente convergente porque la serie correspondiente de valores absolutos es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

que es la serie armónica (serie p con $p = 1$) y, por tanto, es divergente.

2 Definición Una serie $\sum a_n$ se llama **condicionalmente convergente** si es convergente pero no absolutamente convergente.

En el ejemplo 2 se muestra que la serie armónica alternante es condicionalmente convergente. Así, es posible que una serie sea convergente, pero no absolutamente convergente. Sin embargo, el teorema siguiente muestra que la convergencia absoluta implica convergencia.

3 Teorema Si una serie $\sum a_n$ es absolutamente convergente, entonces es convergente.

DEMOSTRACIÓN Observe que la desigualdad

$$0 \leqslant a_n + |a_n| \leqslant 2|a_n|$$

es cierta porque $|a_n|$ es a_n o bien, $-a_n$. Si $\sum a_n$ es absolutamente convergente, entonces $\sum |a_n|$ es convergente, así que $\sum 2|a_n|$ es convergente. Por tanto, según la prueba de la comparación, $\sum (a_n + |a_n|)$ es convergente. Entonces

$$\sum a_n = \sum (a_n + |a_n|) - \sum |a_n|$$

es la diferencia de dos series convergentes y, por tanto, convergente.

V EJEMPLO 3 Determine si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2} = \frac{\cos 1}{1^2} + \frac{\cos 2}{2^2} + \frac{\cos 3}{3^2} + \cdots$$

es convergente o divergente.

SOLUCIÓN Esta serie posee términos tanto positivos como negativos, pero no es alternante. (El primer término es positivo, los siguientes tres son negativos, y los otros tres que siguen son positivos. Los signos no siguen un patrón regular.) Podemos aplicar la prueba de comparación a la serie de valores absolutos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^2}$$

Puesto que $|\cos n| \leqslant 1$ para toda n, entonces

$$\frac{|\cos n|}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

Sabemos que $\sum 1/n^2$ es convergente (serie p con $p = 2$) y, por tanto, $\sum |\cos n|/n^2$ es convergente según la prueba por comparación. De esta manera, la serie dada $\sum (\cos n)/n^2$ es absolutamente convergente y, debido a eso, convergente de acuerdo con el teorema 3.

En la figura 1 se ilustran las gráficas de los términos a_n y las sumas parciales s_n de la serie del ejemplo 3. Observe que la serie no es alternante, pero tiene términos positivos y negativos.

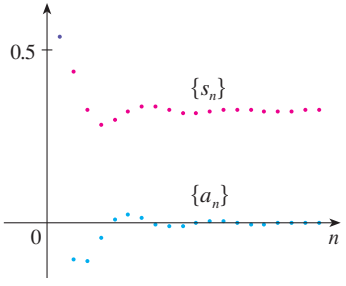


FIGURA 1

La prueba siguiente es muy útil para determinar si una cierta serie es absolutamente convergente.

Prueba de la razón

i) Si $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente (y, por tanto, convergente).

ii) Si $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$, o bien, $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

iii) Si $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, la prueba de la razón no es concluyente; es decir, no se puede sacar conclusión alguna con respecto a la convergencia o a la divergencia de $\sum a_n$.

DEMOSTRACIÓN

i) La idea es comparar la serie dada con una serie geométrica convergente. Puesto que $L < 1$, podemos elegir un número r tal que $L < r < 1$. Como

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L \qquad \text{y} \qquad L < r$$

la razón $|a_{n+1}/a_n|$ eventualmente será menor que r; es decir, existe un entero N tal que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < r \qquad \text{siempre que } n \geqslant N$$

o, equivalentemente

$$|a_{n+1}| < |a_n|\,r \qquad \text{siempre que } n \geqslant N \tag{4}$$

Al hacer n sucesivamente igual a N, $N+1$, $N+2$, . . . en (4), se obtiene

$$|a_{N+1}| < |a_N|\,r$$
$$|a_{N+2}| < |a_{N+1}|\,r < |a_N|\,r^2$$
$$|a_{N+3}| < |a_{N+2}|\,r < |a_N|\,r^3$$

y, en general,

$$|a_{N+k}| < |a_N|\,r^k \qquad \text{para toda } k \geqslant 1 \tag{5}$$

Ahora la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_N|\,r^k = |a_N|\,r + |a_N|\,r^2 + |a_N|\,r^3 + \cdots$$

es convergente porque es una serie geométrica con $0 < r < 1$. De modo que la desigualdad (5) junto con la prueba de la comparación demuestra que la serie

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_{N+k}| = |a_{N+1}| + |a_{N+2}| + |a_{N+3}| + \cdots$$

también es convergente. Se infiere que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente. (Recuerde que una cantidad finita de términos no afecta la convergencia.) Por tanto, $\sum a_n$ es absolutamente convergente.

ii) Si $|a_{n+1}/a_n| \to L > 1$, o bien, $|a_{n+1}/a_n| \to \infty$, entonces la razón $|a_{n+1}/a_n|$ eventualmente será mayor que 1; es decir, existe un entero N tal que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \qquad \text{siempre que } n \geqslant N$$

Esto significa que $|a_{n+1}| > |a_n|$ siempre que $n \geqslant N$ y de este modo,

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$$

En consecuencia, $\sum a_n$ es divergente según la prueba para la divergencia.

NOTA La parte iii) de la prueba de la razón establece que si $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = 1$, la prueba no proporciona información. Por ejemplo, en cuanto a la serie convergente $\sum 1/n^2$ tenemos

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\dfrac{1}{(n+1)^2}}{\dfrac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2} \to 1 \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

mientras que para la serie divergente $\sum 1/n$ tenemos

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\dfrac{1}{n}} \to 1 \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

La prueba de la razón generalmente es concluyente si el n-ésimo término de la serie contiene un exponencial o factorial, como vimos en los ejemplos 4 y 5.

Por tanto, si $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = 1$, la serie $\sum a_n$ podría ser convergente o divergente. En este caso, la prueba de la razón no funciona, por lo que debemos aplicar otra prueba.

EJEMPLO 4 Pruebe si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{n^3}{3^n}$ es absolutamente convergente.

SOLUCIÓN Aplique la prueba de la razón con $a_n = (-1)^n n^3/3^n$:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)^3}{3^{n+1}}}{\dfrac{(-1)^n n^3}{3^n}}\right| = \frac{(n+1)^3}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^3}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3 \to \frac{1}{3} < 1$$

Estimación de sumas

En las tres últimas secciones usamos varios métodos para estimar la suma de una serie, y el método depende de cuál prueba se usaba para demostrar la convergencia. ¿Qué sucede con las series para las cuales sí funciona la prueba de la razón? Hay dos posibilidades: si la serie es alternante, como en el ejemplo 4, entonces es mejor aplicar los métodos de la sección 11.5. Si todos los términos son positivos, entonces aplicamos los métodos especiales que se explican en el ejercicio 38.

De esta manera, de acuerdo con la prueba de la razón, la serie dada es absolutamente convergente y, en consecuencia, convergente.

V EJEMPLO 5 Pruebe la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

SOLUCIÓN Puesto que los términos $a_n = n^n/n!$ son positivos, no necesitamos los signos del valor absoluto.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n}$$

$$= \frac{(n+1)(n+1)^n}{(n+1)n!} \cdot \frac{n!}{n^n}$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

(Véase ecuación 3.6.6.) Puesto que $e > 1$, la serie dada es divergente según la prueba de la razón.

NOTA Aunque la prueba de la razón funciona en el ejemplo 5, un método más fácil es usar la prueba de la divergencia. Como

$$a_n = \frac{n^n}{n!} = \frac{n \cdot n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n} \geqslant n$$

se infiere que a_n no tiende a 0 cuando $n \to \infty$. Por tanto, la serie dada es divergente según la prueba para la divergencia.

Es conveniente aplicar la siguiente prueba cuando hay potencias n-ésimas. Su demostración es similar a la de la prueba de la razón y se deja para el ejercicio 41.

Prueba de la raíz

i) Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente (y, por tanto, convergente).

ii) Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ o $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

iii) Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, la prueba de la raíz no es concluyente.

Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, entonces el inciso iii) de la prueba de la raíz establece que la prueba no proporciona información. La serie Σa_n podría ser convergente o divergente. (Si $L = 1$ en la prueba de la razón, no intente con la prueba de la raíz porque L será otra vez 1. Y si $L = 1$ en la prueba de la raíz, no intente la prueba de la razón porque también fallará.)

V EJEMPLO 6 Pruebe la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$.

SOLUCIÓN

$$a_n = \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{2n+3}{3n+2} = \frac{2 + \frac{3}{n}}{3 + \frac{2}{n}} \to \frac{2}{3} < 1$$

Así, la serie dada converge según la prueba de la raíz.

Reordenamientos

La pregunta de si una serie dada que es convergente es absolutamente convergente o condicionalmente convergente, tiene relación con la pregunta si las sumas infinitas se comportan como las sumas finitas.

Naturalmente, si reordenamos los términos en una suma finita, entonces el valor de la suma no cambia. Pero esto no siempre sucede en las series infinitas. Con **reordenamiento** de una serie infinita $\sum a_n$ se da a entender una serie obtenida simplemente al cambiar el orden de los términos. Por ejemplo, un reordenamiento de $\sum a_n$ podría empezar como sigue:

$$a_1 + a_2 + a_5 + a_3 + a_4 + a_{15} + a_6 + a_7 + a_{20} + \cdots$$

Resulta que

> si $\sum a_n$ es una serie absolutamente convergente con suma s,
> entonces cualquier reordenamiento de $\sum a_n$ tiene la misma suma s.

Sin embargo, cualquier serie condicionalmente convergente se puede reordenar, con lo cual la suma será distinta. Para ilustrar este hecho considere la serie armónica alternante

$$\boxed{6} \qquad 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8} + \cdots = \ln 2$$

(Véase ejercicio 36 en la sección 11.5.) Si multiplicamos la serie por $\frac{1}{2}$, obtenemos

$$\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{8} + \cdots = \tfrac{1}{2}\ln 2$$

Si insertamos ceros entre los términos de esta serie, tenemos

Sumar ceros no afecta la suma de la serie; cada uno de los términos de la sucesión de sumas parciales se repite, pero el límite es el mismo.

$$\boxed{7} \qquad 0 + \tfrac{1}{2} + 0 - \tfrac{1}{4} + 0 + \tfrac{1}{6} + 0 - \tfrac{1}{8} + \cdots = \tfrac{1}{2}\ln 2$$

Ahora sumamos la serie de las ecuaciones 6 y 7 usando el teorema 11.2.8:

$$\boxed{8} \qquad 1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{4} + \cdots = \tfrac{3}{2}\ln 2$$

Observemos que la serie en 8 consta de los mismos términos que en 6, pero reordenados de modo que haya un término negativo después de cada par de términos positivos. Pero las sumas de estas series son diferentes. De hecho, Riemann demostró que

> si $\sum a_n$ es una serie condicionalmente convergente y r es cualquier número real,
> entonces hay un reordenamiento de $\sum a_n$ que tiene una suma igual a r.

Una demostración de este hecho se plantea en el ejercicio 44.

11.6 Ejercicios

1. ¿Qué puede decir acerca de la serie $\sum a_n$ en cada uno de los casos siguientes?

a) $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 8$ b) $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0.8$

c) $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$

2–30 Determine si la serie es absolutamente convergente, condicionalmente convergente o divergente.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^2}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+4}$

5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5n+1}$

6. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(2n+1)!}$

7. $\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{2}{3}\right)^k$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{100^n}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(1.1)^n}{n^4}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\sqrt{n^3+2}}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{1/n}}{n^3}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 4n}{4^n}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(n+1)4^{2n+1}}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{(-10)^{n+1}}$

1. Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \arctan n}{n^2}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 - \cos n}{n^{2/3} - 2}$

17. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi/3)}{n!}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^n}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 + 1}{2n^2 + 1} \right)^n$

22. $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{-2n}{n + 1} \right)^{5n}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{100} 100^n}{n!}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n^2}}{n!}$

27. $1 - \frac{1 \cdot 3}{3!} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{5!} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n - 1)}{(2n - 1)!} + \cdots$

28. $\frac{2}{5} + \frac{2 \cdot 6}{5 \cdot 8} + \frac{2 \cdot 6 \cdot 10}{5 \cdot 8 \cdot 11} + \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14}{5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 14} + \cdots$

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)}{n!}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n n!}{5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot \cdots \cdot (3n + 2)}$

---

31. Los términos de una serie se definen en forma recursiva mediante las ecuaciones

$$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \frac{5n + 1}{4n + 3} a_n$$

Determine si $\sum a_n$ es convergente o divergente.

32. Una serie $\sum a_n$ está definida por las ecuaciones

$$a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = \frac{2 + \cos n}{\sqrt{n}} a_n$$

Determine si $\sum a_n$ converge o diverge.

33–34. Sea $\{b_n\}$ una sucesión de números positivos que converge a $\frac{1}{2}$. Determine si la serie dada es absolutamente convergente.

33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^n \cos n\pi}{n}$

34. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{n^n b_1 b_2 b_3 \cdots b_n}$

---

35. ¿Para cuáles de las series siguientes la prueba de la razón no es concluyente (es decir, no proporciona una respuesta definida)?

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{\sqrt{n}}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{1 + n^2}$

36. ¿Para cuáles enteros positivos k la serie siguiente es convergente?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(kn)!}$$

37. a) Demuestre que $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ converge para toda x.
b) Deduzca que $\lim_{n\to\infty} x^n/n! = 0$ para toda x.

38. Sea $\sum a_n$ una serie con términos positivos y sea $r_n = a_{n+1}/a_n$. Suponga que $\lim_{n\to\infty} r_n = L < 1$, de modo que $\sum a_n$ es convergente según la prueba de la razón. Como es lo usual, sea R_n el residuo después de n términos, es decir,

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots$$

a) Si $\{r_n\}$ es una sucesión decreciente y $r_{n+1} < 1$, demuestre con la suma de una serie geométrica que

$$R_n \leq \frac{a_{n+1}}{1 - r_{n+1}}$$

b) Si $\{r_n\}$ es una sucesión creciente, demuestre que

$$R_n \leq \frac{a_{n+1}}{1 - L}$$

39. a) Calcule la suma parcial s_5 de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n2^n)$. Con ayuda del ejercicio 38 estime el error al usar s_5 como una aproximación a la suma de la serie.
b) Determine un valor de n de tal modo que s_n no difiera 0.00005 de la suma real. Use este valor de n para obtener un valor aproximado de la suma de la serie.

40. Use la suma de los primeros 10 términos para obtener un valor aproximado de la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

Aplique el ejercicio 38 para estimar el error.

41. Demuestre la prueba de la raíz. [*Sugerencia para inciso* i): tome cualquier número r tal que $L < r < 1$ y utilice el hecho de que hay un entero N tal que $\sqrt[n]{|a_n|} < r$ siempre que $n \geq N$.]

42. Hacia 1910, Srinivasa Ramanujan, matemático de la India, descubrió la fórmula

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9\,801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(1\,103 + 26\,390n)}{(n!)^4 396^{4n}}$$

William Gosper utilizó esta serie en 1985 para calcular los primeros 17 millones de dígitos de π.
a) Verifique que la serie es convergente.
b) ¿Cuántos lugares decimales correctos de π obtiene el lector si usa sólo el primer término de la serie? ¿Qué pasa si usa dos términos?

43. Dada cualquier serie $\sum a_n$, definimos una serie $\sum a_n^+$ cuyos términos son todos positivos de $\sum a_n$ y una serie $\sum a_n^-$ cuyos términos son todos negativos de $\sum a_n$. Para ser específicos, sea

$$a_n^+ = \frac{a_n + |a_n|}{2} \qquad a_n^- = \frac{a_n - |a_n|}{2}$$

Observe que si $a_n > 0$, entonces $a_n^+ = a_n$ y $a_n^- = a_n$, mientras que si $a_n < 0$, entonces $a_n^- = a_n$ y $a_n^+ = 0$.

a) Si Σa_n es absolutamente convergente, demuestre que tanto la serie Σa_n^+ como la Σa_n^- son convergentes.

b) Si Σa_n es condicionalmente convergente, demuestre que tanto la serie Σa_n^+ como la Σa_n^- son divergentes.

44. Demuestre que si Σa_n es una serie condicionalmente convergente y r es cualquier número real, entonces hay un reordenamiento de Σa_n cuya suma es r. [*Sugerencias:* utilice la notación del ejercicio 43. Tome sólo suficientes términos positivos a_n^+ de modo que su suma sea mayor que r. Luego sume sólo suficientes términos negativos a_n^- para que la suma acumulativa sea menor que r. Continúe así y aplique el teorema 11.2.6.]

45. Suponga que la serie Σa_n es condicionalmente convergente.

a) Demuestre que la serie $\Sigma n^2 a_n$ es divergente.

b) La convergencia condicional de Σa_n no es suficiente para determinar si $\Sigma n a_n$ es convergente. Demuestre esto dando un ejemplo de una serie condicionalmente convergente tal que $\Sigma n a_n$ converge y un ejemplo donde $\Sigma n a_n$ diverge.

11.7 Estrategia para probar series

Ya tenemos varias maneras de probar la convergencia o divergencia de una serie; ahora el problema es decidir cuál prueba aplicar en cada serie. En este aspecto, probar series es parecido a integrar funciones. No hay reglas rígidas y rápidas con respecto a qué prueba aplicar a una serie dada, pero puede seguir las recomendaciones siguientes, que le pueden ser útiles.

No es prudente aplicar una lista de pruebas en un orden específico hasta que una funcione. Eso sería un desperdicio de tiempo y esfuerzo. En lugar de eso, al igual que en la integración, la estrategia principal es clasificar las series de acuerdo con su *forma.*

1. Si la serie es de la forma $\Sigma 1/n^p$, es una serie p, lo cual significa que es convergente si $p > 1$ y divergente si $p \leq 1$.
2. Si la serie es de la forma Σar^{n-1} o Σar^n, es una serie geométrica, la cual converge si $|r| < 1$ y diverge si $|r| \geq 1$. Se podrían requerir algunas operaciones algebraicas para hacer que la serie adquiera esta forma.
3. Si la serie posee una forma similar a la de una serie p o a una serie geométrica, entonces se debe considerar una de las pruebas por comparación. En particular, si a_n es una función racional o una función algebraica de n (es decir, que contiene raíces de polinomiales), entonces la serie se debe comparar contra una serie p. Observe que la mayoría de las series de los ejercicios 11.4 poseen esta forma. (El valor de p se debe escoger como en la sección 11.4, y conservar sólo las potencias más altas de n en el numerador y en el denominador.) Las pruebas por comparación se aplican sólo en series con términos positivos, pero si Σa_n tiene algunos términos negativos, entonces podemos aplicar la prueba por comparación a $\Sigma |a_n|$ y probar si hay convergencia absoluta.
4. Si es fácil ver que $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, entonces se debe aplicar la prueba para la divergencia.
5. Si la serie es de la forma $\Sigma (-1)^{n-1} b_n$, o bien, $\Sigma (-1)^n b_n$, entonces una posibilidad obvia es la prueba de la serie alternante.
6. Las series que contienen factoriales u otros productos (incluso una constante elevada a una potencia n-ésima) se prueban en forma aceptable usando la prueba de la razón. Siempre piense que $|a_{n+1}/an| \longrightarrow 1$ cuando $n \longrightarrow \infty$ para todas las series p y, por tanto, todas las funciones racionales o algebraicas de n. En estas condiciones, la prueba de la raíz no se debe aplicar para dichas series.
7. Si a_n es de la forma $(b_n)^n$, entonces la prueba de la raíz podría ser útil.
8. Si $a_n = f(n)$, donde $\int_1^\infty f(x)\,dx$ se puede evaluar con facilidad, entonces la prueba de la integral es efectiva (suponiendo que la hipótesis de esta prueba se cumple).

En los ejemplos siguientes no se presenta todo el desarrollo, sino que simplemente se indica qué prueba se debe usar.

V EJEMPLO 1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{2n+1}$

Puesto que $a_n \to \frac{1}{2} \neq 0$ cuando $n \to \infty$, debe usar la prueba para la divergencia.

EJEMPLO 2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+1}}{3n^3+4n^2+2}$

Como a_n es una función algebraica de n, compare la serie dada con la serie p. La serie de comparación para la prueba de comparación en el límite es $\sum b_n$, donde

$$b_n = \frac{\sqrt{n^3}}{3n^3} = \frac{n^{3/2}}{3n^3} = \frac{1}{3n^{3/2}}$$

V EJEMPLO 3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$

Puesto que la integral $\int_1^{\infty} xe^{-x^2}\,dx$ se evalúa con facilidad, use la prueba de la integral. La prueba de la razón también funciona.

EJEMPLO 4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{n^4+1}$

Como la serie es alternante, aplique la prueba de la serie alternante.

V EJEMPLO 5 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$

Como la serie contiene $k!$, se aplica la prueba de la razón.

EJEMPLO 6 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+3^n}$

La serie está estrechamente relacionada con la serie geométrica $\sum 1/3^n$, por lo que se aplica la prueba por comparación.

11.7 Ejercicios

1-38 Pruebe si las series son convergentes o divergentes.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3^n}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^n}{n^{2n}}$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+2}$
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+2}$
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 2^{n-1}}{(-5)^n}$
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$
7. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$
8. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k k!}{(k+2)!}$
9. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-k}$
10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$
11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^3} + \frac{1}{3^n}\right)$
12. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k^2+1}}$
13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n^2}{n!}$
14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 2n}{1+2^n}$
15. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}3^{k+1}}{k^k}$
16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+1}$
17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot \cdots \cdot (3n-1)}$
18. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}-1}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

20. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{k} - 1}{k(\sqrt{k} + 1)}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos(1/n^2)$

22. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2 + \operatorname{sen} k}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \tan(1/n)$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{sen}(1/n)$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^{n^2}}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{5^n}$

27. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \ln k}{(k + 1)^3}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n^2}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\cosh n}$

30. $\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{\sqrt{j}}{j + 5}$

31. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{3^k + 4^k}$

32. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{4n}}$

33. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n + 1}\right)^{n^2}$

34. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + n\cos^2 n}$

35. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}$

36. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

37. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2} - 1)^n$

38. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2} - 1)$

11.8 Series de potencias

Una **serie de potencias** es una serie de la forma

$$\boxed{1} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

donde x es una variable y las c_n son constantes llamados **coeficientes** de la serie. Para cada x fija, la serie $\boxed{1}$ es una serie de constantes que podemos probar para ver si son convergentes o divergentes. Una serie de potencias podría ser convergente para algunos valores de x y ser divergente para otros. La suma de la serie es una función

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

cuyo dominio es el conjunto de todas las x para las cuales la serie converge. Observe que f es análoga a una función polinomial. La única diferencia es que f tiene un infinito de términos.

Por ejemplo, si tomamos $c_n = 1$ para toda n, la serie de potencias se transforma en una serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

que es convergente cuando $-1 < x < 1$ y es divergente cuando $|x| \geq 1$. (Véase ecuación 11.2.5.)

Más generalmente, una serie de la forma

$$\boxed{2} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n = c_0 + c_1 (x - a) + c_2 (x - a)^2 + \cdots$$

se denomina **serie de potencias en $(x - a)$**, o bien, **serie de potencias centrada en a**, o también, **serie de potencias en torno a a**. Observe que al escribir el término correspondiente a $n = 0$ en las ecuaciones 1 y 2, se ha adoptado la convención de que $(x - a)^0 = 1$ aun cuando $x = a$. Asimismo, note que cuando $x = a$ todos los términos son 0 para $n \geq 1$ y de este modo la serie de potencias $\boxed{2}$ siempre es convergente cuando $x = a$.

Series trigonométricas
Una serie de potencias es una serie en la cual cada uno de los términos es una función potencia. Una **serie trigonométrica**

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

es una serie cuyos términos son funciones trigonométricas. Este tipo de serie se analiza en el sitio web

www.stewartcalculus.com

Haga clic en *Additional Topics* y luego en *Fourier Series*.

V EJEMPLO 1 ¿Para qué valores de x la serie $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ es convergente?

SOLUCIÓN Utilizamos la prueba de la razón. Sea a_n, como se acostumbra, el n-ésimo término de la serie, entonces $a_n = n! x^n$. Si $x \neq 0$, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n + 1)! x^{n+1}}{n! x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} (n + 1)|x| = \infty$$

Nótese que
$(n + 1)! = (n + 1)n(n - 1) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$
$= (n + 1)n!$

Según la prueba de la razón, la serie es divergente cuando $x \neq 0$. Así, la serie dada converge sólo cuando $x = 0$.

V EJEMPLO 2 ¿Para qué valores de x la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$ es convergente?

SOLUCIÓN Sea $a_n = (x-3)^n/n$. Entonces

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(x-3)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{(x-3)^n}\right|$$

$$= \frac{1}{1+\frac{1}{n}}|x-3| \to |x-3| \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

De acuerdo con la prueba de la razón, la serie dada es absolutamente convergente y, por tanto, convergente cuando $|x-3| < 1$ y divergente cuando $|x-3| > 1$. Ahora

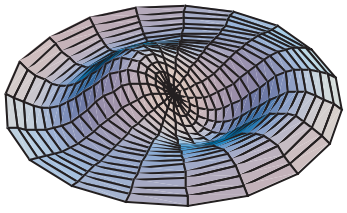
$$|x-3| < 1 \iff -1 < x-3 < 1 \iff 2 < x < 4$$

de modo que la serie converge cuando $2 < x < 4$ y diverge cuando $x < 2$ o bien $x > 4$.

La prueba de la razón no proporciona información cuando $|x-3| = 1$ de modo que debemos considerar $x = 2$ y $x = 4$ por separado. Si ponemos $x = 4$ en la serie, resulta $\Sigma 1/n$, la serie armónica, la cual es divergente. Si $x = 2$, la serie es $\Sigma(-1)^n/n$, la cual es convergente de acuerdo con la prueba de la serie alternante. Por tanto, la serie de potencias dada converge para $2 \leq x < 4$.



National Film Board of Canada



Observe cómo la aproximación del modelo generado por computadora (el cual utiliza funciones de Bessel y de cosenos) coincide con la fotografía de una membrana vibratoria de hule.

Veremos que el uso principal de las series de potencias es proporcionar una manera de representar algunas de las funciones más importantes que surgen en matemáticas, física y química. En particular, la suma de la serie de potencias del ejemplo siguiente se llama **función de Bessel,** en honor al astrónomo alemán Friedrich Bessel (1784-1846), y la función dada en el ejercicio 35 es otro ejemplo de la función de Bessel. En efecto, estas funciones surgieron primero cuando Bessel resolvió la ecuación de Kepler para describir el movimiento de los planetas. Desde esa época, estas funciones se aplican en diversas situaciones físicas, sin olvidar la distribución de temperaturas en una lámina circular y las vibraciones de una membrana de un tambor.

EJEMPLO 3 Determine el dominio de la función de Bessel de orden 0 definida por

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

SOLUCIÓN Sea $a_n = (-1)^n x^{2n}/[2^{2n}(n!)^2]$. Entonces

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}x^{2(n+1)}}{2^{2(n+1)}[(n+1)!]^2} \cdot \frac{2^{2n}(n!)^2}{(-1)^n x^{2n}}\right|$$

$$= \frac{x^{2n+2}}{2^{2n+2}(n+1)^2(n!)^2} \cdot \frac{2^{2n}(n!)^2}{x^{2n}}$$

$$= \frac{x^2}{4(n+1)^2} \to 0 < 1 \qquad \text{para toda } x$$

De este modo, de acuerdo con la prueba de la razón, la serie dada converge para todos los valores de x. En otras palabras, el dominio de la función de Bessel J_0 es $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

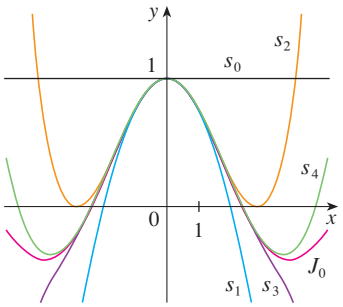


FIGURA 1
Sumas parciales de la función de Bessel J_0

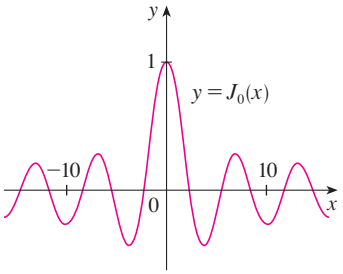


FIGURA 2

Recuerde que la suma de una serie es igual al límite de la sucesión de las sumas parciales. De esa manera, cuando se define la función de Bessel del ejemplo 3 como la suma de una serie significa que, para todo número real x,

$$J_0(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) \qquad \text{donde} \qquad s_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i x^{2i}}{2^{2i}(i!)^2}$$

Las primeras sumas parciales son

$$s_0(x) = 1 \qquad s_1(x) = 1 - \frac{x^2}{4} \qquad s_2(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64}$$

$$s_3(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2\,304} \qquad s_4(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2\,304} + \frac{x^8}{147\,456}$$

En la figura 1 se muestran las gráficas de estas sumas parciales, las cuales son funciones polinomiales. Todas son aproximaciones de la función J_0, pero observe que la aproximación es mejor cuando se incluyen más términos. En la figura 2 se ilustra una gráfica más completa de la función de Bessel.

En lo que respecta a la serie de potencias examinadas hasta el momento, el conjunto de valores de x para los cuales la serie es convergente ha resultado ser siempre un intervalo [un intervalo finito de la serie geométrica y la serie del ejemplo 2, el intervalo infinito $(-\infty, \infty)$ del ejemplo 3 y un intervalo colapsado $[0, 0] = \{0\}$ del ejemplo 1]. El teorema siguiente, demostrado en el apéndice F, establece que esto es válido en general.

3 Teorema Para una serie de potencias dada $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ hay sólo tres posibilidades:

i) La serie converge sólo cuando $x = a$.

ii) La serie converge para toda x.

iii) Hay un número positivo R tal que la serie converge si $|x-a| < R$ y diverge si $|x-a| > R$.

El número R en el caso iii) se llama **radio de convergencia** de la serie de potencias. Por convención, el radio de convergencia es $R = 0$ en el caso i) y $R = \infty$ en el caso ii). El **intervalo de convergencia** de una serie de potencias es el intervalo que consiste en todos los valores de x para los cuales la serie converge. En el caso i) el intervalo consta de un solo punto a. En el caso ii) el intervalo es $(-\infty, \infty)$. Observe que en el caso iii) la desigualdad $|x-a| < R$ se puede escribir de nuevo como $a - R < x < a + R$. Cuando x es un *extremo* del intervalo, es decir, $x = a \pm R$, cualquier cosa puede suceder: la serie podría ser convergente en uno o en ambos extremos, o podría ser divergente en ambos extremos. Por tanto, en el caso iii) hay cuatro posibilidades para el intervalo de convergencia:

$$(a-R, a+R) \qquad (a-R, a+R] \qquad [a-R, a+R) \qquad [a-R, a+R]$$

La situación se ilustra en la figura 3.

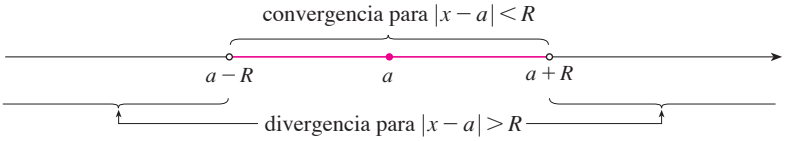


FIGURA 3

Aquí resumimos el radio y el intervalo de convergencia para cada uno de los ejemplos ya considerados en esta sección.

	Series	Radio de convergencia	Intervalo de convergencia
Serie geométrica	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$R = 1$	$(-1, 1)$
Ejemplo 1	$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$	$R = 0$	$\{0\}$
Ejemplo 2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$	$R = 1$	$[2, 4)$
Ejemplo 3	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$	$R = \infty$	$(-\infty, \infty)$

En general, la prueba de la razón (o a veces, la prueba de la raíz) se debe usar para determinar el radio de convergencia R. Las pruebas de la razón y la raíz siempre fracasan cuando x es un extremo del intervalo de convergencia, de modo que es necesario verificar los extremos por medio de alguna otra prueba.

EJEMPLO 4 Determine el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$$

SOLUCIÓN Sea $a_n = (-3)^n x^n / \sqrt{n+1}$. Entonces

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-3)^{n+1}x^{n+1}}{\sqrt{n+2}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{(-3)^n x^n}\right| = \left|-3x\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\right|$$

$$= 3\sqrt{\frac{1+(1/n)}{1+(2/n)}}\,|x| \to 3|x| \quad \text{cuando } n \to \infty$$

De acuerdo con la prueba de la razón, la serie dada converge si $3|x| < 1$ y es divergente si $3|x| > 1$. En estos términos, es convergente si $|x| < \frac{1}{3}$ y divergente si $|x| > \frac{1}{3}$. Esto significa que el radio de convergencia es $R = \frac{1}{3}$.

Sabemos que la serie converge en el intervalo $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, pero ahora es necesario probar si hay convergencia en los extremos de este intervalo. Si $x = -\frac{1}{3}$, la serie se transforma en

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$$

la cual es divergente. (Aplique la prueba de la integral o simplemente observe que es una serie p con $p = \frac{1}{2} < 1$.) Si $x = \frac{1}{3}$, la serie es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

la cual converge de acuerdo con la prueba de la serie alternante. Por tanto, la serie de potencias dada converge cuando $-\frac{1}{3} < x \leqslant \frac{1}{3}$, de modo que el intervalo de convergencia es $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$.

V EJEMPLO 5 Determine el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$$

SOLUCIÓN Si $a_n = n(x+2)^n/3^{n+1}$, entonces

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)(x+2)^{n+1}}{3^{n+2}} \cdot \frac{3^{n+1}}{n(x+2)^n}\right|$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{|x+2|}{3} \to \frac{|x+2|}{3} \quad \text{cuando } n \to \infty$$

Al usar la prueba de la razón, se ve que la serie es convergente si $|x+2|/3 < 1$ y que es divergente si $|x+2|/3 > 1$. De modo que es convergente si $|x+2| < 3$ y divergente si $|x+2| > 3$. Así que, el radio de convergencia es $R = 3$.

La desigualdad $|x+2| < 3$ se puede escribir como $-5 < x < 1$, así que probamos la serie en los extremos -5 y 1. Cuando $x = -5$, la serie es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(-3)^n}{3^{n+1}} = \tfrac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n$$

la cual es divergente según la prueba de la divergencia [$(-1)^n n$ no converge a 0]. Cuando $x = 1$, la serie es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(3)^n}{3^{n+1}} = \tfrac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} n$$

la cual también es divergente según la prueba de la divergencia. Por esto, la serie converge sólo cuando $-5 < x < 1$, de modo que el intervalo de convergencia es $(-5, 1)$.

11.8 Ejercicios

1. ¿Qué es una serie de potencias?

2. a) ¿Cuál es el radio de convergencia de una serie de potencias? ¿Cómo se determina?
   b) ¿Cuál es el intervalo de convergencia de una serie de potencias? ¿Cómo se calcula?

3-28 Determine el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de la serie.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^n$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt[3]{n}}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n-1}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^2}$

7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 x^n}{2^n}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{n^3}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n\sqrt{n}} x^n$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n3^n}$

13. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{4^n \ln n}$

14. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

15. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2+1}$

16. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{2n+1}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(x+4)^n}{\sqrt{n}}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n}(x+1)^n$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^n}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{5^n\sqrt{n}}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{b^n}(x-a)^n, \quad b>0$

22. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{b^n}{\ln n}(x-a)^n, \quad b>0$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} n!(2x-1)^n$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \cdots \cdot (2n)}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5x-4)^n}{n^3}$

26. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n(\ln n)^2}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot (2n-1)}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,x^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot (2n-1)}$

29. Si $\sum_{n=0}^{\infty} c_n 4^n$ es convergente, ¿se infiere que las siguientes series son convergentes?

a) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(-2)^n$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(-4)^n$

30. Suponga que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge cuando $x=-4$ y diverge cuando $x=6$. ¿Qué puede decir con respecto a la convergencia o divergencia de la serie siguiente?

a) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n 8^n$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(-3)^n$ d) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n 9^n$

31. Si k es un entero positivo, encuentre el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!}x^n$$

32. Sean p y q números reales con $p<q$. Encuentre una serie de potencias cuyo intervalo de convergencia sea

a) (p, q) b) $(p, q]$

c) $[p, q)$ d) $[p, q]$

33. ¿Es posible hallar una serie de potencias cuyo intervalo de convergencia sea $[0, \infty)$? Explique.

34. Grafique las primeras sumas parciales $s_n(x)$ de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, junto con la función suma $f(x)=1/(1-x)$ sobre una misma pantalla. ¿Sobre qué intervalo parece que convergen estas sumas parciales a $f(x)$?

35. La función J_1 definida por

$$J_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(n+1)!\,2^{2n+1}}$$

se llama *función de Bessel de orden 1*.

a) Determine el dominio.

b) Grafique las primeras sumas parciales en una misma pantalla.

c) Si su SAC tiene incorporadas las funciones de Bessel, grafique J_1 en la misma pantalla que las sumas parciales del inciso b) y observe cómo se aproximan las sumas parciales a J_1.

36. La función A se define mediante

$$A(x)=1+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}+\frac{x^9}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9}+\cdots$$

que se llama *función de Airy* en honor al matemático y astrónomo inglés sir George Airy (1801-1892).

a) Determine el dominio de la función de Airy.

b) Grafique las primeras sumas parciales en una misma pantalla.

c) Si su SAC tiene incorporadas las funciones de Airy, grafique A en la misma pantalla que las sumas parciales del inciso b), y observe cómo las sumas parciales se aproximan a A.

37. Una función f está definida mediante

$$f(x)=1+2x+x^2+2x^3+x^4+\cdots$$

es decir, sus coeficientes son $c_{2n}=1$ y $c_{2n+1}=2$ para toda $n\geq 0$. Determine el intervalo de convergencia de la serie y plantee una fórmula explícita para $f(x)$.

38. Si $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, donde $c_{n+4}=c_n$ para toda $n\geq 0$, determine el intervalo de convergencia de la serie y una fórmula para $f(x)$.

39. Demuestre que si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}=c$, donde $c\neq 0$, entonces el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum c_n x^n$ es $R=1/c$.

40. Suponga que la serie de potencias $\sum c_n(x-a)^n$ satisface $c_n\neq 0$ para toda n. Demuestre que si $\lim_{n\to\infty} |c_n/c_{n+1}|$ existe, entonces es igual al radio de convergencia de la serie de potencias.

41. Suponga que el radio de convergencia de la serie $\sum c_n x^n$ es 2 y que el radio de convergencia de la serie $\sum d_n x^n$ es 3. ¿Cuál es el radio de convergencia de la serie $\sum (c_n+d_n)x^n$?

42. Suponga que el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum c_n x^n$ es R. ¿Cuál es el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum c_n x^{2n}$?

11.9 Representación de las funciones como series de potencias

En esta sección aprenderá a representar ciertos tipos de funciones como sumas de series de potencias mediante la manipulación de series geométricas, o mediante derivación o integración de dichas series. Quizá se pregunte por qué siempre se busca expresar una función conocida como una suma de una cantidad infinita de términos. Más adelante se explica la utilidad de esta estrategia en la integración de funciones que no tienen antiderivadas elementales, en la solución de ecuaciones diferenciales y para aproximar funciones

mediante polinomiales. (Los científicos lo hacen así para simplificar las expresiones con las que trabajan; los especialistas en computación lo hacen así para representar funciones en calculadoras y computadoras.)

Empecemos con una ecuación que ya estudiamos antes:

$$\boxed{1} \qquad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x| < 1$$

Ya encontramos esta ecuación en el ejemplo 6 de la sección 11.2, donde la obtuvimos al observar que es una serie geométrica con $a = 1$ y $r = x$. Pero en este caso nuestro punto de vista es distinto. Ahora considere la ecuación 1 como expresión de la función $f(x) = 1/(1 - x)$ como una suma de una serie de potencias.

Una ilustración geométrica de la ecuación 1 se muestra en la figura 1. Como la suma de una serie es el límite de la sucesión de las sumas parciales

$$\frac{1}{1-x} = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$$

donde

$$s_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

es la n-ésima suma parcial. Observe que cuando n se incrementa, $s_n(x)$ se vuelve una mejor aproximación de $f(x)$ para $-1 < x < 1$.

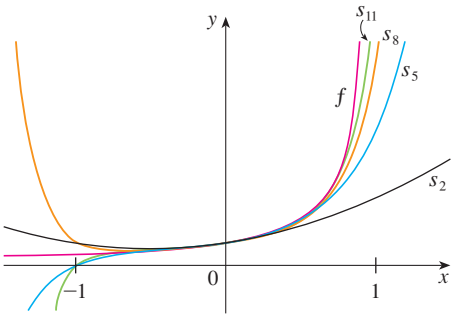


FIGURA 1

$f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ y algunas sumas parciales

V EJEMPLO 1 Exprese $1/(1 + x^2)$ como la suma de una serie de potencias y determine el intervalo de convergencia.

SOLUCIÓN Al reemplazar x por $-x^2$ en la ecuación 1, tenemos

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots$$

Como ésta es una serie geométrica, es convergente cuando $|-x^2| < 1$, es decir, $x^2 < 1$, o bien, $|x| < 1$. Por tanto, el intervalo de convergencia es $(-1, 1)$. Naturalmente, podría haber determinado el radio de convergencia aplicando la prueba de la razón, pero esa cantidad de trabajo es innecesaria en este caso.

EJEMPLO 2 Determine una representación en serie de potencias para $1/(x + 2)$.

SOLUCIÓN Con objeto de poner esta función en la forma del lado izquierdo de la ecuación 1, primero se factoriza un 2 del denominador:

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2\left(1 + \dfrac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2\left[1 - \left(-\dfrac{x}{2}\right)\right]}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^n$$

Esta serie converge cuando $|-x/2| < 1$, es decir, $|x| < 2$. De modo que el intervalo de convergencia es $(-2, 2)$.

EJEMPLO 3 Obtenga una representación como serie de potencias de $x^3/(x+2)$.

SOLUCIÓN Puesto que esta función es justamente x^3 veces la función del ejemplo 2, todo lo que debe hacer es multiplicar esa serie por x^3:

Es válido pasar x^3 al otro lado del signo de la suma porque no depende de n. [Aplique el teorema 11.2.8 i) con $c = x^3$.]

$$\frac{x^3}{x+2} = x^3 \cdot \frac{1}{x+2} = x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^{n+3}$$

$$= \tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{8}x^5 - \tfrac{1}{16}x^6 + \cdots$$

Otra forma de escribir esta serie es como sigue:

$$\frac{x^3}{x+2} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-2}} x^n$$

Como en el ejemplo 2, el intervalo de convergencia es $(-2, 2)$.

Derivación e integración de series de potencias

La suma de una serie de potencias es una función $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ cuyo dominio es el intervalo de convergencia de la serie. Para derivar e integrar estas funciones, el siguiente teorema (el cual no será demostrado) establece que es posible derivar o integrar cada uno de los términos de la serie, justo como se haría para un polinomio. Esto se denomina **derivación e integración término a término**.

2 Teorema Si la serie de potencias $\sum c_n(x-a)^n$ posee un radio de convergencia $R > 0$, entonces la función f definida por

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

es derivable (y, por tanto, continua) sobre el intervalo $(a-R, a+R)$ y

En el inciso ii), $\int c_0\,dx = c_0x + C_1$ se escribe como $c_0(x-a) + C$, donde $C = C_1 + ac_0$, de modo que todos los términos de la serie tienen la misma forma.

i) $$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$$

ii) $$\int f(x)\,dx = C + c_0(x-a) + c_1\frac{(x-a)^2}{2} + c_2\frac{(x-a)^3}{3} + \cdots$$

$$= C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

Los radios de convergencia de la serie de potencias en las ecuaciones i) y ii) son R.

NOTA 1 Las ecuaciones i) y ii) del teorema 2 se pueden volver a escribir en la forma

iii) $$\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left[c_n(x-a)^n\right]$$

iv) $$\int \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right] dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int c_n(x-a)^n\,dx$$

Sabemos que, por lo que toca a las sumas finitas, la derivada de una suma es la suma de las derivadas y la integral de una suma es la suma de las integrales. Las ecuaciones iii) y iv) aseguran que lo mismo se cumple para sumas infinitas, siempre que esté trabajando con *series de potencias.* (En el caso de otros tipos de series de funciones la situación no es tan simple; véase ejercicio 38.)

NOTA 2 Aunque el teorema 2 establece que el radio de convergencia es el mismo cuando una serie de potencias es derivada o integrada, esto no quiere decir que el *intervalo* de convergencia siga siendo el mismo. Podría suceder que la serie original converja en el extremo, y que la serie derivada sea divergente ahí. (Véase ejercicio el 39.)

NOTA 3 La idea de derivar una serie de potencias término a término es la base de un método eficaz para resolver ecuaciones diferenciales. Estudiaremos este método en el capítulo 17.

EJEMPLO 4 En el ejemplo 3 de la sección 11.8 vimos que la función de Bessel

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

se define para toda x. De esta manera, de acuerdo con el teorema 2, J_0 es derivable para toda x y su derivada se encuentra derivando término a término como sigue:

$$J_0'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n x^{2n-1}}{2^{2n}(n!)^2}$$

V EJEMPLO 5 Exprese $1/(1 - x)^2$ como una serie de potencias derivando la ecuación 1. ¿Cuál es el radio de convergencia?

SOLUCIÓN Al derivar cada miembro de la ecuación

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

obtenemos

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

Si quisiéramos podríamos reemplazar n por $n + 1$ y escribir la respuesta como

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

De acuerdo con el teorema 2, el radio de convergencia de la serie derivada es el mismo que el radio de convergencia de la serie original, $R = 1$.

EJEMPLO 6 Determine una representación como serie de potencias para $\ln(1 + x)$ y su radio de convergencia.

SOLUCIÓN Observe que la derivada de esta función es $1/(1 + x)$. De la ecuación 1 tenemos

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \qquad |x| < 1$$

Integrando ambos lados de esta expresión, obtenemos

$$\ln(1+x) = \int \frac{1}{1+x}\,dx = \int (1 - x + x^2 - x^3 + \cdots)\,dx$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + C$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + C \qquad |x| < 1$$

Para determinar el valor de C hacemos $x = 0$ en esta ecuación y obtenemos $1\ln(1 + 0) = C$. Por tanto, $C = 0$ y

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \qquad |x| < 1$$

El radio de convergencia es el mismo que el de la serie original: $R = 1$.

V EJEMPLO 7 Encuentre una representación como serie de potencias para $f(x) = \tan^{-1}x$.

SOLUCIÓN Observe que $f'(x) = 1/(1 + x^2)$ y encuentre la serie requerida integrando la serie de potencias para $1/(1 + x^2)$ determinada en el ejemplo 1.

$$\tan^{-1}x = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots)\,dx$$

$$= C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Para determinar C hacemos $x = 0$ y obtenemos $C = \tan^{-1}0 = 0$. Por tanto,

$$\tan^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Puesto que el radio de convergencia de la serie para $1/(1 + x^2)$ es 1, el radio de convergencia de esta serie para $\tan^{-1}x$ es también 1.

La serie de potencias para $\tan^{-1}x$ obtenida en el ejemplo 7 se llama *serie de Gregory* en honor al matemático escocés James Gregory (1638-1675), quien pronosticó algunos de los descubrimientos de Newton. Ya se demostró que la serie de Gregory es válida cuando $-1 < x < 1$, pero resulta que (aunque no es fácil de demostrar) también es válida cuando $x = \pm 1$. Observe que cuando $x = 1$ la serie se transforma en

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Este admirable resultado se conoce como fórmula de Leibniz para π.

EJEMPLO 8

a) Evalúe $\int [1/(1 + x^7)]\,dx$ como una serie de potencias.

b) Mediante el inciso a) obtenga una aproximación de $\int_0^{0.5} [1/(1 + x^7)]\,dx$ con una aproximación de 10^{-7} del valor real.

SOLUCIÓN

a) El primer paso es expresar el integrando, $1/(1 - x^7)$ como la suma de una serie de potencias. Como en el ejemplo 1, inicie con la ecuación 1 y reemplace x por $-x^7$:

$$\frac{1}{1+x^7} = \frac{1}{1-(-x^7)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^7)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{7n} = 1 - x^7 + x^{14} - \cdots$$

Este ejemplo muestra una manera en que las representaciones como series de potencias pueden ser útiles. Integrar $1/(1 - x^7)$ a mano es increíblemente difícil. Diferentes sistemas algebraicos computacionales dan respuestas de distintas formas, pero son extremadamente complicadas. (Si tiene un SAC, inténtelo usted mismo.) La respuesta de la serie infinita que se obtiene en el ejemplo 8a) es realmente mucho más fácil de manejar que la respuesta finita que proporciona un SAC.

Ahora integramos término a término:

$$\int \frac{1}{1+x^7}\,dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{7n}\,dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{7n+1}}{7n+1}$$

$$= C + x - \frac{x^8}{8} + \frac{x^{15}}{15} - \frac{x^{22}}{22} + \cdots$$

Esta serie converge para $|-x^7| < 1$, es decir, para $|x| < 1$.

b) Si aplicamos el teorema fundamental del cálculo no importa qué antiderivada usemos, de modo que utilicemos la antiderivada del inciso a) con $C = 0$:

$$\int_0^{0.5} \frac{1}{1+x^7}\,dx = \left[x - \frac{x^8}{8} + \frac{x^{15}}{15} - \frac{x^{22}}{22} + \cdots \right]_0^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{8 \cdot 2^8} + \frac{1}{15 \cdot 2^{15}} - \frac{1}{22 \cdot 2^{22}} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(7n+1)2^{7n+1}} + \cdots$$

Esta serie infinita es el valor exacto de la integral definida, pero como es una serie alternante, podemos obtener una aproximación de la suma aplicando el teorema de la estimación de la serie alternante. Si dejamos de sumar después del término $n = 3$, el error es menor que el término con $n = 4$:

$$\frac{1}{29 \cdot 2^{29}} \approx 6.4 \times 10^{-11}$$

De modo que

$$\int_0^{0.5} \frac{1}{1+x^7}\,dx \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{8 \cdot 2^8} + \frac{1}{15 \cdot 2^{15}} - \frac{1}{22 \cdot 2^{22}} \approx 0.49951374$$

11.9 Ejercicios

1. Si el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ es 10, ¿cuál es el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$? ¿Por qué?

2. Suponga que sabe que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ es convergente para $|x| < 2$. ¿Qué puede decir de la siguiente serie? ¿Por qué?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n+1} x^{n+1}$$

3-10 Encuentre una representación como serie de potencias para la función y determine el intervalo de convergencia.

3. $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

4. $f(x) = \dfrac{5}{1-4x^2}$

5. $f(x) = \dfrac{2}{3-x}$

6. $f(x) = \dfrac{1}{x+10}$

7. $f(x) = \dfrac{x}{9+x^2}$

8. $f(x) = \dfrac{x}{2x^2+1}$

9. $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$

10. $f(x) = \dfrac{x^2}{a^3-x^3}$

11-12 Exprese la función como la suma de una serie de potencias usando primero fracciones parciales. Determine el intervalo de convergencia.

11. $f(x) = \dfrac{3}{x^2-x-2}$

12. $f(x) = \dfrac{x+2}{2x^2-x-1}$

13. a) Use la derivación para determinar una representación como serie de potencias para

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$$

¿Cuál es el radio de convergencia?

b) Por medio del inciso a) determine una serie de potencias para

$$f(x) = \frac{1}{(1 + x)^3}$$

c) Mediante el inciso b) determine una serie de potencias para

$$f(x) = \frac{x^2}{(1 + x)^3}$$

14. a) Utilice la ecuación 1 para determinar la representación en series de potencias para $f(x) = \ln(1 - x)$. ¿Cuál es el radio de convergencia?
b) Mediante el inciso a) determine una serie de potencias para $f(x) = x \ln(1 - x)$.
c) Haciendo $x = \frac{1}{2}$ en su resultado del inciso a), exprese ln 2 como la suma de una serie infinita.

15-20 Encuentre una representación como serie de potencias para la función y determine el radio de convergencia.

15. $f(x) = \ln(5 - x)$

16. $f(x) = x^2 \tan^{-1}(x^3)$

17. $f(x) = \dfrac{x}{(1 + 4x)^2}$

18. $f(x) = \left(\dfrac{x}{2 - x}\right)^3$

19. $f(x) = \dfrac{1 + x}{(1 - x)^2}$

20. $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{(1 - x)^3}$

21-24 Encuentre una representación como serie de potencias para f, y grafique f y varias sumas parciales $s_n(x)$ en la misma pantalla. ¿Qué sucede cuando n se incrementa?

21. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 16}$

22. $f(x) = \ln(x^2 + 4)$

23. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right)$

24. $f(x) = \tan^{-1}(2x)$

25-28 Evalúe la integral indefinida como una serie de potencias. ¿Cuál es el radio de convergencia?

25. $\displaystyle\int \frac{t}{1 - t^8}\,dt$

26. $\displaystyle\int \frac{t}{1 + t^3}\,dt$

27. $\displaystyle\int x^2 \ln(1 + x)\,dx$

28. $\displaystyle\int \frac{\tan^{-1}x}{x}\,dx$

29-32 Use una serie de potencias para aproximar la integral definida con una aproximación de seis cifras decimales.

29. $\displaystyle\int_0^{0.2} \frac{1}{1 + x^5}\,dx$

30. $\displaystyle\int_0^{0.4} \ln(1 + x^4)\,dx$

31. $\displaystyle\int_0^{0.1} x \arctan(3x)\,dx$

32. $\displaystyle\int_0^{0.3} \frac{x^2}{1 + x^4}\,dx$

33. Con el resultado del ejemplo 7, calcule arctan 0.2 con una aproximación de cinco cifras decimales.

34. Demuestre que la función

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

es una solución de la ecuación diferencial

$$f''(x) + f(x) = 0$$

35. a) Demuestre que J_0 (la función de Bessel de orden 0 dada en el ejemplo 4) cumple con la ecuación diferencial

$$x^2 J_0''(x) + x J_0'(x) + x^2 J_0(x) = 0$$

b) Evalúe $\int_0^1 J_0(x)\,dx$ con una aproximación de tres cifras decimales.

36. La función de Bessel de orden 1 se define con

$$J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!\,(n + 1)!\,2^{2n+1}}$$

a) Demuestre que J_1 satisface la ecuación diferencial

$$x^2 J_1''(x) + x J_1'(x) + (x^2 - 1) J_1(x) = 0$$

b) Demuestre que $J_0'(x) = -J_1(x)$.

37. a) Demuestre que la función

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

es una solución de la ecuación diferencial

$$f'(x) = f(x)$$

b) Demuestre que $f(x) = e^x$.

38. Sea $f_n(x) = (\operatorname{sen} nx)/n^2$. Demuestre que la serie $\Sigma f_n(x)$ es convergente para todos los valores de x, pero la serie de derivadas $\Sigma f_n'(x)$ es divergente cuando $x = 2n\pi$, n es un entero. ¿Para qué valores de x la serie $\Sigma f_n''(x)$ es convergente?

39. Sea

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

Determine los intervalos de convergencia para f, f' y f''.

40. a) Empezando con la serie geométrica $\Sigma_{n=0}^{\infty} x^n$, calcule la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \qquad |x| < 1$$

b) Calcule la suma de cada una de las series siguientes.

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n x^n, \quad |x| < 1$ ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

c) Determine la suma de cada una de las series siguientes.

i) $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n, \quad |x| < 1$

ii) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 - n}{2^n}$ iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

41. Utilice la serie de potencias para $\tan^{-1}x$ para demostrar la siguiente expresión para π como la suma de una serie infinita:

$$\pi = 2\sqrt{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$$

42. a) Completando cuadrados demuestre que

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{x^2 - x + 1} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

b) Mediante la factorización de $x^3 + 1$ como una suma de cubos, escriba de nuevo la integral del inciso a). Luego exprese $1/(x^3 + 1)$ como la suma de una serie de potencias y úsela para demostrar la siguiente fórmula para π:

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{8^n} \left(\frac{2}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} \right)$$

11.10 Series de Taylor y de Maclaurin

En la sección anterior, se representaron como series de potencias una cierta clase restringida de funciones. En esta sección se tratan problemas más generales: ¿qué funciones se pueden representar como series de potencias? ¿Cómo es posible hallar esa representación?

Empecemos por suponer que f es cualquier función que se puede representar mediante una serie de potencias

$$\boxed{1} \quad f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + c_4(x-a)^4 + \cdots \qquad |x-a| < R$$

Tratemos de determinar qué coeficientes c_n tienen que estar en función de f. Para empezar, observe que si hacemos $x = a$ en la ecuación 1, entonces todos los términos después del primero son 0 y obtenemos

$$f(a) = c_0$$

De acuerdo con el teorema 11.9.2, podemos derivar la serie de la ecuación 1 término a término:

$$\boxed{2} \quad f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \cdots \qquad |x-a| < R$$

y al sustituir $x = a$ en la ecuación 2 tenemos

$$f'(a) = c_1$$

En seguida derivemos ambos miembros de la ecuación 2 para obtener

$$\boxed{3} \quad f''(x) = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3(x-a) + 3 \cdot 4c_4(x-a)^2 + \cdots \qquad |x-a| < R$$

Una vez más hacemos $x = a$ en la ecuación 3. El resultado es

$$f''(a) = 2c_2$$

Apliquemos el procedimiento una vez más. La derivación de la serie de la ecuación 3 nos da

$$\boxed{4} \quad f'''(x) = 2 \cdot 3c_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4c_4(x-a) + 3 \cdot 4 \cdot 5c_5(x-a)^2 + \cdots \qquad |x-a| < R$$

y la sustitución de $x = a$ en la ecuación 4 da

$$f'''(a) = 2 \cdot 3c_3 = 3!c_3$$

Ahora ya podemos ver el patrón. Si continuamos derivando y sustituyendo $x = a$, obtenemos

$$f^{(n)}(a) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot nc_n = n!c_n$$

Al resolver esta ecuación para el n-ésimo coeficiente c_n, tenemos

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Esta fórmula sigue siendo válida incluso para $n = 0$ si adoptamos la convención de que $0! = 1$ y $f^{(0)} = f$. En estos términos, hemos demostrado el teorema siguiente:

5 Teorema Si f se puede representar como una serie de potencias (expansión) en a, es decir, si

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n \qquad |x - a| < R$$

entonces sus coeficientes están dados por la fórmula

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Si sustituimos esta fórmula para c_n de nuevo en la serie, observamos que si f tiene un desarrollo en serie de potencias en a, entonces debe ser de la forma siguiente:

6
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$
$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \cdots$$

Taylor y Maclaurin

La serie de Taylor lleva este nombre en honor al matemático ingles Brook Taylor (1685-1731) y la serie de Maclaurin se llama así para recordar al matemático escocés Colin Maclaurin (1698-1746) a pesar del hecho de que la serie de Maclaurin es realmente un caso especial de la serie de Taylor. Pero la idea de representar funciones particulares como sumas de series de potencias se remonta a Newton, y el matemático escocés James Gregory conoció la serie general de Taylor en 1668 y el matemático suizo John Bernoulli la conoció por 1690. Al parecer, Taylor no conocía el trabajo de Gregory ni de Bernoulli cuando publicó sus descubrimientos relacionados con las series en 1715 en su libro *Methodus incrementorum directa et inversa*. Las series de Maclaurin se llaman así porque Colin Maclaurin las popularizó en su libro de texto *Treatise of Fluxions* que se publicó en 1742.

La serie de la ecuación 6 se denomina **serie de Taylor de la función f en a** (o bien, **en torno a a** o **centrada en a**). Para el caso especial $a = 0$ la serie de Taylor se transforma en

7
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots$$

Este caso surge con bastante frecuencia, y se le da el nombre especial de **serie de Maclaurin**.

NOTA Ya se demostró que *si* f se puede representar como una serie de potencias con respecto a a, entonces f es igual a la suma de sus series de Taylor. Pero hay funciones que no son iguales a la suma de sus series de Taylor. Un ejemplo de tales funciones se presenta en el ejercicio 74.

V EJEMPLO 1 Determine la serie de Maclaurin de la función $f(x) = e^x$ y su radio de convergencia.

SOLUCIÓN Si $f(x) = e^x$, entonces $f^{(n)}(x) = e^x$, por lo que $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ para toda n. Por tanto, la serie de Taylor para f en 0 (es decir, la serie de Maclaurin) es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Para determinar el radio de convergencia hacemos $a_n = x^n/n!$. Entonces

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n}\right| = \frac{|x|}{n+1} \to 0 < 1$$

así que, según la prueba de la razón, la serie converge para toda x y el radio de convergencia es $R = \infty$.

La conclusión que obtenemos del teorema 5 y el ejemplo 1 es que si e^x tiene un desarrollo en serie en potencias en 0, entonces

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Así que, ¿cómo podemos determinar si e^x *tiene* una representación como serie de potencias?

Investiguemos la cuestión más general: ¿en qué circunstancias una función es igual a la suma de su serie de Taylor? En otras palabras, si f tiene derivadas de todos los órdenes, cuándo es cierto que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Como sucede con cualquier serie convergente, esto quiere decir que $f(x)$ es el límite de la sucesión de sumas parciales. En el caso de la serie de Taylor, las sumas parciales son

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i \\ &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \end{aligned}$$

Observe que T_n es una polinomial de grado n llamado **polinomio de Taylor de *n*-ésimo grado de *f* en *a***. Por ejemplo, en el caso de la función exponencial $f(x) = e^x$, el resultado del ejemplo 1 muestra que las polinomiales de Taylor en 0 (o polinomiales de Maclaurin), con $n = 1$, 2 y 3 son

$$T_1(x) = 1 + x \qquad T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} \qquad T_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

Las gráficas de la función exponencial y estos tres polinomios de Taylor se ilustran en la figura 1**.**

En general, $f(x)$ es la suma de su serie de Taylor si

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$$

Si hacemos

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) \qquad \text{de manera que} \qquad f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

entonces $R_n(x)$ se llama **residuo** de la serie de Taylor. Si podemos de alguna manera demostrar que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, entonces se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} T_n(x) = \lim_{n\to\infty} [f(x) - R_n(x)] = f(x) - \lim_{n\to\infty} R_n(x) = f(x)$$

Por tanto, hemos demostrado el siguiente teorema.

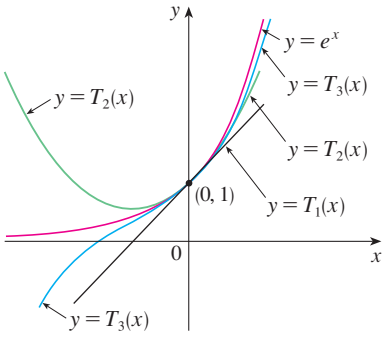


FIGURA 1

Cuando n crece, $T_n(x)$ parece aproximarse a e^x en la figura 1. Esto sugiere que e^x es igual a la suma de su serie de Taylor.

8 Teorema Si $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ donde T_n es el polinomio de Taylor de n-ésimo grado de f en a y

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

para $|x - a| < R$ entonces f es igual a la suma de sus series de Taylor en el intervalo $|x - a| < R$.

Al tratar de demostrar que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ para una función específica f, se usa por lo regular el siguiente teorema.

9 Desigualdad de Taylor Si $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ para $|x - a| \leq d$ entonces el residuo $R_n(x)$ de la serie de Taylor cumple con la desigualdad

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x - a|^{n+1} \qquad \text{para } |x - a| \leq d$$

Para ver por qué es cierto para $n = 1$, supongamos que $|f''(x)| \leq M$. En particular, se tiene $f''(x) \leq M$, de tal manera que para $a \leq x \leq a + d$ tenemos

$$\int_a^x f''(t)\,dt \leq \int_a^x M\,dt$$

Una antiderivada de f'' es f', por lo que según la parte 2 del teorema fundamental del cálculo tenemos

$$f'(x) - f'(a) \leq M(x - a) \quad \text{o bien} \quad f'(x) \leq f'(a) + M(x - a)$$

Así que

$$\int_a^x f'(t)\,dt \leq \int_a^x [f'(a) + M(t - a)]\,dt$$

$$f(x) - f(a) \leq f'(a)(x - a) + M\frac{(x - a)^2}{2}$$

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x - a) \leq \frac{M}{2}(x - a)^2$$

Pero $R_1(x) = f(x) - T_1(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$. De modo que

$$R_1(x) \leq \frac{M}{2}(x - a)^2$$

Un razonamiento similar, aplicando $f''(x) \geq -M$, demuestra que

$$R_1(x) \geq -\frac{M}{2}(x - a)^2$$

De manera que

$$|R_1(x)| \leq \frac{M}{2}|x - a|^2$$

Aunque hemos supuesto que $x > a$, cálculos similares muestran que esta desigualdad es válida también para $x < a$.

Fórmulas para el residuo de Taylor
Otras opciones aparte de la desigualdad de Taylor son las fórmulas siguientes para el residuo. Si $f^{(n+1)}$ es continua sobre un intervalo I y $x \in I$, entonces

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$$

Esta expresión recibe el nombre de *forma integral del término del residuo*. Otra fórmula, que se llama *forma de Lagrange del término del residuo*, establece que hay un número z entre x y a tal que

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}$$

Esta versión es una generalización del teorema del valor medio (que es el caso $n = 0$).

Las demostraciones de estas fórmulas, además del análisis de cómo usarlas para resolver los ejemplos de las secciones 11.10 y 11.11, se encuentran en la página web

www.stewartcalculus.com

Haga clic en *Additional Topics* y luego en *Formulas for the Remainder Term in Taylor series*.

Esto demuestra la desigualdad de Taylor para el caso donde $n = 1$. El resultado para cualquier n se demuestra de manera parecida integrando $n + 1$ veces. (Véase el ejercicio 73 para el caso $n = 2$.)

NOTA En la sección 11.11 se explora el uso de la desigualdad de Taylor en la aproximación de funciones. Aquí, el uso inmediato es junto con el teorema 8.

Con frecuencia, al aplicar los teoremas 8 y 9 es útil recurrir al hecho siguiente.

10
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \qquad \text{para todo número real } x$$

Esto es verdadero porque, de acuerdo con el ejemplo 1, la serie $\Sigma x^n/n!$ es convergente para toda x por lo que su n-ésimo término se aproxima a 0.

V EJEMPLO 2 Demuestre que e^x es igual a la suma de su serie de Maclaurin.

SOLUCIÓN Si $f(x) = e^x$, entonces $f^{(n+1)}(x) = e^x$ para toda n. Si d es cualquier número positivo y $|x| \leq d$, entonces $|f^{(n+1)}(x)| = e^x \leq e^d$. Así que la desigualdad de Taylor, con $a = 0$ y $M = e^d$, establece que

$$|R_n(x)| \leq \frac{e^d}{(n+1)!}|x|^{n+1} \qquad \text{para } |x| \leq d$$

Observe que la misma constante $M = e^d$ funciona para todo valor de n. Pero, según la ecuación 10, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^d}{(n+1)!}|x|^{n+1} = e^d \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

Se infiere entonces del teorema de la compresión que $\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0$ y, por tanto, $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ para todos los valores de x. De acuerdo con el teorema 8, e^x es igual a la suma de su serie de Maclaurin, es decir,

11
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \text{para toda } x$$

En particular, si hacemos $x = 1$ en la ecuación 11, obtenemos la siguiente expresión para el número e como una suma de una serie infinita:

12
$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

En 1748, Leonhard Euler aplicó la ecuación 12 para determinar el valor de e con 23 dígitos decimales. En 2007 Shigeru Kondo, usando de nuevo la serie 12, calculó e con más de 100 000 millones de lugares decimales. Las técnicas especiales que utilizaron para acelerar el cálculo se explican en la página web

numbers.computation.free.fr

EJEMPLO 3 Determine la serie de Taylor para $f(x) = e^x$ en $a = 2$.

SOLUCIÓN Se tiene $f^{(n)}(2) = e^2$ y, de este modo, al hacer $a = 2$ en la definición de la serie de Taylor 6, obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!}(x-2)^n$$

También se puede verificar, como en el ejemplo 1, que el radio de convergencia es $R = \infty$. Como en el ejemplo 2 podemos comprobar que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, de modo que

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!}(x-2)^n \quad \text{para toda } x \tag{13}$$

Hay dos desarrollos en series de potencias para e^x, la serie de Maclaurin de la ecuación 11 y la serie de Taylor de la ecuación 13. El primero es mejor si está interesado en valores de x cercanos a 0 y el segundo funciona muy bien si x es cercano a 2.

EJEMPLO 4 Determine la serie de Maclaurin para sen x y demuestre que representa a sen x para toda x.

SOLUCIÓN Organizamos nuestros cálculos en dos columnas como sigue:

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{sen} x & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \cos x & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= -\operatorname{sen} x & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= -\cos x & f'''(0) &= -1 \\ f^{(4)}(x) &= \operatorname{sen} x & f^{(4)}(0) &= 0 \end{aligned}$$

Puesto que la derivada se repite en un ciclo de cuatro, podemos escribir la serie de Maclaurin como sigue:

$$\begin{aligned} & f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

Puesto que $f^{(n+1)}(x)$ es $\pm\operatorname{sen} x$ o bien, $\pm\cos x$, sabemos que $|f^{(n+1)}(x)| \leq 1$ para toda x. De este modo podemos tomar $M = 1$ en la desigualdad de Taylor:

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x^{n+1}| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \tag{14}$$

De acuerdo con la ecuación 10, el lado derecho de esta desigualdad tiende a 0 cuando $n \to \infty$, de modo que $|R_n(x)| \to 0$ según el teorema de compresión. Se infiere entonces que $R_n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$, de modo que sen x es igual a la suma de su serie de Maclaurin de acuerdo con el teorema 8.

En la figura 2 se ilustra la gráfica de sen x junto con su polinomio de Taylor (o de Maclaurin)

$$T_1(x) = x$$

$$T_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$

$$T_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

Observe que cuando n se incrementa, $T_n(x)$ se vuelve una mejor aproximación para sen x.

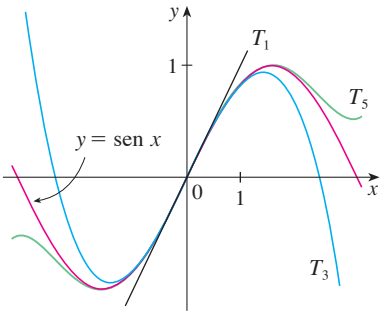


FIGURA 2

Se establece el resultado del ejemplo 4 para referencia futura.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{para toda } x \end{aligned} \tag{15}$$

EJEMPLO 5 Determine la serie de Maclaurin para cos x.

SOLUCIÓN Podríamos proceder en forma directa como en el ejemplo 4, pero es más fácil derivar la serie de Maclaurin para $\operatorname{sen} x$ dada por la ecuación 15:

$$\cos x = \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \frac{d}{dx}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right)$$
$$= 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \frac{7x^6}{7!} + \cdots = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Las series de Maclaurin para e^x, $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ que encontramos en los ejemplos 2, 4 y 5 fueron descubiertas por Newton aplicando métodos distintos. Estas ecuaciones son notables porque se conoce todo con respecto a cada una de estas funciones si conocemos todas sus derivadas en el número 0.

Puesto que la serie de Maclaurin para $\operatorname{sen} x$ converge para toda x, el teorema 2 de la sección 11.9 señala que la serie derivada para $\cos x$ converge también para toda x. Así,

16
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{para toda } x$$

EJEMPLO 6 Determine la serie de Maclaurin para la función $f(x) = x \cos x$.

SOLUCIÓN En lugar de calcular las derivadas y sustituir en la ecuación 7, es más fácil multiplicar la serie para $\cos x$, ecuación 16, por x:

$$x \cos x = x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n)!}$$

EJEMPLO 7 Represente $f(x) = \operatorname{sen} x$ como la suma de su serie de Taylor centrada en $\pi/3$.

SOLUCIÓN Primero acomodamos los valores en columnas

$$f(x) = \operatorname{sen} x \qquad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$f'(x) = \cos x \qquad f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$
$$f''(x) = -\operatorname{sen} x \qquad f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$f'''(x) = -\cos x \qquad f'''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

Hemos obtenido dos diferentes representaciones en serie para $\operatorname{sen} x$, la serie de Maclaurin en el ejemplo 4 y la serie de Taylor en el ejemplo 7. Es mejor utilizar la serie de Maclaurin para los valores de x cercanos a 0 y la serie de Taylor para x cercanos a $\pi/3$. Observe que el tercer polinomio de Taylor T_3 en la figura 3 es una buena aproximación al $\operatorname{sen} x$ cerca de $\pi/3$, mas no así cerca de 0. Compárelo con el tercer polinomio de Maclaurin T_3 en la figura 2, donde lo opuesto es verdadero.

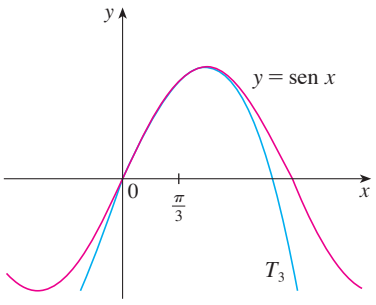


FIGURA 3

y este patrón se repite indefinidamente. Por tanto, la serie de Taylor en $\pi/3$ es

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{f'\left(\frac{\pi}{3}\right)}{1!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{f''\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{f'''\left(\frac{\pi}{3}\right)}{3!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \cdots$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2 \cdot 1!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 2!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{1}{2 \cdot 3!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \cdots$$

La demostración de que esta serie representa sen x para toda x es muy similar a la del ejemplo 4. [Sólo reemplace x por $x - \pi/3$ en (14).] Podemos escribir la serie con la notación sigma si separamos los términos que contienen $\sqrt{3}$:

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{3}}{2(2n)!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2(2n+1)!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^{2n+1}$$

Las series de potencias obtenidas mediante métodos indirectos en los ejemplos 5 y 6 y en la sección 11.9 son realmente la serie de Taylor o de Maclaurin de las funciones dadas porque el teorema 5 así lo establece, ya que no importa cómo se obtenga una representación en una serie de potencias $f(x) = \Sigma\, c_n(x - a)^n$, siempre es cierto que $c_n = f^{(n)}(a)/n!$. En otras palabras, la determinación de los coeficientes es única.

EJEMPLO 8 Encuentre la serie de Maclaurin para $f(x) = (1 + x)^k$, donde k es cualquier número real.

SOLUCIÓN Al ordenar nuestro trabajo en columnas, tenemos

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)^k & f(0) &= 1\\
f'(x) &= k(1+x)^{k-1} & f'(0) &= k\\
f''(x) &= k(k-1)(1+x)^{k-2} & f''(0) &= k(k-1)\\
f'''(x) &= k(k-1)(k-2)(1+x)^{k-3} & f'''(0) &= k(k-1)(k-2)\\
&\vdots & &\vdots\\
f^{(n)}(x) &= k(k-1)\cdots(k-n+1)(1+x)^{k-n} & f^{(n)}(0) &= k(k-1)\cdots(k-n+1)
\end{aligned}$$

Por tanto, la serie de Maclaurin de $f(x) = (1 + x)^k$ es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}x^n$$

Esta serie se denomina **serie binomial**. Observe que si k es un entero no negativo, entonces los términos son eventualmente cero y por tanto la serie es finita. Para otros valores de k, ninguno de sus términos es cero, por lo que podemos intentar la prueba de la razón. Si el n-ésimo término es a_n, entonces

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)(k-n)x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{k(k-1)\cdots(k-n+1)x^n}\right|$$

$$= \frac{|k-n|}{n+1}|x| = \frac{\left|1 - \dfrac{k}{n}\right|}{1 + \dfrac{1}{n}}|x| \to |x| \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

Así, por la prueba de la razón, la serie binomial converge si $|x| < 1$ y diverge si $|x| > 1$.

La notación tradicional para los coeficientes de la serie binomial es

$$\binom{k}{n} = \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{n!}$$

y estos números se llaman **coeficientes binomiales**.

El siguiente teorema establece que $(1 + x)^k$ es igual a la suma de su serie de Maclaurin. Es posible demostrar esto al probar que el residuo $R_n(x)$ se aproxima a 0, pero esto resulta ser muy difícil. La demostración resumida en el ejercicio 75 es mucho más fácil.

17 Serie binomial Si k es cualquier número real y $|x| < 1$, entonces

$$(1 + x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

Aun cuando la serie binomial siempre converge cuando $|x| < 1$, la pregunta de si converge o no en los extremos, ± 1, depende del valor de k. Resulta que la serie converge en 1 si $-1 < k \leqslant 0$ y en ambos extremos si $n \geqslant k$. Nótese que si k es un entero positivo y $n > k$, entonces la expresión para $\binom{k}{n}$ contiene un factor $(k - k)$, de modo que $\binom{k}{n} = 0$ para $n > k$. Esto significa que la serie termina y se reduce al teorema del binomio ordinario cuando k es un entero positivo. (Véase la página de referencia 1.)

V EJEMPLO 9 Encuentre la serie de Maclaurin para la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x}}$ y su radio de convergencia.

SOLUCIÓN Escribimos $f(x)$ de forma que podamos usar la serie binomial:

$$\frac{1}{\sqrt{4-x}} = \frac{1}{\sqrt{4\left(1 - \frac{x}{4}\right)}} = \frac{1}{2\sqrt{1 - \frac{x}{4}}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{4}\right)^{-1/2}$$

Y al usar la serie binomial con $k = -\frac{1}{2}$ donde x fue reemplazada por $-x/4$, tenemos

$$\frac{1}{\sqrt{4-x}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{4}\right)^{-1/2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}\left(-\frac{x}{4}\right)^n$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{x}{4}\right) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}\left(-\frac{x}{4}\right)^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}\left(-\frac{x}{4}\right)^3\right.$$

$$\left. + \cdots + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2} - n + 1\right)}{n!}\left(-\frac{x}{4}\right)^n + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{8}x + \frac{1\cdot 3}{2!8^2}x^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!8^3}x^3 + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{n!8^n}x^n + \cdots\right]$$

Sabemos de (17) que esta serie converge cuando $|-x/4| < 1$, es decir, $|x| < 4$, de modo que el radio de convergencia es $R = 4$.

En la tabla siguiente se resumen, para referencia futura, algunas de las series importantes de Maclaurin que hemos deducido en esta sección y en la anterior.

TABLA 1
Series importantes de Maclaurin y sus radios de convergencia.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad R = 1$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad R = \infty$$

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad R = \infty$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \qquad R = \infty$$

$$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad R = 1$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad R = 1$$

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \cdots \qquad R = 1$$

EJEMPLO 10 Encuentre la suma de la serie $\dfrac{1}{1 \cdot 2} - \dfrac{1}{2 \cdot 2^2} + \dfrac{1}{3 \cdot 2^3} - \dfrac{1}{4 \cdot 2^4} + \cdots$.

SOLUCIÓN Con la notación sigma podemos escribir le serie dada como

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n}$$

Entonces, en la tabla 1 vemos que esta serie relaciona la entrada para $\ln(1+x)$ con $x = \frac{1}{2}$. Así

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n \cdot 2^n} = \ln\left(1 + \tfrac{1}{2}\right) = \ln \tfrac{3}{2}$$

TEC Module 11.10/11.11 permite ver cómo polinomios sucesivos de Taylor se aproximan a la función original.

Una razón de que las series de Taylor sean importantes, es que permiten integrar funciones que no se podían manejar antes. En efecto, en la introducción de este capítulo mencionamos que Newton integraba a menudo funciones expresándolas primero como series de potencias, y que después integraba la serie término a término. No es posible integrar la función $f(x) = e^{-x^2}$ por medio de las técnicas conocidas hasta este momento, porque su antiderivada no es una función elemental (véase sección 7.5). En el ejemplo siguiente se aplica la idea de Newton para integrar esta función.

V EJEMPLO 11

a) Evalúe $\int e^{-x^2}\,dx$ como una serie infinita.

b) Evalúe $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ de tal manera que no difiera 0.001 del valor real.

SOLUCIÓN

a) Primero encontramos la serie de Maclaurin para $f(x) = e^{-x^2}$. Aunque es posible usar el método directo, determinémosla simplemente mediante el reemplazo de x con $-x^2$ en la serie para e^x dada en la tabla 1. Así, para todos los valores de x,

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots$$

Ahora integramos término a término

$$\int e^{-x^2}\,dx = \int \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots\right) dx$$

$$= C + x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} + \cdots$$

Esta serie es convergente para toda x porque la serie original para e^{-x^2} converge para toda x.

b) El teorema fundamental del cálculo da

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = \left[x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^9}{9 \cdot 4!} - \cdots\right]_0^1$$

Es posible hacer $C = 0$ en la antiderivada del inciso a).

$$= 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{42} + \tfrac{1}{216} - \cdots$$

$$\approx 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{42} + \tfrac{1}{216} \approx 0.7475$$

El teorema de estimación de la serie alternante demuestra que el error involucrado en esta aproximación es menor que

$$\frac{1}{11 \cdot 5!} = \frac{1}{1320} < 0.001$$

Otra aplicación de la serie de Taylor se ilustra en el ejemplo siguiente. El límite podría ser calculado con la regla de l'Hospital, pero en lugar de hacerlo así se recurre a las series.

EJEMPLO 12 Evalúe $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$.

SOLUCIÓN Al utilizar la serie de Maclaurin para e^x tenemos

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots\right) - 1 - x}{x^2}$$

Algunos sistemas algebraicos computacionales calculan los límites de esta manera.

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{4!} + \frac{x^3}{5!} + \cdots\right) = \frac{1}{2}$$

porque las series de potencias son funciones continuas.

Multiplicación y división de series de potencias

Si las series de potencias se suman o restan, se comportan como polinomios (el teorema 11.2.8 lo demuestra). De hecho, como lo ilustra el ejemplo siguiente, las series también se pueden multiplicar y dividir como los polinomios. Determinamos sólo los primeros términos porque los cálculos para los siguientes se vuelven tediosos y los términos iniciales son los más importantes.

EJEMPLO 13 Calcule los primeros tres términos no cero de la serie de Maclaurin para a) $e^x \operatorname{sen} x$ y b) $\tan x$.

SOLUCIÓN

a) Mediante la serie de Maclaurin para e^x y $\operatorname{sen} x$ en la tabla 1, tenemos

$$e^x \operatorname{sen} x = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)$$

Al multiplicar esta expresión y agrupar por términos semejantes, al igual que con los polinomios:

$$\begin{array}{rl} & 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots \\ \times & \quad x \qquad\quad - \frac{1}{6}x^3 + \cdots \\ \hline & \quad x + \ x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \cdots \\ + & \qquad\quad - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^4 - \cdots \\ \hline & \quad x + \ x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots \end{array}$$

Así $e^x \operatorname{sen} x = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$

b) Al utilizar la serie de Maclaurin en la tabla 1

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots}{1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots}$$

Usamos un procedimiento como el de la división larga:

$$\begin{array}{r} x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots \\ 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \cdots \overline{)\, x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \cdots} \\ x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}x^5 - \cdots \\ \hline \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \cdots \\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^5 + \cdots \\ \hline \frac{2}{15}x^5 + \cdots \end{array}$$

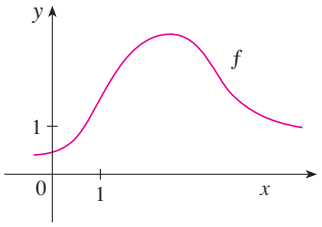
Por consiguiente, $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots$

No se ha intentado justificar las manipulaciones formales que se utilizaron en el ejemplo 13, pero son legítimas. Hay un teorema que establece que si tanto $f(x) = \Sigma\, c_n x^n$ como $g(x) = \Sigma\, b_n x^n$ convergen para $|x| < R$ y las series se multiplican como si fueran polinomios, entonces la serie resultante también converge para $|x| < R$ y representa $f(x)\, g(x)$. En cuanto a la división es necesario que $b_0 \neq 0$; la serie resultante converge para $|x|$ suficientemente pequeña.

11.10 Ejercicios

1. Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-5)^n$ para toda x, escriba una fórmula para b_8.

2. Se proporciona la gráfica de f.



a) Explique por qué la serie

$$1.6 - 0.8(x-1) + 0.4(x-1)^2 - 0.1(x-1)^3 + \cdots$$

no es la serie de Taylor de f centrada en 1.

b) Explique por qué la serie

$$2.8 + 0.5(x-2) + 1.5(x-2)^2 - 0.1(x-2)^3 + \cdots$$

no es la serie de Taylor de f centrada en 2.

3. Si $f^{(n)}(0) = (n+1)!$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, encuentre la serie de Maclaurin para f y su radio de convergencia.

4. Encuentre la serie de Taylor para f con centro en 4 si

$$f^{(n)}(4) = \frac{(-1)^n n!}{3^n(n+1)}$$

¿Cuál es el radio de convergencia de la serie de Taylor?

5-12 Encuentre la serie de Maclaurin para $f(x)$ usando la definición de la serie de Maclaurin. [Suponga que f tiene un desarrollo en serie de potencias. No demuestre que $R_n(x) \to 0$.] Determine también el radio asociado con la convergencia.

5. $f(x) = (1-x)^{-2}$

6. $f(x) = \ln(1+x)$

7. $f(x) = \operatorname{sen} \pi x$

8. $f(x) = e^{-2x}$

9. $f(x) = 2^x$

10. $f(x) = x \cos x$

11. $f(x) = \operatorname{senh} x$

12. $f(x) = \cosh x$

13-20 Calcule la serie de Taylor para $f(x)$ centrada en el valor dado de a. [Suponga que f tiene un desarrollo en serie de potencias. No demuestre que $R_n(x) \to 0$.] También encuentre el radio de convergencia asociado.

13. $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1, \quad a = 1$

14. $f(x) = x - x^3, \quad a = -2$

15. $f(x) = \ln x, \quad a = 2$

16. $f(x) = 1/x, \quad a = -3$

17. $f(x) = e^{2x}, \quad a = 3$

18. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad a = \pi/2$

19. $f(x) = \cos x, \quad a = \pi$

20. $f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 16$

21. Demuestre que la serie obtenida en el ejercicio 7 representa $\operatorname{sen} \pi x$ para toda x.

22. Demuestre que la serie obtenida en el ejercicio 18 representa $\operatorname{sen} x$ para toda x.

23. Demuestre que la serie obtenida en el ejercicio 11 representa $\operatorname{senh} x$ para toda x.

24. Demuestre que la serie obtenida en el ejercicio 12 representa $\cosh x$ para toda x.

25-28 Use la serie binomial para desarrollar la función como una serie de potencias. Establezca el radio de convergencia.

25. $\sqrt[4]{1-x}$

26. $\sqrt[3]{8+x}$

27. $\dfrac{1}{(2+x)^3}$

28. $(1-x)^{2/3}$

29-38 Utilice la serie de Maclaurin que aparece en la tabla 1 para obtener la serie de Maclaurin para la función dada.

29. $f(x) = \operatorname{sen} \pi x$

30. $f(x) = \cos(\pi x/2)$

31. $f(x) = e^x + e^{2x}$

32. $f(x) = e^x + 2e^{-x}$

33. $f(x) = x \cos(\frac{1}{2}x^2)$

34. $f(x) = x^2 \ln(1+x^3)$

35. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4+x^2}}$

36. $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{2+x}}$

37. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ [*Sugerencia:* use $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$.]

38. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{6} & \text{si } x = 0 \end{cases}$

39-42 Determine la serie de Maclaurin de f (mediante cualquier método) y su radio de convergencia. Grafique f y sus primeros polinomios de Taylor en la misma pantalla. ¿Qué observa respecto a la correspondencia entre estos polinomios y f?

39. $f(x) = \cos(x^2)$

40. $f(x) = e^{-x^2} + \cos x$

41. $f(x) = xe^{-x}$

42. $f(x) = \tan^{-1}(x^3)$

43. Mediante la serie de Maclaurin para $\cos x$ calcule $\cos 5°$ con una aproximación de cinco decimales.

44. Utilice la serie de Maclaurin para e^x a fin de calcular $1/\sqrt[10]{e}$ con una aproximación de cinco decimales.

45. a) Use la serie binomial para desarrollar $1/\sqrt{1-x^2}$.
b) Use el inciso a) para hallar la serie de Maclaurin para $\operatorname{sen}^{-1} x$.

46. a) Desarrolle $1/\sqrt[4]{1+x}$ como una serie de potencias.
b) Use el inciso a) para estimar $1/\sqrt[4]{1.1}$ con una aproximación de tres decimales.

47-50 Evalúe la integral indefinida como una serie infinita.

47. $\int x\cos(x^3)\,dx$

48. $\int \dfrac{e^x - 1}{x}\,dx$

49. $\int \dfrac{\cos x - 1}{x}\,dx$

50. $\int \arctan(x^2)\,dx$

51-54 Utilice series para obtener un valor aproximado de la integral definida con la exactitud indicada.

51. $\int_0^{1/2} x^3 \arctan x\,dx$ (cuatro decimales)

52. $\int_0^1 \operatorname{sen}(x^4)\,dx$ (cuatro decimales)

53. $\int_0^{0.4} \sqrt{1 + x^4}\,dx$ $\left(|\text{error}| < 5 \times 10^{-6}\right)$

54. $\int_0^{0.5} x^2 e^{-x^2}\,dx$ $\left(|\text{error}| < 0.001\right)$

55-57 Mediante las series evalúe el límite.

55. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - \ln(1 + x)}{x^2}$

56. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{1 + x - e^x}$

57. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5}$

58. Utilice la serie del ejemplo 13b) para evaluar

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$$

Este límite se calculó en el ejemplo 4 de la sección 4.4 utilizando la regla de l'Hospital tres veces. ¿Cuál método prefiere?

59-62 Utilice la multiplicación o la división de series de potencias para determinar los primeros tres términos diferentes de cero en la serie de Maclaurin para cada función.

59. $y = e^{-x^2}\cos x$

60. $y = \sec x$

61. $y = \dfrac{x}{\operatorname{sen} x}$

62. $y = e^x \ln(1 + x)$

63-70 Calcule la suma de la serie.

63. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{4n}}{n!}$

64. $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \pi^{2n}}{6^{2n}(2n)!}$

65. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{3^n}{n\,5^n}$

66. $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{3^n}{5^n n!}$

67. $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{4^{2n+1}(2n + 1)!}$

68. $1 - \ln 2 + \dfrac{(\ln 2)^2}{2!} - \dfrac{(\ln 2)^3}{3!} + \cdots$

69. $3 + \dfrac{9}{2!} + \dfrac{27}{3!} + \dfrac{81}{4!} + \cdots$

70. $\dfrac{1}{1\cdot 2} - \dfrac{1}{3\cdot 2^3} + \dfrac{1}{5\cdot 2^5} - \dfrac{1}{7\cdot 2^7} + \cdots$

71. Demuestre que si p es una función polinomial de n-grado, entonces

$$p(x + 1) = \sum_{i=0}^{n} \frac{p^{(i)}(x)}{i!}$$

72. Si $f(x) = (1 + x^3)^{30}$, ¿qué es $f^{(58)}(0)$?

73. Demuestre la desigualdad de Taylor para $n = 2$, es decir, demuestre que si $|f'''(x)| \leq M$ para $|x - a| \leq d$, entonces

$$|R_2(x)| \leq \frac{M}{6}|x - a|^3 \qquad \text{para } |x - a| \leq d$$

74. a) Demuestre que la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

no es igual a su serie de Maclaurin.

b) Grafique la función del inciso a) y comente su comportamiento cerca del origen.

75. Recurra a los siguientes pasos para probar 17.

a) Sea $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n$. Derive esta serie para demostrar que

$$g'(x) = \frac{k g(x)}{1 + x} \qquad -1 < x < 1$$

b) Sea $h(x) = (1 + x)^{-k} g(x)$ y demuestre que $h'(x) = 0$.

c) Deduzca que $g(x) = (1 + x)^k$.

76. En el ejercicio 53 de la sección 10.2 se demostró que la longitud de la elipse $x = a \operatorname{sen}\theta$, $y = b\cos\theta$, donde $a > b > 0$, es

$$L = 4a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta$$

donde $e = \sqrt{a^2 - b^2}/a$ es la excentricidad de la elipse. Desarrolle el integrando como serie binomial y use el resultado del ejercicio 50 de la sección 7.1 para expresar L como una serie de potencias de la excentricidad hasta el término en e^6.

PROYECTO DE LABORATORIO SAC UN LÍMITE ESCURRIDIZO

Este proyecto trata con la función

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(\tan x) - \tan(\operatorname{sen} x)}{\operatorname{arcsen}(\arctan x) - \arctan(\operatorname{arcsen} x)}$$

1. Utilice su sistema algebraico computarizado para evaluar $f(x)$ para $x = 1, 0.1, 0.01, 0.001$ y 0.0001. ¿Parece tener f un límite cuando $x \to 0$?
2. Use el SAC para graficar f cerca de $x = 0$. ¿Parece tener f un límite cuando $x \to 0$?
3. Intente evaluar $\lim_{x \to 0} f(x)$ con la regla de l'Hospital, usando el SAC para hallar las derivadas del numerador y el denominador. ¿Qué descubrió? ¿Cuántas aplicaciones de la regla de l'Hospital se requieren?
4. Evalúe $\lim_{x \to 0} f(x)$ con ayuda del SAC para encontrar la cantidad suficiente de términos de la serie de Taylor del numerador y el denominador. (Utilice el comando `taylor` en Maple o `series` en Mathematica.)
5. Utilice el comando `límite` en su SAC para calcular directamente $\lim_{x \to 0} f(x)$. (La mayoría de los sistemas algebraicos computarizados utilizan el método del problema 4 para calcular límites.)
6. En vista de las respuestas a los problemas 4 y 5, ¿cómo explica los resultados de los problemas 1 y 2?

SAC Se requiere sistema algebraico computarizado

REDACCIÓN DE PROYECTO CÓMO DESCUBRIÓ NEWTON LA SERIE BINOMIAL

El teorema binomial, que proporciona el desarrollo de $(a + b)^k$, ya lo conocían los matemáticos chinos muchos siglos antes de que naciera Newton, en especial para el caso donde el exponente k es un entero positivo. En 1665, cuando Newton tenía 22 años, descubrió por primera vez el desarrollo de la serie infinita $(a + b)^k$ cuando k es un exponente fraccionario, positivo o negativo. No publicó sus descubrimientos, pero los planteó y proporcionó ejemplos de cómo usarlos en una carta con fecha 13 de junio de 1676, carta (ahora se llama *epístola prior*) que envió a Henry Oldenburg, secretario de la *Royal Society of London,* para que la transmitiera a Leibniz. Cuando éste contestó, le preguntó a Newton cómo había descubierto las series binomiales. Newton escribió una segunda carta, la *epístola posterior,* del 24 de octubre de 1676, en la cual explica con lujo de detalles la manera como llegó a su descubrimiento mediante una ruta muy indirecta. Estaba investigando las áreas bajo las curvas $y = (1 - x^2)^{n/2}$ de 0 a x para $n = 0, 1, 2, 3, 4,...$ Son fáciles de calcular si n es par. Al observar patrones y al interpolar, Newton fue capaz de adivinar las respuestas de valores impares de n. Por tanto, se dio cuenta de que podía obtener las mismas respuestas expresando $(1 - x^2)^{n/2}$ como una serie infinita.

Escriba un ensayo sobre el descubrimiento de Newton. Inicie dando el enunciado de serie binomial en la notación de Newton (véase *epístola prior* en la página 285 de [4] o la página 402 de [2]). Explique por qué la versión de Newton es equivalente al teorema 17 de la página 761. Luego lea la *epístola posterior* de Newton (página 287 de [4] o página 404 de [2]) y explique los patrones que descubrió Newton en las áreas bajo las curvas $y = (1 - x^2)^{n/2}$. Muestre cómo podía él calcular el área bajo las curvas restantes y cómo comprobó su respuesta. Para finalizar, explique cómo estos descubrimientos llevaron a las series binomiales. Los libros de Edwards [1] y Katz [3] contienen comentarios de las cartas de Newton.

1. C. H. Edwards, *The Historical Development of the Calculus,* Nueva York: Springer-Verlag, 1979, pp. 178-187.

2. John Fauvel y Jeremy Gray, eds., *The History of Mathematics: A Reader,* London: MacMillan Press, 1987.
3. Victor Katz, *A History of Mathematics: An Introduction,* Nueva York: HarperCollins, 1993, pp. 463-466.
4. D. J. Struik, ed., *A Sourcebook in Mathematics, 1200-1800,* Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1969.

11.11 Aplicaciones de los polinomios de Taylor

En esta sección se exploran dos tipos de aplicaciones de los polinomios de Taylor. Primero se examina cómo se usan para aproximar funciones; a los científicos de la computación les gustan porque las polinomiales son las más sencillas de las funciones. Luego investigamos cómo los físicos y los ingenieros los usan en campos como la relatividad, óptica, radiación de cuerpos negros, dipolos eléctricos, la velocidad de las ondas en el agua y la construcción de carreteras en el desierto.

Aproximación de funciones mediante polinomios

Suponga que $f(x)$ es igual a la suma de su serie de Taylor en a:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

En la sección 11.10 se introdujo la notación $T_n(x)$ para la n-ésima suma parcial de esta serie y se le llamó polinomio de Taylor de n-ésimo grado de f en a. Así,

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x - a)^i$$

$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

Puesto que f es la suma de su serie de Taylor, sabemos que $T_n(x) \to f(x)$ cuando $n \to \infty$ y de este modo T_n se puede usar como una aproximación de f: $f(x) \approx T_n(x)$.

Observe que el polinomio de primer grado de Taylor

$$T_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

es lo mismo que la linealización de f en a que estudiamos en la sección 3.10. Note también que T_1 y su derivada tienen los mismos valores en a que f y f'. En general, se puede demostrar que las derivadas de T_n en a concuerdan con las de f hasta las derivadas de orden n, inclusive.

Con el fin de ilustrar estas ideas, vea una vez más las gráficas de $y = e^x$ y sus primeros polinomios de Taylor, como se ilustran en la figura 1. La gráfica de T_1 es la recta tangente a $y = e^x$ en (0, 1); esta recta tangente es la mejor aproximación lineal a e^x cerca de (0, 1). La gráfica de T_2 es la parábola $y = 1 + x + x^2/2$, y la gráfica de T_3 es la curva cúbica $y = 1 + x + x^2/2 + x^3/6$, que es un ajuste más cercano a la curva exponencial $y = e^x$ que T_2. El siguiente polinomio de Taylor T_4 sería una aproximación mejor, y así sucesivamente.

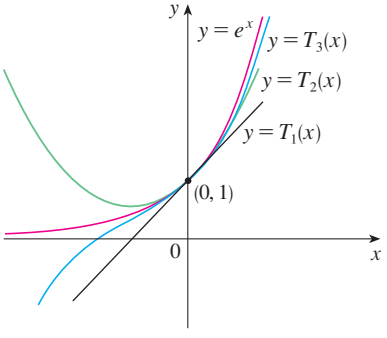


FIGURA 1

	$x = 0.2$	$x = 3.0$
$T_2(x)$	1.220000	8.500000
$T_4(x)$	1.221400	16.375000
$T_6(x)$	1.221403	19.412500
$T_8(x)$	1.221403	20.009152
$T_{10}(x)$	1.221403	20.079665
e^x	1.221403	20.085537

Los valores de la tabla proporcionan una demostración numérica de la convergencia de los polinomios de Taylor $T_n(x)$ a la función $y = e^x$. Vemos que cuando $x = 0.2$ la convergencia es muy rápida, pero cuando $x = 3$ es un poco más lenta. De hecho, entre más lejos esté x de 0, es un poco más lenta la convergencia de $T_n(x)$ a e^x.

Cuando usamos un polinomio de Taylor T_n para aproximar una función f, debemos preguntarnos: ¿qué tan buena es una aproximación? ¿Qué tan grande debemos tomar n con objeto de que alcance una precisión deseada? Para responder estas preguntas, es necesario que examinemos el valor absoluto del residuo:

$$|R_n(x)| = |f(x) - T_n(x)|$$

Hay tres métodos posibles para estimar el tamaño del error:

1. Si cuenta con una calculadora que trace gráficas o una computadora, la puede usar para graficar $|R_n(x)|$ y de ahí estimar el error.
2. Si sucede que la serie es alternante, podemos aplicar el teorema de estimación de la serie alternante.
3. En todos los casos podemos aplicar la desigualdad de Taylor (teorema 11.10.9), el cual establece que si $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$, entonces

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x - a|^{n+1}$$

V EJEMPLO 1

a) Obtenga una aproximación de la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ por medio del polinomio de Taylor de grado 2 en $a = 8$.

b) ¿Qué tan exacta es esta aproximación cuando $7 \leq x \leq 9$?

SOLUCIÓN

a)
$$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3} \qquad f(8) = 2$$
$$f'(x) = \tfrac{1}{3}x^{-2/3} \qquad f'(8) = \tfrac{1}{12}$$
$$f''(x) = -\tfrac{2}{9}x^{-5/3} \qquad f''(8) = -\tfrac{1}{144}$$
$$f'''(x) = \tfrac{10}{27}x^{-8/3}$$

En estos términos, el polinomio de Taylor de segundo grado es

$$T_2(x) = f(8) + \frac{f'(8)}{1!}(x - 8) + \frac{f''(8)}{2!}(x - 8)^2$$
$$= 2 + \tfrac{1}{12}(x - 8) - \tfrac{1}{288}(x - 8)^2$$

La aproximación deseada es

$$\sqrt[3]{x} \approx T_2(x) = 2 + \tfrac{1}{12}(x - 8) - \tfrac{1}{288}(x - 8)^2$$

b) La serie de Taylor no es alternante cuando $x < 8$, de modo que no podemos aplicar el teorema de estimación de la serie alternante en este ejemplo. Pero podemos usar la desigualdad de Taylor con $n = 2$ y $a = 8$:

$$|R_2(x)| \leq \frac{M}{3!}|x - 8|^3$$

donde $|f'''(x)| \leq M$. Como $x \geq 7$, tenemos $x^{8/3} \geq 7^{8/3}$ y de esa manera

$$f'''(x) = \frac{10}{27} \cdot \frac{1}{x^{8/3}} \leq \frac{10}{27} \cdot \frac{1}{7^{8/3}} < 0.0021$$

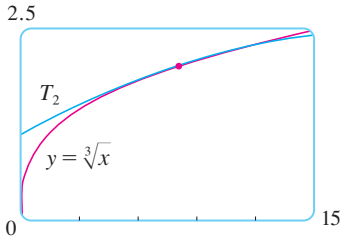


FIGURA 2

Por tanto, podemos hacer $M = 0.0021$. Asimismo, $7 \leq x \leq 9$, de modo que $-1 \leq x - 8 \leq 1$ y $|x - 8| \leq 1$. Entonces la desigualdad de Taylor da

$$|R_2(x)| \leq \frac{0.0021}{3!} \cdot 1^3 = \frac{0.0021}{6} < 0.0004$$

En estos términos, si $7 \leq x \leq 9$, la aproximación en el inciso a) no difiere en más de 0.0004 del valor real.

Con la ayuda de una calculadora para trazar gráficas o de una computadora compruebe el cálculo del ejemplo 1. En la figura 2 se muestra que las gráficas de $y = \sqrt[3]{x}$ y $y = T_2(x)$ están muy cercanas entre sí cuando x está cerca de 8. En la figura 3 se ilustra la gráfica de $|R_2(x)|$ calculada a partir de la expresión

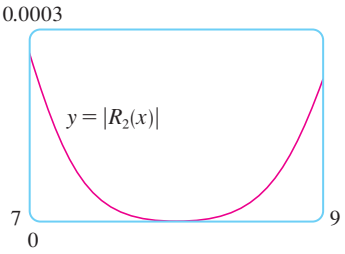


FIGURA 3

$$|R_2(x)| = |\sqrt[3]{x} - T_2(x)|$$

A partir de la gráfica

$$|R_2(x)| < 0.0003$$

cuando $7 \leq x \leq 9$. Así, la estimación de error mediante métodos gráficos es ligeramente mejor que cuando se hace a partir de la desigualdad de Taylor, en este caso.

V EJEMPLO 2

a) ¿Cuál es el error máximo posible al utilizar la aproximación

$$\operatorname{sen} x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

cuando $-0.3 \leq x \leq 0.3$? Utilice esta aproximación para calcular sen 12° con una aproximación de seis cifras decimales.

b) ¿Para qué valores de x esta aproximación no difiere en más de 0.00005 del valor real?

SOLUCIÓN

a) Observe que la serie de Maclaurin

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

es alternante para todos los valores no cero de x, y los términos sucesivos decrecen en tamaño porque $|x| < 1$, de modo que podemos usar el teorema de estimación de la serie alternante. El error en la aproximación de sen x por medio de los tres términos de su serie de Maclaurin es cuando mucho

$$\left|\frac{x^7}{7!}\right| = \frac{|x|^7}{5\,040}$$

Si $-0.3 \leq x \leq 0.3$, entonces $|x| \leq 0.3$, de modo que el error es más pequeño que

$$\frac{(0.3)^7}{5\,040} \approx 4.3 \times 10^{-8}$$

Para calcular sen 12° primero convertimos a radianes:

$$\operatorname{sen} 12^\circ = \operatorname{sen}\left(\frac{12\pi}{180}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{15}\right)$$

$$\approx \frac{\pi}{15} - \left(\frac{\pi}{15}\right)^3 \frac{1}{3!} + \left(\frac{\pi}{15}\right)^5 \frac{1}{5!} \approx 0.20791169$$

Así, con una aproximación de seis decimales, sen 12° ≈ 0.207912.

b) El error será menor que 0.00005 si

$$\frac{|x|^7}{5\,040} < 0.00005$$

Al resolver la desigualdad y encontrar x

$$|x|^7 < 0.252 \qquad \text{o bien} \quad |x| < (0.252)^{1/7} \approx 0.821$$

De modo que la aproximación dada no difiere en más de 0.00005 cuando $|x| < 0.82$. ■

TEC En Module 11.10/11.11 se muestran en forma gráfica los residuos de las aproximaciones de los polinomios de Taylor.

¿Qué sucede si recurrimos a la desigualdad de Taylor para resolver el ejemplo 2? Puesto que $f^{(7)}(x) = -\cos x$, tenemos $|f^{(7)}(x)| \leq 1$ y de esa manera

$$|R_6(x)| \leq \frac{1}{7!}|x|^7$$

De este modo llegamos a la misma estimación que con el teorema de la estimación de la serie alternante.

¿Qué hay con respecto a los métodos gráficos? En la figura 4 se ilustra la gráfica de

$$|R_6(x)| = \left|\operatorname{sen} x - \left(x - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{120}x^5\right)\right|$$

y observamos que $|R_6(x)| < 4.3 \times 10^{-8}$ cuando $|x| \leq 0.3$. Ésta es la misma estimación que obtuvimos en el ejemplo 2. En el caso del inciso b) queremos $|R_6(x)| < 0.00005$, de modo que graficamos tanto $y = |R_6(x)|$ como $y = 0.00005$ en la figura 5. Si colocamos el cursor en el punto de intersección derecho, verá que la desigualdad se cumple cuando $|x| < 0.82$. Una vez más llegamos a la misma estimación que obtuvimos en la solución del ejemplo 2.

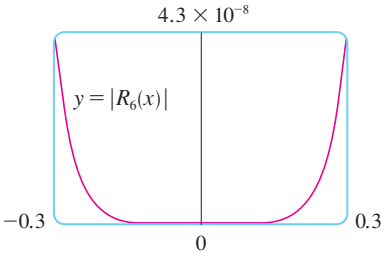


FIGURA 4

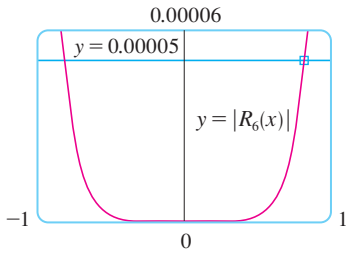


FIGURA 5

Si se hubiera pedido que aproximáramos sen 72° en lugar de sen 12° en el ejemplo 2, habría sido prudente utilizar los polinomios de Taylor en $a = \pi/3$ (en lugar de $a = 0$), porque son mejores aproximaciones al sen x para valores de x cercanos a $\pi/3$. Observe que 72° es cercano a 60° (o $\pi/3$ radianes), y las derivadas de sen x son fáciles de calcular en $\pi/3$.

La figura 6 muestra las gráficas de las aproximaciones de los polinomios de Maclaurin

$$T_1(x) = x \qquad T_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$

$$T_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \qquad T_7(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

a la curva seno. Podemos ver que cuando n se incrementa, $T_n(x)$ es una buena aproximación a sen x sobre un intervalo más y más grande.

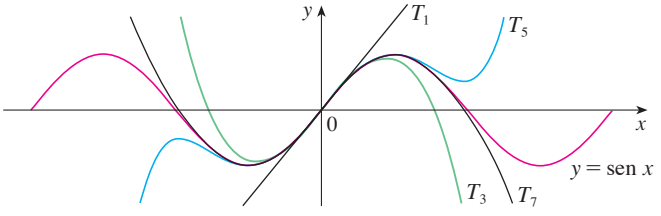


FIGURA 6

Las calculadoras y computadoras aplican el tipo de cálculo hecho en los ejemplos 1 y 2. Por ejemplo, cuando usted presiona la tecla sen o e^x de su calculadora, o bien, cuando un programador de computadoras utiliza una subrutina en el caso de una función trigonométrica o exponencial o de Bessel, en muchas máquinas se calcula una aproximación polinomial. Con frecuencia, el polinomio es uno de Taylor que ha sido modificado de modo que el error se extiende más uniformemente en todo el intervalo.

Aplicaciones en la física

Los polinomios de Taylor también se usan con mucha frecuencia en la física. Con objeto de entender una ecuación, los físicos simplifican a menudo una función considerando sólo dos o tres términos de Taylor. En otras palabras, los físicos usan un polinomio de Taylor como una aproximación de la función. La desigualdad de Taylor se puede usar para medir la exactitud de la aproximación. En el ejemplo siguiente, se muestra una manera en la cual esta idea se usa en la relatividad especial.

V EJEMPLO 3 En la teoría de Einstein de la relatividad especial, la masa de un objeto que se desplaza con velocidad v es

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

donde m_0 es la masa del objeto cuando está en reposo y c es la velocidad de la luz. La energía cinética del objeto es la diferencia entre su energía total y su energía en reposo:

$$K = mc^2 - m_0c^2$$

a) Demuestre que cuando v es muy pequeña comparada con c, esta expresión para K concuerda con la física clásica de Newton: $K = \frac{1}{2}m_0v^2$.
b) Utilice la desigualdad de Taylor para estimar la diferencia en estas expresiones para K cuando $|v| \leq 100$ m/s.

SOLUCIÓN

a) Mediante las expresiones dadas para K y m, obtenemos

$$K = mc^2 - m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0c^2 = m_0c^2\left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} - 1\right]$$

Con $x = -v^2/c^2$, la serie de Maclaurin para $(1 + x)^{-1/2}$ es más fácil de calcular que una serie binomial con $k = -\frac{1}{2}$. (Observemos que $|x| < 1$ porque $v < c$.) Por tanto

$$(1 + x)^{-1/2} = 1 - \tfrac{1}{2}x + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}x^2 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{3!}x^3 + \cdots$$

$$= 1 - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{8}x^2 - \tfrac{5}{16}x^3 + \cdots$$

y

$$K = m_0c^2\left[\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \frac{5}{16}\frac{v^6}{c^6} + \cdots\right) - 1\right]$$

$$= m_0c^2\left(\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \frac{5}{16}\frac{v^6}{c^6} + \cdots\right)$$

Si v es mucho más pequeña que c, entonces todos los términos después del primero

La curva superior de la figura 7 es la gráfica de la expresión de la energía cinética K de un objeto con velocidad v en la relatividad especial. La curva inferior muestra la función usada para K en la física clásica newtoniana. Cuando v es mucho más pequeña que la velocidad de la luz, las curvas son prácticamente idénticas.

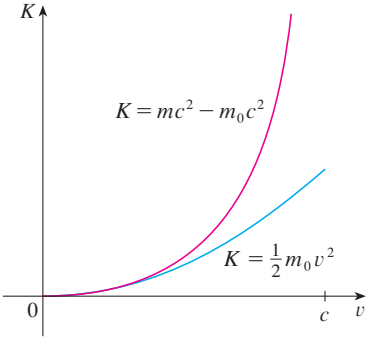


FIGURA 7

son muy pequeños cuando se les compara con el primer término. Si los omitimos, obtenemos

$$K \approx m_0c^2\left(\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) = \tfrac{1}{2}m_0v^2$$

b) Si $x = -v^2/c^2, f(x) = m_0c^2[(1 + x)^{-1/2} - 1]$, y M es un número tal que $|f''(x)| \leq M$, entonces podemos utilizar la desigualdad de Taylor para escribir

$$|R_1(x)| \leq \frac{M}{2!}x^2$$

Tenemos $f''(x) = \frac{3}{4}m_0c^2(1 + x)^{-5/2}$ y sabemos que $|v| \leq 100$ m/s, de modo que

$$|f''(x)| = \frac{3m_0c^2}{4(1 - v^2/c^2)^{5/2}} \leq \frac{3m_0c^2}{4(1 - 100^2/c^2)^{5/2}} \quad (= M)$$

Así, con $c = 3 \times 10^8$ m/s

$$|R_1(x)| \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{3m_0c^2}{4(1 - 100^2/c^2)^{5/2}} \cdot \frac{100^4}{c^4} < (4.17 \times 10^{-10})m_0$$

De modo que cuando $|v| \leq 100$ m/s, la magnitud del error al usar la expresión newtoniana para la energía cinética es cuanto mucho $(4.2 \times 10^{-10})m_0$.

Estos conceptos también se aplican en el campo de la óptica. La figura 8 representa una onda de la fuente puntual S que se encuentra una interfaz esférica de radio R centrado en C. El rayo SA se refracta hacia P.

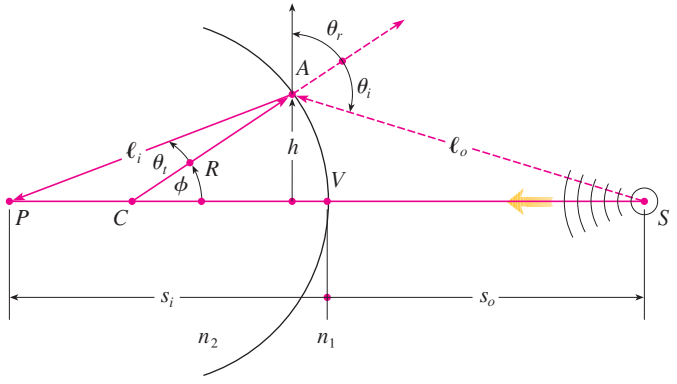


FIGURA 8
Refracción en una interfaz esférica

Al usar el principio de Fermat de que la luz viaja en el menor tiempo posible, Hecht deduce la ecuación

1
$$\frac{n_1}{\ell_o} + \frac{n_2}{\ell_i} = \frac{1}{R}\left(\frac{n_2s_i}{\ell_i} - \frac{n_1s_o}{\ell_o}\right)$$

donde n_1 y n_2 son índices de refracción y ℓ_0, ℓ_i, s_0 y s_i son las distancias indicadas en la figura 8. De acuerdo con la ley de los cosenos aplicada a los triángulos ACS y ACP, tenemos

2
$$\ell_o = \sqrt{R^2 + (s_o + R)^2 - 2R(s_o + R)\cos\phi}$$

$$\ell_i = \sqrt{R^2 + (s_i - R)^2 + 2R(s_i - R)\cos\phi}$$

En este caso utilice la identidad

$$\cos(\pi - \phi) = -\cos\phi$$

Como es un poco complicado trabajar con la ecuación 1, Gauss, en 1841, la simplificó usando la aproximación lineal $\cos\phi \approx 1$ para valores pequeños de ϕ. (Esto equivale a usar el polinomio de Taylor de grado 1.) Por tanto la ecuación se transforma en la siguiente ecuación más sencilla, que se le pide demostrar en el ejercicio 34a):

$$\boxed{3} \qquad \frac{n_1}{s_o} + \frac{n_2}{s_i} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

La teoría óptica resultante se conoce como *óptica de Gauss* u *óptica de primer orden,* y se ha vuelto la herramienta teórica básica para diseñar lentes.

Una teoría más exacta se obtiene al aproximar $\cos\phi$ por medio de su polinomio de Taylor de grado 3 (que es el mismo que el polinomio de Taylor de grado 2). Esto considera los rayos para los cuales ϕ no es tan pequeña, es decir, rayos que golpean la superficie a mayores distancias h por arriba del eje. En el ejercicio 34b) se le pide usar esta aproximación para deducir la ecuación más exacta

$$\boxed{4} \qquad \frac{n_1}{s_o} + \frac{n_2}{s_i} = \frac{n_2 - n_1}{R} + h^2\left[\frac{n_1}{2s_o}\left(\frac{1}{s_o} + \frac{1}{R}\right)^2 + \frac{n_2}{2s_i}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{s_i}\right)^2\right]$$

La teoría óptica resultante se conoce como *óptica de tercer orden.*

Otras aplicaciones de los polinomios de Taylor a la física y la ingeniería se exploran en los ejercicios 32, 33, 35, 36, 37 y 38, y en el proyecto de aplicación de la página 777.

11.11 Ejercicios

1. a) Encuentre los polinomios de Taylor hasta de grado 6 para $f(x) = \cos x$ centrada en $a = 0$. Grafique f y estos polinomios en una misma pantalla.
b) Evalúe f y estos polinomios en $x = \pi/4, \pi/2$ y π.
c) Explique cómo los polinomios de Taylor convergen a $f(x)$.

2. a) Encuentre los polinomios de Taylor hasta de grado 3 para $f(x) = 1/x$ centrada en $a = 1$. Grafique f y estos polinomios en una misma pantalla.
b) Evalúe f y estos polinomios en $x = 0.9$ y 1.3.
c) Explique cómo los polinomios de Taylor convergen a $f(x)$.

3-10 Determine los polinomios de Taylor $T_3(x)$ para la función f centrada en el número a. Grafique f y T_3 en la misma pantalla.

3. $f(x) = 1/x, \quad a = 2$

4. $f(x) = x + e^{-x}, \quad a = 0$

5. $f(x) = \cos x, \quad a = \pi/2$

6. $f(x) = e^{-x}\operatorname{sen} x, \quad a = 0$

7. $f(x) = \ln x, \quad a = 1$

8. $f(x) = x\cos x, \quad a = 0$

9. $f(x) = xe^{-2x}, \quad a = 0$

10. $f(x) = \tan^{-1}x, \quad a = 1$

11-12 Use un sistema algebraico computarizado para encontrar los polinomios de Taylor T_n con centro en a para $n = 2, 3, 4, 5$. Luego grafique estos polinomios y f en la misma pantalla.

11. $f(x) = \cot x, \quad a = \pi/4$

12. $f(x) = \sqrt[3]{1 + x^2}, \quad a = 0$

13-22

a) Encuentre un valor aproximado de f mediante un polinomio de Taylor con grado n en el número a.
b) Con la desigualdad de Taylor estime la exactitud de la aproximación $f(x) \approx T_n(x)$ cuando x está en el intervalo dado.
c) Compruebe el resultado del inciso b) mediante la gráfica de $|R_n(x)|$.

13. $f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 4, \quad n = 2, \quad 4 \leq x \leq 4.2$

14. $f(x) = x^{-2}, \quad a = 1, \quad n = 2, \quad 0.9 \leq x \leq 1.1$

15. $f(x) = x^{2/3}, \quad a = 1, \quad n = 3, \quad 0.8 \leq x \leq 1.2$

16. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad a = \pi/6, \quad n = 4, \quad 0 \leq x \leq \pi/3$

17. $f(x) = \sec x, \quad a = 0, \quad n = 2, \quad -0.2 \leq x \leq 0.2$

18. $f(x) = \ln(1 + 2x), \quad a = 1, \quad n = 3, \quad 0.5 \leq x \leq 1.5$

19. $f(x) = e^{x^2}, \quad a = 0, \quad n = 3, \quad 0 \leq x \leq 0.1$

20. $f(x) = x \ln x, \quad a = 1, \quad n = 3, \quad 0.5 \leq x \leq 1.5$

21. $f(x) = x \operatorname{sen} x, \quad a = 0, \quad n = 4, \quad -1 \leq x \leq 1$

22. $f(x) = \operatorname{senh} 2x, \quad a = 0, \quad n = 5, \quad -1 \leq x \leq 1$

---

23. Mediante la información del ejercicio 5 estime cos 80° con una aproximación de cinco cifras decimales.

24. Mediante la información del ejercicio 16 estime sen 38° con una aproximación de cinco cifras decimales.

25. Utilice la desigualdad de Taylor para determinar el número de términos de la serie de Maclaurin para e^x que se debe usar para estimar $e^{0.1}$ de tal manera que no difiera de 0.00001 del valor real.

26. ¿Cuántos términos de la serie de Maclaurin para $\ln(1 + x)$ son necesarios para estimar ln 1.4 con 0.001 de precisión?

27-29 Aplique el teorema de estimación de la serie alternante o la desigualdad de Taylor para estimar los valores de x para los cuales la aproximación dada es exacta y está dentro del error establecido. Compruebe gráficamente su respuesta.

27. $\operatorname{sen} x \approx x - \dfrac{x^3}{6} \quad (|\text{error}| < 0.01)$

28. $\cos x \approx 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} \quad (|\text{error}| < 0.005)$

29. $\arctan x \approx x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} \quad (|\text{error}| < 0.05)$

---

30. Suponga que sabemos que

$$f^{(n)}(4) = \frac{(-1)^n n!}{3^n(n + 1)}$$

y la serie de Taylor de f con centro en 4 converge a $f(x)$ para toda x en el intervalo de convergencia. Demuestre que el polinomio de Taylor de quinto grado aproxima $f(5)$ con error menor a 0.0002.

31. Un vehículo se desplaza a una velocidad de 20 m/s y a una aceleración de 2 m/s² en un instante dado. Mediante un polinomio de Taylor de segundo grado, estime qué tanto se desplazará el automóvil en el siguiente segundo. ¿Sería razonable utilizar este polinomio para estimar la distancia recorrida durante el minuto siguiente?

32. La resistividad ρ de un alambre conductor es el recíproco de la conductividad y se mide en unidades ohmios-metros (Ω-m). La resistividad de un metal dado depende de la temperatura de acuerdo con la ecuación

$$\rho(t) = \rho_{20} e^{\alpha(t-20)}$$

donde t es la temperatura en °C. Hay tablas que dan los valores de α (llamado coeficiente de temperatura) y ρ_{20} (la resistividad a 20 °C) para varios metales. Excepto a temperaturas muy bajas, la resistividad varía casi en forma lineal con la temperatura, por lo que es común aproximar la expresión para $\rho(t)$ mediante su polinomio de Taylor de primero o segundo grados en $t = 20$.

a) Encuentre expresiones para estas aproximaciones lineales y cuadráticas.

b) Por lo que se refiere al cobre, las tablas dan $\alpha = 0.0039/°\text{C}$ y $\rho_{20} = 1.7 \times 10^{-8}$ Ω-m. Grafique la resistividad del cobre y las aproximaciones lineales y cuadráticas para $-250\ °\text{C} \leq t \leq 1000\ °\text{C}$.

c) ¿Para qué valores de t la aproximación lineal concuerda con la expresión exponencial de tal manera que no difiera 1% del valor real?

33. Un dipolo eléctrico consiste en dos cargas eléctricas de igual magnitud y signos opuestos. Si las cargas son q y $-q$ y hay una distancia d entre ellas, entonces el campo eléctrico E en el punto P en la figura es

$$E = \frac{q}{D^2} - \frac{q}{(D + d)^2}$$

Al desarrollar esta expresión para E como serie en potencias de d/D, demuestre que E es aproximadamente proporcional a $1/D^3$ cuando P está alejada del dipolo.



34. a) Deduzca la ecuación 3 para la óptica de Gauss a partir de la ecuación 1 aproximando $\cos\phi$ en la ecuación 2 mediante su polinomio de Taylor de primer grado.

b) Demuestre que si $\cos\phi$ es reemplazado por su polinomio de Taylor de tercer grado en la ecuación 2, entonces la ecuación 1 se transforma en la ecuación 4 para una óptica de tercer orden. [*Sugerencia:* utilice los dos primeros términos de la serie binomial para ℓ_o^{-1} y ℓ_i^{-1}. Use también $\phi \approx \operatorname{sen}\phi$.]

35. Si una onda de agua de longitud L se desplaza con una velocidad v a través de un cuerpo de agua de profundidad d como en la figura de la página 776, entonces

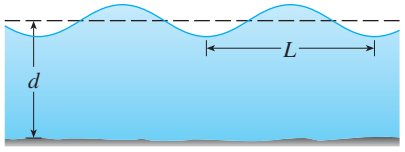
$$v^2 = \frac{gL}{2\pi} \tanh \frac{2\pi d}{L}$$

a) Si el agua es profunda, demuestre que $v \approx \sqrt{gL/(2\pi)}$.

b) Si el agua es poco profunda, use la serie de Maclaurin para tanh para demostrar que $v \approx \sqrt{gd}$. (Así, en agua poco

profunda, la velocidad de una onda tiende a ser independiente de la longitud de la onda.)

c) Mediante el teorema de estimación de la serie alternante, demuestre que si $L > 10d$, entonces la estimación $v^2 \approx gd$ es exacta dentro de $0.014gL$.

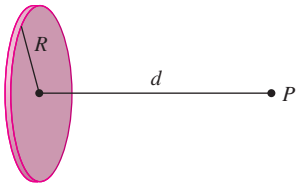


36. Un disco uniformemente cargado tiene radio R y densidad de carga superficial σ, como se ve en la figura. El potencial eléctrico V en un punto P a una distancia d a lo largo de la perpendicular al eje central del disco es

$$V = 2\pi k_e \sigma\left(\sqrt{d^2 + R^2} - d\right)$$

donde k_e es una constante llamada constante de coulomb. Demuestre que

$$V \approx \frac{\pi k_e R^2 \sigma}{d} \qquad \text{para } d \text{ muy grande}$$



37. Si un topógrafo mide diferencias en la altitud cuando hace planos para una carretera que cruza un desierto, se deben hacer correcciones tomando en cuenta la curvatura de la Tierra.

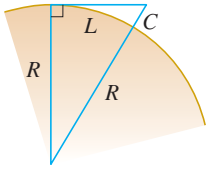
a) Si R es el radio de la Tierra y L es la longitud de la carretera, demuestre que la corrección es

$$C = R\,\sec(L/R) - R$$

b) Mediante un polinomio de Taylor demuestre que

$$C \approx \frac{L^2}{2R} + \frac{5L^4}{24R^3}$$

c) Compare las correcciones dadas por las fórmulas en los incisos a) y b) para una carretera que mide 100 km de longitud. Tome como radio de la Tierra 6 370 km



38. El periodo de un péndulo con longitud L que subtiende un ángulo máximo θ_0 con la vertical es

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2\,\mathrm{sen}^2 x}}$$

donde $k = \mathrm{sen}\left(\frac{1}{2}\theta_0\right)$ y g es la aceleración debida a la gravedad. En el ejercicio 42 de la sección 7.7 se aproximó esta integral usando la regla de Simpson.

a) Desarrolle el integrando como una serie binomial y use el resultado del ejercicio 50 de la sección 7.1 para demostrar que

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left[1 + \frac{1^2}{2^2}k^2 + \frac{1^2 3^2}{2^2 4^2}k^4 + \frac{1^2 3^2 5^2}{2^2 4^2 6^2}k^6 + \cdots\right]$$

Si θ_0 no es demasiado grande, se usa a menudo la aproximación $T \approx 2\pi\sqrt{L/g}$, obtenida usando sólo el primer término de la serie. Se obtiene una mejor aproximación si se usan sólo dos términos:

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \tfrac{1}{4}k^2\right)$$

b) Observe que todos los términos de la serie después del primero tienen coeficientes que son cuanto mucho $\frac{1}{4}$. Use este hecho para comparar esta serie con una serie geométrica y demuestre que

$$2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \tfrac{1}{4}k^2\right) \leq T \leq 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\,\frac{4 - 3k^2}{4 - 4k^2}$$

c) Mediante las desigualdades del inciso b), estime el periodo de un péndulo con $L = 1$ m y $\theta_0 = 10°$. ¿Cómo es si se le compara con la estimación $T \approx 2\pi\sqrt{L/g}$? ¿Cómo es si $\theta_0 = 42°$?

39. En la sección 4.9 utilizamos el método de Newton para obtener un valor aproximado de una raíz r de la ecuación $f(x) = 0$, y a partir de una aproximación inicial x_1 obtuvimos aproximaciones sucesivas $x_2, x_3, \ldots$, donde

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Aplique la desigualdad de Taylor con $n = 1$, $a = x_n$ y $x = r$ para demostrar que si $f''(x)$ existe sobre un intervalo I que contiene a r, x_n y x_{n+1}, y $|f''(x)| \leq M$, $|f'(x)| \geq K$ para toda $x \in I$, entonces

$$|x_{n+1} - r| \leq \frac{M}{2K}|x_n - r|^2$$

[Esto significa que si x_n es exacta con d cifras decimales, entonces x_{n+1} es exacta con una aproximación de $2d$ cifras decimales. Más exactamente, si el error en la etapa n es cuanto mucho 10^{-m}, entonces el error en la etapa $n + 1$ es a lo más $(M/2K)10^{-2m}$.]

PROYECTO DE APLICACIÓN — RADIACIÓN PROVENIENTE DE LAS ESTRELLAS



© Dreamstime

Cualquier objeto emite radiaciones cuando se calienta. Un *cuerpo negro* es un sistema que absorbe toda la radiación que le llega. Por ejemplo, una superficie negra mate o una cavidad grande con un pequeño agujero en su pared (como un alto horno) es un cuerpo negro y emite radiación de cuerpo negro. Incluso la radiación que llega del Sol está cerca de ser radiación de un cuerpo negro.

La ley de Rayleigh-Jeans, propuesta a fines del siglo XIX, expresa la densidad de energía de radiación de cuerpo negro de longitud de onda λ como

$$f(\lambda) = \frac{8\pi kT}{\lambda^4}$$

donde λ se mide en metros, T es la temperatura en kelvins (K) y k es la constante de Boltzmann. La ley de Rayleigh-Jeans concuerda con las mediciones experimentales para longitudes de onda largas, pero no sucede lo mismo con las longitudes de onda cortas. [La ley predice que $f(\lambda) \to \infty$ cuando $\lambda \to 0^+$ pero los experimentos han demostrado que $f(\lambda) \to 0$.] Este hecho recibe el nombre de *catástrofe ultravioleta.*

En 1900, Max Planck encontró un mejor modelo (que se conoce ahora como ley de Planck) para la radiación de cuerpo negro:

$$f(\lambda) = \frac{8\pi hc\lambda^{-5}}{e^{hc/(\lambda kT)} - 1}$$

donde λ se mide en metros, T es la temperatura en kelvins y

$$h = \text{constante de Planck} = 6.6262 \times 10^{-34}\ \text{J·s}$$

$$c = \text{velocidad de la luz} = 2.997925 \times 10^{8}\ \text{m/s}$$

$$k = \text{constante de Boltzmann} = 1.3807 \times 10^{-23}\ \text{J/K}$$

1. Con ayuda de la regla de l'Hospital demuestre que

$$\lim_{\lambda \to 0^+} f(\lambda) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{\lambda \to \infty} f(\lambda) = 0$$

para la ley de Planck. De este modo, esta ley modela la radiación de cuerpo negro mejor que la ley de Rayleigh-Jeans para longitudes de onda cortas.

2. Use un polinomio de Taylor para demostrar que, en el caso de las longitudes de onda largas, la ley de Planck da aproximadamente los mismos valores que la ley de Rayleigh-Jeans.

3. Grafique f de acuerdo con ambas leyes en una misma pantalla y comente sobre las similitudes y las diferencias. Use $T = 5\,700$ K (la temperatura del Sol). (Quizá quiera cambiar de metros a la unidad más conveniente de micrómetros: 1 μm $= 10^{-6}$ m.)

4. Use la gráfica del problema 3 para estimar el valor de λ para el cual $f(\lambda)$ es un máximo según la ley de Planck.

5. Investigue cómo la gráfica de f cambia cuando T varía. (Utilice la ley de Planck.) En particular, dibuje f para las estrellas Betelgeuse ($T = 3\,400$ K), Procyon ($T = 6\,400$ K) y Sirio ($T = 9\,200$ K), así como para el Sol. ¿Cuál es la variación de la radiación total emitida, es decir (el área bajo la curva), con T? Apóyese en las gráficas y explique por qué a Sirio se le conoce como estrella azul y a Betelgeuse como una estrella roja.

Se requiere calculadora graficadora o computadora

11 Repaso

Verificación de conceptos

1. a) ¿Qué es una sucesión convergente?
b) ¿Qué es una serie convergente?
c) ¿Qué significa $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$?
d) ¿Qué significa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3$?

2. a) ¿Qué es una sucesión acotada?
b) ¿Qué es una sucesión monótona?
c) ¿Qué puede decir con respecto a una sucesión monótona acotada?

3. a) ¿Qué es una serie geométrica? ¿En qué circunstancias es convergente? ¿Cuál es su suma?
b) ¿Qué es una serie p? ¿En qué circunstancias es convergente?

4. Suponga que $\sum a_n = 3$ y s_n es la n-ésima suma parcial de la serie. ¿Qué es $\lim_{n\to\infty} a_n$? ¿Qué es $\lim_{n\to\infty} s_n$?

5. Enuncie lo siguiente.
a) Prueba de la divergencia
b) Prueba de la integral
c) Prueba por comparación
d) Prueba por comparación en el límite
e) Prueba de la serie alternante
f) Prueba de la razón
g) Prueba de la raíz

6. a) ¿Qué es una serie absolutamente convergente?
b) ¿Qué puede decir acerca de dicha serie?
c) ¿Qué es una serie condicionalmente convergente?

7. a) Si una serie es convergente de acuerdo con la prueba de la integral, ¿cómo estima su suma?
b) Si una serie es convergente según la prueba por comparación, ¿cómo estima su suma?
c) Si una serie es convergente según la prueba de la serie alternante, ¿cómo estima su suma?

8. a) Escriba la forma general de una serie de potencias.
b) ¿Qué es el radio de convergencia de una serie de potencias?
c) ¿Qué es el intervalo de convergencia de una serie de potencias?

9. Suponga que $f(x)$ es la suma de una serie de potencias con radio de convergencia R.
a) ¿Cómo deriva f? ¿Cuál es el radio de convergencia de la serie para f'?
b) ¿Cómo integra f? ¿Cuál es el radio de convergencia de la serie para $\int f(x)\,dx$?

10. a) Escriba una expresión para el polinomio de Taylor de n-ésimo grado de f centrada en a.
b) Escriba una expresión para la serie de Taylor de f centrada en a.
c) Escriba una expresión para la serie de Maclaurin de f.
d) ¿Cómo demuestra que $f(x)$ es igual a la suma de su serie de Taylor?
e) Enuncie la desigualdad de Taylor.

11. Escriba la serie de Maclaurin y el intervalo de convergencia para cada una de las funciones siguientes.
a) $1/(1-x)$ b) e^x
c) $\operatorname{sen} x$ d) $\cos x$
e) $\tan^{-1}$ f) $\ln(1+x)$

12. Escriba el desarrollo de la serie binomial de $(1+x)^k$. ¿Cuál es el radio de convergencia de esta serie?

Examen rápido Verdadero-Falso

Determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué. Si es falso, dé la razón o proporcione un ejemplo que contradiga el enunciado.

1. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces $\sum a_n$ es convergente.

2. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\operatorname{sen} 1}$ es convergente.

3. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = L$.

4. Si $\sum c_n 6^n$ es convergente, entonces $\sum c_n(-2)^n$ es convergente.

5. Si $\sum c_n 6^n$ es convergente, entonces $\sum c_n(-6)^n$ es convergente.

6. Si $\sum c_n x^n$ diverge cuando $x = 6$, entonces diverge cuando $x = 10$.

7. La prueba de la razón se puede usar para determinar si converge $\sum 1/n^3$.

8. La prueba de la razón se puede usar para determinar si converge $\sum 1/n!$

9. Si $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ y $\sum b_n$ diverge, entonces la serie $\sum a_n$ diverge.

10. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{e}$

11. Si $-1 < \alpha < 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} \alpha^n = 0$.

12. Si $\sum a_n$ es divergente, entonces $\sum |a_n|$ es divergente.

13. Si $f(x) = 2x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots$ converge para toda x, entonces $f'''(0) = 2$.

14. Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son divergentes, entonces $\{a_n + b_n\}$ es divergente.

15. Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son divergentes, entonces $\{a_n b_n\}$ es divergente.

16. Si $\{a_n\}$ es decreciente y $a_n > 0$ para toda n, entonces $\{a_n\}$ es convergente.

17. Si $a_n > 0$ y $\sum a_n$ converge, entonces $\sum (-1)^n a_n$ converge.

18. Si $a_n > 0$ y $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}/a_n) < 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

19. $0.99999\ldots = 1$

20. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$, entonces $\lim_{n\to\infty}(a_{n+3} - a_n) = 0$.

21. Si un número finito de términos se agrega a una serie convergente, la nueva serie aún converge.

22. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = AB$.

Ejercicios

1-8 Determine si la sucesión es convergente o divergente. Si es convergente, determine su límite.

1. $a_n = \dfrac{2 + n^3}{1 + 2n^3}$

2. $a_n = \dfrac{9^{n+1}}{10^n}$

3. $a_n = \dfrac{n^3}{1 + n^2}$

4. $a_n = \cos(n\pi/2)$

5. $a_n = \dfrac{n \operatorname{sen} n}{n^2 + 1}$

6. $a_n = \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$

7. $\{(1 + 3/n)^{4n}\}$

8. $\{(-10)^n/n!\}$

9. Una sucesión se define recursivamente mediante las ecuaciones $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + 4)$. Demuestre que $\{a_n\}$ es creciente y $a_n < 2$ para toda n. Deduzca que $\{a_n\}$ es convergente y determine su límite.

10. Demuestre que $\lim_{n\to\infty} n^4 e^{-n} = 0$ y mediante una gráfica determine el valor más pequeño de N que corresponde a $\varepsilon = 0.1$ en la definición exacta de límite.

11-22 Determine si la serie es convergente o divergente.

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 1}$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n^3 + 1}$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{5^n}$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$

15. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{3n+1}\right)$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 3n}{1 + (1.2)^n}$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(1 + 2n^2)^n}$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{5^n n!}$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^{2n}}{n^2 9^n}$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n}$

23-26 Determine si la serie es condicionalmente convergente, absolutamente convergente o divergente.

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-1/3}$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-3}$

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1) 3^n}{2^{2n+1}}$

26. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{\ln n}$

27-31 Calcule la suma de la serie.

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{2^{3n}}$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} [\tan^{-1}(n+1) - \tan^{-1} n]$

30. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^n}{3^{2n}(2n)!}$

31. $1 - e + \dfrac{e^2}{2!} - \dfrac{e^3}{3!} + \dfrac{e^4}{4!} - \cdots$

32. Exprese el decimal periódico 4.17326326326... como una fracción.

33. Demuestre que $\cosh x \geqslant 1 + \frac{1}{2}x^2$ para toda x.

34. Para qué valores de x converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln x)^n$?

35. Calcule la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^5}$ con una aproximación de cuatro dígitos decimales.

36. a) Determine la suma parcial s_5 de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^6$ y estime el error al usarla como aproximación de la suma de la serie.
b) Calcule la suma de esta serie con una aproximación de cinco dígitos decimales.

37. Use la suma de los primeros ocho términos para aproximarse a la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (2 + 5^n)^{-1}$. Estime el error involucrado en esta aproximación.

38. a) Demuestre que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$ es convergente.

b) Deduzca que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(2n)!} = 0$.

39. Demuestre que si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente, entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right) a_n$$

es también absolutamente convergente.

40-43 Encuentre el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de la serie.

40. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n^2 5^n}$

41. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n 4^n}$

Se requiere calculadora graficadora o computadora

42. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n(x-2)^n}{(n+2)!}$

43. $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^n(x-3)^n}{\sqrt{n+3}}$

44. Calcule el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n$$

45. Determine la serie de Taylor de $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $a = \pi/6$.

46. Encuentre la serie de Taylor de $f(x) = \cos x$ en $a = \pi/3$.

47–54 Encuentre la serie de Maclaurin para f y su radio de convergencia. Puede aplicar el método directo (definición de una serie de Maclaurin) o las series conocidas, como la serie geométrica, serie binomial o la serie de Maclaurin para e^x, $\operatorname{sen} x$, $\tan^{-1}x$ y $\ln(1+x)$.

47. $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x}$

48. $f(x) = \tan^{-1}(x^2)$

49. $f(x) = \ln(4-x)$

50. $f(x) = xe^{2x}$

51. $f(x) = \operatorname{sen}(x^4)$

52. $f(x) = 10^x$

53. $f(x) = 1/\sqrt[4]{16-x}$

54. $f(x) = (1-3x)^{-5}$

55. Evalúe $\displaystyle\int \frac{e^x}{x}\,dx$ como una serie infinita.

56. Mediante series aproxime $\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx$ con dos dígitos decimales.

57–58

a) Obtenga un valor aproximado de f mediante un polinomio de Taylor de grado n en el número a.

b) Dibuje f y T_n en una misma pantalla.

c) Use la desigualdad de Taylor para estimar la exactitud de la aproximación $f(x) \approx T_n(x)$ cuando x se encuentra en el intervalo dado.

d) Compruebe su resultado del inciso c) mediante la gráfica de $|R_n(x)|$.

57. $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 1$, $n = 3$, $0.9 \leq x \leq 1.1$

58. $f(x) = \sec x$, $a = 0$, $n = 2$, $0 \leq x \leq \pi/6$

59. Mediante las series evalúe el siguiente límite.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3}$$

60. La fuerza debida a la gravedad que actúa sobre un objeto de masa m a una altura h por encima de la superficie de la Tierra es

$$F = \frac{mgR^2}{(R+h)^2}$$

donde R es el radio de la Tierra y g es la aceleración de la gravedad.

a) Exprese F como una serie en potencias de h/R.

b) Observe que si aproxima F con el primer término de la serie, obtenemos la expresión $F \approx mg$ que se usa por lo común cuando h es mucho más pequeña que R. Aplique el teorema de la estimación de la serie alternante para calcular los valores de h para los cuales la aproximación $F \approx mg$ no difiere 1% del valor real. (Use $R = 6\,400$ km.)

61. Suponga que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ para toda x.

a) Si f es una función impar, demuestre que

$$c_0 = c_2 = c_4 = \cdots = 0$$

b) Si f es una función par, demuestre que

$$c_1 = c_3 = c_5 = \cdots = 0$$

62. Si $f(x) = e^{x^2}$, demuestre que $f^{(2n)}(0) = \dfrac{(2n)!}{n!}$.

Problemas adicionales

Antes de ver la solución del ejemplo, cúbrala e intente resolver el problema por sí mismo.

EJEMPLO Encuentre la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+3)!}$.

SOLUCIÓN El principio de resolución de problemas es relevante aquí ya que hay que *reconocer algo familiar*. ¿La serie dada se parece a alguna que ya conozcamos? Bueno, tiene algunos ingredientes en común con la serie de Maclaurin para la función exponencial:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Podemos hacer que esta serie se parezca más reemplazando x por $x + 2$:

$$e^{x+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n!} = 1 + (x+2) + \frac{(x+2)^2}{2!} + \frac{(x+2)^3}{3!} + \cdots$$

Pero aquí el exponente en el numerador coincide con el factorial del número en el denominador. Para hacer que esto pase en la serie dada, multiplicaremos y dividiremos por $(x + 2)^3$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+3)!} = \frac{1}{(x+2)^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^{n+3}}{(n+3)!}$$

$$= (x+2)^{-3}\left[\frac{(x+2)^3}{3!} + \frac{(x+2)^4}{4!} + \cdots\right]$$

Vemos que la serie entre paréntesis es justamente la serie para e^{x+2} con los tres primeros términos faltantes. Así que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+3)!} = (x+2)^{-3}\left[e^{x+2} - 1 - (x+2) - \frac{(x+2)^2}{2!}\right]$$

Problemas

1. Si $f(x) = \operatorname{sen}(x^3)$, encuentre $f^{(15)}(0)$.

2. Una función f está definida por

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}$$

¿Dónde es continua f?

3. a) Demuestre que $\tan \frac{1}{2}x = \cot \frac{1}{2}x - 2 \cot x$.

b) Calcule la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \tan \frac{x}{2^n}$$

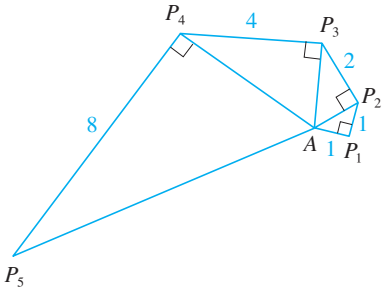


FIGURA PARA EL PROBLEMA 4

4. Sea $\{P_n\}$ una sucesión de puntos determinados de acuerdo con la figura. Por tanto $|AP_1| = 1$, $|P_nP_{n+1}| = 2^{n-1}$ y el ángulo AP_nP_{n+1} es un ángulo recto. Calcule $\lim_{n\to\infty} \angle P_nAP_{n+1}$.

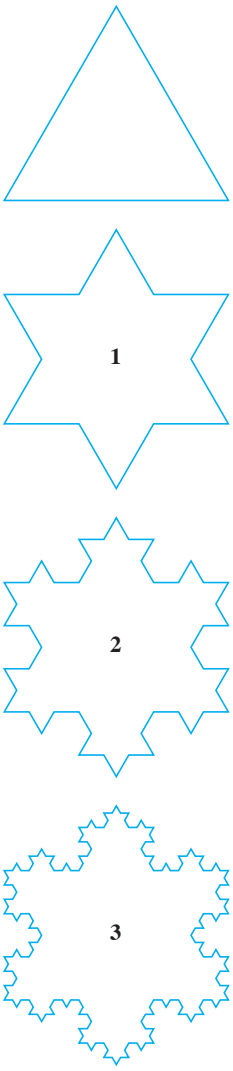


FIGURA PARA EL PROBLEMA 5

5. Para construir la **curva del copo de nieve**, inicie con un triángulo equilátero de lados de longitud igual a 1. El paso 1 de la construcción consta de dividir cada lado en tres partes iguales, construir un triángulo equilátero en la parte media y luego borrar la parte media (véase figura). El paso 2 es repetir el paso 1 en cada lado del polígono resultante. Se repite este procedimiento en cada paso posterior. La curva del copo de nieve es la curva que resulta de repetir este proceso indefinidamente.

a) Sean s_n, l_n y p_n, respectivamente el número de lados, la longitud de un lado y la longitud total de la curva de aproximación n-ésima, es decir, la curva obtenida después del paso n del trazo. Encuentre fórmulas para s_n, l_n y p_n.

b) Demuestre que $p_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$.

c) Sume una serie infinita para encontrar el área encerrada por la curva del copo de nieve.

Nota: Los incisos b) y c) demuestran que la curva del copo de nieve es infinitamente larga pero encierra un área finita.

6. Calcule la suma de la serie

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \cdots$$

donde los términos son los recíprocos de los enteros positivos cuyos factores primos son 2s y 3s.

7. a) Demuestre que para $xy \neq -1$.

$$\arctan x - \arctan y = \arctan \frac{x - y}{1 + xy}$$

si el primer miembro queda entre $-\pi/2$ y $\pi/2$.

b) Demuestre que $\arctan \frac{120}{119} - \arctan \frac{1}{239} = \pi/4$.

c) Deduzca la fórmula siguiente de John Machin (1680-1751).

$$4 \arctan \tfrac{1}{5} - \arctan \tfrac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$$

d) Utilice la serie de Maclaurin del $\arctan x$ para demostrar que

$$0.1973955597 < \arctan \tfrac{1}{5} < 0.1973955616$$

e) Demuestre que

$$0.004184075 < \arctan \tfrac{1}{239} < 0.004184077$$

f) Deduzca que el valor siguiente es correcto con siete cifras decimales $\pi \approx 3.1415927$.

Machin aplicó este método en 1706 para determinar π con 100 cifras decimales. Recientemente, con la ayuda de computadoras, se ha calculado cada vez con mayor exactitud el valor de π. En 2009 T. Dausuke y su equipo calcularon el valor de π ¡con más de dos trillones de lugares decimales!

8. a) Demuestre una fórmula similar a la del problema 7a), pero que contenga arccot en lugar de arctan.

b) Calcule la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{arccot}(n^2 + n + 1)$.

9. Determine el intervalo de convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n$ y calcule la suma.

10. Si $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k = 0$, demuestre que

$$\lim_{n \to \infty} \left(a_0 \sqrt{n} + a_1 \sqrt{n+1} + a_2 \sqrt{n+2} + \cdots + a_k \sqrt{n+k} \right) = 0$$

Si no encuentra cómo demostrarlo, intente con la estrategia de resolución de problemas *usando las analogías* (véase página 75). Intente primero los casos especiales $k = 1$ y $k = 2$. Si puede ver cómo demostrar la afirmación para estos casos, probablemente verá cómo demostrarla en general.

11. Calcule la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

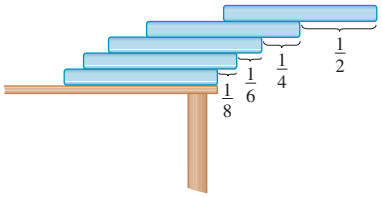


FIGURA PARA EL PROBLEMA 12

12. Suponga que posee una gran cantidad de libros, todos del mismo tamaño, y que los apila en el borde de una mesa, y que cada libro sobresale un poco más del borde de la mesa que el libro anterior. Demuestre que es posible hacerlo de modo que el libro que queda hasta encima está por completo más allá del borde de la mesa. En efecto, muestre que el libro de hasta encima se puede acomodar a cualquier distancia más allá del borde de la mesa si la pila de libros tiene la altura suficiente. Aplique el método siguiente para apilar los libros: la mitad del largo del último libro sobresale del penúltimo libro. De este penúltimo libro sobresale sólo un cuarto de su largo con respecto al libro antepenúltimo. De este libro sobresale un sexto de su largo con respecto al libro anteantepenúltimo, y así sucesivamente. Inténtelo usted mismo con un juego de cartas. Tome en cuenta el centro de mesa.

13. Si la curva $y = e^{-x/10}\operatorname{sen} x$, $x \geqslant 0$, gira en torno del eje x, el sólido resultante se observa como un infinito collar de esferillas decreciente.

a) Encuentre el volumen exacto de la n-ésima esferilla. (Use una tabla de integrales o sistema computarizado de álgebra.)

b) Encuentre el volumen total de las esferillas.

14. Si $p > 1$, evalúe la expresión

$$\frac{1 + \dfrac{1}{2^p} + \dfrac{1}{3^p} + \dfrac{1}{4^p} + \cdots}{1 - \dfrac{1}{2^p} + \dfrac{1}{3^p} - \dfrac{1}{4^p} + \cdots}$$

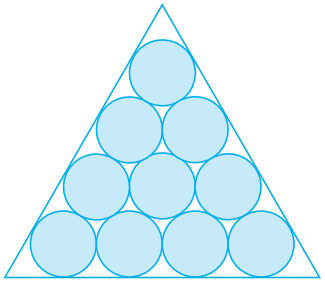


FIGURA PARA EL PROBLEMA 15

15. Suponga que círculos de igual diámetro están acomodados apretadamente en n filas dentro de un triángulo equilátero. (La figura ilustra el caso $n = 4$.) Si A es el área del triángulo y A_n es el área total ocupada por las n filas de círculos, demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{A} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

16. Una sucesión $\{a_n\}$ se define recursivamente mediante las ecuaciones

$$a_0 = a_1 = 1 \qquad n(n-1)a_n = (n-1)(n-2)a_{n-1} - (n-3)a_{n-2}$$

Calcule la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

17. Tome el valor de x^x en 0 a 1 e integre una serie término a término, y con esto demuestre que

$$\int_0^1 x^x\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$$

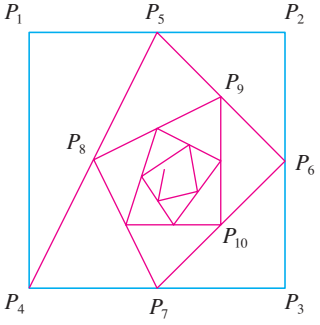


FIGURA PARA EL PROBLEMA 18

18. Inicie con los vértices $P_1(0, 1)$, $P_2(1, 1)$, $P_3(1, 0)$, $P_4(0, 0)$ de un cuadrado, y localice puntos como se muestra en la figura: P_5 es el punto medio de P_1P_2, P_6 es el punto medio de P_2P_3, P_7 es el punto medio de P_3P_4, y así sucesivamente. La trayectoria espiral de la poligonal $P_1P_2P_3\,P_4P_5P_6P_7$ se aproxima al punto P dentro del cuadrado.

a) Si las coordenadas de P_n son (x_n, y_n), demuestre que $\frac{1}{2}x_n + x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3} = 2$ y encuentre una ecuación similar para las coordenadas y.

b) Determine las coordenadas de P.

19. Encuentre la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$.

20. Lleve a cabo los siguientes pasos para demostrar que

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} + \frac{1}{7\cdot 8} + \cdots = \ln 2$$

a) Use la fórmula para la suma de una serie geométrica finita (11.2.3) para obtener una expresión para

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + x^{2n-2} - x^{2n-1}$$

b) Integre el resultado del inciso a) de 0 a 1 para obtener una expresión para

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$$

como una integral.

c) Del inciso b) deduzca que

$$\left| \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n)} - \int_0^1 \frac{dx}{1+x} \right| < \int_0^1 x^{2n}\, dx$$

d) Utilice el inciso c) para demostrar que la suma de la serie dada es ln 2.

21. Encuentre todas las soluciones de la ecuación

$$1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} + \frac{x^3}{6!} + \frac{x^4}{8!} + \cdots = 0$$

Sugerencia: considere los casos $x \geqslant 0$ y $x < 0$ por separado.

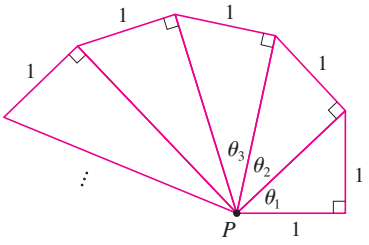


FIGURA PARA EL PROBLEMA 22

22. Se trazan triángulos rectángulos como en la figura. Cada uno de los triángulos tiene una altura de 1 y su base es la hipotenusa del triángulo precedente. Demuestre que esta sucesión de triángulos da una cantidad indefinida de vueltas alrededor de P mostrando que $\Sigma\, \theta_n$ es una serie divergente.

23. Considere la serie cuyos términos son los recíprocos de los enteros positivos que se pueden escribir con la notación de base 10 sin usar el dígito 0. Demuestre que esta serie es convergente y que la suma es menor que 90.

24. a) Demuestre que la serie de Maclaurin de la función

$$f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} \qquad \text{es} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n$$

donde f_n es el n-ésimo número de Fibonacci, es decir, $f_1 = 1, f_2 = 1$ y $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ para $n \geqslant 3$. [*Sugerencia:* escriba $x/(1 - x - x^2) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$ y multiplique ambos lados de esta ecuación por $1 - x - x^2$.]

b) Determine una fórmula explícita para el n-ésimo número de Fibonacci, escribiendo $f(x)$ como una suma de fracciones parciales y con ello obteniendo la serie de Maclaurin de una manera distinta.

25. Sea

$$u = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots$$

$$v = x + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^{10}}{10!} + \cdots$$

$$w = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots$$

Demuestre que $u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw = 1$.

26. Demuestre que si $n > 1$, la n-ésima suma parcial de la serie armónica no es un entero.

Sugerencia: sea 2^k la máxima potencia de 2 que es menor o igual a n y sea M el producto de todos los enteros impares que sean menores o iguales a n. Suponga que $s_n = m$, un entero. Entonces $M2^k s_n = M2^k m$. El lado derecho de esta ecuación es par. Pruebe que el lado izquierdo es impar al demostrar que cada uno de sus términos es un entero par, excepto el último.

Apéndices

A Números, desigualdades y valores absolutos

B Geometría de coordenadas y rectas

C Gráficas de ecuaciones de segundo grado

D Trigonometría

E Notación sigma

F Demostración de teoremas

G El logaritmo definido como una integral

H Números complejos

I Respuestas a ejercicios de número impar

A Números, desigualdades y valores absolutos

El cálculo está basado en el sistema de los números reales. Empieza con los **enteros**:

$$\ldots, \quad -3, \quad -2, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad \ldots$$

A continuación construimos los **números racionales**, que son razones entre enteros. Así, cualquier número racional r se puede expresar como

$$r = \frac{m}{n} \qquad \text{donde } m \text{ y } n \text{ son enteros y } n \neq 0$$

Ejemplos son

$$\tfrac{1}{2} \qquad -\tfrac{3}{7} \qquad 46 = \tfrac{46}{1} \qquad 0.17 = \tfrac{17}{100}$$

(Recuerde que la división entre 0 está siempre excluida, de modo que las expresiones como $\frac{3}{0}$ y $\frac{0}{0}$ no están definidas.) Algunos números reales, por ejemplo, $\sqrt{2}$, no se pueden expresar como una razón entre enteros y, por tanto, se denominan **números irracionales**. Se puede demostrar, con diversos grados de dificultad, que los siguientes también son números irracionales:

$$\sqrt{3} \qquad \sqrt{5} \qquad \sqrt[3]{2} \qquad \pi \qquad \operatorname{sen} 1^\circ \qquad \log_{10} 2$$

El conjunto de todos los números reales suele denotarse con el símbolo $\mathbb{R}$. Cuando usamos la palabra *número* sin más restricción, queremos decir "número real".

Todo número tiene una representación decimal. Si el número es racional, entonces el decimal correspondiente es periódico. Por ejemplo,

$$\tfrac{1}{2} = 0.5000\ldots = 0.5\overline{0} \qquad \tfrac{2}{3} = 0.66666\ldots = 0.\overline{6}$$

$$\tfrac{157}{495} = 0.317171717\ldots = 0.3\overline{17} \qquad \tfrac{9}{7} = 1.285714285714\ldots = 1.\overline{285714}$$

(La barra indica que la sucesión de dígitos se repite indefinidamente.) Por otra parte, si el número es irracional, el decimal no es periódico:

$$\sqrt{2} = 1.414213562373095\ldots \qquad \pi = 3.141592653589793\ldots$$

Si detenemos la expansión decimal de cualquier número en cierto lugar, obtenemos una aproximación al número. Por ejemplo, es posible escribir

$$\pi \approx 3.14159265$$

donde el $\approx$ se lee "es aproximadamente igual a". Cuantos más lugares decimales retengamos, es mejor la aproximación que obtenemos.

Los números reales pueden representarse por medio de puntos en una recta, como en la figura 1. La dirección positiva (a la derecha) está indicada por una flecha. Seleccionamos un punto de referencia arbitrario 0, llamado **origen**, que corresponde al número real 0. Dada cualquier unidad conveniente de medida, todo número positivo x está representado por el punto de la recta situado a una distancia de x unidades a la derecha del origen, y todo número negativo $-x$ está representado por un punto x unidades a la izquierda del origen. Así, todo número real está representado por un punto en la recta, y todo punto P de la recta corresponde a exactamente un número real. El número asociado con el punto P se denomina **coordenada** de P y entonces se llama **recta coordenada**, o **recta de**

números reales, o simplemente **recta real**. Con frecuencia identificamos el punto con su coordenada y consideramos un número como que es un punto en la recta real.

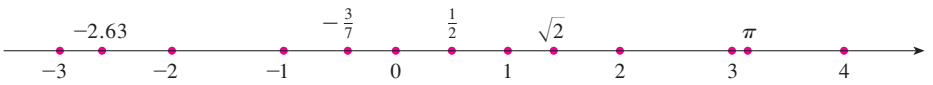


FIGURA 1

Los números reales son ordenados. Decimos que *a es menor que b* y escribimos $a < b$ en la recta numérica. (De un modo equivalente, decimos que *b es mayor que a* y escribimos $b > a$.) El símbolo $a \leqslant b$ (o $b \geqslant a$) significa que ya sea $a < b$ o $a = b$ y se lee "*a* es menor que o igual a *b*". Por ejemplo, las siguientes son desigualdades verdaderas:

$$7 < 7.4 < 7.5 \qquad -3 > -\pi \qquad \sqrt{2} < 2 \qquad \sqrt{2} \leqslant 2 \qquad 2 \leqslant 2$$

En lo que sigue necesitamos usar *notación de conjuntos*. Un **conjunto** es una colección de objetos, y estos objetos reciben el nombre de **elementos** del conjunto. Si S es un conjunto, la notación $a \in S$ significa que a es un elemento de S, y $a \notin S$ significa que a no es un elemento de S. Por ejemplo, si Z representa el conjunto de enteros, entonces $-3 \in Z$ pero $\pi \notin Z$. Si S y T son conjuntos, entonces su **unión** $S \cup T$ es el conjunto formado por todos los elementos que están en S o en T (o tanto en S como en T). La **intersección** de S y T es el conjunto $S \cap T$ formado por todos los elementos que están en S y en T. En otras palabras, $S \cap T$ es la parte común de S y T. El conjunto vacío, denotado por $\varnothing$, es el conjunto que no contiene elementos.

Algunos conjuntos se pueden describir al poner entre llaves sus elementos. Por ejemplo, el conjunto A formado por todos los enteros positivos menores que 7 se puede escribir como

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

También podríamos escribir A en *notación de constructor de conjuntos* como

$$A = \{x \mid x \text{ es un entero y } 0 < x < 7\}$$

Que se lee "A es el conjunto de x tal que x es un entero y $0 < x < 7$".

Intervalos

Ciertos conjuntos de números reales, llamados **intervalos**, se presentan con frecuencia en Cálculo y corresponden geométricamente a segmentos de recta. Por ejemplo, si $a < b$, el **intervalo abierto** de a a b está formado por todos los números entre a y b y se denota con el símbolo (a, b). Usando notación de constructor de conjuntos, podemos escribir

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$$



FIGURA 2
Intervalo abierto (a, b)

Observe que los puntos extremos del intervalo, es decir, a y b, están excluidos. Esto se indica con los paréntesis redondos ( ) y por los puntos abiertos de la figura 2. El **intervalo cerrado** de a a b es el conjunto

$$[a, b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

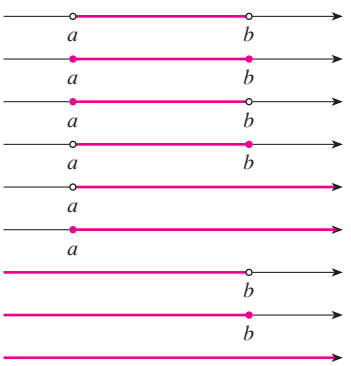


FIGURA 3
Intervalo cerrado $[a, b]$

Aquí los puntos extremos del intervalo están incluidos, lo cual se indica con los corchetes [ ] y los puntos llenos de la figura 3. También es posible incluir sólo un punto extremo en un intervalo, como se muestra en la tabla 1.

1 Tabla de intervalos

La tabla 1 es una lista de nueve posibles tipos de intervalos. Cuando se estudien estos intervalos, siempre se supone que $a < b$.

Notación	Descripción del conjunto	Figura
(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	
$[a, b]$	$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$	
$[a, b)$	$\{x \mid a \leqslant x < b\}$	
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \leqslant b\}$	
(a, ∞)	$\{x \mid x > a\}$	
$[a, \infty)$	$\{x \mid x \geqslant a\}$	
$(-\infty, b)$	$\{x \mid x < b\}$	
$(-\infty, b]$	$\{x \mid x \leqslant b\}$	
$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$ (conjunto de todos los números reales)	

También necesitamos considerar intervalos infinitos como

$$(a, \infty) = \{x \mid x > 0\}$$

Esto no significa que ∞ ("infinito") sea un número. La notación (a, ∞) representa el conjunto de todos los números que son mayores que a, de modo que el símbolo ∞ sólo indica que el intervalo se extiende infinitamente en la dirección positiva.

Desigualdades

Cuando trabaje con desigualdades, observe las reglas siguientes.

2 Reglas para desigualdades

1. Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.
2. Si $a < b$ y $c < d$, entonces $a + c < b + d$.
3. Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.
4. Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$.
5. Si $0 < a < b$, entonces $1/a > 1/b$.

La regla 1 dice que podemos sumar cualquier número a ambos lados de una desigualdad, y la regla 2 dice que se pueden sumar dos desigualdades. No obstante, debemos tener cuidado con la multiplicación. La regla 3 dice que podemos multiplicar ambos lados de una desigualdad por un número *positivo*, pero la regla 4 dice que si multiplicamos ambos lados de una desigualdad por un número negativo, entonces invertimos la dirección de la desigualdad. Por ejemplo, si tomamos la desigualdad $3 < 5$ y multiplicamos por 2, obtenemos $6 < 10$, pero si multiplicamos por -2, obtenemos $-6 > -10$. Por último, la regla 5 dice que si tomamos recíprocos, entonces invertimos la dirección de una desigualdad (siempre que los números sean positivos).

EJEMPLO 1 Resuelva la desigualdad $1 + x < 7x + 5$.

SOLUCIÓN La desigualdad dada se satisface con algunos valores de x pero no con otros. *Resolver* una desigualdad significa determinar el conjunto de números x para los que la desigualdad es verdadera. Esto se llama *conjunto solución*.

Primero restamos 1 de cada lado de la desigualdad (usando la regla 1 con $c = -1$):

$$x < 7x + 4$$

A continuación restamos $7x$ de ambos lados (regla 1 con $c = -7x$):

$$-6x < 4$$

Ahora dividimos ambos lados entre -6 (regla 4 con $c = -\frac{1}{6}$):

$$x > -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

Todos estos pasos se pueden invertir, de modo que el conjunto solución está formado por todos los números mayores a $-\frac{2}{3}$. En otras palabras, la solución de la desigualdad es el intervalo $\left(-\frac{2}{3}, \infty\right)$.

EJEMPLO 2 Resuelva las desigualdades $4 \leq 3x - 2 < 13$.

SOLUCIÓN Aquí el conjunto solución está formado por todos los valores de x que satisfagan ambas desigualdades. Usando las reglas dadas en (2), vemos que las siguientes desigualdades son equivalentes:

$$4 \leq 3x - 2 < 13$$

$$6 \leq 3x < 15 \qquad \text{(sumamos 2)}$$

$$2 \leq x < 5 \qquad \text{(dividimos entre 3)}$$

Por tanto, el conjunto solución es $[2, 5)$.

EJEMPLO 3 Resuelva la desigualdad $x^2 - 5x + 6 \leq 0$.

SOLUCIÓN Primero factorizamos el lado izquierdo:

$$(x - 2)(x - 3) \leq 0$$

Sabemos que la ecuación correspondiente $(x - 2)(x - 3) = 0$ tiene las soluciones 2 y 3. Los números 2 y 3 dividen la recta real en tres intervalos:

$$(-\infty, 2) \qquad (2, 3) \qquad (3, \infty)$$

En cada uno de estos intervalos determinamos los signos de los factores. Por ejemplo,

$$x \in (-\infty, 2) \quad \Rightarrow \quad x < 2 \quad \Rightarrow \quad x - 2 < 0$$

A continuación registramos estos signos en la tabla siguiente:

Intervalo	$x - 2$	$x - 3$	$(x - 2)(x - 3)$
$x < 2$	$-$	$-$	$+$
$2 < x < 3$	$+$	$-$	$-$
$x > 3$	$+$	$+$	$+$

Otro método para obtener la información de la tabla es usar *valores de prueba*. Por ejemplo, si usamos el valor de prueba $x = 1$ para el intervalo $(-\infty, 2)$, entonces la sustitución en $x^2 - 5x + 6$ da

$$1^2 - 5(1) + 6 = 2$$

Un método visual para resolver el ejemplo 3 es usar un dispositivo para graficar la parábola $y = x^2 - 5x + 6$ (como en la figura 4) y observamos que la curva se encuentra sobre o abajo del eje x cuando $2 \leq x \leq 3$.

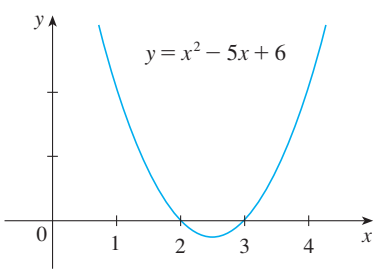


FIGURA 4

El polinomio $x^2 - 5x + 6$ no cambia de signo dentro de ninguno de los tres intervalos, de modo que concluimos que es positivo en $(-\infty, 2)$.

A continuación leemos de la gráfica que $(x - 2)(x - 3)$ es negativo cuando $2 < x < 3$. Por tanto, la solución de la desigualdad $(x - 2)(x - 3) \leqslant 0$ es



FIGURA 5

$$\{x \mid 2 \leqslant x \leqslant 3\} = [2, 3]$$

Note que se incluyen los puntos finales 2 y 3 porque se buscan valores de x tales que el producto sea negativo o cero. La solución se ilustra en la figura 5.

EJEMPLO 4 Resuelva $x^3 + 3x^2 > 4x$.

SOLUCIÓN Primero se llevan todos los términos diferentes de cero a un lado del signo de desigualdad y se factoriza la expresión resultante:

$$x^3 + 3x^2 - 4x > 0 \qquad \text{o} \qquad x(x - 1)(x + 4) > 0$$

Al igual que en el ejemplo 3, resuelva la ecuación correspondiente $x(x - 1)(x + 4) = 0$ y use las soluciones $x = -4$, $x = 0$, y $x = 1$ para dividir la recta real en cuatro intervalos $(-\infty, -4)$, $(-4, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, \infty)$. En cada intervalo, el producto conserva un signo constante como se muestra en la tabla siguiente:

Intervalo	x	$x - 1$	$x + 4$	$x(x - 1)(x + 4)$
$x < -4$	−	−	−	−
$-4 < x < 0$	−	−	+	+
$0 < x < 1$	+	−	+	−
$x > 1$	+	+	+	+

A continuación, de la tabla se lee que el conjunto solución es



FIGURA 6

$$\{x \mid -4 < x < 0 \text{ o } x > 1\} = (-4, 0) \cup (1, \infty)$$

La solución se ilustra en la figura 6.

Valor absoluto

El **valor absoluto** de un número a, denotado por $|a|$, es la distancia de a a 0 en la recta de números reales. Las distancias son siempre positivas o 0, de modo que

$$|a| \geqslant 0 \qquad \text{para todo número } a$$

Por ejemplo,

$$|3| = 3 \qquad |-3| = 3 \qquad |0| = 0 \qquad |\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1 \qquad |3 - \pi| = \pi - 3$$

En general,

3

$$|a| = a \quad \text{si } a \geqslant 0$$
$$|a| = -a \quad \text{si } a < 0$$

Recuerde que si a es negativo, entonces $-a$ es positivo.

EJEMPLO 5 Exprese $|3x - 2|$ usando el símbolo de valor absoluto.

SOLUCIÓN

$$|3x - 2| = \begin{cases} 3x - 2 & \text{si } 3x - 2 \geqslant 0 \\ -(3x - 2) & \text{si } 3x - 2 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 3x - 2 & \text{si } x \geqslant \frac{2}{3} \\ 2 - 3x & \text{si } x < \frac{2}{3} \end{cases}$$

Recuerde que el símbolo $\sqrt{\ }$ significa "raíz cuadrada positiva de". Entonces $\sqrt{r} = s$ quiere decir que $s^2 = r$ y $s \geqslant 0$. Por tanto, la ecuación $\sqrt{a^2} = a$ no siempre es verdadera; lo es sólo cuando $a \geqslant 0$. Si $a < 0$, entonces $-a > 0$, y $\sqrt{a^2} = -a$. En vista de (3), entonces la ecuación es

4

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

que es verdadera para todos los valores de a.

En los ejercicios se dan sugerencias para las pruebas de las siguientes propiedades.

5 Propiedades de valores absolutos Suponga que a y b son cualesquier números reales y n es entero. Entonces

1. $|ab| = |a||b|$ **2.** $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$ $(b \neq 0)$ **3.** $|a^n| = |a|^n$

Para resolver ecuaciones o desigualdades que comprendan valores absolutos, a veces es muy útil usar los siguientes enunciados.

6 Suponga $a > 0$. Entonces

4. $|x| = a$ si y sólo si $x = \pm a$

5. $|x| < a$ si y sólo si $-a < x < a$

6. $|x| > a$ si y sólo si $x > a$ o $x < -a$

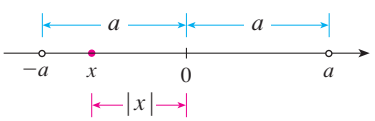


FIGURA 7

Por ejemplo, la desigualdad $|x| < a$ dice que la distancia desde x al origen es menor que a, y se puede ver de la figura 7 que esto es verdadero si y sólo si x está entre $-a$ y a.

Si a y b son cualesquier números reales, entonces la distancia entre a y b es el valor absoluto de la diferencia, es decir, $|a - b|$, que también es igual a $|b - a|$. (Véase la figura 8.)

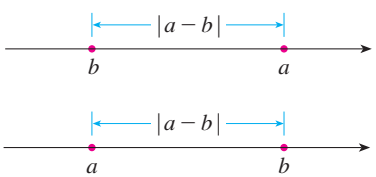


FIGURA 8
Longitud de segmento de recta $= |a - b|$

EJEMPLO 6 Resuelva $|2x - 5| = 3$.

SOLUCIÓN Por la propiedad 4 de 6, $|2x - 5| = 3$ es equivalente a

$$2x - 5 = 3 \quad \text{o bien} \quad 2x - 5 = -3$$

Por tanto, $2x = 8$ o $2x = 2$. Así, $x = 4$ o $x = 1$.

EJEMPLO 7 Resuelva $|x - 5| < 2$.

SOLUCIÓN Por la propiedad 5 de 6, $|x - 5| < 2$ es equivalente a

$$-2 < x - 5 < 2$$

Por tanto, sumando 5 a cada lado,

$$3 < x < 7$$

y el conjunto solución es el intervalo abierto $(3, 7)$.

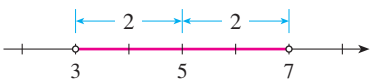


FIGURA 9

SOLUCIÓN 2 Geométricamente, el conjunto solución está formado por todos los números x cuya distancia desde 5 sea menor que 2. De la figura 9 se ve que éste es el intervalo $(3, 7)$.

EJEMPLO 8 Resuelva $|3x + 2| \geq 4$.

SOLUCIÓN Por las propiedades 4 y 6 de 6, $|3x + 2| \geq 4$ es equivalente a

$$3x + 2 \geq 4 \quad \text{o} \quad 3x + 2 \leq -4$$

En el primer caso $3x \geq 2$, que da $x \geq \frac{2}{3}$. En el segundo caso $3x \leq -6$, que da $x \leq -2$, y el conjunto solución es

$$\{x \mid x \leq -2 \text{ o } x \geq \tfrac{2}{3}\} = (-\infty, -2] \cup [\tfrac{2}{3}, \infty)$$

Otra importante propiedad del valor absoluto, llamada desigualdad del triángulo, se usa con frecuencia no sólo en Cálculo sino en todas las matemáticas en general.

7 Desigualdad del triángulo Si a y b son cualesquier números reales, entonces

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Observe que si los números a y b son positivos o negativos, entonces los dos lados de la desigualdad del triángulo son iguales en realidad. Pero si a y b tienen signos contrarios, el lado izquierdo comprende una resta pero no así el lado derecho. Esto hace que la desigualdad del triángulo parezca razonable, pero se demuestra como sigue.

Note que

$$-|a| \leq a \leq |a|$$

es siempre verdadera porque a es igual a $|a|$ o a $-|a|$. El enunciado correspondiente para b es

$$-|b| \leq b \leq |b|$$

Al sumar estas desigualdades se obtiene

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$$

Si ahora aplicamos las propiedades 4 y 5 (con x sustituida por $a + b$ y a por $|a| + |b|$), obtenemos

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

que es lo que desea demostrar.

EJEMPLO 9 Si $|x - 4| < 0.1$ y $|y - 7| < 0.2$, use la desigualdad del triángulo para estimar $|(x + y) - 11|$.

SOLUCIÓN Para usar la información dada, aplique la desigualdad del triángulo con $a = x - 4$ y $b = y - 7$:

$$\begin{aligned} |(x + y) - 11| &= |(x - 4) + (y - 7)| \\ &\leqslant |x - 4| + |y - 7| \\ &< 0.1 + 0.2 = 0.3 \end{aligned}$$

Por tanto, $$|(x + y) - 11| < 0.3$$

A Ejercicios

1-12 Reescriba la expresión sin el símbolo de valor absoluto.

1. $|5 - 23|$
2. $|5| - |-23|$
3. $|-\pi|$
4. $|\pi - 2|$
5. $|\sqrt{5} - 5|$
6. $||-2| - |-3||$
7. $|x - 2|$ si $x < 2$
8. $|x - 2|$ si $x > 2$
9. $|x + 1|$
10. $|2x - 1|$
11. $|x^2 + 1|$
12. $|1 - 2x^2|$

13-38 Resuelva la desigualdad en términos de intervalos e ilustre el conjunto solución sobre la recta de los números reales.

13. $2x + 7 > 3$
14. $3x - 11 < 4$
15. $1 - x \leqslant 2$
16. $4 - 3x \geqslant 6$
17. $2x + 1 < 5x - 8$
18. $1 + 5x > 5 - 3x$
19. $-1 < 2x - 5 < 7$
20. $1 < 3x + 4 \leqslant 16$
21. $0 \leqslant 1 - x < 1$
22. $-5 \leqslant 3 - 2x \leqslant 9$
23. $4x < 2x + 1 \leqslant 3x + 2$
24. $2x - 3 < x + 4 < 3x - 2$
25. $(x - 1)(x - 2) > 0$
26. $(2x + 3)(x - 1) \geqslant 0$
27. $2x^2 + x \leqslant 1$
28. $x^2 < 2x + 8$
29. $x^2 + x + 1 > 0$
30. $x^2 + x > 1$
31. $x^2 < 3$
32. $x^2 \geqslant 5$
33. $x^2 - x^2 \leqslant 0$
34. $(x + 1)(x - 2)(x + 3) \geqslant 0$
35. $x^3 > x$
36. $x^3 + 3x < 4x^2$
37. $\dfrac{1}{x} < 4$
38. $-3 < \dfrac{1}{x} \leqslant 1$

39. La relación entre las escalas Celsius y Fahrenheit de temperatura está dada por $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, donde C es la temperatura en grados Celsius y F es la temperatura en grados Fahrenheit. ¿Qué intervalo en la escala Celsius corresponde a un rango de temperatura de $50 \leqslant F \leqslant 95$?

40. Utilice la relación entre C y F dada en el ejercicio 39 para hallar el intervalo en la escala Fahrenheit correspondiente al rango de temperatura de $20 \leqslant C \leqslant 30$.

41. Cuando el aire seco se mueve hacia arriba, se dilata y al hacerlo así se enfría a razón de 1 °C por cada 100 metros que suba hasta unos 12 kilómetros.

a) Si la temperatura en el suelo es de 20 °C, escriba una fórmula para hallar la temperatura a una altitud h.

b) ¿Qué rango de temperatura se puede esperar si un avión despega y alcanza una altitud máxima de 5 km?

42. Si una pelota se lanza hacia arriba desde lo alto de un edificio de 128 pies de altura, con una velocidad de 16 pies/s, entonces la altura h sobre el suelo t segundos después será

$$h = 128 + 16t - 16t^2$$

¿Durante qué intervalo de tiempo estará la pelota al menos 32 pies sobre el suelo?

43-46 De las siguientes ecuaciones, despeje x.

43. $|2x| = 3$
44. $|3x + 5| = 1$
45. $|x + 3| = |2x + 1|$
46. $\left|\dfrac{2x - 1}{x + 1}\right| = 3$

47-56 De las siguientes ecuaciones, despeje x.

47. $|x| < 3$
48. $|x| \geqslant 3$
49. $|x - 4| < 1$
50. $|x - 6| < 0.1$
51. $|x + 5| \geqslant 2$
52. $|x + 1| \geqslant 3$
53. $|2x - 3| \leqslant 0.4$
54. $|5x - 2| < 6$
55. $1 \leqslant |x| \leqslant 4$
56. $0 < |x - 5| < \frac{1}{2}$

57-58 Despeje x, suponiendo que a, b y c son constantes positivas.

57. $a(bx - c) \geqslant bc$ **58.** $a \leqslant bx + c < 2a$

59-60 Despeje x, suponiendo que a, b y c son constantes negativas.

59. $ax + b < c$ **60.** $\dfrac{ax + b}{c} \leqslant b$

61. Suponga que $|x - 2| < 0.01$ y $|y - 3| < 0.04$. Use la desigualdad del triángulo para demostrar que $|(x + y) - 5| < 0.05$.

62. Demuestre que si $|x + 3| < \frac{1}{2}$, entonces $|4x + 13| < 3$.

63. Demuestre que si $a < b$, entonces $a < \dfrac{a + b}{2} < b$.

64. Use la regla 3 para demostrar la regla 5 de 2.

65. Demuestre que $|ab| = |a||b|$. [*Sugerencia:* use la ecuación 4.]

66. Demuestre que $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$.

67. Demuestre que si $0 < a < b$, entonces $a^2 < b^2$.

68. Demuestre que $|x - y| \geqslant |x| - |y|$. [*Sugerencia:* use la desigualdad del triángulo con $a = x - y$ y $b = y$.]

69. Demuestre que la suma, diferencia y producto de números racionales son números racionales.

70. a) ¿La suma de dos números irracionales es siempre un número irracional?

b) ¿El producto de dos números irracionales es siempre un número irracional?

B Geometría de coordenadas y rectas

En la misma forma en que los puntos sobre una recta pueden ser identificados con números reales al asignarles coordenadas, como se describe en el apéndice A, así los puntos de un plano pueden ser identificados con pares de números reales. Empiece por trazar dos rectas coordenadas perpendiculares que se cruzan en el origen O en cada recta. Por lo general, una recta es horizontal con dirección positiva a la derecha y se llama eje x; la otra recta es vertical con dirección positiva hacia arriba y se denomina eje y.

Cualquier punto P del plano puede ser localizado por un par de números ordenado, único, como se indica a continuación. Trace rectas que pasen por P perpendiculares a los ejes x y y. Estas rectas cruzan los ejes en los puntos con coordenadas a y b, como se muestra en la figura 1. A continuación, al punto P se asigna el par ordenado (a, b). El primer número a recibe el nombre de **coordenada *x*** de P; el segundo número b se llama **coordenada *y*** de P. Entonces P es el punto con coordenadas (a, b), y se denota el punto con el símbolo $P(a, b)$. En la figura 2, varios puntos están marcados con sus coordenadas.

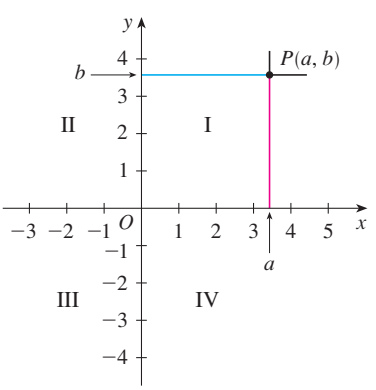


FIGURA 1

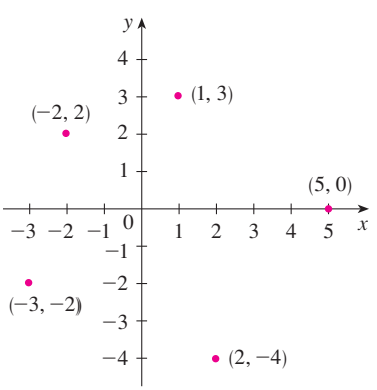


FIGURA 2

Al invertir el proceso precedente, puede empezar con un par ordenado (a, b) y llegar al punto P correspondiente. Con frecuencia se identifica el punto P con el par ordenado (a, b) y se le dice "punto (a, b)". [Aun cuando la notación empleada para un intervalo

abierto (a, b) es la misma que la usada para un punto (a, b), del contexto se puede distinguir cuál es el significado que se pretende.]

Este sistema de coordenadas recibe el nombre de **sistema de coordenadas rectangulares** o **sistema de coordenadas cartesianas** en honor al matemático francés René Descartes (1596-1650), aun cuando otro francés, Pierre Fermat (1601-1665), inventó los principios de geometría analítica más o menos al mismo tiempo que Descartes. El plano provisto con este sistema de coordenadas se llama **plano coordenado** o **plano cartesiano** y se denota con $\mathbb{R}^2$.

Los ejes x y y se denominan **ejes coordenados** y dividen el plano cartesiano en cuatro cuadrantes, marcados I, II, III y IV en la figura 1. Note que el primer cuadrante está formado por los puntos cuyas coordenadas x y y son positivas.

EJEMPLO 1 Describa y bosqueje las regiones dadas por los siguientes conjuntos.

a) $\{(x, y) | x \geqslant 0\}$ b) $\{(x, y) | y = 1\}$ c) $\{(x, y) || y | < 1\}$

SOLUCIÓN

a) Los puntos cuyas coordenadas x sean 0 o positivas se encuentran sobre el eje y o a la derecha de éste, como lo indica la región sombreada de la figura 3a).

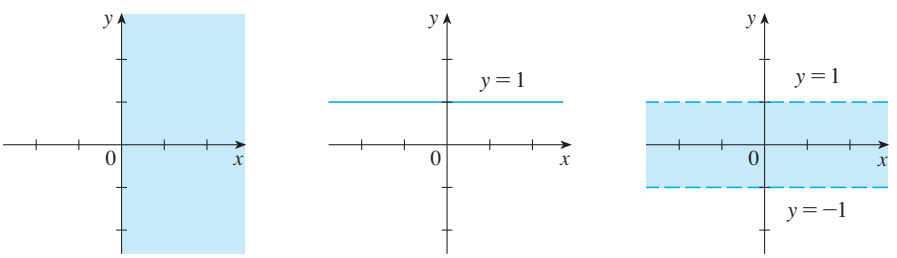


FIGURA 3 a) $x \geqslant 0$ b) $y = 1$ c) $|y| < 1$

b) El conjunto de todos los puntos cuya coordenada y sea 1 es una recta horizontal una unidad arriba del eje x [véase la figura 3b)].

c) Recuerde del apéndice A que

$$|y| < 1 \qquad \text{si y sólo si} \qquad -1 < y < 1$$

La región dada está formada por los puntos del plano cuyas coordenadas y se encuentran entre -1 y 1. Así, la región está formada por todos los puntos que se encuentren entre (pero no en) las rectas horizontales $y = 1$ y $y = -1$. [Estas rectas se muestran como interrumpidas en la figura 3c) para indicar que los puntos sobre estas rectas no se encuentran en el conjunto.]

Recuerde del apéndice A que la distancia entre los puntos a y b sobre una recta numérica es $|a - b| = |b - a|$. De este modo, la distancia entre los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_3(x_2, y_1)$ sobre una recta horizontal debe ser $|x_2 - x_1|$, y la distancia entre $P_2(x_2, y_2)$ y $P_3(x_2, y_1)$ sobre una recta vertical debe ser $|y_2 - y_1|$. (Véase la figura 4.)

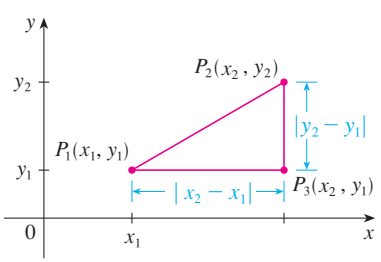


FIGURA 4

Para hallar la distancia $|P_1 P_2|$ entre cualesquier dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, observe que el triángulo $P_1 P_2 P_3$ de la figura 4 es rectángulo y, por el teorema de Pitágoras, tiene

$$\begin{aligned} |P_1 P_2| &= \sqrt{|P_1P_3|^2 + |P_2P_3|^2} = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{aligned}$$

1 Fórmula de la distancia La distancia entre los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ es

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

EJEMPLO 2 La distancia entre $(1, -2)$ y $(5, 3)$ es

$$\sqrt{(5 - 1)^2 + [3 - (-2)]^2} = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$$

Rectas

Desea hallar una ecuación de una recta L determinada; esta ecuación está satisfecha por las coordenadas de los puntos sobre L y por ningún otro punto. Para hallar la ecuación de L use su *pendiente*, que es una medida de la inclinación de la recta.

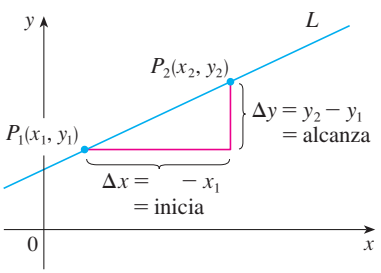


FIGURA 5

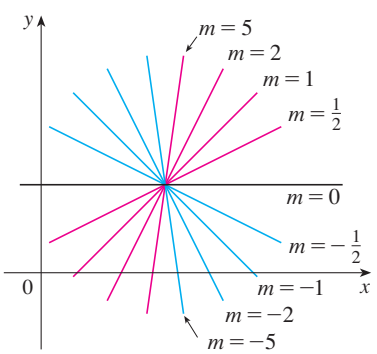


FIGURA 6

2 Definición La **pendiente** de una recta no vertical que pase por los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ es

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

La pendiente de una recta vertical no está definida.

Entonces, la pendiente de una recta es la razón entre el cambio en y, Δy, y el cambio en x, Δx. (Véase la figura 5.) La pendiente es, por tanto, la razón de cambio de y respecto a x. El hecho de que la línea sea recta significa que la razón de cambio es constante.

La figura 6 muestra varias rectas marcadas con sus pendientes. Note que las rectas marcadas con pendiente positiva se inclinan hacia arriba a la derecha, en tanto que las rectas con pendiente negativa se inclinan hacia abajo a la derecha. Observe también que las rectas más inclinadas son aquellas para las que el valor absoluto de la pendiente es máximo, y la recta horizontal tiene pendiente 0.

Ahora encuentre una ecuación de la recta que pasa por un punto determinado $P_1(x_1, y_1)$ y tiene pendiente m. Un punto $P(x, y)$ con $x \neq x_1$ está sobre esta recta si y sólo si la pendiente de la recta que pasa por P_1 y P es igual a m; esto es

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

Esta ecuación se puede escribir también en la forma

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

y observe que esta ecuación también se satisface cuando $x = x_1$ y $y = y_1$. Por tanto, es una ecuación de la recta dada.

3 Forma de punto pendiente de la ecuación de una recta Una ecuación de la recta que pasa por el punto $P_1(x_1, y_1)$ y que tiene pendiente m es

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

EJEMPLO 3 Encuentre una ecuación de la recta que pasa por $(1, -7)$ con pendiente $-\frac{1}{2}$.

SOLUCIÓN Usando 3 con $m = -\frac{1}{2}$, $x_1 = 1$, $y_1 = -7$, obtiene una ecuación de la recta como

$$y + 7 = -\tfrac{1}{2}(x - 1)$$

que también se puede escribir como

$$2y + 14 = -x + 1 \quad \text{o} \quad x + 2y + 13 = 0$$

EJEMPLO 4 Encuentre una ecuación de la recta que pasa por $(-1, 2)$ y $(3, -4)$.

SOLUCIÓN Por la definición 2, la pendiente de la recta es

$$m = \frac{-4 - 2}{3 - (-1)} = -\frac{3}{2}$$

Usando la forma de punto pendiente con $x_1 = -1$ y $y_1 = 2$, obtiene

$$y - 2 = -\tfrac{3}{2}(x + 1)$$

que se simplifica a $$3x + 2y = 1$$

Suponga que una recta no vertical tiene pendiente m y ordenada en el origen b. (Véase la figura 7.) Esto significa que interseca el eje y en el punto $(0, b)$, de modo que la forma de punto pendiente de la ecuación de la recta, con $x_1 = 0$ y $y_1 = b$, se convierte en

$$y - b = m(x - 0)$$

Esto se simplifica como sigue.

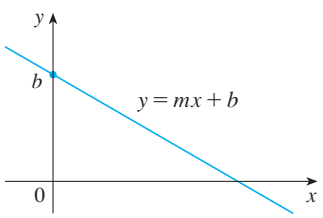


FIGURA 7

4 Forma de punto pendiente de la ecuación de una recta Una ecuación de la recta con pendiente m y ordenada en el origen b es

$$y = mx + b$$

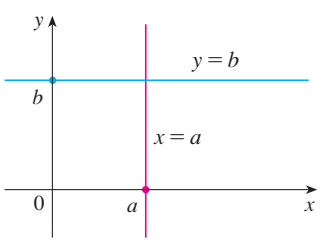


FIGURA 8

En particular, si una recta es horizontal, su pendiente es $m = 0$, de modo que su ecuación es $y = b$, donde b es la ordenada en el origen (véase la figura 8). Una recta vertical no tiene pendiente, pero su ecuación se escribe como $x = a$, donde a es su cruce con el eje x porque la coordenada x de todo punto sobre la recta es a.

Observe que la ecuación de toda recta se puede escribir en la forma

5 $$Ax + By + C = 0$$

porque una recta vertical tiene la ecuación $x = a$ o $x - a = 0$ ($A = 1$, $B = 0$, $C = -a$) y una recta no vertical tiene la ecuación $y = mx + b$ o $-mx + y - b = 0$ ($A = -m$, $B = 1$, $C = -b$). Recíprocamente, si empieza con una ecuación general de primer grado, esto es, una ecuación de la forma 5, donde A, B y C son constantes y A y B no son 0, entonces puede demostrar que es la ecuación de una recta. Si $B = 0$, la ecuación se convierte

en $Ax + C = 0$ o $x = -C/A$, que representa una recta vertical con intersección en el eje x $-C/A$. Si $B \neq 0$, la ecuación se puede escribir también despejando y:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

y reconoce ésta como la forma de pendiente y ordenada en el origen de la ecuación de una recta ($m = -A/B$, $b = -C/B$). Por tanto, una ecuación de la forma [5] se denomina **ecuación lineal** o **ecuación general de una recta**. Por brevedad, con frecuencia se dice "la recta $Ax + By + C = 0$" en lugar de "la recta cuya ecuación es $Ax + By + C = 0$".

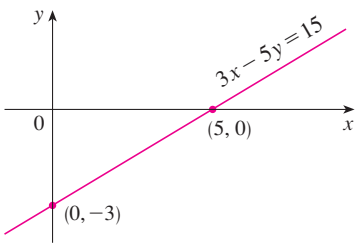


FIGURA 9

EJEMPLO 5 Trace la gráfica de la ecuación $3x - 5y = 15$.

SOLUCIÓN Como la ecuación es lineal, su gráfica es una recta. Para trazar la gráfica, puede simplemente hallar dos puntos sobre la recta. Es más fácil hallar los puntos de intersección. Sustituyendo $y = 0$ (la ecuación del eje x) en la ecuación dada, obtiene $3x = 15$, o sea que $x = 5$ es el punto de intersección con el eje x. Sustituyendo $x = 0$ en la ecuación, se ve que el punto de intersección con el eje y es -3. Esto permite trazar la gráfica como en la figura 9.

EJEMPLO 6 Grafique la desigualdad $x + 2y > 5$.

SOLUCIÓN Se pide trazar la gráfica del conjunto $\{(x, y) \mid x + 2y > 5\}$ y lo hace al despejar y de la ecuación

$$\begin{aligned} x + 2y &> 5 \\ 2y &> -x + 5 \\ y &> -\tfrac{1}{2}x + \tfrac{5}{2} \end{aligned}$$

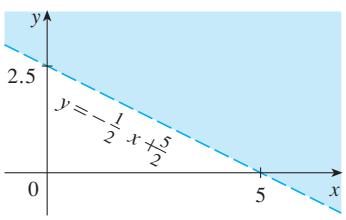


FIGURA 10

Compare esta desigualdad con la ecuación $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$, que representa una recta con pendiente $-\frac{1}{2}$ e intersección con el eje y en $\frac{5}{2}$. Vea que la gráfica dada consta de puntos cuyas coordenadas y son *mayores* que los de la recta $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$. Por tanto, la gráfica es la región que está *arriba* de la recta, como se ilustra en la figura 10.

Rectas paralelas y perpendiculares

Las pendientes se pueden usar para demostrar que las rectas son paralelas o perpendiculares. Los siguientes datos se demuestran, por ejemplo, en *Precalculus: Mathematics for Calculus, Sixth Edition* de Stewart, Redlin y Watson (Belmont, CA, 2012).

6 Rectas paralelas y perpendiculares

1. Dos rectas no verticales son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente.
2. Dos rectas con pendientes m_1 y m_2 son perpendiculares si y sólo si $m_1m_2 = -1$, es decir, que sus pendientes son recíprocos negativos:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

EJEMPLO 7 Encuentre una ecuación de la recta que pasa por el punto (5, 2) que es paralelo a la recta $4x + 6y + 5 = 0$.

SOLUCIÓN La recta dada se puede escribir en la forma

$$y = -\tfrac{2}{3}x - \tfrac{5}{6}$$

que es la forma de intersección con los ejes, con $m = -\frac{2}{3}$. Las rectas paralelas tienen la misma pendiente, de modo que la recta pedida tiene pendiente $-\frac{2}{3}$ y su ecuación en forma de punto pendiente es

$$y - 2 = -\tfrac{2}{3}(x - 5)$$

Puede escribir esta ecuación como $2x + 3y = 16$.

EJEMPLO 8 Demuestre que las rectas $2x + 3y = 1$ y $6x - 4y - 1 = 0$ son perpendiculares.

SOLUCIÓN Las ecuaciones se pueden escribir como

$$y = -\tfrac{2}{3}x + \tfrac{1}{3} \qquad \text{y} \qquad y = \tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{4}$$

donde se ve que las pendientes son

$$m_1 = -\tfrac{2}{3} \qquad \text{y} \qquad m_2 = \tfrac{3}{2}$$

Como $m_1 m_2 = -1$, las rectas son perpendiculares.

B Ejercicios

1-6 Encuentre la distancia entre los puntos.

1. $(1, 1)$, $(4, 5)$
2. $(1, -3)$, $(5, 7)$
3. $(6, -2)$, $(-1, 3)$
4. $(1, -6)$, $(-1, -3)$
5. $(2, 5)$, $(4, -7)$
6. (a, b), (b, a)

7-10 Encuentre la pendiente de la recta que pasa por P y Q.

7. $P(1, 5)$, $Q(4, 11)$
8. $P(-1, 6)$, $Q(4, -3)$
9. $P(-3, 3)$, $Q(-1, -6)$
10. $P(-1, -4)$, $Q(6, 0)$

11. Demuestre que el triángulo con vértices $A(0, 2)$, $B(-3, -1)$ y $C(-4, 3)$ es isósceles.

12. a) Demuestre que el triángulo con vértices $A(6, -7)$, $B(11, -3)$, y $C(2, -2)$ es un triángulo rectángulo, usando el recíproco del teorema de Pitágoras.
b) Use pendientes para demostrar que ABC es un triángulo rectángulo.
c) Encuentre el área del triángulo.

13. Demuestre que los puntos $(-2, 9)$, $(4, 6)$, $(1, 0)$ y $(-5, 3)$ son los vértices de un cuadrado.

14. a) Demuestre que los puntos $A(-1, 3)$, $B(3, 11)$ y $C(5, 15)$ son colineales (están sobre la misma recta) al probar que $|AB| + |BC| = |AC|$.
b) Use pendientes para demostrar que A, B y C son colineales.

15. Demuestre que $A(1, 1)$, $B(7, 4)$, $C(5, 10)$ y $D(-1, 7)$ son vértices de un paralelogramo.

16. Demuestre que $A(1, 1)$, $B(11, 3)$, $C(10, 8)$ y $D(0, 6)$ son vértices de un rectángulo.

17-20 Trace la gráfica de la ecuación.

17. $x = 3$
18. $y = -2$
19. $xy = 0$
20. $|y| = 1$

21-36 Encuentre una ecuación de la recta que satisfaga las condiciones dadas.

21. Que pasa por $(2, -3)$, pendiente 6
22. Que pasa por $(-1, 4)$, pendiente -3
23. Que pasa por $(1, 7)$, pendiente $\frac{2}{3}$
24. Que pasa por $(-3, -5)$, pendiente $-\frac{7}{2}$
25. Que pasa por $(2, 1)$ y $(1, 6)$
26. Que pasa por $(-1, -2)$ y $(4, 3)$
27. Pendiente 3, intersección con el eje y -2
28. Pendiente $\frac{2}{5}$, intersección con el eje y 4
29. Intersección con el eje x 1, intersección con el eje y -3
30. Intersección con el eje x -8 intersección con el eje y 6
31. Que pasa por $(4, 5)$, paralela al eje x
32. Que pasa por $(4, 5)$, paralela al eje y
33. Que pasa por $(1, -6)$, paralela a la recta $x + 2y = 6$
34. Intersección con el eje y 6, paralela a la recta $2x + 3y + 4 = 0$
35. Que pasa por $(-1, -2)$, perpendicular a la recta $2x + 5y + 8 = 0$
36. Que pasa por $(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3})$, perpendicular a la recta $4x - 8y = 1$

37-42 Encuentre la pendiente e intersección con el eje y de la recta y trace su gráfica.

37. $x + 3y = 0$
38. $2x - 5y = 0$

39. $y = -2$

40. $2x - 3y + 6 = 0$

41. $3x - 4y = 12$

42. $4x + 5y = 10$

43-52 Trace la región en el plano xy.

43. $\{(x, y) \mid x < 0\}$

44. $\{(x, y) \mid y > 0\}$

45. $\{(x, y) \mid xy < 0\}$

46. $\{(x, y) \mid x \geqslant 1 \quad \text{y} \quad y < 3\}$

47. $\{(x, y) \mid |x| \leqslant 2\}$

48. $\{(x, y) \mid |x| < 3 \quad \text{y} \quad |y| < 2\}$

49. $\{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 4 \quad \text{y} \quad x \leqslant 2\}$

50. $\{(x, y) \mid y > 2x - 1\}$

51. $\{(x, y) \mid 1 + x \leqslant y \leqslant 1 - 2x\}$

52. $\{(x, y) \mid -x \leqslant y < \frac{1}{2}(x + 3)\}$

53. Encuentre un punto sobre el eje y que sea equidistante de $(5, -5)$ y $(1, 1)$.

54. Demuestre que el punto medio del segmento de recta de $P_1(x_1, y_1)$ a $P_2(x_2, y_2)$ es

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

55. Encuentre el punto medio del segmento de recta que enlace los puntos dados.

a) $(1, 3)$ y $(7, 15)$ b) $(-1, 6)$ y $(8, -12)$

56. Encuentre las longitudes de las medianas del triángulo con vértices $A(1, 0)$, $B(3, 6)$ y $C(8, 2)$. (Una mediana es un segmento de recta que va de un vértice al punto medio del lado opuesto.)

57. Demuestre que las rectas $2x - y = 4$ y $6x - 2y = 10$ no son paralelas y encuentre su punto de intersección.

58. Demuestre que las rectas $3x - 5y + 19 = 0$ y $10x + 6y - 50 = 0$ son perpendiculares y encuentre su punto de intersección.

59. Encuentre una ecuación de la bisectriz perpendicular del segmento de recta que enlace los puntos $A(1, 4)$ y $B(7, -2)$.

60. a) Encuentre ecuaciones para los lados del triángulo con vértices $P(1, 0)$, $Q(3, 4)$ y $R(-1, 6)$.

b) Encuentre ecuaciones para las medianas de este triángulo. ¿En dónde se intersecan?

61. a) Demuestre que si las intersecciones de una recta con los ejes x y y son números a y b diferentes de cero, entonces la ecuación de la recta se puede poner en la forma

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Esta ecuación se denomina **forma de dos intersecciones** de una ecuación de una recta.

b) Use la parte a) para hallar una ecuación de la recta cuya intersección con el eje x es 6 y con el eje y es -8.

62. Un auto sale de Detroit a las 2:00 P.M. y se dirige al oeste a una velocidad constante. Pasa por Ann Arbor, a 40 millas de Detroit, a las 2:50 P.M.

a) Exprese la distancia recorrida en términos del tiempo transcurrido.

b) Trace la gráfica de la ecuación de la parte a).

c) ¿Cuál es la pendiente de esta recta? ¿Qué representa?

C Gráficas de ecuaciones de segundo grado

En el apéndice B vio que una ecuación de primer grado, o lineal, $Ax + By + C = 0$, representa una recta. En esta sección estudiamos ecuaciones de segundo grado como

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad y + x^2 + 1 \qquad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \qquad x^2 - y^2 = 1$$

que representan un círculo, una parábola, una elipse y una hipérbola, respectivamente.

La gráfica de esta ecuación en x y y es el conjunto de todos los puntos (x, y) que satisface la ecuación; da una representación visual de la ecuación. Recíprocamente, dada una curva en el plano xy, puede hallar una ecuación que la representa, es decir, una ecuación satisfecha por las coordenadas de los puntos de la curva y por ningún otro punto. Ésta es la otra mitad del principio básico de geometría como lo formularon Descartes y Fermat. La idea es que si una curva geométrica puede ser representada por una ecuación algebraica, entonces se pueden usar las reglas del álgebra para analizar el problema geométrico.

Círculos

Como un ejemplo de este tipo de problema, busque una ecuación del círculo con radio r y centro (h, k). Por definición, el círculo es el conjunto de todos los puntos $P(x, y)$ cuya

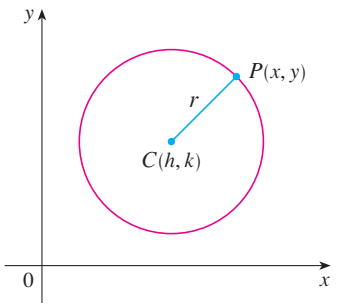


FIGURA 1

distancia desde el centro $C(h, k)$ es r. (Véase la figura 1.) Así, P está en el círculo si y sólo si $|PC| = r$. De la fórmula de la distancia

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

o bien, lo que es equivalente, al elevar al cuadrado ambos lados, obtenemos

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Ésta es la ecuación deseada.

1 Ecuación de un círculo Una ecuación del círculo con centro (h, k) y radio r es

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

En particular, si el centro es el origen $(0, 0)$, la ecuación es

$$x^2 + y^2 = r^2$$

EJEMPLO 1 Encuentre una ecuación del círculo con radio 3 y centro $(2, -5)$.

SOLUCIÓN De la ecuación 1 con $r = 3$, $h = 2$ y $k = -5$, obtenemos

$$(x-2)^2 + (y+5)^2 = 9$$

EJEMPLO 2 Trace la gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 7 = 0$ demostrando primero que representa un círculo y luego hallando su centro y radio.

SOLUCIÓN Primero agrupe los términos de x y y como sigue

$$(x^2 + 2x) + (y^2 - 6y) = -7$$

A continuación complete el cuadrado dentro de cada grupo, sumando las constantes apropiadas a ambos lados de la ecuación:

$$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 6y + 9) = -7 + 1 + 9$$

o

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 3$$

Si compara esta ecuación con la ecuación estándar de un círculo 1, verá que $h = -1$, $k = 3$ y $r = \sqrt{3}$, de modo que la ecuación dada representa un círculo con centro $(-1, 3)$ y radio $\sqrt{3}$. Se ilustra en la figura 2.

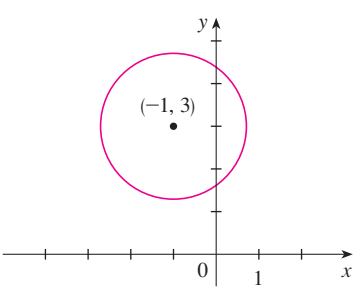


FIGURA 2
$x^2 + y^2 + 2x - 6y + 7 = 0$

Parábolas

Las propiedades geométricas de parábolas se revisan en la sección 10.5. Aquí se considera a una parábola como una gráfica de una ecuación de la forma $y = ax^2 + bx + c$.

EJEMPLO 3 Trace la gráfica de la parábola $y = x^2$.

SOLUCIÓN Elabore una tabla de valores, localice puntos y únalos con una curva lisa para obtener la gráfica de la figura 3.

x	$y = x^2$
0	0
$\pm\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
±1	1
±2	4
±3	9

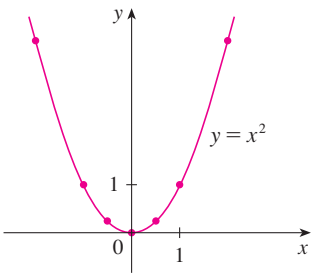


FIGURA 3

La figura 4 muestra las gráficas de varias parábolas con ecuaciones de la forma $y = ax^2$ para varios valores del número a. En cada caso el *vértice*, o sea el punto donde la parábola cambia de dirección, es el origen. Vea que la parábola $y = ax^2$ abre hacia arriba si $a > 0$ y hacia abajo si $a < 0$ (como en la figura 5).

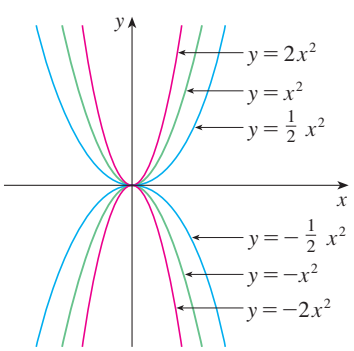
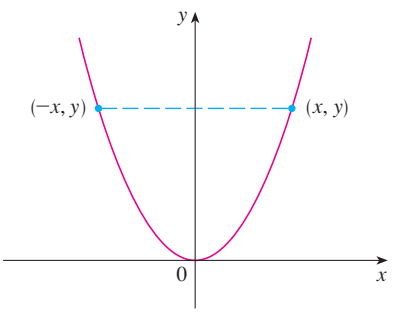
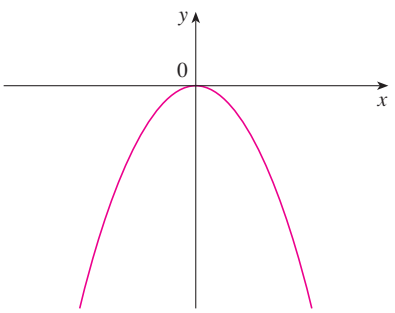


FIGURA 4



a) $y = ax^2,\ a > 0$



b) $y = ax^2,\ a < 0$

FIGURA 5

Note que si (x, y) satisface a $y = ax^2$, entonces $(-x, y)$ también la satisface. Esto corresponde al hecho geométrico de que si la mitad derecha de la gráfica se refleja alrededor del eje y, entonces se obtiene la mitad izquierda de la gráfica. Por tanto, la gráfica es **simétrica respecto al eje *y***.

> La gráfica de una ecuación es simétrica respecto al eje y si la ecuación no cambia cuando x se sustituye con $-x$.

Si intercambia x y y en la ecuación $y = ax^2$, el resultado es $x = ay^2$, que también representa una parábola. (El intercambio de x y y equivale a un reflejo alrededor de la recta diagonal $y = x$.) La parábola $x = ay^2$ abre a la derecha si $a > 0$ y a la izquierda si

$a < 0$. (Véase la figura 6.) Esta vez la parábola es simétrica respecto al eje x porque si (x, y) satisface a $x = ay^2$, también $(x, -y)$ la satisface.

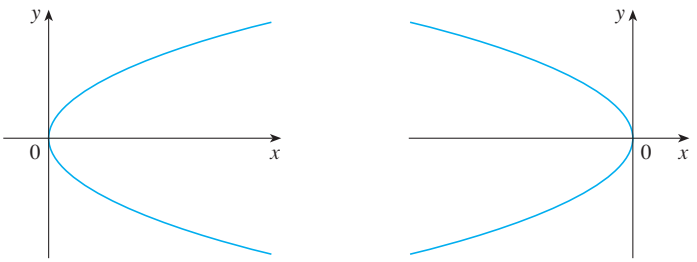


FIGURA 6 a) $x = ay^2,\ a > 0$ b) $x = ay^2,\ a < 0$

> La gráfica de una ecuación es simétrica respecto al eje x si la ecuación no cambia cuando y sea sustituida por $-y$.

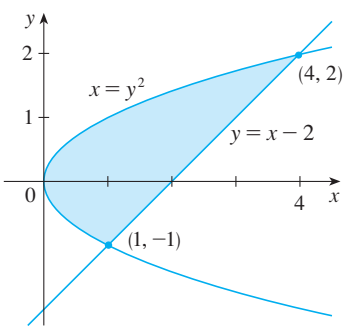


FIGURA 7

EJEMPLO 4 Trace la región acotada por la parábola $x = y^2$ y la recta $y = x - 2$.

SOLUCIÓN Primero encuentre los puntos de intersección al resolver las dos ecuaciones. Sustituyendo $x = y + 2$ en la ecuación $x = y^2$, obtiene $y + 2 = y^2$, que da

$$0 = y^2 - y - 2 = (y - 2)(y + 1)$$

de modo que $y = 2$ o -1. Por tanto, los puntos de intersección son $(4, 2)$ y $(1, -1)$, y trazan la recta $y = x - 2$ que pasa por estos puntos. A continuación trace la parábola $x = y^2$ al consultar la figura 6a) y hacer que la parábola pase por $(4, 2)$ y $(1, -1)$. La región acotada por $x = y^2$ y $y = x - 2$ significa la región finita cuyas fronteras son estas curvas. Se ilustra en la figura 7.

Elipses

La curva con ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad 2$$

donde a y b son números positivos, se llama **elipse** en posición estándar. (Las propiedades geométricas de elipses se estudian en la sección 10.5.) Observe que la ecuación 2 no cambia si x es sustituida con $-x$ o y es sustituida por $-y$, por lo que la elipse es simétrica respecto a ambos ejes. Como ayuda adicional para trazar la elipse, encuentre sus intersecciones.

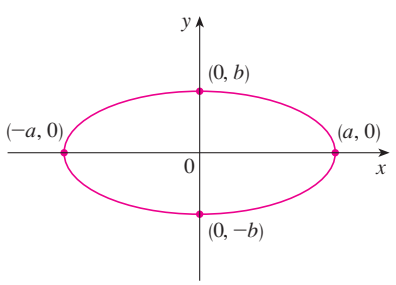


FIGURA 8
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

> Las **intersecciones con el eje *x*** de una gráfica son las coordenadas x de los puntos donde la gráfica cruza el eje x. Se encuentran al hacer $y = 0$ en la ecuación de la gráfica.
>
> Las **intersecciones con el eje *y*** son las coordenadas y de los puntos donde la gráfica cruza el eje y. Se encuentran al hacer $x = 0$ en esta ecuación.

Si hace $y = 0$ en la ecuación 2, obtiene $x^2 = a^2$ y, por tanto, las intersecciones con el eje x son $\pm a$. Al establecer $x = 0$, obtenemos $y^2 = b^2$, de tal manera que las intersecciones de y son $\pm b$. Con el uso de esta información, junto con simetría, se traza la elipse de la figura 8. Si $a = b$, la elipse es un círculo con radio a.

EJEMPLO 5 Trace la gráfica de $9x^2 + 16y^2 = 144$.

SOLUCIÓN Divida ambos lados de la ecuación entre 144.

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

La ecuación está ahora en la forma estándar para una elipse 2, de modo que $a^2 = 16$, $b^2 = 9$, $a = 4$ y $b = 3$. Las intersecciones con el eje x son ± 4; las intersecciones con el eje y son ± 3. La gráfica se ilustra en la figura 9.

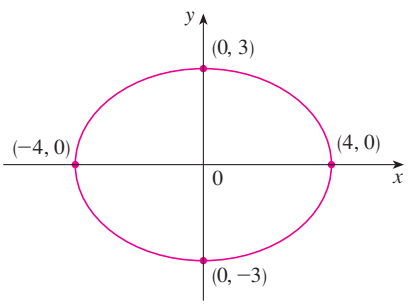


FIGURA 9
$9x^2 + 16y^2 = 144$

Hipérbolas

La curva con ecuación

$$\boxed{3} \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

se denomina **hipérbola** en posición estándar. De nuevo, la ecuación 3 no cambia cuando x es sustituida por $-x$ o y es sustituida por $-y$, de modo que la hipérbola es simétrica respecto a ambos ejes. Para hallar las intersecciones con el eje x haga $y = 0$ y obtiene $x^2 = a^2$ y $x = \pm a$. No obstante, si pone $x = 0$ en la ecuación 3, obtiene $y^2 = -b^2$, lo cual es imposible, de modo que no hay intersección con el eje y. De hecho, de la ecuación 3

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \geqslant 1$$

que muestra que $x^2 \geqslant a^2$ y entonces $|x| = \sqrt{x^2} \geqslant a$. Por lo tanto, $x \geqslant a$ o $x \leqslant -a$. Esto significa que la hipérbola está formada por dos partes, llamadas *ramas*. Se ilustra en la figura 10.

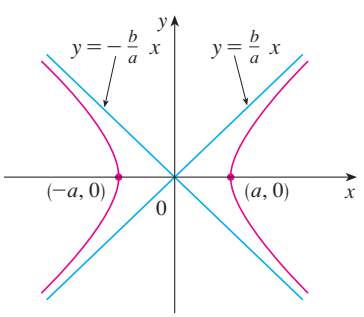


FIGURA 10
La hipérbola $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Al dibujar una hipérbola es útil trazar primero sus *asíntotas*, que son las rectas $y = (b/a)$ y $y = -(b/a)x$ que se ilustran en la figura 10. Ambas ramas de la hipérbola se aproximan a las asíntotas, es decir, se acercan de manera arbitraria a las asíntotas. Esto involucra la idea de límite, que se estudia en el capítulo 2. (Véase también el ejercicio 73 en la sección 4.5.)

Al intercambiar los papeles de x y y se obtiene una ecuación de la forma

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

que también representa una hipérbola y se traza en la figura 11.

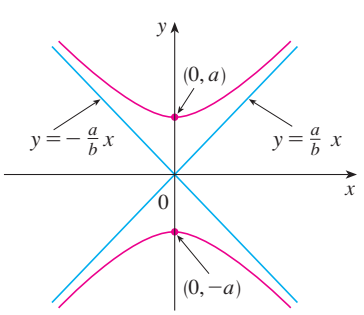


FIGURA 11
La hipérbola $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$

EJEMPLO 6 Dibuje la curva $9x^2 - 4y^2 = 36$.

SOLUCIÓN Dividiendo ambos lados entre 36, obtenemos

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

que es la forma estándar de la ecuación de una hipérbola (ecuación 3). Como $a^2 = 4$, las intersecciones con el eje x son ± 2. Como $b^2 = 9$, tiene $b = 3$ y las asíntotas son $y = \pm(3/2)x$. La hipérbola se ilustra en la figura 12.

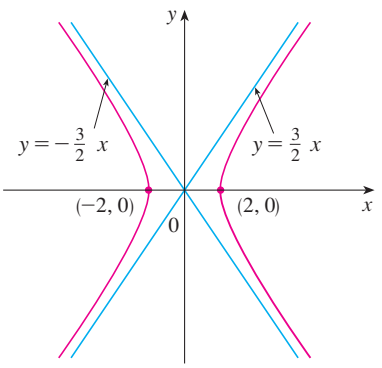


FIGURA 12
La hipérbola $9x^2 - 4y^2 = 36$

Si $b = a$, una hipérbola tiene la ecuación $x^2 - y^2 = a^2$ (o $y^2 - x^2 = a^2$) y recibe el nombre de *hipérbola equilátera* [figura 13a)]. Sus asíntotas son $y = \pm x$, que son perpendiculares. Si una hipérbola equilátera se gira 45°, las asíntotas se convierten en los ejes x y y, y se puede demostrar que la nueva ecuación de la hipérbola es $xy = k$, donde k es una constante [figura 13b)].

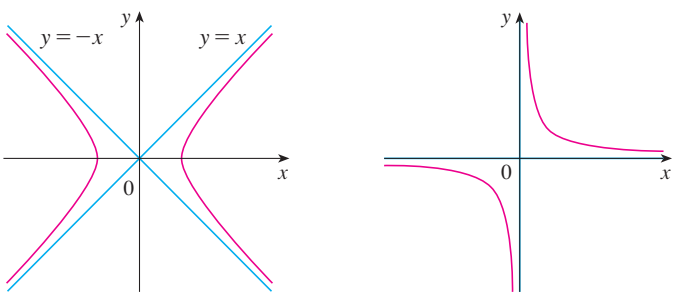


FIGURA 13
Hipérbolas equiláteras

a) $x^2 - y^2 = a^2$ b) $xy = k \ (k > 0)$

Cónicas desplazadas

Recuerde que una ecuación del círculo con centro en el origen y radio r es $x^2 + y^2 = r^2$, pero si su centro es el punto (h, k), entonces la ecuación del círculo se convierte en

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Del mismo modo, si toma la elipse con ecuación

4
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

y la traslada (desplaza) de modo que su centro sea el punto (h, k), entonces su ecuación se convierte en

$$\boxed{5} \qquad \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

(Véase la figura 14.)

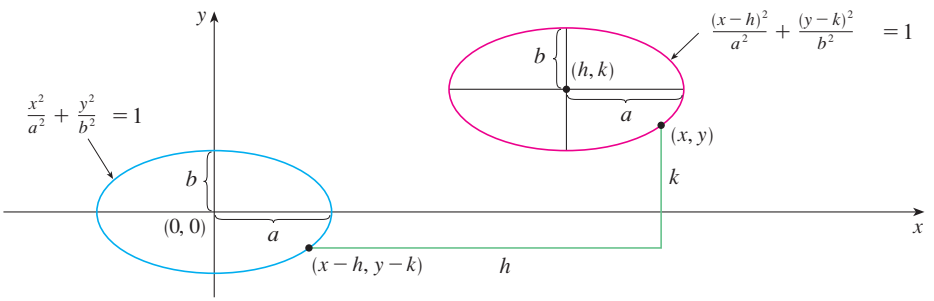


FIGURA 14

Note que al trasladar la elipse, sustituimos x por $x - h$ y y por $y - k$ en la ecuación 4 para obtener la ecuación 5. Use el mismo procedimiento para trasladar la parábola $y = ax^2$ de modo que su vértice (el origen) se convierte en el punto (h, k) como en la figura 15. Sustituyendo x por $x - h$ y y por $y - k$, la nueva ecuación es

$$y - k = a(x - h)^2 \qquad \text{o} \qquad y = a(x - h)^2 + k$$

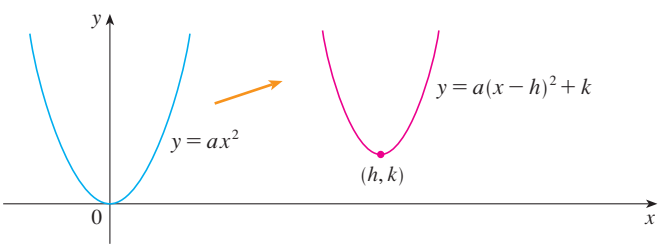


FIGURA 15

EJEMPLO 7 Trace la gráfica de la ecuación $y = 2x^2 - 4x + 1$.

SOLUCIÓN Primero complete el cuadrado

$$y = 2(x^2 - 2x) + 1 = 2(x - 1)^2 - 1$$

En esta forma la ecuación representa la parábola obtenida al desplazar $y = 2x^2$, de modo que su vértice está en el punto $(1, -1)$. La gráfica se ilustra en la figura 16.

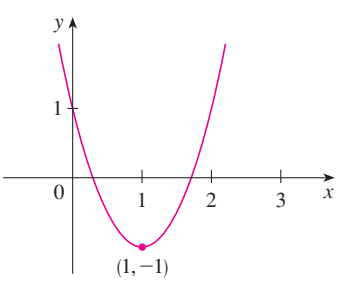


FIGURA 16
$y = 2x^2 - 4x + 1$

EJEMPLO 8 Trace la curva $x = 1 - y^2$.

SOLUCIÓN Esta vez empiece con la parábola $x = -y^2$ (como en la figura 6 con $a = -1$) y desplácese una unidad a la derecha para obtener la gráfica de $x = 1 - y^2$. (Véase la figura 17.)

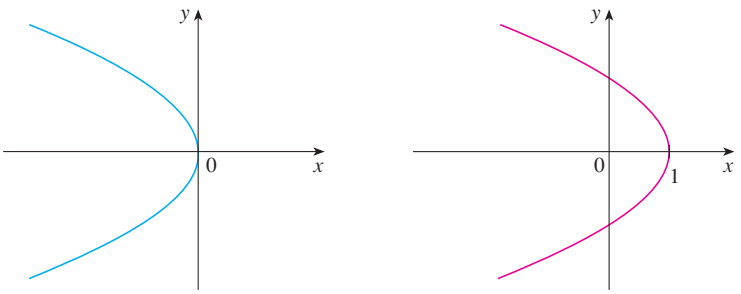


FIGURA 17 a) $x = -y^2$ b) $x = 1 - y^2$

C Ejercicios

1-4 Encuentre una ecuación de un círculo que satisfaga las condiciones dadas.

1. Centro $(3, -1)$, radio 5
2. Centro $(-2, -8)$, radio 10
3. Centro en el origen, pasa por $(4, 7)$
4. Centro $(-1, 5)$, pasa por $(-4, -6)$

5-9 Demuestre que la ecuación representa un círculo y encuentre el centro y el radio.

5. $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 13 = 0$
6. $x^2 + y^2 + 6y + 2 = 0$
7. $x^2 + y^2 + x = 0$
8. $16x^2 + 16y^2 + 8x + 32y + 1 = 0$
9. $2x^2 + 2y^2 - x + y = 1$

10. ¿Bajo qué condición sobre los coeficientes a, b y c es que la ecuación $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ representa un círculo? Cuando esa condición se satisfaga, encuentre el centro y el radio del círculo.

11-12 Identifique el tipo de curva y trace la gráfica. No localice puntos. Sólo utilice las gráficas estándar dadas en las figuras 5, 6, 8, 10 y 11 y haga un desplazamiento si es necesario.

11. $y = -x^2$
12. $y^2 - x^2 = 1$
13. $x^2 + 4y^2 = 16$
14. $x = -2y^2$
15. $16x^2 - 25y^2 = 400$
16. $25x^2 + 4y^2 = 100$
17. $4x^2 + y^2 = 1$
18. $y = x^2 + 2$
19. $x = y^2 - 1$
20. $9x^2 + 25y^2 = 225$
21. $9y^2 - x^2 = 9$
22. $2x^2 + 5y^2 = 10$
23. $xy = 4$
24. $y = x^2 + 2x$
25. $9(x - 1)^2 + 4(y - 2)^2 = 36$
26. $16x^2 + 9y^2 - 36y = 108$
27. $y = x^2 - 6x + 13$
28. $x^2 - y^2 - 4x + 3 = 0$
29. $x = 4 - y^2$
30. $y^2 - 2x + 6y + 5 = 0$
31. $x^2 + 4y^2 - 6x + 5 = 0$
32. $4x^2 + 9y^2 - 16x + 54y + 61 = 0$

33-34 Trace la región acotada por las curvas.

33. $y = 3x, \quad y = x^2$
34. $y = 4 - x^2, \quad x - 2y = 2$

35. Encuentre una ecuación de la parábola con vértice $(1, -1)$ que pase por los puntos $(-1, 3)$ y $(3, 3)$.

36. Encuentre una ecuación de la elipse con centro en el origen que pase por los puntos $\left(1, -10\sqrt{2}/3\right)$ y $\left(-2, 5\sqrt{5}/3\right)$.

37-40 Trace la gráfica del conjunto.

37. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$
38. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 4\}$
39. $\{(x, y) \mid y \geq x^2 - 1\}$
40. $\{(x, y) \mid x^2 + 4y^2 \leq 4\}$

D Trigonometría

Ángulos

Los ángulos se pueden medir en grados o en radianes (abreviado como rad). El ángulo dado por una revolución completa contiene 360°, que es igual a 2π rad. Por tanto,

1 $$\pi \text{ rad} = 180^\circ$$

y

2 $$1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57.3^\circ \qquad 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0.017 \text{ rad}$$

EJEMPLO 1

a) Encuentre la medida en radianes de 60°. b) Exprese $5\pi/4$ rad en grados.

SOLUCIÓN

a) La ecuación 1 o 2 indica que para convertir de grados a radianes multiplicamos por $\pi/180$. Por tanto,

$$60^\circ = 60\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

b) Para convertir de radianes a grados multiplicamos por $180/\pi$. Entonces,

$$\frac{5\pi}{4} \text{ rad} = \frac{5\pi}{4}\left(\frac{180}{\pi}\right) = 225^\circ$$

En Cálculo se usan radianes para medir ángulos, excepto cuando se indique de otra manera. La siguiente tabla da la correspondencia entre medidas de grados y radianes de algunos ángulos comunes.

Grados	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
Radiantes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

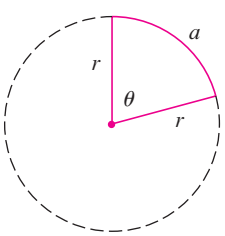


FIGURA 1

La figura 1 muestra un sector de círculo con ángulo central θ y radio r que subtiende un arco de longitud a. Como la longitud del arco es proporcional al tamaño del ángulo, y como todo el círculo tiene circunferencia $2\pi r$ y ángulo central 2π, se tiene

$$\frac{\theta}{2\pi} = \frac{a}{2\pi r}$$

Al despejar θ y a de esta ecuación, se obtiene

3 $$\theta = \frac{a}{r} \qquad a = r\theta$$

Recuerde que las ecuaciones 3 son válidas sólo cuando θ se mida en radianes.

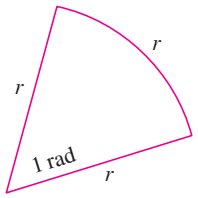


FIGURA 2

En particular, poniendo $a = r$ en la ecuación 3, se ve que un ángulo de 1 rad es el ángulo subtendido en el centro de un círculo de un arco igual en longitud al radio del círculo (figura 2).

EJEMPLO 2

a) Si el radio de un círculo es 5 cm, ¿qué ángulo está subtendido por un arco de 6 cm?
b) Si un círculo tiene radio de 3 cm, ¿cuál es la longitud de un arco subtendido por un ángulo central de $3\pi/8$ rad?

SOLUCIÓN

a) Usando la ecuación 3 con $a = 6$ y $r = 5$, ese ángulo es

$$\theta = \frac{6}{5} = 1.2 \text{ rad}$$

b) Con $r = 3$ cm y $\theta = 3\pi/8$ rad, la longitud del arco es

$$a = r\theta = 3\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{9\pi}{8} \text{ cm}$$

La **posición estándar** de un ángulo se presenta cuando pone su vértice en el origen de un sistema de coordenadas y su lado inicial sobre el eje positivo de las x, como se ve en la figura 3. Se obtiene un ángulo **positivo** cuando el lado inicial gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj hasta que coincida con el lado terminal. Del mismo modo, se obtienen ángulos **negativos** por rotación en el sentido de las manecillas del reloj, como en la figura 4.

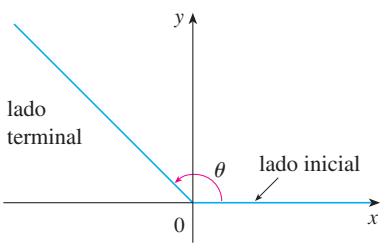


FIGURA 3 $\theta \geqslant 0$

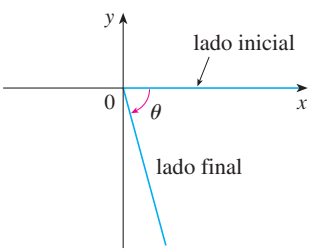


FIGURA 4 $\theta < 0$

La figura 5 muestra varios ejemplos de ángulos en posición estándar. Note que ángulos diferentes pueden tener el mismo lado terminal. Por ejemplo, los ángulos $3\pi/4$, $-5\pi/4$ y $11\pi/4$ tienen los mismos lados inicial y terminal porque

$$\frac{3\pi}{4} - 2\pi = -\frac{5\pi}{4} \qquad \frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{11\pi}{4}$$

y 2π rad representa una revolución completa.

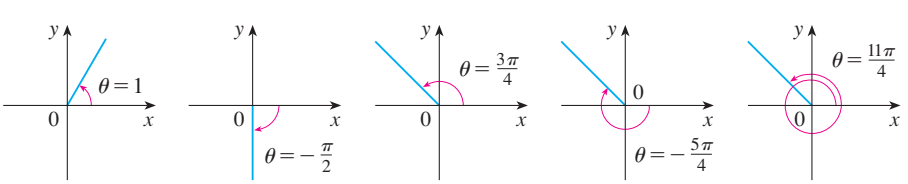


FIGURA 5
Ángulos en posición estándar

Funciones trigonométricas

Para un ángulo agudo θ, las seis funciones trigonométricas se definen como las razones entre longitudes de lados de un triángulo rectángulo, como sigue (figura 6).

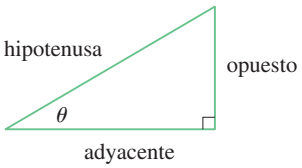


FIGURA 6

4

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} \qquad \csc\theta = \frac{\text{hip}}{\text{op}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hip}}{\text{ady}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{op}}{\text{ady}} \qquad \cot\theta = \frac{\text{ady}}{\text{op}}$$

Esta definición no aplica a ángulos obtusos o negativos, de modo que para un ángulo general θ en posición estándar haga que $P(x, y)$ sea cualquier punto en el lado terminal de θ y que r sea la distancia $|OP|$, como en la figura 7. Entonces se define

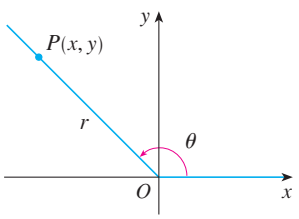


FIGURA 7

5

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} \qquad \csc\theta = \frac{r}{y}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \sec\theta = \frac{r}{x}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \qquad \cot\theta = \frac{x}{y}$$

Como la división entre 0 no está definida, $\tan\theta$ y $\sec\theta$ no están definidas cuando $x = 0$ y $\csc\theta$ y $\cot\theta$ no están definidas cuando $y = 0$. Note que las definiciones en 4 y 5 son consistentes cuando θ es un ángulo agudo.

Si θ es un número, la convención es que $\operatorname{sen}\theta$ quiere decir el ángulo cuya medida en *radianes* es θ. Por ejemplo, la expresión $\operatorname{sen} 3$ implica que está tratando con un ángulo de 3 rad. Cuando se busca una aproximación de este número con calculadora, debe recordar poner la calculadora en el modo de radianes, y entonces obtiene

$$\operatorname{sen} 3 \approx 0.14112$$

Si deseamos conocer el seno del ángulo de 3° escribiríamos $\operatorname{sen} 3°$ y, con la calculadora en el modo de grados, encontramos que

$$\operatorname{sen} 3° \approx 0.05234$$

Las razones trigonométricas exactas para ciertos ángulos se pueden leer de los triángulos de la figura 9. Por ejemplo,

Si en la definición 5 hacemos $r = 1$ y dibujamos un círculo unitario con centro en el origen e indicamos θ como en la figura 8, entonces las coordenadas de P son $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$.

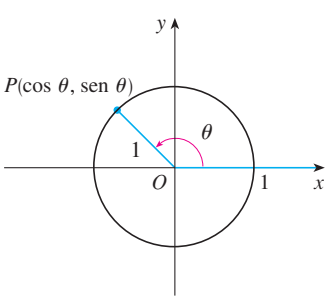


FIGURA 8

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \qquad \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{\pi}{4} = 1 \qquad \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

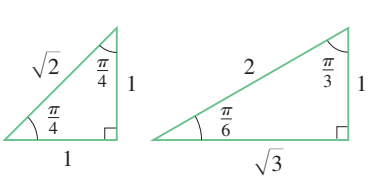


FIGURA 9

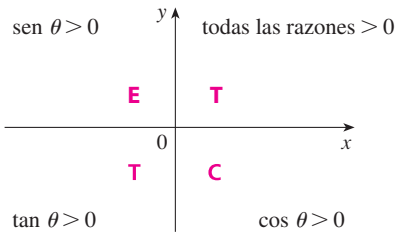


FIGURA 10

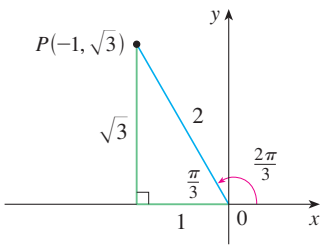


FIGURA 11

Los signos de las funciones trigonométricas, para ángulos en cada uno de los cuatro cuadrantes, pueden recordarse por medio de la regla "Todos los Estudiantes Toman Cálculo" que se ilustra en la figura 10.

EJEMPLO 3 Encuentre las razones trigonométricas exactas para $\theta = 2\pi/3$.

SOLUCIÓN En la figura 11 vea que un punto de la recta terminal para $\theta = 2\pi/3$ es $P(-1, \sqrt{3})$. Por tanto, tomando

$$x = -1 \qquad y = \sqrt{3} \qquad r = 2$$

en las definiciones de las razones trigonométricas, tenemos

$$\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \qquad \tan\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$$
$$\csc\frac{2\pi}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \sec\frac{2\pi}{3} = -2 \qquad \cot\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

La tabla siguiente da algunos valores de sen θ y cos θ hallados con el método del ejemplo 3.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sen θ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0
cos θ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	−1	0	1

EJEMPLO 4 Si cos $\theta = \frac{2}{5}$ y $0 < \theta < \pi/2$, encuentre las otras cinco funciones trigonométricas de θ.

SOLUCIÓN Como cos $\theta = \frac{2}{5}$, marcaríamos la hipotenusa con longitud 5 y el lado adyacente con longitud 2 en la figura 12. Si el lado opuesto tiene longitud x, entonces el teorema de Pitágoras da $x^2 + 4 = 25$, así, $x^2 = 21$, $x = \sqrt{21}$. Ahora podemos usar el diagrama para escribir las otras funciones trigonométricas:

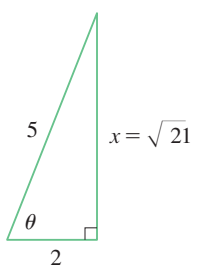


FIGURA 12

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{21}}{5} \qquad \tan\theta = \frac{\sqrt{21}}{2}$$
$$\csc\theta = \frac{5}{\sqrt{21}} \qquad \sec\theta = \frac{5}{2} \qquad \cot\theta = \frac{2}{\sqrt{21}}$$

EJEMPLO 5 Use una calculadora para aproximar el valor de x en la figura 13.

SOLUCIÓN Del diagrama

$$\tan 40° = \frac{16}{x}$$

Por tanto,
$$x = \frac{16}{\tan 40°} \approx 19.07$$

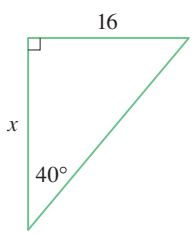


FIGURA 13

Identidades trigonométricas

Una identidad trigonométrica es una relación entre las funciones trigonométricas. Las más elementales son las siguientes, que son consecuencias inmediatas de las definiciones de las funciones trigonométricas.

6
$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$
$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

Para la siguiente identidad consulte de nuevo la figura 7. La fórmula de la distancia (o, lo que es lo mismo, el teorema de Pitágoras) dice que $x^2 + y^2 = r^2$. Por tanto,

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = \frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{x^2 + y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

Por tanto, ha demostrado una de las identidades trigonométricas más útiles:

7
$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

Si ahora dividimos ambos lados de la ecuación 7 entre $\cos^2\theta$ y usamos las ecuaciones 6, obtenemos

8
$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$

Del mismo modo, si dividimos ambos lados de la ecuación 7 entre $\operatorname{sen}^2\theta$, obtenemos

9
$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

Las identidades

10a
$$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$$

10b
$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

Las funciones impares y las pares se estudian en la sección 1.1.

demuestran que seno es una función impar y coseno es una función par. Se demuestran fácilmente al trazar un diagrama que indique θ y $-\theta$ en posición estándar (véase el ejercicio 39).

Como los ángulos θ y $\theta + 2\pi$ tienen el mismo lado terminal

11
$$\operatorname{sen}(\theta + 2\pi) = \operatorname{sen}\theta \qquad \cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$$

Estas identidades muestran que las funciones seno y coseno son periódicas con periodo 2π.

Las identidades trigonométricas restantes son consecuencias de dos identidades básicas llamadas **fórmulas de la adición:**

$$\text{sen}(x + y) = \text{sen}\, x \cos y + \cos x \,\text{sen}\, y \tag{12a}$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \text{sen}\, x \,\text{sen}\, y \tag{12b}$$

Las pruebas de estas fórmulas de la adición se compendian en los ejercicios 85, 86 y 87.

Al sustituir $-y$ por y en las ecuaciones 12a y 12b y usar las ecuaciones 10a y 10b, obtenemos las siguientes **fórmulas de la sustracción:**

$$\text{sen}(x - y) = \text{sen}\, x \cos y - \cos x \,\text{sen}\, y \tag{13a}$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \text{sen}\, x \,\text{sen}\, y \tag{13b}$$

A continuación, dividiendo las fórmulas de las ecuaciones 12 o ecuaciones 13, obtenemos las fórmulas correspondientes para $\tan(x \pm y)$:

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \tag{14a}$$

$$\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y} \tag{14b}$$

Si ponemos $y = x$ en las fórmulas de la adición 12, obtenemos las **fórmulas de doble ángulo:**

$$\text{sen}\, 2x = 2\,\text{sen}\, x \cos x \tag{15a}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x \tag{15b}$$

A continuación, con el uso de la identidad $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, obtenemos las siguientes fórmulas alternativas de las fórmulas de doble ángulo para $\cos 2x$:

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \tag{16a}$$

$$\cos 2x = 1 - 2\,\text{sen}^2 x \tag{16b}$$

Si ahora despejamos $\cos^2 x$ y $\text{sen}^2 x$ de estas ecuaciones, obtenemos las siguientes **fórmulas de semiángulo**, que son útiles en cálculo integral:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \tag{17a}$$

$$\text{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \tag{17b}$$

Por último se expresan las **fórmulas del producto**, que se pueden deducir de las ecuaciones 12 y 13:

18a $\operatorname{sen} x \cos y = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(x + y) + \operatorname{sen}(x - y)]$

18b $\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)]$

18c $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \frac{1}{2}[\cos(x - y) - \cos(x + y)]$

Hay otras numerosas identidades trigonométricas, pero las presentadas aquí son las que se usan con más frecuencia en Cálculo. Si el lector olvida cualquiera de ellas, recuerde que todas se pueden deducir de las ecuaciones 12a y 12b.

EJEMPLO 6 Encuentre todos los valores de x del intervalo $[0, 2\pi]$ tales que $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 2x$.

SOLUCIÓN Usando la fórmula de doble ángulo (15a), reescriba la ecuación dada como

$$\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} x \cos x \qquad \text{o} \qquad \operatorname{sen} x(1 - 2 \cos x) = 0$$

Por tanto, hay dos posibilidades:

$$\operatorname{sen} x = 0 \qquad \text{o} \qquad 1 - 2 \cos x = 0$$

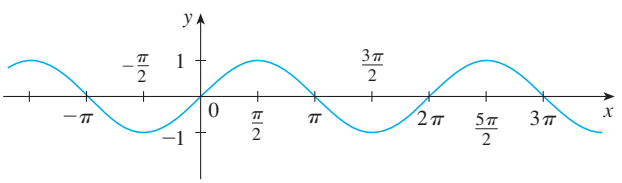
$$x = 0, \pi, 2\pi \qquad \cos x = \tfrac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

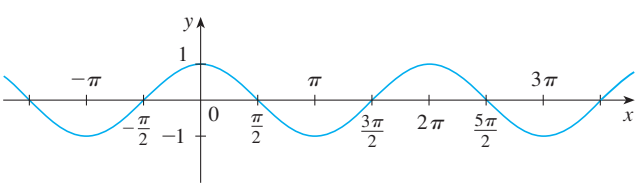
La ecuación dada tiene cinco soluciones: 0, $\pi/3$, π, $5\pi/3$ y 2π.

Gráficas de las funciones trigonométricas

La gráfica de una función $f(x) = \operatorname{sen} x$, que se ilustra en la figura 14a), se obtiene al determinar los puntos para $0 \leq x \leq 2\pi$ y luego usar la naturaleza periódica de la función (de la ecuación 11) para completar la gráfica. Note que los ceros de la función cero se



a) $f(x) = \operatorname{sen} x$



b) $g(x) = \cos x$

FIGURA 14

presentan en los múltiplos enteros de π, es decir,

$$\text{sen } x = 0 \qquad \text{siempre que } x = n\pi, \quad n \text{ un entero}$$

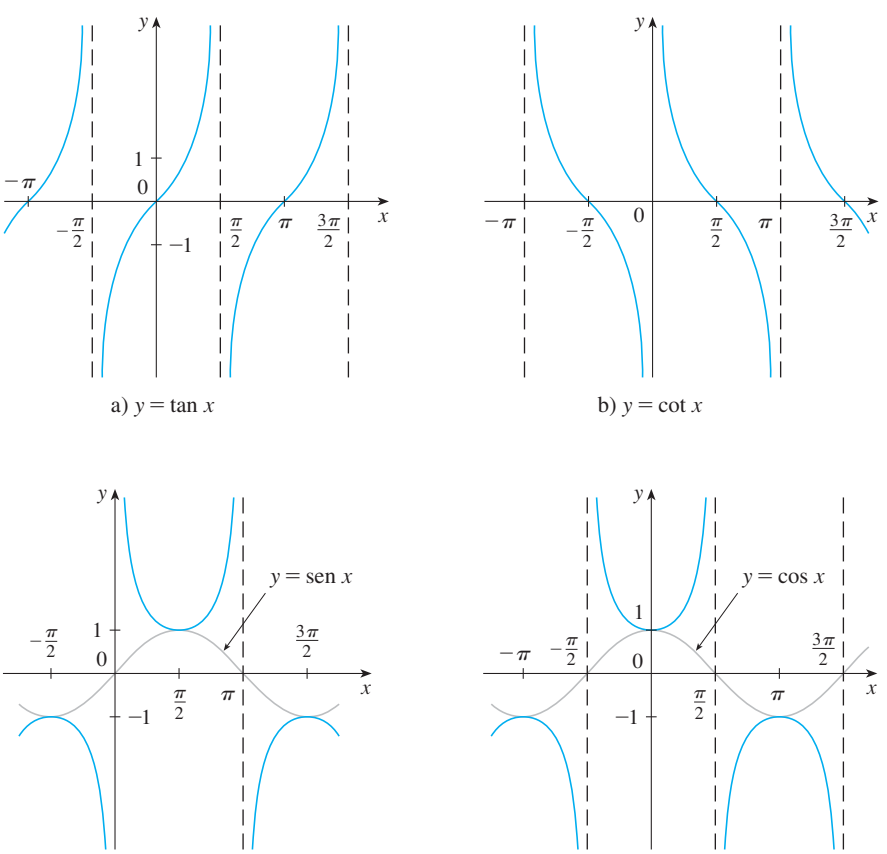
Debido a que la identidad

$$\cos x = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

(que se puede verificar usando la ecuación 12a), la gráfica del coseno se obtiene al desplazar la gráfica del seno en una cantidad $\pi/2$ a la izquierda [figura 14b)]. Observe que para las funciones seno y coseno el dominio es $(-\infty, \infty)$ y el rango es el intervalo cerrado $[-1, 1]$, Así, para todos los valores de x

$$-1 \leqslant \text{sen } x \leqslant 1 \qquad -1 \leqslant \cos x \leqslant 1$$

Las gráficas de las cuatro funciones trigonométricas restantes se ilustran en la figura 15 y sus dominios se indican ahí. Note que tangente y cotangente tienen rango $(-\infty, \infty)$, mientras que cosecante y secante tienen rango $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$. Las cuatro funciones son periódicas: tangente y cotangente tienen periodo π, en tanto que cosecante y secante tienen periodo 2π.



a) $y = \tan x$ b) $y = \cot x$

c) $y = \csc x$ d) $y = \sec x$

FIGURA 15

D Ejercicios

1-6 Convierta de grados a radianes.

1. $210°$ **2.** $300°$ **3.** $9°$

4. $-315°$ **5.** $900°$ **6.** $36°$

7-12 Convierta de radianes a grados.

7. 4π **8.** $-\frac{7\pi}{2}$ **9.** $\frac{5\pi}{12}$

10. $\frac{8\pi}{3}$ **11.** $-\frac{3\pi}{8}$ **12.** 5

13. Encuentre la longitud de un arco de círculo subtendido por un ángulo de $\pi/12$ rad si el radio del círculo es 36 cm.

14. Si un círculo tiene radio 10 cm, encuentre la longitud del arco subtendido por un ángulo central de $72°$.

15. Un círculo tiene radio de 1.5 m. ¿Qué ángulo está subtendido en el centro del círculo por un arco de 1 m de largo?

16. Encuentre el radio de un sector circular con ángulo $3\pi/4$ y 6 cm de longitud de arco.

17-22 Trace, en posición estándar, el ángulo cuya medida está dada.

17. $315°$ **18.** $-150°$ **19.** $-\frac{3\pi}{4}$ rad

20. $\frac{7\pi}{3}$ rad **21.** 2 rad **22.** -3 rad

23-28 Encuentre las razones trigonométricas exactas para el ángulo cuya medida en radianes está dada.

23. $\frac{3\pi}{4}$ **24.** $\frac{4\pi}{3}$ **25.** $\frac{9\pi}{2}$

26. -5π **27.** $\frac{5\pi}{6}$ **28.** $\frac{11\pi}{4}$

29-34 Encuentre las razones trigonométricas restantes.

29. $\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

30. $\tan\alpha = 2, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

31. $\sec\phi = -1.5, \quad \frac{\pi}{2} < \phi < \pi$

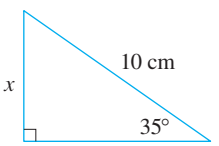
32. $\cos x = -\frac{1}{3}, \quad \pi < x < \frac{3\pi}{2}$

33. $\cot\beta = 3, \quad \pi < \beta < 2\pi$

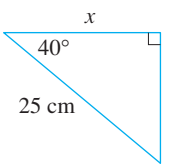
34. $\csc\theta = -\frac{4}{3}, \quad \frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

35-38 Encuentre, correcta a cinco lugares decimales, la longitud del lado marcado con x.

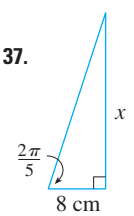
35.



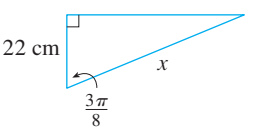
36.



37.



38.



39-41 Demuestre estas ecuaciones.

39. a) Ecuación 10a b) Ecuación 10b

40. a) Ecuación 14a b) Ecuación 14b

41. a) Ecuación 18a b) Ecuación 18b c) Ecuación 18c

42-58 Demuestre las identidades.

42. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} x$

43. $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$ **44.** $\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x$

45. $\operatorname{sen}\theta \cot\theta = \cos\theta$ **46.** $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = 1 + \operatorname{sen} 2x$

47. $\sec y - \cos y = \tan y \operatorname{sen} y$

48. $\tan^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \tan^2\alpha \operatorname{sen}^2\alpha$

49. $\cot^2\theta + \sec^2\theta = \tan^2\theta + \csc^2\theta$

50. $2 \csc 2t = \sec t \csc t$

51. $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$

52. $\frac{1}{1 - \operatorname{sen}\theta} + \frac{1}{1 + \operatorname{sen}\theta} = 2\sec^2\theta$

53. $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x + \cos x \cos 2x = \cos x$

54. $\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 y = \operatorname{sen}(x + y) \operatorname{sen}(x - y)$

55. $\frac{\operatorname{sen}\phi}{1 - \cos\phi} = \csc\phi + \cot\phi$

56. $\tan x + \tan y = \dfrac{\operatorname{sen}(x + y)}{\cos x \cos y}$

57. $\operatorname{sen} 3\theta + \operatorname{sen} \theta = 2 \operatorname{sen} 2\theta \cos \theta$

58. $\cos 3\theta = 4 \cos^3\theta - 3 \cos \theta$

59–64 Si $\operatorname{sen} x = \frac{1}{3}$ y $\sec y = \frac{5}{4}$, donde x y y se encuentran entre 0 y $\pi/2$, evalúe la expresión.

59. $\operatorname{sen}(x + y)$

60. $\cos(x + y)$

61. $\cos(x - y)$

62. $\operatorname{sen}(x - y)$

63. $\operatorname{sen} 2y$

64. $\cos 2y$

65–72 Encuentre todos los valores de x del intervalo $[0, 2\pi]$ que satisfagan la ecuación.

65. $2 \cos x - 1 = 0$

66. $3 \cot^2 x = 1$

67. $2 \operatorname{sen}^2 x = 1$

68. $|\tan x| = 1$

69. $\operatorname{sen} 2x = \cos x$

70. $2 \cos x + \operatorname{sen} 2x = 0$

71. $\operatorname{sen} x = \tan x$

72. $2 + \cos 2x = 3 \cos x$

73–76 Encuentre todos los valores de x del intervalo $[0, 2\pi]$ que satisfagan la desigualdad.

73. $\operatorname{sen} x \leqslant \frac{1}{2}$

74. $2 \cos x + 1 > 0$

75. $-1 < \tan x < 1$

76. $\operatorname{sen} x > \cos x$

77–82 Grafique la función empezando con las gráficas de las figuras 14 y 15 y aplicando las transformaciones de la sección 1.3 donde sea apropiado.

77. $y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

78. $y = \tan 2x$

79. $y = \dfrac{1}{3} \tan\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

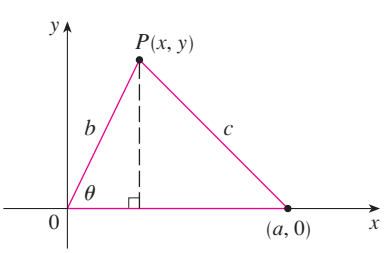
80. $y = 1 + \sec x$

81. $y = |\operatorname{sen} x|$

82. $y = 2 + \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

83. Demuestre la **ley de cosenos:** si un triángulo tiene lados con longitudes a, b y c, y θ es el ángulo entre los lados con longitudes a y b, entonces

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$

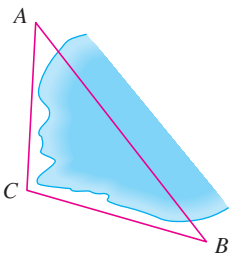


[*Sugerencia:* introduzca un sistema de coordenadas de modo que θ esté en una posición estándar como en la figura. Exprese x y y en términos de θ y luego use la fórmula de la distancia para calcular c.]

84. Para hallar la distancia $|AB|$ de una orilla a otra de una pequeña ensenada, se localiza un punto C como en la figura y se registran las siguientes mediciones:

$$\angle C = 103^\circ \qquad |AC| = 820 \text{ m} \qquad |BC| = 910 \text{ m}$$

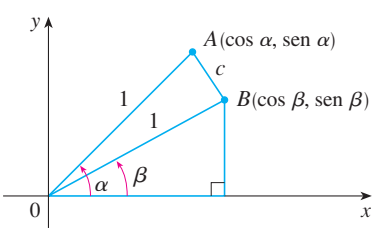
Utilice la ley de cosenos del ejercicio 83 para hallar la distancia pedida.



85. Use la figura para demostrar la fórmula de la sustracción

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

[*Sugerencia:* calcule c^2 en dos formas (usando la ley de cosenos del ejercicio 83 y también usando la fórmula de la distancia) y compare las dos expresiones.]



86. Use la fórmula del ejercicio 85 para demostrar la fórmula de la adición para coseno (12b).

87. Use la fórmula de la adición para coseno y las identidades

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \operatorname{sen} \theta \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$$

para demostrar la fórmula de la sustracción para la función seno.

88. Demuestre que el área de un triángulo con lados de longitudes a y b y con ángulo incluido θ es

$$A = \tfrac{1}{2} ab \operatorname{sen} \theta$$

89. Encuentre el área del triángulo ABC, correcta a cinco lugares decimales, si

$$|AB| = 10 \text{ cm} \qquad |BC| = 3 \text{ cm} \qquad \angle ABC = 107^\circ$$

E Notación sigma

Una forma conveniente de escribir sumas utiliza la letra griega Σ (sigma mayúscula, correspondiente a nuestra S) y se llama **notación sigma**.

Esto nos indica terminar con $i = n$.
Esto nos indica sumar. $\sum_{i=m}^{n} a_i$
Esto nos indica comenzar con $i = m$.

1 Definición Si $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ son números reales y m y n son enteros tales que $m \leq n$, entonces

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

Con notación de funciones, la definición 1 se puede escribir como

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) = f(m) + f(m+1) + f(m+2) + \cdots + f(n-1) + f(n)$$

De esta forma, el símbolo $\sum_{i=m}^{n}$ indica una suma en la que la letra i (llamada **índice de sumatoria**) toma valores enteros consecutivos que empiezan con m y terminan con n, es decir, $m, m+1, \ldots, n$. También se pueden usar otras letras como el índice de sumatoria.

EJEMPLO 1

a) $\sum_{i=1}^{4} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$

b) $\sum_{i=3}^{n} i = 3 + 4 + 5 + \cdots + (n-1) + n$

c) $\sum_{j=0}^{5} 2^j = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 63$

d) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$

e) $\sum_{i=1}^{3} \frac{i-1}{i^2+3} = \frac{1-1}{1^2+3} + \frac{2-1}{2^2+3} + \frac{3-1}{3^2+3} = 0 + \frac{1}{7} + \frac{1}{6} = \frac{13}{42}$

f) $\sum_{i=1}^{4} 2 = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$

EJEMPLO 2 Escriba la suma $2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$ en notación sigma.

SOLUCIÓN No hay una forma única de escribir una suma en notación sigma. Podríamos escribir

$$2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \sum_{i=2}^{n} i^3$$

o

$$2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \sum_{j=1}^{n-1} (j+1)^3$$

o

$$2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \sum_{k=0}^{n-2} (k+2)^3$$

El siguiente teorema da tres reglas sencillas para trabajar con notación sigma.

2 Teorema Si c es cualquier constante (es decir, no depende de i), entonces

a) $\sum_{i=m}^{n} ca_i = c\sum_{i=m}^{n} a_i$

b) $\sum_{i=m}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i$

c) $\sum_{i=m}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i - \sum_{i=m}^{n} b_i$

DEMOSTRACIÓN Para ver por qué son verdaderas estas reglas, todo lo que debe hacer es escribir ambos lados en forma expandida. La regla a) es simplemente la propiedad distributiva de los números reales:

$$ca_m + ca_{m+1} + \cdots + ca_n = c(a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n)$$

La regla b) se sigue de las propiedades asociativa y conmutativa:

$$\begin{aligned}(a_m + b_m) + (a_{m+1} + b_{m+1}) + \cdots + (a_n + b_n)\\ = (a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n) + (b_m + b_{m+1} + \cdots + b_n)\end{aligned}$$

La regla c) se demuestra de un modo semejante.

EJEMPLO 3 Encuentre $\sum_{i=1}^{n} 1$.

SOLUCIÓN

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ términos}} = n$$

EJEMPLO 4 Demuestre la fórmula para la suma de los primeros n enteros positivos:

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

SOLUCIÓN Esta fórmula se puede demostrar por inducción matemática (véase la página 76) o por el siguiente método empleado por el matemático alemán Karl Friedrich Gauss (1777−1855) cuando tenía sólo 10 años de edad.

Escribimos dos veces la suma S, una vez en el orden usual y otra en orden inverso:

$$\begin{aligned}S &= 1 + \quad 2 \quad + \quad 3 \quad + \cdots + (n-1) + n\\ S &= n + (n-1) + (n-2) + \cdots + \quad 2 \quad + 1\end{aligned}$$

Si se suman verticalmente todas las columnas, obtenemos

$$2S = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1)$$

En el lado derecho hay n términos, cada uno de los cuales es $n + 1$, y por tanto,

$$2S = n(n+1) \qquad \text{o} \qquad S = \frac{n(n+1)}{2}$$

EJEMPLO 5 Demuestre la fórmula para la suma de los cuadrados de los primeros n enteros positivos:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

SOLUCIÓN 1 Sea S la suma deseada. Empezamos con la *suma extensible* (o suma de reducción):

Casi todos los términos se cancelan en pares.

$$\sum_{i=1}^{n} [(1+i)^3 - i^3] = (2^3 - 1^3) + (3^3 - 2^3) + (4^3 - 3^3) + \cdots + [(n+1)^3 - n^3]$$
$$= (n+1)^3 - 1^3 = n^3 + 3n^2 + 3n$$

Por otra parte, usando el teorema 2 y los ejemplos 3 y 4, tenemos

$$\sum_{i=1}^{n} [(1+i)^3 - i^3] = \sum_{i=1}^{n} [3i^2 + 3i + 1] = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1$$
$$= 3S + 3\,\frac{n(n+1)}{2} + n = 3S + \tfrac{3}{2}n^2 + \tfrac{5}{2}n$$

Así, tenemos

$$n^3 + 3n^2 + 3n = 3S + \tfrac{3}{2}n^2 + \tfrac{5}{2}n$$

Al despejar S de esta ecuación, obtenemos

$$3S = n^3 + \tfrac{3}{2}n^2 + \tfrac{1}{2}n$$

o

$$S = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Principio de inducción matemática
Sea S_n un enunciado donde aparezca el entero positivo n. Suponga que

1. S_1 es verdadero.
2. Si S_k es verdadero, entonces S_{k+1} es verdadero.

Entonces S_n es verdadero para todos los enteros positivos n.

Para un examen más completo sobre inducción matemática, vea las páginas 76 y 79.

SOLUCIÓN 2 Sea S_n la fórmula dada.

1. S_1 es verdadera porque $1^2 = \dfrac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}$

2. Suponga que S_k es verdadera; es decir,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Entonces

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (k+1)^2 = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2) + (k+1)^2$$
$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$
$$= (k+1)\,\frac{k(2k+1) + 6(k+1)}{6}$$
$$= (k+1)\,\frac{2k^2 + 7k + 6}{6}$$
$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$
$$= \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}$$

Por tanto, S_{k+1} es verdadera.

Por el principio de inducción matemática, S_n es verdadera para toda n.

Liste los resultados de los ejemplos 3, 4 y 5 junto con un resultado similar para cubos (ejercicios 37-40) como en el teorema 3. Estas fórmulas son necesarias para hallar áreas y evaluar integrales en el capítulo 5.

3 Teorema Sea c una constante y n un entero positivo. Entonces

a) $\sum_{i=1}^{n} 1 = n$

b) $\sum_{i=1}^{n} c = nc$

c) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

d) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

e) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

EJEMPLO 6 Evalúe $\sum_{i=1}^{n} i(4i^2 - 3)$.

SOLUCIÓN Usando los teoremas 2 y 3, tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} i(4i^2 - 3) &= \sum_{i=1}^{n} (4i^3 - 3i) = 4\sum_{i=1}^{n} i^3 - 3\sum_{i=1}^{n} i \\ &= 4\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - 3\frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)[2n(n+1) - 3]}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(2n^2 + 2n - 3)}{2}\end{aligned}$$

EJEMPLO 7 Encuentre $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{3}{n}\left[\left(\frac{i}{n}\right)^2 + 1\right]$.

El tipo de cálculo del ejemplo 7 aparece en el capítulo 5 cuando se calcularon áreas.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{3}{n}\left[\left(\frac{i}{n}\right)^2 + 1\right] &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{3}{n^3} i^2 + \frac{3}{n}\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{3}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} 1\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{3}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3}{n}\cdot n\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{n}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right) + 3\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{2}\cdot 1\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) + 3\right] \\ &= \tfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot 2 + 3 = 4\end{aligned}$$

E Ejercicios

1-10 Escriba la suma en forma expandida.

1. $\sum_{i=1}^{5} \sqrt{i}$

2. $\sum_{i=1}^{6} \frac{1}{i+1}$

3. $\sum_{i=4}^{6} 3^i$

4. $\sum_{i=4}^{6} i^3$

5. $\sum_{k=0}^{4} \frac{2k-1}{2k+1}$

6. $\sum_{k=5}^{8} x^k$

7. $\sum_{i=1}^{n} i^{10}$

8. $\sum_{j=n}^{n+3} j^2$

9. $\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j$

10. $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i$

11-20 Escriba la suma en notación sigma.

11. $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 10$

12. $\sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7}$

13. $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \cdots + \frac{19}{20}$

14. $\frac{3}{7} + \frac{4}{8} + \frac{5}{9} + \frac{6}{10} + \cdots + \frac{23}{27}$

15. $2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 2n$

16. $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1)$

17. $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32$

18. $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36}$

19. $x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$

20. $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n$

21-35 Encuentre el valor de la suma.

21. $\sum_{i=4}^{8} (3i - 2)$

22. $\sum_{i=3}^{6} i(i + 2)$

23. $\sum_{j=1}^{6} 3^{j+1}$

24. $\sum_{k=0}^{8} \cos k\pi$

25. $\sum_{n=1}^{20} (-1)^n$

26. $\sum_{i=1}^{100} 4$

27. $\sum_{i=0}^{4} (2^i + i^2)$

28. $\sum_{i=-2}^{4} 2^{3-i}$

29. $\sum_{i=1}^{n} 2i$

30. $\sum_{i=1}^{n} (2 - 5i)$

31. $\sum_{i=1}^{n} (i^2 + 3i + 4)$

32. $\sum_{i=1}^{n} (3 + 2i)^2$

33. $\sum_{i=1}^{n} (i + 1)(i + 2)$

34. $\sum_{i=1}^{n} i(i + 1)(i + 2)$

35. $\sum_{i=1}^{n} (i^3 - i - 2)$

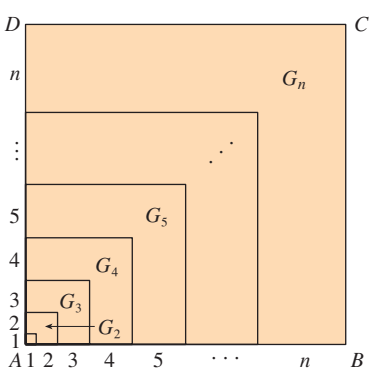
36. Encuentre el número n tal que $\sum_{i=1}^{n} i = 78$.

37. Demuestre la fórmula b) del teorema 3.

38. Demuestre la fórmula e) del teorema 3 usando inducción matemática.

39. Demuestre la fórmula e) del teorema 3 usando un método semejante al del ejemplo 5, solución 1 [empiece con $(1 + i)^4 - i^4$].

40. Demuestre la fórmula e) del teorema 3 usando el siguiente método publicado por Abu Bekr Mohammed ibn Alhusain Alkarchi hacia el año 1010. La figura muestra un cuadrado $ABCD$ en el que los lados AB y AD han sido divididos en segmentos de longitudes $1, 2, 3, \ldots, n$. En esta forma, el lado del cuadrado tiene longitudes $n(n + 1)/2$ de modo que el área es $[n(n + 1)/2]^2$. Pero el área también es la suma de las áreas de los n "gnomon" $G_1, G_2, \ldots, G_n$ que se muestran en la figura. Demuestre que el área de G_i es i^3 y concluya que la fórmula e) es verdadera.



41. Evalúe cada una de las siguientes sumas extensibles.

a) $\sum_{i=1}^{n} [i^4 - (i - 1)^4]$

b) $\sum_{i=1}^{100} (5^i - 5^{i-1})$

c) $\sum_{i=3}^{99} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right)$

d) $\sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1})$

42. Demuestre la desigualdad generalizada del triángulo

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|$$

43-46 Encuentre el límite.

43. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \left(\frac{i}{n} \right)^2$

44. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \left[\left(\frac{i}{n} \right)^3 + 1 \right]$

45. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n} \left[\left(\frac{2i}{n} \right)^3 + 5\left(\frac{2i}{n} \right) \right]$

46. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{3}{n}\left[\left(1+\frac{3i}{n}\right)^3 - 2\left(1+\frac{3i}{n}\right)\right]$

47. Demuestre la fórmula para la suma de una serie geométrica finita con primer término a y razón común $r \neq 1$:

$$\sum_{i=1}^{n} ar^{i-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

48. Evalúe $\sum_{i=1}^{n} \frac{3}{2^{i-1}}$.

49. Evalúe $\sum_{i=1}^{n} (2i + 2^i)$.

50. Evalúe $\sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{n} (i + j)\right]$.

F Demostración de teoremas

En este apéndice se demuestran varios teoremas que están expresados en el cuerpo principal del texto. Las secciones en las que ocurren están indicadas al margen.

Sección 2.3

Leyes de los límites Suponga que c es una constante y que los límites

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = M$$

existen. Entonces

1. $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = L + M$
2. $\lim_{x\to a} [f(x) - g(x)] = L - M$
3. $\lim_{x\to a} [cf(x)] = cL$
4. $\lim_{x\to a} [f(x)g(x)] = LM$
5. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ si $M \neq 0$

DEMOSTRACIÓN DE LA LEY 4 Sea $\varepsilon > 0$. Desea hallar $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x)g(x) - LM| < \varepsilon$$

Para obtener términos que contengan $|f(x) - L|$ y $|g(x) - M|$, sumamos y restamos $Lg(x)$ como sigue:

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - LM| &= |f(x)g(x) - Lg(x) + Lg(x) - LM| \\ &= |[f(x) - L]g(x) + L[g(x) - M]| \\ &\leq |[f(x) - L]g(x)| + |L[g(x) - M]| \qquad \text{(desigualdad del triángulo)} \\ &= |f(x) - L||g(x)| + |L||g(x) - M| \end{aligned}$$

Desea hacer que cada uno de estos términos sea menor que $\varepsilon/2$.

Como $\lim_{x\to a} g(x) = M$, hay un número $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta_1 \quad \text{entonces} \quad |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2(1 + |L|)}$$

También, hay un número $\delta_2 > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta_2$, entonces

$$|g(x) - M| < 1$$

y, por tanto,

$$|g(x)| = |g(x) - M + M| \leq |g(x) - M| + |M| < 1 + |M|$$

Como $\lim_{x \to a} f(x) = L$, hay un número $\delta_3 > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta_3 \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2(1 + |M|)}$$

Sea $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $0 < |x - a| < \delta_1$, $0 < |x - a| < \delta_2$, y $0 < |x - a| < \delta_3$, de modo que puede combinar las desigualdades para obtener

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - LM| &\leqslant |f(x) - L||g(x)| + |L||g(x) - M| \\ &< \frac{\varepsilon}{2(1 + |M|)}(1 + |M|) + |L| \frac{\varepsilon}{2(1 + |L|)} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Esto demuestra que $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = LM$.

DEMOSTRACIÓN DE LA LEY 3 Si tomamos $g(x) = c$ en la ley 4, obtenemos

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} [cf(x)] &= \lim_{x \to a} [g(x)f(x)] = \lim_{x \to a} g(x) \cdot \lim_{x \to a} f(x) \\ &= \lim_{x \to a} c \cdot \lim_{x \to a} f(x) \\ &= c \lim_{x \to a} f(x) \qquad \text{(por la ley 7)} \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN DE LA LEY 2 Usando la ley 1 y la ley 3 con $c = -1$, tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] &= \lim_{x \to a} [f(x) + (-1)g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} (-1)g(x) \\ &= \lim_{x \to a} f(x) + (-1) \lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN DE LA LEY 5 Primero demostramos que

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}$$

Para hacer esto debemos demostrar que, dada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| < \varepsilon$$

Observe que

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| = \frac{|M - g(x)|}{|Mg(x)|}$$

Sabe que puede hacer pequeño al numerador. Pero también necesita saber que el denominador no es pequeño cuando x está cerca de a. Como $\lim_{x \to a} g(x) = M$, hay un número $\delta_1 > 0$ tal que, siempre que $0 < |x - a| < \delta_1$, tenemos

$$|g(x) - M| < \frac{|M|}{2}$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} |M| = |M - g(x) + g(x)| &\leqslant |M - g(x)| + |g(x)| \\ &< \frac{|M|}{2} + |g(x)| \end{aligned}$$

Esto demuestra que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta_1 \quad \text{entonces} \quad |g(x)| > \frac{|M|}{2}$$

y así, para estos valores de x,

$$\frac{1}{|Mg(x)|} = \frac{1}{|M||g(x)|} < \frac{1}{|M|} \cdot \frac{2}{|M|} = \frac{2}{M^2}$$

También, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta_2 \quad \text{entonces} \quad |g(x) - M| < \frac{M^2}{2}\,\varepsilon$$

Sea $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$. Entonces, para $0 < |x - a| < \delta$, tenemos

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| = \frac{|M - g(x)|}{|Mg(x)|} < \frac{2}{M^2}\,\frac{M^2}{2}\,\varepsilon = \varepsilon$$

Se deduce que $\lim_{x \to a} 1/g(x) = 1/M$. Por último, usando la ley 4, obtenemos

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right) = \lim_{x \to a} f(x) \lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = L \cdot \frac{1}{M} = \frac{L}{M}$$

2 Teorema Si $f(x) \leqslant g(x)$ para toda x en un intervalo abierto que contenga a (excepto posiblemente en a) y

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = M$$

entonces $L \leqslant M$.

DEMOSTRACIÓN Use el método de prueba por contradicción. Suponga, si es posible, que $L > M$. La ley 2 de los límites dice que

$$\lim_{x \to a} [g(x) - f(x)] = M - L$$

Por tanto, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad |[g(x) - f(x)] - (M - L)| < \varepsilon$$

En particular, tomando $\varepsilon = L - M$ (observando que $L - M > 0$ por hipótesis), tiene un número $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad |[g(x) - f(x)] - (M - L)| < L - M$$

Como $a \leqslant |a|$ para cualquier número a

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad [g(x) - f(x)] - (M - L) < L - M$$

que se simplifica a

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad g(x) < f(x)$$

Pero esto contradice a $f(x) \leqslant g(x)$. Entonces la desigualdad $L > M$ debe ser falsa. Por tanto, $L \leqslant M$.

3 Teorema de restricción Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para toda x en un intervalo abierto que contenga a (excepto posiblemente en a) y

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$$

entonces

$$\lim_{x \to a} g(x) = L$$

DEMOSTRACIÓN Sea $\varepsilon > 0$. Como $\lim_{x \to a} f(x) = L$, hay un número $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta_1 \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

esto es,

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta_1 \quad \text{entonces} \quad L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

Como $\lim_{x \to a} h(x) = L$, hay un número $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta_2 \quad \text{entonces} \quad |h(x) - L| < \varepsilon$$

esto es,

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta_2 \quad \text{entonces} \quad L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$$

Sea $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$. Si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $0 < |x - a| < \delta_1$ y $0 < |x - a| < \delta_2$, de modo que

$$L - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \varepsilon$$

En particular,

$$L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon$$

y, por tanto, $|g(x) - L| < \varepsilon$. Así, $\lim_{x \to a} g(x) = L$. ∎

Sección 2.5

Teorema Si f es una función biunívoca continua definida en un intervalo (a, b), entonces su función inversa f^{-1} también es continua.

DEMOSTRACIÓN Primero demuestre que si f es biunívoca y continua en (a, b), entonces debe ser creciente o decreciente en (a, b). Si no fuera creciente ni decreciente, entonces existirían números x_1, x_2 y x_3 en (a, b) con $x_1 < x_2 < x_3$ tales que $f(x_2)$ no están entre $f(x_1)$ y $f(x_3)$. Hay dos posibilidades: 1. $f(x_3)$ está entre $f(x_1)$ y $f(x_2)$ o 2. $f(x_1)$ está entre $f(x_2)$ y $f(x_3)$. (Trace una figura.) En el caso 1 aplique el teorema de valor intermedio a la función continua f para obtener un número c entre x_1 y x_2 tal que $f(c) = f(x_3)$. En el caso 2 el teorema de valor intermedio da un número c entre x_2 y x_3 tal que $f(c) = f(x_1)$. En cualquier caso, ha contradicho el hecho de que f es biunívoca.

Suponga, para más precisión, que f es creciente en (a, b). Tome cualquier número y_0 del dominio de f^{-1} y haga $f^{-1}(y_0) = x_0$; esto es, x_0 es el número en (a, b) tal que $f(x_0) = y_0$. Para demostrar que f^{-1} es continua en y_0 tome cualquier $\varepsilon > 0$ tal que el intervalo $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ está contenido en el intervalo (a, b). Como f es creciente, correlaciona los números del intervalo $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ con los números del intervalo $(f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon))$ y f^{-1} invierte la correspondencia. Si con δ denota los números más pequeños $\delta_1 = y_0 - f(x_0 - \varepsilon)$ y $\delta_2 = f(x_0 + \varepsilon) - y_0$, entonces el intervalo $(y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ está contenido en el intervalo $(f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon))$ y así, se encuentra correlacionado en el intervalo

$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ por f^{-1}. (Observe el diagrama de flechas de la figura 1.) Por tanto, ha hallado un número $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad |y - y_0| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$$

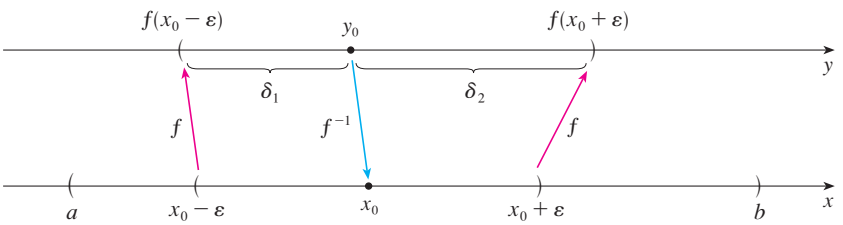


FIGURA 1

Esto demuestra que $\lim_{y \to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0)$ y entonces f^{-1} es continua en cualquier número y_0 en su dominio.

3 Teorema Si f es continua en b y $\lim_{x \to a} g(x) = b$, entonces

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(b)$$

DEMOSTRACIÓN Sea $\varepsilon > 0$. Desea hallar un número $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(g(x)) - f(b)| < \varepsilon$$

Como f es continua en b, tiene

$$\lim_{y \to b} f(y) = f(b)$$

y entonces existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |y - b| < \delta_1 \quad \text{entonces} \quad |f(y) - f(b)| < \varepsilon$$

Como $\lim_{x \to a} g(x) = b$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad |g(x) - b| < \delta_1$$

Al combinar estos dos enunciados, siempre que $0 < |x - a| < \delta$ tenemos $|g(x) - b| < \delta_1$, lo cual implica que $|f(g(x)) - f(b)| < \varepsilon$. Por tanto, ha demostrado que $\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(b)$.

Sección 3.3

La demostración del siguiente resultado se prometió cuando demostró que $\lim_{\theta \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = 1$.

Teorema Si $0 < \theta < \pi/2$, entonces $\theta \leqslant \tan \theta$.

DEMOSTRACIÓN La figura 2 muestra un sector de círculo con centro O, ángulo central θ y radio 1. Entonces

$$|AD| = |OA| \tan \theta = \tan \theta$$

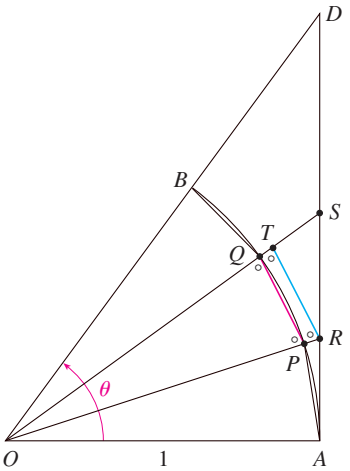


FIGURA 2

Al aproximar el arco AB por un polígono inscrito formado de n segmentos de recta iguales ve un segmento típico PQ. Prolongue las rectas OP y OQ hasta encontrar AD en los puntos R y S. A continuación trace $RT \parallel PQ$ como en la figura 2. Observe que

$$\angle RTO = \angle PQO < 90°$$

y entonces $\angle RTS > 90°$. Por tanto,

$$|PQ| < |RT| < |RS|$$

Si sumamos n de estas desigualdades, obtenemos

$$L_n < |AD| = \tan\theta$$

donde L_n es la longitud del polígono inscrito. Así, por el teorema 2.3.2

$$\lim_{n\to\infty} L_n \leqslant \tan\theta$$

Pero la longitud del arco está definida en la ecuación 8.1.1 como el límite de las longitudes de polígonos inscritos, y

$$\theta = \lim_{n\to\infty} L_n \leqslant \tan\theta$$

Sección 4.3

Prueba de concavidad

a) Si $f''(x) > 0$ para toda x en I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba en I.

b) Si $f''(x) < 0$ para toda x en I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo en I.

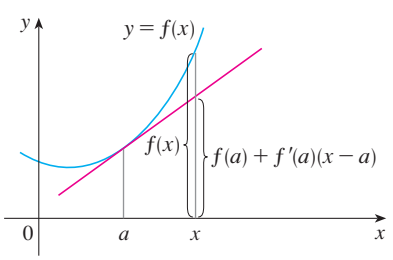


FIGURA 3

DEMOSTRACIÓN DE a) Sea a cualquier número en I. Debe demostrar que la curva $y = f(x)$ está arriba de la recta tangente en el punto $(a, f(a))$. La ecuación de esta tangente es

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

De modo que debe demostrar que

$$f(x) > f(a) + f'(a)(x - a)$$

siempre que $x \in I$ $(x \neq a)$. (Véase la figura 3.)

Primero tome el caso donde $x > a$. Si aplica el teorema del valor medio a f en el intervalo $[a, x]$, obtiene un número c, con $a < c < x$, tal que

$$f(x) - f(a) = f'(c)(x - a) \quad \boxed{1}$$

Como $f'' > 0$ en I, sabe de la prueba creciente/decreciente que f' es creciente en I. De este modo, como $a < c$

$$f'(a) < f'(c)$$

y así, multiplicando esta desigualdad por el número positivo $x - a$, obtiene

$$f'(a)(x - a) < f'(c)(x - a) \quad \boxed{2}$$

Ahora sume $f(a)$ a ambos lados de esta desigualdad:

$$f(a) + f'(a)(x - a) < f(a) + f'(c)(x - a)$$

Pero de la ecuación 1 $f(x) = f(a) + f'(c)(x - a)$. De este modo, esta desigualdad se convierte en

$$\boxed{3} \qquad f(x) > f(a) + f'(a)(x - a)$$

que es lo que quería demostrar.

Para el caso donde $x < a$ tiene $f'(c) < f'(a)$, pero la multiplicación por el número negativo $x - a$ invierte la desigualdad, de modo que obtiene $\boxed{2}$ y $\boxed{3}$ como antes.

Sección 4.4

Para dar la prueba prometida de la regla de l'Hospital, primero necesita una generalización del teorema del valor medio. El siguiente teorema recibió ese nombre en honor al matemático francés Augustin-Louis Cauchy (1789-1857).

En la página 113 vea un bosquejo biográfico de Cauchy.

1 Teorema del valor medio de Cauchy Suponga que las funciones f y g son continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b), y $g'(x) \neq 0$ para toda x en (a, b). Entonces hay un número c en (a, b) tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Note que si toma el caso especial en el que $g(x) = x$, entonces $g'(c) = 1$ y el teorema 1 es precisamente el teorema del valor medio. Además, el teorema 1 se puede demostrar de un modo semejante. El lector puede verificar que todo lo que tiene que hacer es cambiar la función h dada por la ecuación 4.2.4 a la función

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)]$$

y aplicar el teorema de Rolle como antes.

Regla de l'Hospital Suponga que f y g son derivables y $g'(x) \neq 0$ en un intervalo abierto I que contiene a (excepto posiblemente en a). Suponga que

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

o que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$$

(En otras palabras, tiene una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$ o ∞/∞.) Entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

si existe el límite en el lado derecho (o es ∞ o $-\infty$).

DEMOSTRACIÓN DE LA REGLA DE L'HOSPITAL Al suponer que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$.
Sea

$$L = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Debemos demostrar que $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = L$. Definimos

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases} \qquad G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \neq a \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases}$$

Entonces F es continua en I porque f es continua en $\{x \in I \mid x \neq a\}$ y

$$\lim_{x\to a} F(x) = \lim_{x\to a} f(x) = 0 = F(a)$$

Del mismo modo, G es continua en I. Sea $x \in I$ y $x > a$. Entonces F y G son continuas en $[a, x]$ y derivables en (a, x) y $G' \neq 0$ ahí (porque $F' = f'$ y $G' = g'$). Por tanto, por el teorema del valor medio de Cauchy, hay un número y tal que $a < y < x$ y

$$\frac{F'(y)}{G'(y)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F(x)}{G(x)}$$

Aquí ha usado el hecho de que, por definición, $F(a) = 0$ y $G(a) = 0$. Ahora, si hace $x \to a^+$, entonces $y \to a^+$ (porque $a < y < x$), de modo que

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{y\to a^+} \frac{F'(y)}{G'(y)} = \lim_{y\to a^+} \frac{f'(y)}{g'(y)} = L$$

Un argumento similar muestra que el límite izquierdo también es L. Por tanto,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Esto demuestra la regla de l'Hospital para el caso donde a es finita.
Si a es infinita, sea $t = 1/x$. Entonces $t \to 0^+$ cuando $x \to \infty$, de modo que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{t\to 0^+} \frac{f(1/t)}{g(1/t)} \\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{f'(1/t)(-1/t^2)}{g'(1/t)(-1/t^2)} \qquad \text{(por la regla de l'Hospital para } a \text{ finita)} \\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \end{aligned}$$

Sección 11.8

Para demostrar el teorema 11.8.3, primero necesita los siguientes resultados.

Teorema

1. Si una serie de potencias $\sum c_n x^n$ converge cuando $x = b$ (donde $b \neq 0$), entonces converge siempre que $|x| < |b|$.
2. Si una serie de potencias $\sum c_n x^n$ diverge cuando $x = d$ (donde $d \neq 0$), entonces diverge siempre que $|x| > |d|$.

DEMOSTRACIÓN DE 1 Suponga que $\Sigma\, c_n b^n$ converge. Entonces, por el teorema 11.2.6, tiene $\lim_{n\to\infty} c_n b^n = 0$. De acuerdo con la definición 11.1.2 con $\varepsilon = 1$, hay un entero positivo N tal que $|c_n b^n| < 1$ cuando $n \geqslant N$. Así, para $n \geqslant N$

$$|c_n x^n| = \left|\frac{c_n b^n x^n}{b^n}\right| = |c_n b^n| \left|\frac{x}{b}\right|^n < \left|\frac{x}{b}\right|^n$$

Si $|x| < |b|$, entonces $|x/b| < 1$, de modo que $\Sigma\, |x/b|^n$ es una serie geométrica convergente. Por tanto, por la demostración de comparación, la serie $\Sigma_{n=N}^{\infty} |c_n x^n|$ es convergente. De este modo, la serie $\Sigma\, c_n x^n$ es absolutamente convergente y, por tanto, convergente.

DEMOSTRACIÓN DE 2 Suponga que $\Sigma\, c_n d^n$ diverge. Si x es cualquier número tal que $|x| > |d|$, entonces $\Sigma\, c_n x^n$ no puede convergir porque, por la parte 1, la convergencia de $\Sigma\, c_n x^n$ implicaría la convergencia de $\Sigma\, c_n d^n$. Por tanto, $\Sigma\, c_n x^n$ diverge siempre que $|x| > |d|$.

Teorema Para una serie de potencias $\Sigma\, c_n x^n$ hay sólo tres posibilidades:

1. La serie converge sólo cuando $x = 0$.
2. La serie converge para toda x.
3. Hay un número positivo R tal que la serie converge si $|x| < R$ y diverge si $|x| > R$.

DEMOSTRACIÓN Suponga que ni el caso 1 ni el caso 2 son verdaderos. Entonces hay números b y d diferentes de cero tales que $\Sigma\, c_n x^n$ converge para $x = b$ y diverge para $x = d$. En consecuencia, el conjunto $S = \{x \mid \Sigma\, c_n x^n \text{ converge}\}$ no está vacío. Por el teorema precedente, la serie diverge si $|x| > |d|$, de modo que $|x| \leqslant |d|$ para toda $x \in S$. Esto dice que $|d|$ es un límite superior para el conjunto S. De este modo, por el axioma de plenitud (sección 11.1), S tiene un límite superior mínimo R. Si $|x| > R$, entonces $x \notin S$, de modo que $\Sigma\, c_n x^n$ diverge. Si $|x| < R$, entonces $|x|$ no es un límite superior para S y, por tanto, existe $b \in S$ tal que $b > |x|$. Como $b \in S$, $\Sigma\, c_n b^n$ converge, de modo que, por el teorema precedente, $\Sigma\, c_n x^n$ converge.

3 Teorema Para una serie de potencia $\Sigma\, c_n (x - a)^n$ hay sólo tres posibilidades:

1. La serie converge sólo cuando $x = a$.
2. La serie converge para toda x.
3. Hay un número positivo R tal que la serie converge si $|x - a| < R$ y diverge si $|x - a| > R$.

DEMOSTRACIÓN Si hace el cambio de variable $u = x - a$, entonces la serie de potencias se convierte en $\Sigma\, c_n u^n$ y puede aplicar el teorema precedente a esta serie. En el caso 3 tiene convergencia para $|u| < R$ y divergencia para $|u| > R$. De este modo, tiene convergencia para $|x - a| < R$ y divergencia para $|x - a| > R$.

G El logaritmo definido como una integral

El tratamiento de funciones exponenciales y logarítmicas se ha apoyado hasta ahora en la intuición, que está basada en evidencia numérica y visual. (Véanse las secciones 1.5, 1.6 y 3.1.) Aquí se usa el teorema fundamental del cálculo para dar un tratamiento alternativo que proporcione una base más segura para estas funciones.

En lugar de empezar con a^x y definir $\log_a x$ como su inversa, esta vez empiece por definir $\ln x$ como una integral y luego defina la función exponencial como su inversa. El lector debe recordar que no se usa ninguno de los resultados y definiciones previos relacionados con funciones exponenciales y logarítmicas.

Logaritmo natural

Primero defina $\ln x$ como una integral.

1 Definición La **función de logaritmo natural** es la función definida por

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \qquad x > 0$$

La existencia de esta función depende del hecho de que siempre existe la integral de una función continua. Si $x > 1$, entonces $\ln x$ se puede interpretar geométricamente como el área bajo la hipérbola $y = 1/t$ de $t = 1$ a $t = x$. (Véase la figura 1.) Para $x = 1$

$$\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t}\,dt = 0$$

Para $0 < x < 1$,

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = -\int_x^1 \frac{1}{t}\,dt < 0$$

y, por tanto, $\ln x$ es el negativo del área que se muestra en la figura 2.

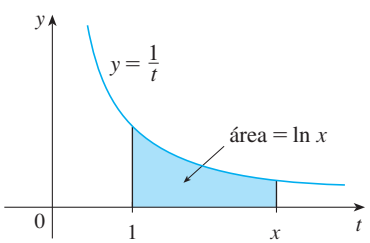


FIGURA 1

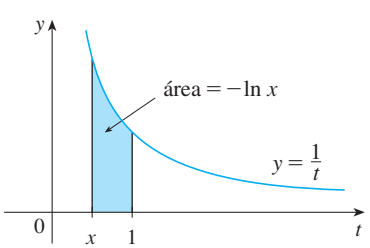


FIGURA 2

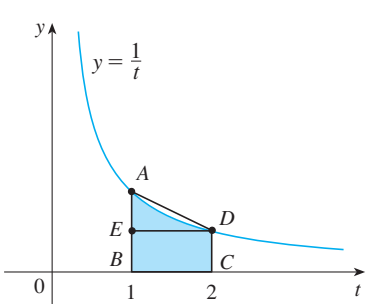


FIGURA 3

V EJEMPLO 1

a) Por comparación de áreas, demuestre que $\frac{1}{2} < \ln 2 < \frac{3}{4}$.

b) Use la regla del punto medio con $n = 10$ para estimar el valor de $\ln 2$.

SOLUCIÓN

a) Podemos interpretar $\ln 2$ como el área bajo la curva $y = 1/t$ de 1 a 2. En la figura 3 vemos que esta área es mayor que el área del rectángulo $BCDE$ y menor que el área del trapecio $ABCD$. Por tanto,

$$\tfrac{1}{2} \cdot 1 < \ln 2 < 1 \cdot \tfrac{1}{2}\,(1 + \tfrac{1}{2})$$

$$\tfrac{1}{2} < \ln 2 < \tfrac{3}{4}$$

b) Si usamos la regla del punto medio con $f(t) = 1/t$, $n = 10$ y $\Delta t = 0.1$, obtenemos

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{t}\,dt \approx (0.1)[f(1.05) + f(1.15) + \cdots + f(1.95)$$

$$= (0.1)\left(\frac{1}{1.05} + \frac{1}{1.15} + \cdots + \frac{1}{1.95}\right) \approx 0.693$$

Note que la integral que define $\ln x$ es exactamente el tipo de integral que estudió en la primera parte del teorema fundamental del cálculo (sección 5.3). De hecho, usando ese teorema

$$\frac{d}{dx}\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{x}$$

y entonces

2
$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

Ahora use esta regla de derivación para demostrar las siguientes propiedades de la función logaritmo.

3 Leyes de logaritmos Si x y y son números positivos y r es un número racional, entonces

1. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ **2.** $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$ **3.** $\ln(x^r) = r \ln x$

DEMOSTRACIÓN

1. Sea $f(x) = \ln(ax)$, donde a es una constante positiva. Entonces, usando la ecuación 2 y la regla de la cadena

$$f'(x) = \frac{1}{ax}\frac{d}{dx}(ax) = \frac{1}{ax}\cdot a = \frac{1}{x}$$

Por tanto, $f(x)$ y $\ln x$ tienen la misma derivada y entonces deben diferir por una constante:

$$\ln(ax) = \ln x + C$$

Poniendo $x = 1$ en esta ecuación, obtiene $\ln a = \ln 1 + C = 0 + C = C$. Entonces

$$\ln(ax) = \ln x + \ln a$$

Si ahora se sustituye la constante a por cualquier número y

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$

2. Usando la ley 1 con $x = 1/y$, tenemos

$$\ln\frac{1}{y} + \ln y = \ln\left(\frac{1}{y}\cdot y\right) = \ln 1 = 0$$

y entonces
$$\ln\frac{1}{y} = -\ln y$$

Usando de nuevo la ley 1, tenemos

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(x\cdot\frac{1}{y}\right) = \ln x + \ln\frac{1}{y} = \ln x - \ln y$$

La prueba de la ley 3 se deja como ejercicio.

Para graficar $y = \ln x$, primero determine sus límites:

4

$$\text{a) } \lim_{x \to \infty} \ln x = \infty \qquad \text{b) } \lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$$

DEMOSTRACIÓN

a) Usando la ley 3 con $x = 2$ y $r = n$ (donde n es cualquier entero positivo), tenemos $\ln(2^n) = n \ln 2$. Ahora $\ln 2 > 0$, de manera que esto demuestra que $\ln(2^n) \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Pero $\ln x$ es una función creciente porque su derivada $1/x > 0$. En consecuencia, $\ln x \to \infty$ cuando $x \to \infty$.

b) Si hacemos $t = 1/x$, entonces $t \to \infty$ cuando $x \to 0^+$. De este modo, usando a), tenemos

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = \lim_{t \to \infty} \ln\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{t \to \infty} (-\ln t) = -\infty$$

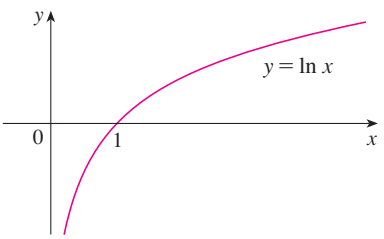


FIGURA 4

Si $y = \ln x$, $x > 0$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} > 0 \qquad y \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2} < 0$$

lo cual demuestra que $\ln x$ es creciente y cóncava hacia abajo en $(0, \infty)$. Reuniendo esta información con 4, trace la gráfica de $y = \ln x$ en la figura 4.

Como $\ln 1 = 0$ y $\ln x$ es una función continua creciente que toma valores arbitrariamente grandes, el teorema del valor intermedio muestra que hay un número en donde $\ln x$ toma el valor 1. (Véase la figura 5.) Este importante número se denota con e.

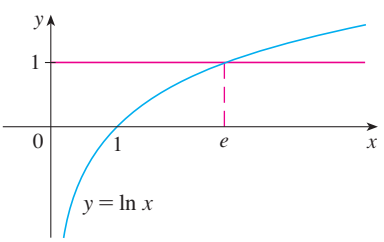


FIGURA 5

5 Definición e es el número tal que $\ln e = 1$.

Se demostrará (en el teorema 19) que esta definición es consistente con la definición previa de e.

Función exponencial natural

Como ln es una función creciente, es biunívoca y, por tanto, tiene una función inversa, que se denota por exp. Así, según la definición de una función inversa,

$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$

6

$$\exp(x) = y \iff \ln y = x$$

y las ecuaciones de cancelación son

$f^{-1}(f(x)) = x$
$f(f^{-1}(x)) = x$

7

$$\exp(\ln x) = x \quad \text{y} \quad \ln(\exp x) = x$$

En particular

$$\exp(0) = 1 \quad \text{porque} \quad \ln 1 = 0$$
$$\exp(1) = e \quad \text{porque} \quad \ln e = 1$$

Obtenemos la gráfica de $y = \exp x$ al reflejar la gráfica de $y = \ln x$ alrededor de la recta $y = x$.

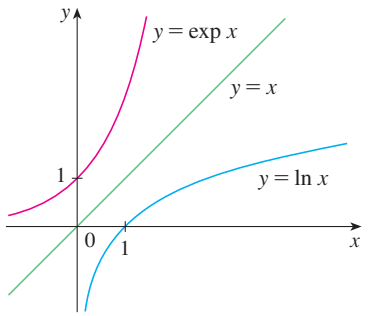


FIGURA 6

(Véase figura 6.) El dominio de exp es el rango de ln, es decir, $(-\infty, \infty)$; el rango de exp es el dominio de ln, es decir, $(0, \infty)$.

Si r es cualquier número racional, entonces la tercera ley de logaritmos da

$$\ln(e^r) = r \ln e = r$$

Por tanto, por 6 $\qquad \exp(r) = e^r$

Entonces, $\exp(x) = e^x$ siempre que x sea un número racional. Esto lleva a definir e^x, incluso para valores irracionales de x, con la ecuación

$$e^x = \exp(x)$$

En otras palabras, por las razones dadas, defina e^x como la inversa de la función $\ln x$. En esta notación 6 se convierte en

8 $\qquad e^x = y \iff \ln y = x$

y las ecuaciones de cancelación 7 se convierten en

9 $\qquad e^{\ln x} = x \qquad x > 0$

10 $\qquad \ln(e^x) = x \quad$ para toda x

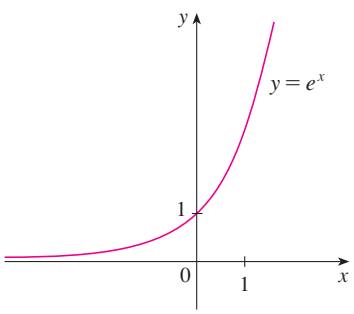


FIGURA 7
La función exponencial natural

La función exponencial natural $f(x) = e^x$ es una de las funciones que se presentan con más frecuencia en Cálculo y sus aplicaciones, de modo que es importante estar familiarizado con su gráfica (figura 7) y sus propiedades (que se siguen del hecho de que es la inversa de la función logarítmica natural).

Propiedades de la función exponencial La función exponencial $f(x) = e^x$ es una función continua creciente con dominio $\mathbb{R}$ y rango $(0, \infty)$. Entonces $e^x > 0$ para toda x. También

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x \to \infty} e^x = \infty$$

Por tanto, el eje x es una asíntota horizontal de $f(x) = e^x$.

A continuación se verifica que f tenga las otras propiedades esperadas de una función exponencial.

11 Leyes de exponentes Si x y y son números reales y r es racional, entonces

1. $e^{x+y} = e^x e^y \qquad$ **2.** $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y} \qquad$ **3.** $(e^x)^r = e^{rx}$

DEMOSTRACIÓN DE LA LEY 1 Usando la primera ley de logaritmos y la ecuación 10, tenemos

$$\ln(e^x e^y) = \ln(e^x) + \ln(e^y) = x + y = \ln(e^{x+y})$$

Como ln es una función biunívoca, se deduce que $e^x e^y = e^{x+y}$.

Las leyes 2 y 3 se demuestran de un modo semejante (ejercicios 6 y 7). Como pronto verá, la ley 3 se cumple en realidad cuando r es cualquier número real.

A continuación se demuestra la fórmula de derivación para e^x.

12

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

DEMOSTRACIÓN La función $y = e^x$ es derivable porque es la función inversa de $y = \ln x$, que sabemos es derivable con derivada diferente de cero. Para hallar su derivada, usamos el método de función inversa. Sea $y = e^x$. Entonces $\ln y = x$ y, derivando esta última ecuación implícitamente respecto a x, obtenemos

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = y = e^x$$

Funciones exponenciales generales

Si $a > 0$ y r es cualquier número racional, entonces por 9 y 11,

$$a^r = (e^{\ln a})^r = e^{r \ln a}$$

Por tanto, incluso para números irracionales x, *definamos*

13

$$a^x = e^{x \ln a}$$

Así, por ejemplo,

$$2^{\sqrt{3}} = e^{\sqrt{3} \ln 2} \approx e^{1.20} \approx 3.32$$

La función $f(x) = a^x$ se denomina **función exponencial con base *a***. Note que a^x es positiva para toda x porque e^x es positiva para toda x.

La definición 13 permite extender una de las leyes de logaritmos. Ya sabe que $\ln(a^r) = r \ln a$ cuando r es racional. Pero si hace que r sea *cualquier* número real que tenga, de la definición 13,

$$\ln a^r = \ln(e^{r \ln a}) = r \ln a$$

Entonces

14 $\ln a^r = r \ln a$ para cualquier número real r

Las leyes generales de exponentes se siguen de la definición 13 junto con las leyes de exponentes para e^x.

15 Leyes de exponentes Si x y y son números reales y $a, b > 0$, entonces

1. $a^{x+y} = a^x a^y$ **2.** $a^{x-y} = a^x / a^y$ **3.** $(a^x)^y = a^{xy}$ **4.** $(ab)^x = a^x b^x$

DEMOSTRACIÓN

1. Usando la definición 13 y las leyes de exponentes para e^x, tenemos

$$a^{x+y} = e^{(x+y)\ln a} = e^{x\ln a + y\ln a}$$
$$= e^{x\ln a} e^{y\ln a} = a^x a^y$$

3. Usando la ecuación 14 obtenemos

$$(a^x)^y = e^{y\ln(a^x)} = e^{yx\ln a} = e^{xy\ln a} = a^{xy}$$

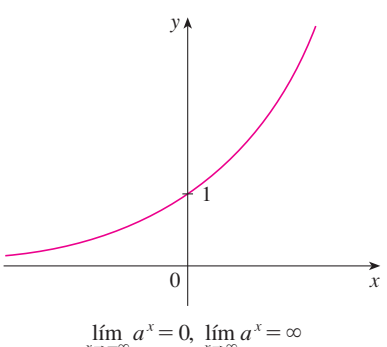
Las pruebas restantes se dejan como ejercicio. ∎

La fórmula de la derivación para funciones exponenciales también es una consecuencia de la definición 13:

16
$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$$

DEMOSTRACIÓN

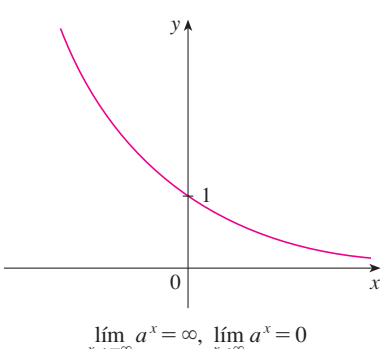
$$\frac{d}{dx}(a^x) = \frac{d}{dx}(e^{x\ln a}) = e^{x\ln a}\frac{d}{dx}(x\ln a) = a^x \ln a$$ ∎



$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$, $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$

FIGURA 8 $y = a^x$, $a > 1$

Si $a > 1$, entonces $\ln a > 0$, de modo que $(d/dx)a^x = a^x \ln a > 0$, lo que demuestra que $y = a^x$ es creciente (véase la figura 8). Si $0 < a < 1$, entonces $\ln a < 0$ y, por tanto, $y = a^x$ es decreciente (véase la figura 9).



$\lim_{x\to-\infty} a^x = \infty$, $\lim_{x\to\infty} a^x = 0$

FIGURA 9 $y = a^x$, $0 < a < 1$

Funciones logarítmicas generales

Si $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces $f(x) = a^x$ es una función biunívoca. Su función inversa recibe el nombre de **función logarítmica con base *a*** y se denota con $\log_a$. De este modo,

17
$$\log_a x = y \iff a^y = x$$

En particular, vemos que

$$\log_e x = \ln x$$

Las leyes de logaritmos son semejantes a las del logaritmo natural y se pueden deducir de las leyes de exponentes (ejercicio 10).

Para derivar $y = \log_a x$, escriba la ecuación como $a^y = x$. De la ecuación 14 tenemos $y \ln a = \ln x$, de modo que

$$\log_a x = y = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Como $\ln a$ es una constante, podemos derivar como sigue:

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{d}{dx}\frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{\ln a}\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x \ln a}$$

18

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}}$$

El número e expresado como un límite

En esta sección se define e como el número tal que $\ln e = 1$. El siguiente teorema muestra que éste es el mismo que el número e definido en la sección 3.1. (Véase la ecuación 3.6.5.)

19

$$\boxed{e = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}}$$

DEMOSTRACIÓN Sea $f(x) = \ln x$. Entonces $f'(x) = 1/x$, de modo que $f'(1) = 1$. Pero, por la definición de la derivada,

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{x \to 0} \frac{f(1 + x) - f(1)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x) - \ln 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \ln(1 + x) = \lim_{x \to 0} \ln(1 + x)^{1/x}$$

Como $f'(1) = 1$

$$\lim_{x \to 0} \ln(1 + x)^{1/x} = 1$$

Entonces, por el teorema 2.5.8 y la continuidad de la función exponencial

$$e = e^1 = e^{\lim_{x \to 0} \ln(1+x)^{1/x}} = \lim_{x \to 0} e^{\ln(1+x)^{1/x}} = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}$$

G Ejercicios

1. a) Por comparación de áreas, demuestre que

$$\tfrac{1}{3} < \ln 1.5 < \tfrac{5}{12}$$

b) Use la regla del punto medio con $n = 10$ para estimar $\ln 1.5$.

2. Consulte el ejemplo 1.

a) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 1/t$ que es paralela a la recta secante AD.

b) Use el inciso a) para demostrar que $\ln 2 > 0.66$.

3. Por comparación de áreas, demuestre que

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < \ln n < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n - 1}$$

4. a) Por comparación de áreas, demuestre que $\ln 2 < 1 < \ln 3$.

b) Deduzca que $2 < e < 3$.

5. Demuestre la tercera ley de logaritmos. [*Sugerencia:* empiece por demostrar que ambos lados de la ecuación tienen la misma derivada.]
6. Demuestre la segunda ley de exponentes para e^x [véase 11].
7. Demuestre la tercera ley de exponentes para e^x [véase 11].
8. Demuestre la segunda ley de exponentes [véase 15].
9. Demuestre la cuarta ley de exponentes [véase 15].
10. De 15, deduzca las siguientes leyes de logaritmos:
    a) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a x$
    b) $\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a x$
    c) $\log_a(x^y) = y \log_a x$

H Números complejos

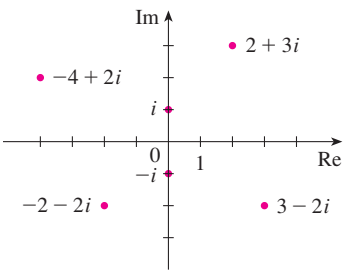


FIGURA 1
Números complejos como puntos en el plano Argand

Un **número complejo** puede estar representado por una expresión de la forma $a + bi$, donde a y b son números reales e i es un símbolo con la propiedad de que $i^2 = -1$. El número complejo $a + bi$ también puede estar representado por el par ordenado (a, b) y determinado como un punto en un plano (llamado plano Argand) como en la figura 1. De este modo, el número complejo $i = 0 + 1 \cdot i$ se identifica con el punto (0,1).

La **parte real** del número complejo $a + bi$ es el número real a y la **parte imaginaria** es el número real b. Entonces la parte real de $4 - 3i$ es 4 y la parte imaginaria es -3. Dos números complejos $a + bi$ y $c + di$ son **iguales** si $a = c$ y $b = d$; esto es, sus partes reales son iguales y sus partes imaginarias son iguales. En el plano Argand, el eje horizontal recibe el nombre de eje real y el eje vertical se llama eje imaginario.

La suma y diferencia de dos números complejos están definidas al sumar o restar sus partes reales y sus partes imaginarias:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$
$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Por ejemplo,

$$(1 - i) + (4 + 7i) = (1 + 4) + (-1 + 7)i = 5 + 6i$$

El producto de números complejos se define de modo que se cumplan las leyes conmutativa y distributiva de costumbre:

$$\begin{aligned}(a + bi)(c + di) &= a(c + di) + (bi)(c + di)\\ &= ac + adi + bci + bdi^2\end{aligned}$$

Como $i^2 = -1$, esto se convierte en

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

EJEMPLO 1

$$\begin{aligned}(-1 + 3i)(2 - 5i) &= (-1)(2 - 5i) + 3i(2 - 5i)\\ &= -2 + 5i + 6i - 15(-1) = 13 + 11i\end{aligned}$$

La división de números complejos es muy semejante a racionalizar el denominador de una expresión racional. Para el número complejo $z = a + bi$, se define su **conjugado complejo** como $\bar{z} = a - bi$. Para hallar el cociente entre dos números complejos multiplique numerador y denominador por el conjugado complejo del denominador.

EJEMPLO 2 Exprese el número $\dfrac{-1 + 3i}{2 + 5i}$ en la forma $a + bi$.

SOLUCIÓN Multiplique numerador y denominador por el conjugado complejo de $2 + 5i$, es decir, $2 - 5i$, y aproveche el resultado del ejemplo 1:

$$\frac{-1 + 3i}{2 + 5i} = \frac{-1 + 3i}{2 + 5i} \cdot \frac{2 - 5i}{2 - 5i} = \frac{13 + 11i}{2^2 + 5^2} = \frac{13}{29} + \frac{11}{29}\, i$$

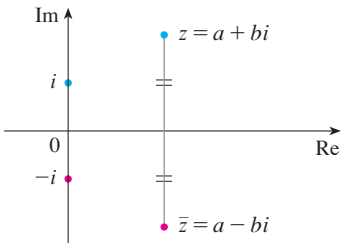


FIGURA 2

La interpretación geométrica del conjugado complejo se muestra en la figura 2: $\bar{z}$ es la reflexión de z en el eje real. En el recuadro siguiente hay una lista de algunas de las propiedades del conjugado complejo. Las demostraciones se siguen de la definición y se piden en el ejercicio 18.

Propiedades de conjugados

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w} \qquad \overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w} \qquad \overline{z^n} = \bar{z}^n$$

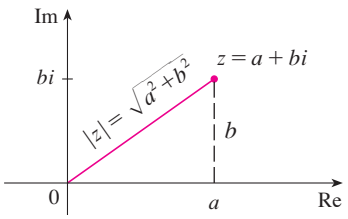


FIGURA 3

El **módulo**, o **valor absoluto**, $|z|$ de un número complejo $z = a + bi$ es su distancia desde el origen. De la figura 3 se ve que si $z = a + bi$, entonces

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Note que

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + abi - abi - b^2 i^2 = a^2 + b^2$$

y entonces

$$z\bar{z} = |z|^2$$

Esto explica por qué funciona en general el procedimiento de división del ejemplo 2:

$$\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{w\bar{w}} = \frac{z\bar{w}}{|w|^2}$$

Como $i^2 = -1$, puede pensar que i es una raíz cuadrada de -1. Pero observe que también tiene $(-i)^2 = i^2 = -1$ y entonces -1 también es una raíz cuadrada de -1. Se dice que i es la **raíz cuadrada principal** de -1 y se escribe $\sqrt{-1} = i$. En general, si c es cualquier número positivo, escriba

$$\sqrt{-c} = \sqrt{c}\, i$$

Con esta convención, la derivación y fórmula usuales para las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ son válidas incluso cuando $b^2 - 4ac < 0$:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

EJEMPLO 3 Encuentre las raíces de la ecuación $x^2 + x + 1 = 0$.

SOLUCIÓN Usando la fórmula cuadrática, tenemos

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

Observe que las soluciones de la ecuación del ejemplo 3 son conjugados complejos entre sí. En general, las soluciones de cualquier ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ con coeficientes reales a, b y c son siempre conjugados complejos. (Si z es real, $\bar{z} = z$, de modo que z es su propio conjugado.)

Ha visto que si permite números complejos como soluciones, entonces toda ecuación cuadrática tiene una solución. En forma más general, es cierto que toda ecuación con polinomios

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

de grado al menos 1 tiene una solución entre los números complejos. Este dato se conoce como teorema fundamental de álgebra y fue demostrado por Gauss.

Forma polar

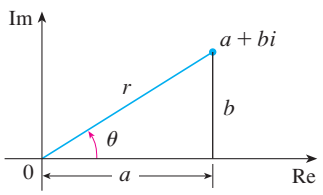


FIGURA 4

Sabemos que cualquier número complejo $z = a + bi$ puede ser considerado como un punto (a, b), y que cualquiera de estos puntos puede ser representado por coordenadas polares (r, θ) con $r \geqslant 0$. De hecho,

$$a = r \cos\theta \qquad b = r \operatorname{sen}\theta$$

como en la figura 4. Por tanto,

$$z = a + bi = (r\cos\theta) + (r \operatorname{sen}\theta)i$$

Entonces escribimos cualquier número complejo z en la forma

$$\boxed{z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)}$$

donde $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ y $\tan\theta = \dfrac{b}{a}$

El ángulo θ se llama **argumento** de z y escriba $\theta = \arg(z)$. Note que $\arg(z)$ no es único; cualesquier dos argumentos de z difieren en un múltiplo entero de 2π.

EJEMPLO 4 Escriba los siguientes números en forma polar.

a) $z = 1 + i$ b) $w = \sqrt{3} - i$

SOLUCIÓN

a) Tenemos $r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ y $\tan\theta = 1$, de modo que podemos tomar $\theta = \pi/4$. Por tanto, la forma polar es

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$$

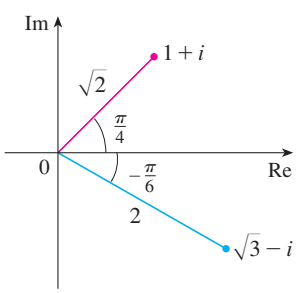


FIGURA 5

b) Aquí tenemos $r = |w| = \sqrt{3 + 1} = 2$ y $\tan\theta = -1/\sqrt{3}$. Como w está en el cuarto cuadrante, tomamos $\theta = -\pi/6$ y

$$w = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

Los números z y w se muestran en la figura 5.

La forma polar de números complejos da idea de la multiplicación y la división. Sean

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1) \qquad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)$$

dos números complejos escritos en forma polar. Entonces

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1r_2(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2) \\ &= r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \text{sen}\,\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2) + i(\text{sen}\,\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2)] \end{aligned}$$

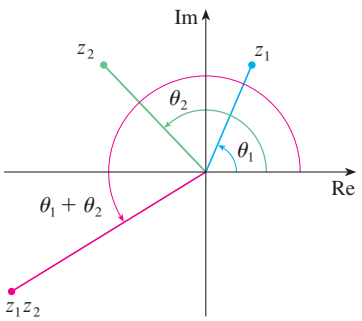


FIGURA 6

Por tanto, usando las fórmulas de la adición para coseno y seno

1

$$z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$$

Esta fórmula dice que *para multiplicar dos números complejos multiplique los módulos y sume los argumentos*. (Véase la figura 6.)

Un argumento similar que usa las fórmulas de la sustracción para seno y coseno muestra que, *para dividir dos números complejos, divida los módulos y reste los argumentos*.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 - \theta_2)] \qquad z_2 \neq 0$$

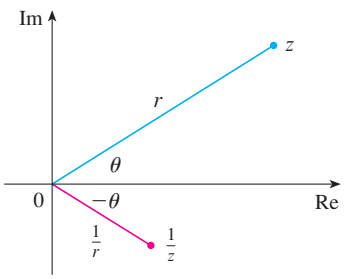


FIGURA 7

En particular, tomando $z_1 = 1$ y $z_2 = z$ (y, por tanto, $\theta_1 = 0$ y $\theta_2 = \theta$), tenemos lo siguiente, que se ilustra en la figura 7.

Si $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$, entonces $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}(\cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta)$.

EJEMPLO 5 Encuentre el producto de los números complejos $1 + i$ y $\sqrt{3} - i$ en forma polar.

SOLUCIÓN Del ejemplo 4

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$$

y

$$\sqrt{3} - i = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

Entonces, por la ecuación 1,

$$\begin{aligned} (1 + i)(\sqrt{3} - i) &= 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)\right] \\ &= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{12}\right) \end{aligned}$$

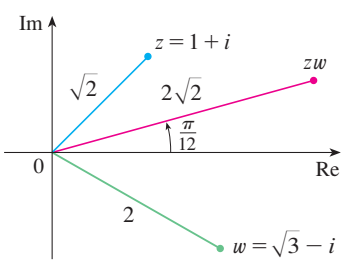


FIGURA 8

Esto se ilustra en la figura 8.

El uso repetido de la fórmula 1 muestra cómo calcular potencias de un número complejo. Si

$$z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

entonces

$$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta)$$

y

$$z^3 = zz^2 = r^3(\cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta)$$

En general, obtiene el siguiente resultado, llamado así en honor al matemático francés Abraham De Moivre (1667-1754).

2 Teorema de De Moivre Si $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ y n es un entero positivo, entonces

$$z^n = [r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

Esto dice que *para tomar la* n*-ésima potencia de un número complejo tome la* n*-ésima potencia del módulo y multiplique el argumento por* n.

EJEMPLO 6 Encuentre $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{10}$.

SOLUCIÓN Como $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}(1 + i)$, se deduce del ejemplo 4a) que $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ tiene la forma polar

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$$

Entonces, por el teorema de De Moivre,

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{10} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{10}\left(\cos\frac{10\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{10\pi}{4}\right)$$
$$= \frac{2^5}{2^{10}}\left(\cos\frac{5\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{2}\right) = \frac{1}{32}i$$

El teorema de De Moivre también se puede usar para hallar las n-ésimas raíces de números complejos. Una n-ésima raíz del número complejo z es un número complejo w tal que

$$w^n = z$$

Si escribimos estos dos números en forma trigonométrica

$$w = s(\cos\phi + i \operatorname{sen}\phi) \quad \text{y} \quad z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

y usamos el teorema de De Moivre, obtenemos

$$s^n(\cos n\phi + i \operatorname{sen} n\phi) = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

La igualdad de estos dos números complejos muestra que

$$s^n = r \quad \text{o bien} \quad s = r^{1/n}$$

y entonces

$$\cos n\phi = \cos\theta \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} n\phi = \operatorname{sen}\theta$$

Del hecho que seno y coseno tienen periodo 2π, se deduce que

$$n\phi = \theta + 2k\pi \qquad \text{o bien} \qquad \phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

y entonces
$$w = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

Como esta expresión da un valor diferente de w para $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$, tenemos lo siguiente.

3 Raíces de un número complejo Sea $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$ y sea n un entero positivo. Entonces z tiene las n raíces distintas n-ésimas

$$w_k = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

donde $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

Note que cada una de las n-ésimas raíces de z tiene un módulo $|w_k| = r^{1/n}$. Así, todas las n-ésimas raíces de z están en el círculo de radio $r^{1/n}$ del plano complejo. También, como el argumento de cada n-ésima raíz sucesiva excede al argumento de la raíz previa en $2\pi/n$, las n-ésimas raíces de z están igualmente espaciadas en este círculo.

EJEMPLO 7 Encuentre las seis raíces sextas de $z = -8$ y grafique estas raíces en el plano complejo.

SOLUCIÓN En forma trigonométrica, $z = 8(\cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi)$. Si aplicamos la ecuación 3 con $n = 6$, obtenemos

$$w_k = 8^{1/6}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right)$$

Obtenemos las seis raíces sextas de -8 al tomar $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ en esta fórmula:

$$w_0 = 8^{1/6}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

$$w_1 = 8^{1/6}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\,i$$

$$w_2 = 8^{1/6}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

$$w_3 = 8^{1/6}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$$

$$w_4 = 8^{1/6}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{2}\right) = -\sqrt{2}\,i$$

$$w_5 = 8^{1/6}\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$$

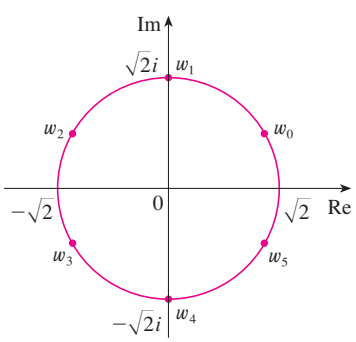


FIGURA 9
Las seis raíces sextas de $z = -8$

Todos estos puntos se encuentran en el círculo de radio $\sqrt{2}$ como se muestra en la figura 9.

Exponenciales complejos

También necesita dar un significado a la expresión e^z cuando $z = x + iy$ es un número complejo. La teoría de series infinitas desarrollada en el capítulo 11 se puede extender al caso donde los términos son números complejos. Usando la serie de Taylor para e^x (11.10.11) como guía, se define

$$\boxed{4} \qquad e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

y resulta que esta función exponencial compleja tiene las mismas propiedades que la función exponencial real. En particular, es cierto que

$$\boxed{5} \qquad e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$$

Si ponemos $z = iy$, donde y es un número real, en la ecuación 4, y usamos los datos en que

$$i^2 = -1, \quad i^3 = i^2 i = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \quad \ldots$$

Obtenemos

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \cdots \\ &= 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i\frac{y^5}{5!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \cdots\right) \\ &= \cos y + i \operatorname{sen} y \end{aligned}$$

Aquí ha empleado la serie de Taylor para cos y y sen y (ecuaciones 11.10.16 y 11.10.15). El resultado es una famosa fórmula llamada **fórmula de Euler**:

$$\boxed{6} \qquad \boxed{e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y}$$

Combinando la fórmula de Euler con la ecuación 5, obtenemos

$$\boxed{7} \qquad e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

EJEMPLO 8 Evalúe: a) $e^{i\pi}$ b) $e^{-1+i\pi/2}$

SOLUCIÓN

a) De la ecuación 6 de Euler

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \operatorname{sen} \pi = -1 + i(0) = -1$$

Podría escribir el resultado del ejemplo 8a) como

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Esta ecuación relaciona los cinco números más famosos de todas las matemáticas: 0, 1, e, i y π.

b) Usando la ecuación 7

$$e^{-1+i\pi/2} = e^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{e}[0 + i(1)] = \frac{i}{e}$$

Finalmente, observe que la ecuación de Euler da un método más fácil de demostrar el teorema de De Moivre:

$$[r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

H Ejercicios

1-14 Evalúe la expresión y escriba su respuesta en la forma $a + bi$.

1. $(5 - 6i) + (3 + 2i)$

2. $\left(4 - \frac{1}{2}i\right) - \left(9 + \frac{5}{2}i\right)$

3. $(2 + 5i)(4 - i)$

4. $(1 - 2i)(8 - 3i)$

5. $\overline{12 + 7i}$

6. $\overline{2i\left(\frac{1}{2} - i\right)}$

7. $\dfrac{1 + 4i}{3 + 2i}$

8. $\dfrac{3 + 2i}{1 - 4i}$

9. $\dfrac{1}{1 + i}$

10. $\dfrac{3}{4 - 3i}$

11. i^3

12. i^{100}

13. $\sqrt{-25}$

14. $\sqrt{-3}\sqrt{-12}$

15-17 Encuentre el conjugado complejo y el módulo del número.

15. $12 - 5i$

16. $-1 + 2\sqrt{2}\,i$

17. $-4i$

18. Demuestre las siguientes propiedades de números complejos.

a) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ b) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$

c) $\overline{z^n} = \overline{z}^n$, donde n es un entero positivo

[*Sugerencia:* escriba $z = a + bi$, $w = c + di$.]

19-24 Encuentra todas las soluciones de las ecuaciones.

19. $4x^2 + 9 = 0$

20. $x^4 = 1$

21. $x^2 + 2x + 5 = 0$

22. $2x^2 - 2x + 1 = 0$

23. $z^2 + z + 2 = 0$

24. $z^2 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{4} = 0$

25-28 Escriba el número en forma polar con argumento entre 0 y 2π.

25. $-3 + 3i$

26. $1 - \sqrt{3}\,i$

27. $3 + 4i$

28. $8i$

29-32 Encuentre formas polares para zw, z/w y $1/z$ al poner primero z y w en forma polar.

29. $z = \sqrt{3} + i$, $w = 1 + \sqrt{3}\,i$

30. $z = 4\sqrt{3} - 4i$, $w = 8i$

31. $z = 2\sqrt{3} - 2i$, $w = -1 + i$

32. $z = 4\left(\sqrt{3} + i\right)$, $w = -3 - 3i$

33-36 Encuentre la potencia indicada usando el teorema de De Moivre.

33. $(1 + i)^{20}$

34. $\left(1 - \sqrt{3}\,i\right)^5$

35. $\left(2\sqrt{3} + 2i\right)^5$

36. $(1 - i)^8$

37-40 Encuentre las raíces indicadas. Trace las raíces en el plano complejo.

37. Las octavas raíces de 1

38. Las quintas raíces de 32

39. Las raíces cúbicas de i

40. Las raíces cúbicas de $1 + i$

41-46 Escriba el número en la forma $a + bi$.

41. $e^{i\pi/2}$

42. $e^{2\pi i}$

43. $e^{i\pi/3}$

44. $e^{-i\pi}$

45. $e^{2+i\pi}$

46. $e^{\pi+i}$

47. Use el teorema de De Moivre con $n = 3$ para expresar $\cos 3\theta$ y $\operatorname{sen} 3\theta$ en términos de $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$.

48. Use la fórmula de Euler para demostrar las siguientes fórmulas para $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

49. Si $u(x) = f(x) + ig(x)$ es una función de valor complejo de una variable real x, y las partes real e imaginaria $f(x)$ y $g(x)$ son funciones derivables de x, entonces la derivada de u define que es $u'(x) = f'(x) + ig'(x)$. Use esto junto con la ecuación 7 para demostrar que si $F(x) = e^{rx}$, entonces $F'(x) = re^{rx}$ cuando $r = a + bi$ es un número complejo.

50. a) Si u es una función de valor complejo de una variable real, su integral indefinida $\int u(x)\,dx$ es una antiderivada de u. Evalúe

$$\int e^{(1+i)x}\,dx$$

b) Considerando las partes real e imaginaria de la integral del inciso a), evalúe las integrales reales

$$\int e^x \cos x\,dx \qquad \text{y} \qquad \int e^x \operatorname{sen} x\,dx$$

c) Compare con el método empleado en el ejemplo 4 de la sección 7.1.

I Respuestas a ejercicios de número impar

CAPÍTULO 1

EJERCICIOS 1.1 ■ PÁGINA 19

1. Sí

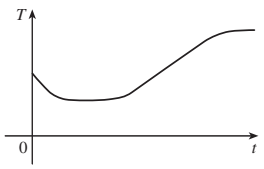
3. a) 3 b) -0.2 c) 0, 3 d) -0.8
e) $[-2, 4], [-1, 3]$ f) $[-2, 1]$

5. $[-85, 115]$ **7.** No

9. Sí, $[-3, 2], [-3, -2) \cup [-1, 3]$

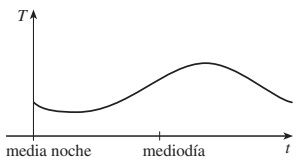
11. Dieta, ejercicio o enfermedad

13.

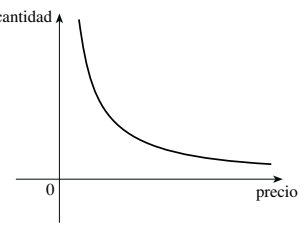


15. a) 500 MW; 730 MW b) 4 a.m.; mediodía

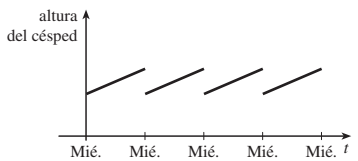
17.



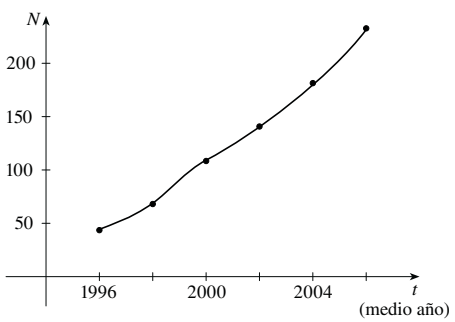
19.



21.



23. a)



b) 126 millones; 297 millones

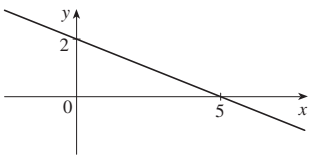
25. $12, 16, 3a^2 - a + 2, 3a^2 + a + 2, 3a^2 + 5a + 4,$
$6a^2 - 2a + 4, 12a^2 - 2a + 2, 3a^4 - a^2 + 2,$
$9a^4 - 6a^3 + 13a^2 - 4a + 4, 3a^2 + 6ah + 3h^2 - a - h + 2$

27. $-3 - h$ **29.** $-1/(ax)$

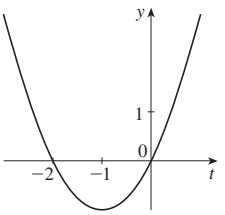
31. $(-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)$ **33.** $(-\infty, \infty)$

35. $(-\infty, 0) \cup (5, \infty)$ **37.** $[0, 4]$

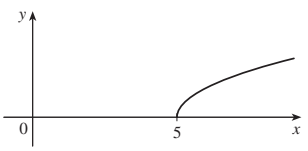
39. $(-\infty, \infty)$



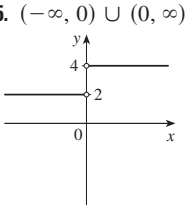
41. $(-\infty, \infty)$



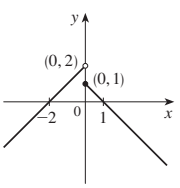
43. $[5, \infty)$



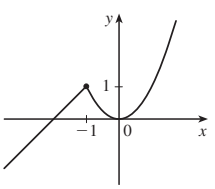
45. $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$



47. $(-\infty, \infty)$



49. $(-\infty, \infty)$



51. $f(x) = \frac{5}{2}x - \frac{11}{2}, 1 \leqslant x \leqslant 5$ **53.** $f(x) = 1 - \sqrt{-x}$

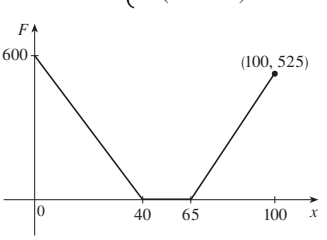
55. $f(x) = \begin{cases} -x + 3 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ 2x - 6 & \text{si } 3 < x \leqslant 5 \end{cases}$

57. $A(L) = 10L - L^2, 0 < L < 10$

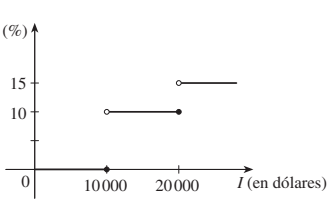
59. $A(x) = \sqrt{3}x^2/4, x > 0$ **61.** $S(x) = x^2 + (8/x), x > 0$

63. $V(x) = 4x^3 - 64x^2 + 240x, 0 < x < 6$

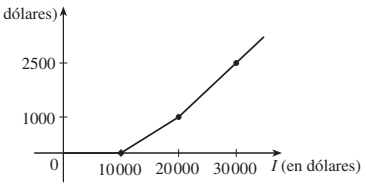
65. $F(x) = \begin{cases} 15(40 - x) & \text{si } 0 \leqslant x < 40 \\ 0 & \text{si } 40 \leqslant x \leqslant 65 \\ 15(x - 65) & \text{si } x > 65 \end{cases}$



67. a)



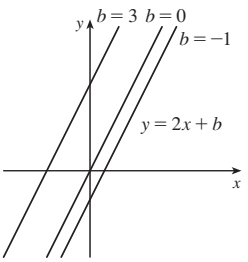
b) \$400, \$1900

c) 

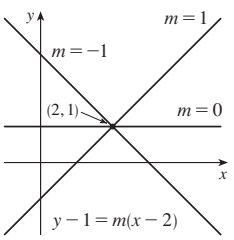
69. f es impar, g es par **71.** a) $(-5, 3)$ b) $(-5, -3)$
73. Impar **75.** Ninguno **77.** Par
79. Par; impar; ninguno (a menos que $f = 0$ o $g = 0$)

EJERCICIOS 1.2 ■ PÁGINA 33

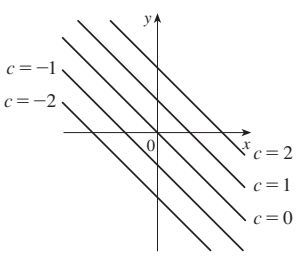
1. a) Logaritmo b) Raíz c) Racional
d) Polinomial, grado 2 e) Exponencial f) Trigonométrico
3. a) h b) f c) g
5. a) $y = 2x + b$,
donde b es la intersección con y.



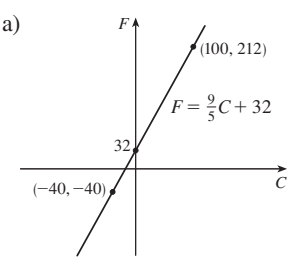
b) $y = mx + 1 - 2m$,
donde m es la pendiente.
c) $y = 2x - 3$



7. Sus gráficas tienen pendiente -1.

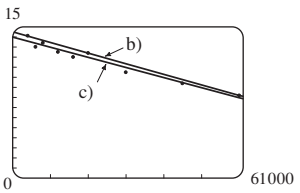


9. $f(x) = -3x(x + 1)(x - 2)$
11. a) 8.34, cambia en mg por cada año
b) 8.34 mg
13. a)



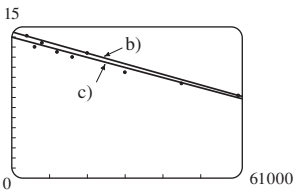
b) $\frac{9}{5}$, cambio en °F por cada 1°C de cambio; 32, temperatura Fahrenheit correspondiente a 0°C

15. a) $T = \frac{1}{6}N + \frac{307}{6}$ b) $\frac{1}{6}$, cambio en °F chirridos por minuto. c) 76°F
17. a) $P = 0.434d + 15$ b) 196 pies
19. a) Coseno b) Lineal
21. a)



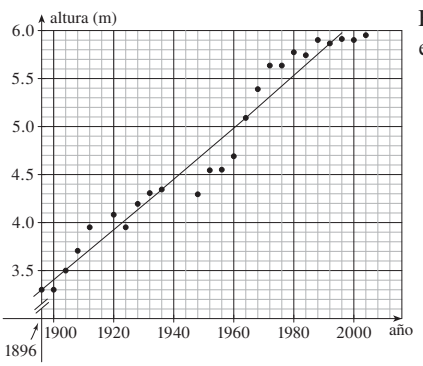
El modelo lineal es apropiado.

b) $y = -0.000105x + 14.521$
c) $y = -0.00009979x + 13.951$



d) Alrededor de 11.5 por 100 de población e) alrededor del 6%
f) No

23. a)

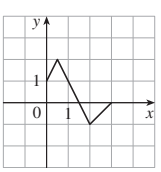


El modelo lineal es apropiado.

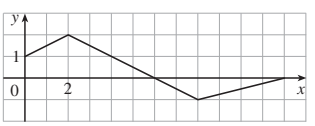
b) $y = 0.0265x - 46.8759$ c) 6.27 m; de altura d) No
25. Cuatro veces más brillante
27. a) $N = 3.1046A^{0.308}$ b) 18

EJERCICIOS 1.3 ■ PÁGINA 42

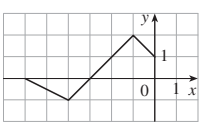
1. a) $y = f(x) + 3$ b) $y = f(x) - 3$ c) $y = f(x - 3)$
d) $y = f(x + 3)$ e) $y = -f(x)$ f) $y = f(-x)$
g) $y = 3f(x)$ h) $y = \frac{1}{3}f(x)$
3. a) 3 b) 1 c) 4 d) 5 e) 2
5. a)



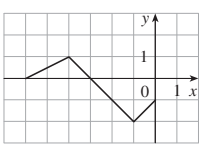
b)



c)

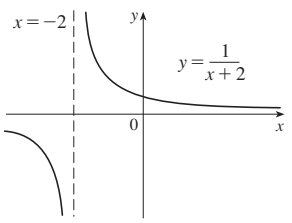


d)

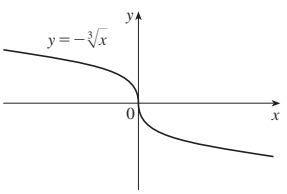


7. $y = -\sqrt{-x^2 - 5x - 4} - 1$

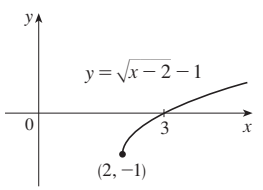
9.



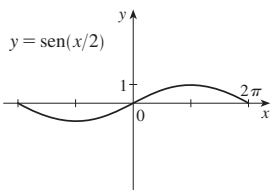
11.



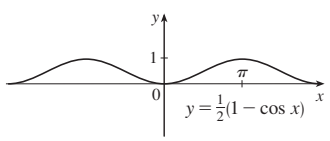
13.



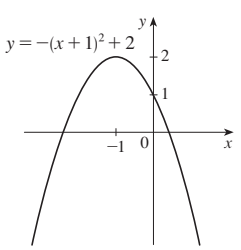
15.



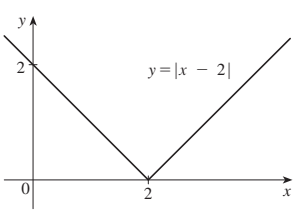
17.



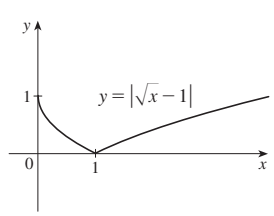
19.



21.



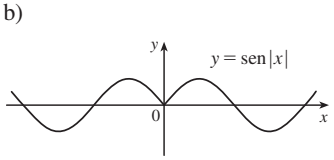
23.



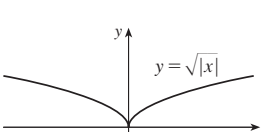
25. $L(t) = 12 + 2\,\text{sen}\left[\dfrac{2\pi}{365}(t - 80)\right]$

27. a) La parte de la gráfica $y = f(x)$ a la derecha del eje y se refleja respecto al eje y.

b)



c)



29. a) $(f + g)(x) = x^3 + 5x^2 - 1, (-\infty, \infty)$
b) $(f - g)(x) = x^3 - x^2 + 1, (-\infty, \infty)$
c) $(fg)(x) = 3x^5 + 6x^4 - x^3 - 2x^2, (-\infty, \infty)$
d) $(f/g)(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2}{3x^2 - 1}, \{x \mid x \neq \pm 1/\sqrt{3}\}$

31. a) $(f \circ g)(x) = 4x^2 + 4x, (-\infty, \infty)$
b) $(g \circ f)(x) = 2x^2 - 1, (-\infty, \infty)$
c) $(f \circ f)(x) = x^4 - 2x^2, (-\infty, \infty)$
d) $(g \circ g)(x) = 4x + 3, (-\infty, \infty)$

33. a) $(f \circ g)(x) = 1 - 3\cos x, (-\infty, \infty)$
b) $(g \circ f)(x) = \cos(1 - 3x), (-\infty, \infty)$
c) $(f \circ f)(x) = 9x - 2, (-\infty, \infty)$
d) $(g \circ g)(x) = \cos(\cos x), (-\infty, \infty)$

35. a) $(f \circ g)(x) = \dfrac{2x^2 + 6x + 5}{(x + 2)(x + 1)}, \{x \mid x \neq -2, -1\}$

b) $(g \circ f)(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{(x + 1)^2}, \{x \mid x \neq -1, 0\}$

c) $(f \circ f)(x) = \dfrac{x^4 + 3x^2 + 1}{x(x^2 + 1)}, \{x \mid x \neq 0\}$

d) $(g \circ g)(x) = \dfrac{2x + 3}{3x + 5}, \left\{x \mid x \neq -2, -\tfrac{5}{3}\right\}$

37. $(f \circ t \circ h)(x) = 3\,\text{sen}(x^2) - 2$

39. $(f \circ g \circ h)(x) = \sqrt{x^6 + 4x^3 + 1}$

41. $g(x) = 2x + x^2, f(x) = x^4$

43. $g(x) = \sqrt[3]{x}, f(x) = x/(1 + x)$

45. $g(t) = t^2, f(t) = \sec t \tan t$

47. $h(x) = \sqrt{x}, g(x) = x - 1, f(x) = \sqrt{x}$

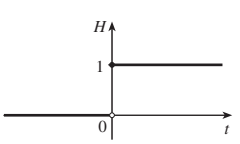
49. $h(x) = \sqrt{x}, g(x) = \sec x, f(x) = x^4$

51. a) 4 b) 3 c) 0 d) No existe; $f(6) = 6$ no está en el dominio de g. e) 4 f) -2

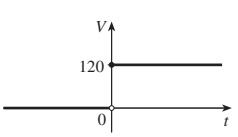
53. a) $r(t) = 60t$ b) $(A \circ r)(t) = 3600\pi t^2$; el área del círculo como una función del tiempo.

55. a) $s = \sqrt{d^2 + 36}$ b) $d = 30t$
c) $(f \circ g)(t) = \sqrt{900t^2 + 36}$; la distancia entre el faro y la nave es una función del tiempo.

57. a)

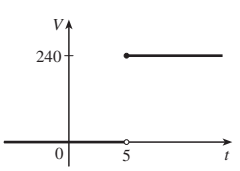


b)



$V(t) = 120H(t)$

c)



$V(t) = 240H(t - 5)$

59. Sí, $m_1 m_2$

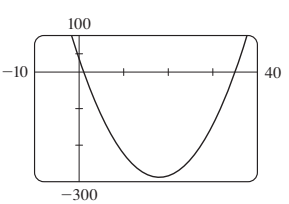
61. a) $f(x) = x^2 + 6$ b) $g(x) = x^2 + x - 1$

63. Sí

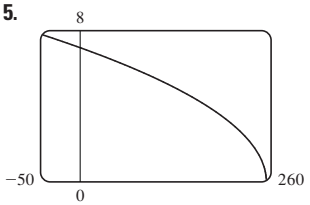
EJERCICIOS 1.4 ■ PÁGINA 50

1. c)

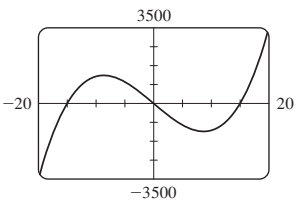
3.



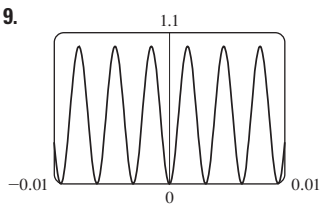
5.



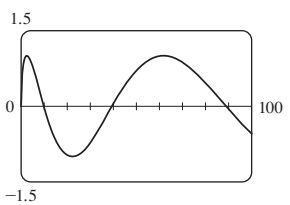
7.



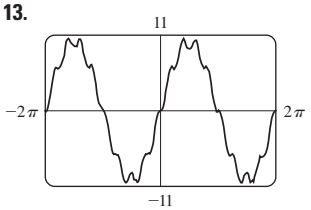
9.

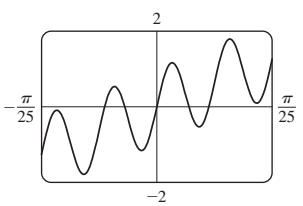


11.



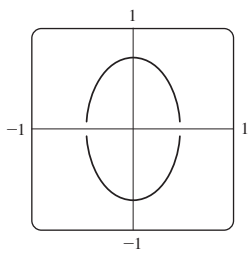
13.





15. b) Sí; dos son necesarias.

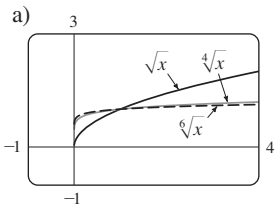
17.



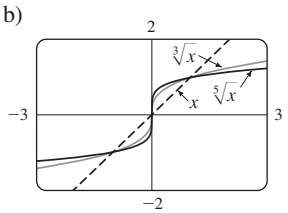
19. No **21.** −0.72, 1.22 **23.** 0.65 **25.** g

27. $-0.31 < x < 0.31$

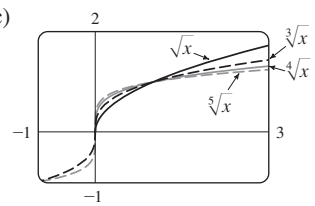
29. a)



b)

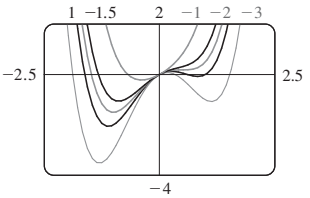


c)



d) Las gráficas de raíces pares son semejantes a $\sqrt{x}$, las gráficas de raíces impares son semejantes a $\sqrt[3]{x}$. Cuando n aumenta, la gráfica de $y = \sqrt[n]{x}$ se hace más inclinada cerca de 0 y más plana para $x > 1$.

31.



Si $c < -1.5$, la gráfica tiene tres crestas: dos puntos mínimos y uno máximo. Estas crestas se hacen más planas cuando c aumenta hasta que en $c = -1.5$ desaparecen dos de las crestas y sólo hay un punto mínimo. La cresta sola se mueve entonces a la derecha y se aproxima al origen cuando c aumenta.

33. La cresta se hace más grande y se mueve a la derecha.

35. Si $c < 0$, el rizo está a la derecha del origen; si $c > 0$, el lazo está a la izquierda. Cuanto más cerca está c de 0, más grande es el rizo.

EJERCICIOS 1.5 ■ PÁGINA 57

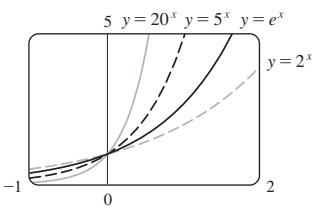
1. a) 4 b) $x^{-4/3}$

3. a) $16b^{12}$ b) $648y^7$

5. a) $f(x) = a^x$, $a > 0$ b) $\mathbb{R}$ c) $(0, \infty)$

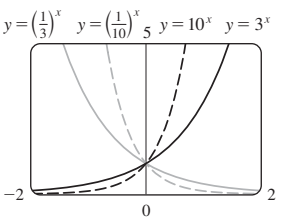
d) Véase figuras 4c), 4b) y 4a), respectivamente.

7.



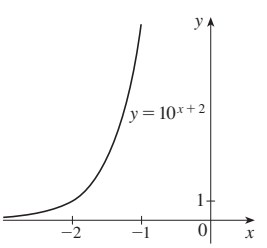
Todas se aproximan a 0 cuando $x \to -\infty$, todas pasan por (0, 1), y todas son crecientes. Cuanto mayor es la base, más rápido es la razón de aumento.

9.

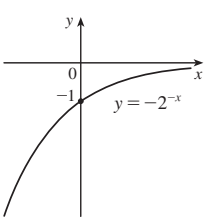


Las funciones con base mayor 1 son crecientes; aquellas con base menor a 1 son decrecientes. Estas últimas son reflexiones con respecto al eje y.

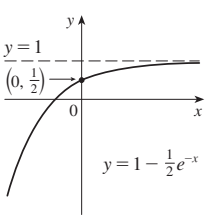
11.



13.



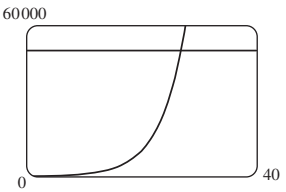
15.



17. a) $y = e^x - 2$ b) $y = e^{x-2}$ c) $y = -e^x$

d) $y = e^{-x}$ e) $y = -e^{-x}$

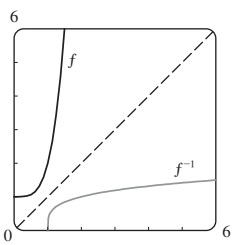
19. a) $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$ b) $(-\infty, \infty)$
21. $f(x) = 3 \cdot 2^x$ **27.** En $x \approx 35.8$
29. a) 3200 b) $100 \cdot 2^{t/3}$ c) 10,159
d) $t \approx 26.9$ h

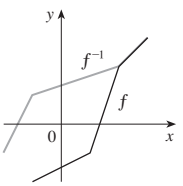


31. $P = 2614.086(1.01693)^t$; 5381 millones; 8466 millones

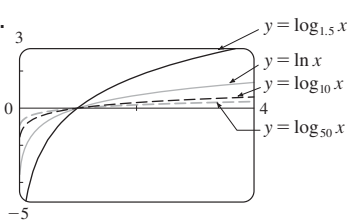
EJERCICIOS 1.6 ■ PÁGINA 69

1. a) Véase la definición 1.
b) Debe pasar la prueba de la recta horizontal.
3. No **5.** No **7.** Sí **9.** No **11.** Sí **13.** No
15. a) 6 b) 3 **17.** 0
19. $F = \frac{9}{5}C + 32$; la temperatura Fahrenheit como función de la temperatura Celsius; $[-273.15, \infty)$
21. $y = \frac{1}{3}(x - 1)^2 - \frac{2}{3}, x \geqslant 1$
23. $y = \frac{1}{2}(1 + \ln x)$ **25.** $y = e^x - 3$
27. $f^{-1}(x) = \sqrt[4]{x - 1}$ **29.**



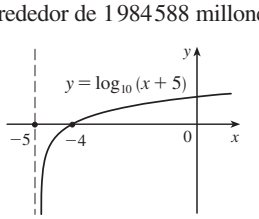


31. a) $f^{-1}(x) = \sqrt{1 - x^2}, 0 \leqslant x \leqslant 1; f^{-1}$ y f son la misma función. b) Un cuarto de circunferencia en el primer cuadrante.
33. a) Está definida como la inversa de la función exponencial con base a, es decir, $\log_a x = y \iff a^y = x$.
b) $(0, \infty)$ c) $\mathbb{R}$ d) Véase la figura 11.
35. a) 3 b) -3 **37.** a) 3 b) -2 **39.** ln 1215
41. $\ln \dfrac{\sqrt{x}}{x + 1}$
43.

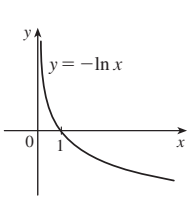


Todas las gráficas tienden $-\infty$ cuando $x \to 0^+$, todas pasan por $(1, 0)$, y todas son crecientes. Cuanto mayor es la base, más lenta es la razón de crecimiento.

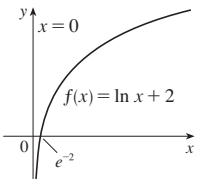
45. Alrededor de 1 984 588 millones
47. a)



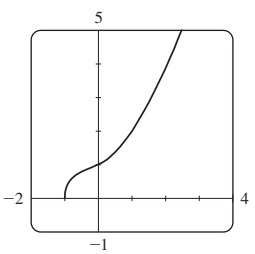
b)



49. a) $(0, \infty)$; $(-\infty, \infty)$ b) e^{-2}
c)

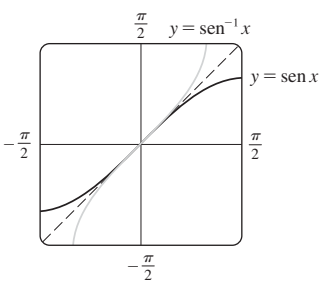


51. a) $\frac{1}{4}(7 - \ln 6)$ b) $\frac{1}{3}(e^2 + 10)$
53. a) $5 + \log_2 3$ o $5 + (\ln 3)/\ln 2$ b) $\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + 4e}\right)$
55. a) $0 < x < 1$ b) $x > \ln 5$
57. a) $(\ln 3, \infty)$ b) $f^{-1}(x) = \ln(e^x + 3)$; $\mathbb{R}$
59.



La gráfica pasa la prueba de la recta horizontal.

$f^{-1}(x) = -\frac{1}{6}\sqrt[3]{4}\left(\sqrt[3]{D - 27x^2 + 20} - \sqrt[3]{D + 27x^2 - 20} + \sqrt[3]{2}\right)$, donde $D = 3\sqrt{3}\sqrt{27x^4 - 40x^2 + 16}$; dos de las expresiones son complejas.
61. a) $f^{-1}(n) = (3/\ln 2)\ln(n/100)$; el tiempo transcurrido cuando hay n bacterias b) Después de unas 26.9 horas.
63. a) $\pi/3$ b) π **65.** a) $\pi/4$ b) $\pi/4$
67. a) 10 b) $\pi/3$
71. $x/\sqrt{1 + x^2}$
73.



La segunda gráfica es la reflexión de la primera gráfica, respecto a la recta $y = x$.

75. a) $[-\frac{2}{3}, 0]$ b) $[-\pi/2, \pi/2]$
77. a) $g^{-1}(x) = f^{-1}(x) - c$ b) $h^{-1}(x) = (1/c)f^{-1}(x)$

REPASO DEL CAPÍTULO 1 ■ PÁGINA 72

Examen rápido Verdadero-Falso

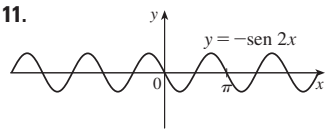
1. Falso **3.** Falso **5.** Verdadero **7.** Falso
9. Verdadero **11.** Falso **13.** Falso

Ejercicios

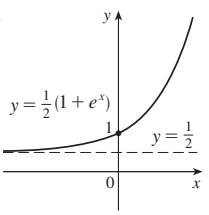
1. a) 2.7 b) 2.3, 5.6 c) $[-6, 6]$ d) $[-4, 4]$
e) $[-4, 4]$ f) No; no pasa la prueba de la recta horizontal
g) Impar; su gráfica es simétrica respecto al origen.
3. $2a + h - 2$ **5.** $(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, \infty)$, $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
7. $(-6, \infty)$, $\mathbb{R}$

9. a) Traslade la gráfica 8 unidades hacia arriba.
b) Traslade la gráfica 8 unidades a la izquierda.
c) Estire la gráfica verticalmente en un factor de 2, luego trasládela 1 unidad hacia arriba.
d) Traslade la gráfica 2 unidades a la derecha y 2 unidades hacia abajo.
e) Refleje la gráfica alrededor del eje x.
f) Refleje la gráfica alrededor de la recta $y = x$ (suponiendo que f es uno a uno).

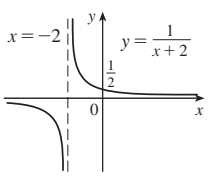
11.



13.

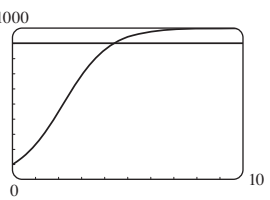


15.



17. a) Ninguna b) Impar c) Par d) Ninguna
19. a) $(f \circ g)(x) = \ln(x^2 - 9)$, $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$
b) $(g \circ f)(x) = (\ln x)^2 - 9$, $(0, \infty)$
c) $(f \circ f)(x) = \ln \ln x$, $(1, \infty)$
d) $(g \circ g)(x) = (x^2 - 9)^2 - 9$, $(-\infty, \infty)$
21. $y = 0.2493x - 423.4818$; alrededor de 77.6 años
23. 1 **25.** a) 9 b) 2 c) $1/\sqrt{3}$ d) $\frac{3}{5}$

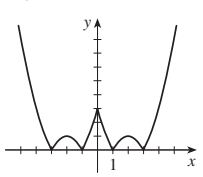
27. a) ≈ 4.4 años



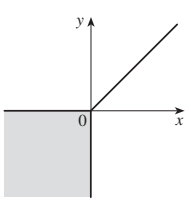
b) $t = -\ln\left(\dfrac{1000 - P}{9P}\right)$; el tiempo requerido para la población alcance un número P.
c) ln 81 ≈ 4.4 años

PRINCIPIOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ■ PÁGINA 80

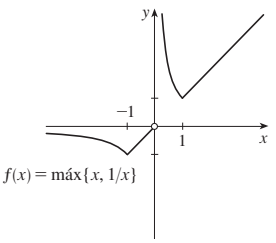
1. $a = 4\sqrt{h^2 - 16}/h$, donde a es la longitud de la altura y h es la longitud de la hipotenusa
3. $-\frac{7}{3}$, 9
5.



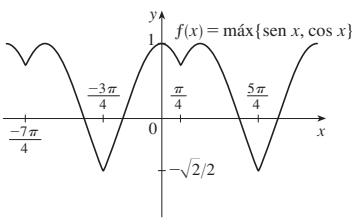
7.



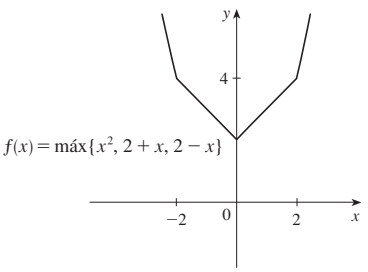
9. a)



b)



c)



11. 5 **13.** $x \in [-1, 1 - \sqrt{3}) \cup (1 + \sqrt{3}, 3]$
15. 40 mi/h **19.** $f_n(x) = x^{2^{n+1}}$

CAPÍTULO 2

EJERCICIOS 2.1 ■ PÁGINA 86

1. a) −44.4, −38.8, −27.8, −22.2, $-16.\overline{6}$
b) −33.3 c) $-33\frac{1}{3}$
3. a)i) 2 ii) 1.111111 iii) 1.010101 iv) 1.001001
v) 0.666667 vi) 0.909091 vii) 0.990099
viii) 0.999001 b) 1 c) $y = x - 3$
5. a) i) −32 pies/s ii) −25.6 pies/s iii) −24.8 pies/s
iv) −24.16 pies/s b) −24 pies/s
7. a) i) 4.65 m/s ii) 5.6 m/s iii) 7.55 m/s
iv) 7 m/s b) 6.3 m/s
9. a) 0, 1.7321, −1.0847, −2.7433, 4.3301, −2.8173, 0, −2.1651, −2.6061, −5, 3.4202; no c) −31.4

EJERCICIOS 2.2 ■ PÁGINA 96

1. Sí
3. a) $\lim_{x \to -3} f(x) = \infty$ significa que los valores de $f(x)$ se pueden hacer arbitrariamente grandes (tanto como se desee) al tomar x suficientemente cerca de −3 (pero no igual a −3).

b) $\lim_{x\to 4^+} f(x) = -\infty$ significa que los valores de $f(x)$ se pueden hacer negativos arbitrariamente grandes al tomar x suficientemente cerca de 4 hasta valores mayores a 4.

5. a) 2 b) 1 c) 4 d) No existe e) 3

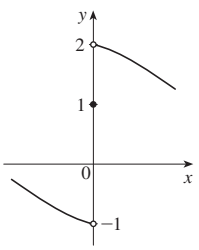
7. a) -1 b) -2 c) No existe d) 2 e) 0 f) No existe g) 1 h) 3

9. a) $-\infty$ b) ∞ c) ∞ d) $-\infty$ e) ∞ f) $x = -7, x = -3, x = 0, x = 6$

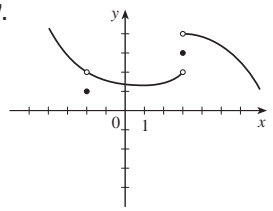
11. $\lim_{x\to a} f(x)$ existe para toda a excepto para $a = -1$.

13. a) 1 b) 0 c) No existe.

15.



17.

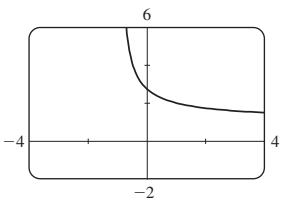


9. $\frac{2}{3}$ **21.** 5 **23.** $\frac{1}{4}$ **25.** $\frac{3}{5}$ **27.** a) -1.5

29. $-\infty$ **31.** ∞ **33.** $-\infty$ **35.** $-\infty$ **37.** ∞

39. $-\infty$; ∞

41. a) 2.71828 b)



43. a) 0.998000, 0.638259, 0.358484, 0.158680, 0.038851, 0.008928, 0.001465; 0

b) 0.000572, -0.000614, -0.000907, -0.000978, -0.000993, -0.001000; -0.001

45. No importa las veces que haga acercamientos hacia el origen, parece que la gráfica está formada por rectas casi verticales. Esto indica oscilaciones cada vez más frecuentes cuando $x \to 0$.

47. $x \approx \pm 0.90, \pm 2.24$; $x = \pm \text{sen}^{-1}(\pi/4), \pm(\pi - \text{sen}^{-1}(\pi/4))$

EJERCICIOS 2.3 ■ PÁGINA 106

1. a) -6 b) -8 c) 2 d) -6 e) No existe f) 0

3. 105 **5.** $\frac{7}{8}$ **7.** 390 **9.** $\frac{3}{2}$ **11.** 4

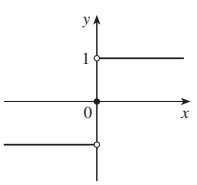
13. No existe **15.** $\frac{6}{5}$ **17.** -10 **19.** $\frac{1}{12}$

21. $\frac{1}{6}$ **23.** $-\frac{1}{16}$ **25.** 1 **27.** $\frac{1}{128}$ **29.** $-\frac{1}{2}$

31. $3x^2$ **33.** a), b) $\frac{2}{3}$ **37.** 7 **41.** 6 **43.** -4

45. No existe

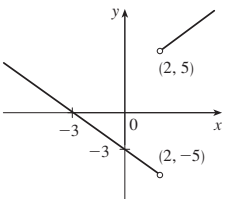
47. a)



b) i) 1
ii) -1
iii) No existe
iv) 1

49. a) i) 5 ii) -5 b) No existe

c)



51. a) i) -2 ii) No existe iii) -3

b) i) $n - 1$ ii) n c) a no es un entero

57. 8 **63.** 15; -1

EJERCICIOS 2.4 ■ PÁGINA 116

1. 0.1 (o cualquier número positivo más pequeño)

3. 1.44 (o cualquier número positivo más pequeño)

5. 0.0906 (o cualquier número positivo más pequeño)

7. 0.011 (o cualquier número positivo más pequeño)

9. a) 0.031 b) 0.010

11. a) $\sqrt{1000/\pi}$ cm b) Aproximadamente 0.0445

c) Radio, área $\sqrt{1000/\pi}$; 1000; 5; ≈ 0.0445

13. a) 0.025 b) 0.0025

35. a) 0.093 b) $\delta = (B^{2/3} - 12)/(6B^{1/3}) - 1$, donde $B = 216 + 108\varepsilon + 12\sqrt{336 + 324\varepsilon + 81\varepsilon^2}$

41. Menos de 0.1.

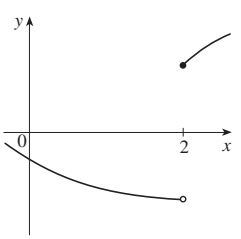
EJERCICIOS 2.5 ■ PÁGINA 127

1. $\lim_{x\to 4} f(x) = f(4)$

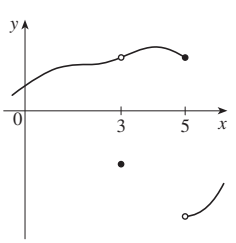
3. a) $f(-4)$ no está definida y $\lim_{x\to a} f(x)$ [para $a = -2$, 2, y 4] no existe

b) -4, ninguno; -2, izquierda; 2, derecha; 4, derecha

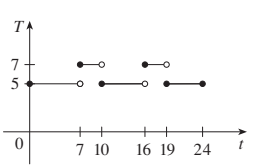
5.



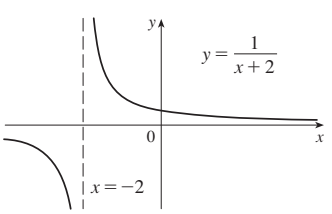
7.



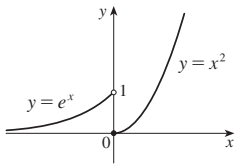
9. a)

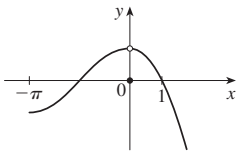


11. 4 **17.** $f(-2)$ está indefinida.

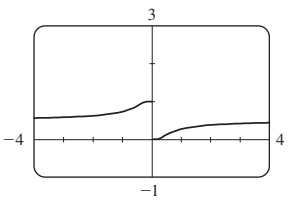


19. $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe. **21.** $\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$

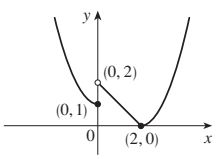


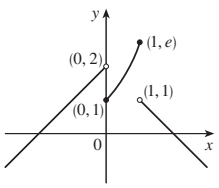


23. Define $f(2) = 3$. **25.** $(-\infty, \infty)$
27. $(-\infty, \sqrt[3]{2}) \cup (\sqrt[3]{2}, \infty)$ **29.** $[-1, 0]$
31. $(-\infty, -1] \cup (0, \infty)$
33. $x = 0$



35. $\frac{7}{3}$ **37.** 1
41. 0, izquierda **43.** 0, derecha; 1, izquierda

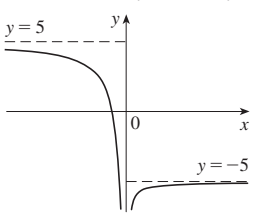




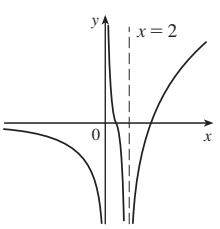
45. $\frac{2}{3}$ **47.** a) $g(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ b) $g(x) = x^2 + x$
55. b) (0.86, 0.87) **57.** b) 70.347 **63.** Ninguna
65. Sí

EJERCICIOS 2.6 ■ PÁGINA 140

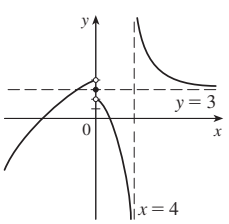
1. a) Cuando x es muy grande, $f(x)$ tiende a 5.
b) Cuando x es muy negativa, $f(x)$ tiende a 3.
3. a) -2 b) 2 c) ∞ d) $-\infty$
e) $x = 1, x = 3, y = -2, y = 2$
5.



7.

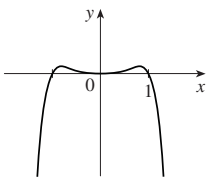


9.

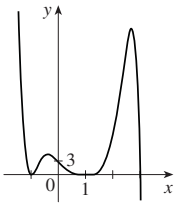


11. 0 **13.** $\frac{3}{2}$ **15.** $\frac{3}{2}$ **17.** 0 **19.** -1 **21.** 4
23. 3 **25.** $\frac{1}{6}$ **27.** $\frac{1}{2}(a - b)$ **29.** ∞
31. $-\infty$ **33.** $\pi/2$ **35.** $-\frac{1}{2}$ **37.** 0

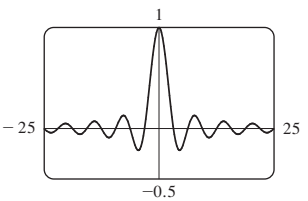
39. a), b) $-\frac{1}{2}$ **41.** $y = 2; x = 2$
43. $y = 2; x = -2, x = 1$ **45.** $x = 5$ **47.** $y = 3$
49. $f(x) = \dfrac{2 - x}{x^2(x - 3)}$ **51.** a) $\frac{5}{4}$ b) 5
53. $-\infty, -\infty$



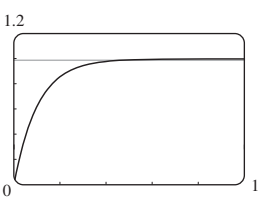
55. $-\infty, \infty$



57. a) 0 b) Un infinito de veces



59. a) 0 b) $\pm\infty$ **61.** 5
63. a) v^* b)

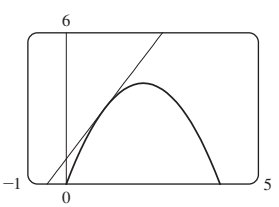


≈ 0.47 s

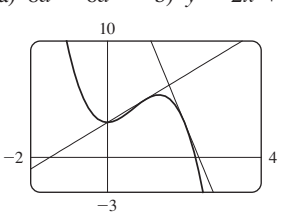
65. $N \geqslant 15$ **67.** $N \leqslant -6, N \leqslant -22$
69. a) $x > 100$

EJERCICIOS 2.7 ■ PÁGINA 150

1. a) $\dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3}$ b) $\lim_{x\to 3} \dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3}$
3. a) 2 b) $y = 2x + 1$ c)

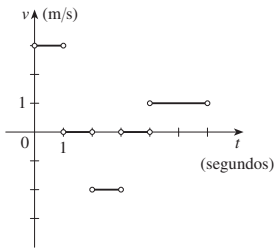


5. $y = -8x + 12$ **7.** $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
9. a) $8a - 6a^2$ b) $y = 2x + 3, y = -8x + 19$
c)



11. a) derecha: $0 < t < 1$ y $4 < t < 6$; izquierda: $2 < t < 3$; de pie; $1 < t < 2$ y $3 < t < 4$

b)



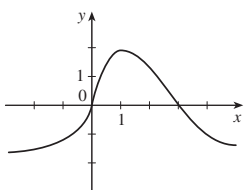
13. -24 pies/s

15. $-2/a^3$ m/s; -2 m/s; $-\frac{1}{4}$ m/s; $-\frac{2}{27}$ m/s

17. $g'(0)$, 0, $g'(4)$, $g'(2)$, $g'(-2)$

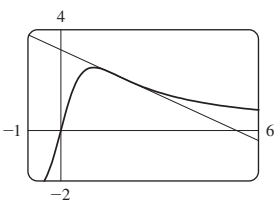
19. $f(2) = 3; f'(2) = 4$

21.



23. $y = 3x - 1$

25. a) $-\frac{3}{5}$; $y = -\frac{3}{5}x + \frac{16}{5}$ b)



27. $6a - 4$ **29.** $\dfrac{5}{(a+3)^2}$ **31.** $-\dfrac{1}{\sqrt{1-2a}}$

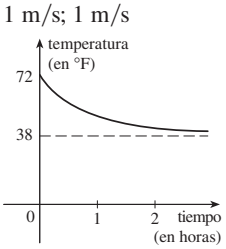
33. $f(x) = x^{10}$, $a = 1$ o $f(x) = (1+x)^{10}$, $a = 0$

35. $f(x) = 2^x$, $a = 5$

37. $f(x) = \cos x$, $a = \pi$ o $f(x) = \cos(\pi + x)$, $a = 0$

39. 1 m/s; 1 m/s

41.



mayor en magnitud

43. a) i) 23 millones/año ii) 20.5 millones/año
iii) 16 millones/año
b) 18.25 millones/año c) 17 millones/año

45. a) i) \$20.25/unidad ii) \$20.05/unidad b) \$20/unidad

47. a) La tasa a la que está cambiando el costo por onza de oro producido; dólares por onza
b) cuando se producen 800 onzas de oro, el costo de producción es de \$17/oz
c) disminución a corto plazo; aumentar a largo plazo

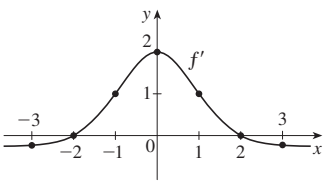
49. La razón a la que está cambiando la temperatura a las 8:00 a.m.; 3.75 °F/h

51. a) la razón a la que la solubilidad del oxígeno cambia con respecto a la temperatura del agua; (mg/L)/°C
b) $S'(16) \approx -0.25$; a medida que la temperatura aumenta pasado 16°C, la solubilidad del oxígeno está disminuyendo a razón de 0.25(mg/L)/°C.

53. No existe

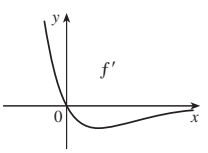
EJERCICIOS 2.8 ■ PÁGINA 162

1. a) -0.2 b) 0 c) 1 d) 2
e) 1 f) 0 g) -0.2

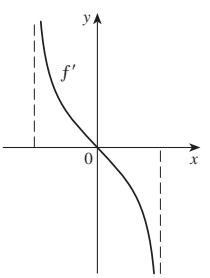


3. a) II b) IV c) I d) III

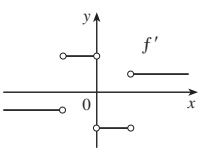
5.



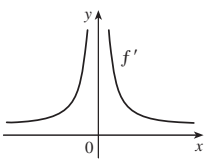
7.



9.

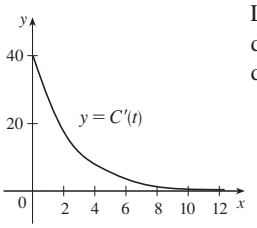


11.



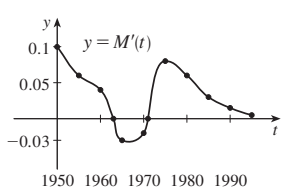
13. a) La razón instantánea de cambio de porcentaje de capacidad total respecto al tiempo transcurrido en horas.

b)

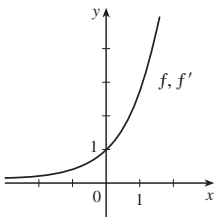


La razón de cambio de porcentaje de plena capacidad está disminuyendo y acercándose a 0.

15.



1963 a 1971

17. 

$f'(x) = e^x$

19. a) 0, 1, 2, 4 b) $-1, -2, -4$ c) $f'(x) = 2x$

21. $f'(x) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ **23.** $f'(t) = 5 - 18t$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$

25. $f'(x) = 2x - 6x^2$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$

27. $g'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{9-x}}$, $(-\infty, 9]$, $(-\infty, 9)$

29. $G'(t) = \dfrac{-7}{(3+t)^2}$, $(-\infty, -3) \cup (-3, \infty)$, $(-\infty, -3) \cup (-3, \infty)$

31. $f'(x) = 4x^3$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ **33.** a) $f'(x) = 4x^3 + 2$

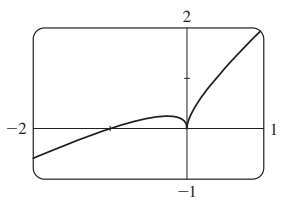
35. a) La razón a la que está cambiando la tasa de desempleo, en porcentaje de desempleados por año

b)

t	$U'(t)$	t	$U'(t)$
1999	−0.2	2004	−0.45
2000	0.25	2005	−0.45
2001	0.9	2006	−0.25
2002	0.65	2007	0.6
2003	−0.15	2008	1.2

37. -4 (esquina); 0 (discontinuidad)

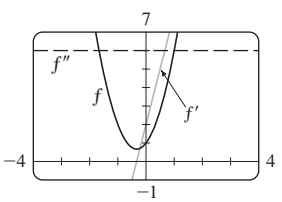
39. -1 (tangente vertical); 4 (esquina)

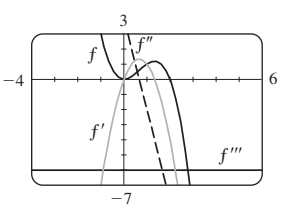
41. 

Derivable en -1; no derivable en 0

43. $a = f$, $b = f'$, $c = f''$

45. a = aceleración; b = velocidad; c = posición

47. $6x + 2$; 6 

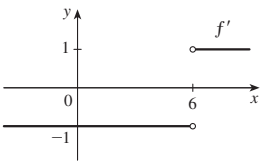
49. 

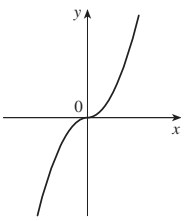
$f'(x) = 4x - 3x^2$,
$f''(x) = 4 - 6x$,
$f'''(x) = -6$,
$f^{(4)}(x) = 0$

51. a) $\frac{1}{3}a^{-2/3}$

53. $f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 6 \\ 1 & \text{si } x > 6 \end{cases}$

o $f'(x) = \dfrac{x-6}{|x-6|}$



55. a) 

b) toda x;
c) $f'(x) = 2|x|$

59. 63°

REPASO DEL CAPÍTULO 2 ■ PÁGINA 166

Examen rápido Verdadero-Falso

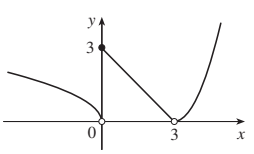
1. Falso **3.** Verdadero **5.** Falso **7.** Verdadero **9.** Verdadero
11. Verdadero **13.** Falso **15.** Verdadero **17.** Verdadero
19. Falso **21.** Falso **23.** Verdadero

Ejercicios

1. a) i) 3 ii) 0 iii) No existe iv) 2
v) ∞ vi) $-\infty$ vii) 4 viii) -1
b) $y = 4$, $y = -1$ c) $x = 0$, $x = 2$ d) $-3, 0, 2, 4$

3. 1 **5.** $\frac{3}{2}$ **7.** 3 **9.** ∞ **11.** $\frac{4}{7}$ **13.** $\frac{1}{2}$

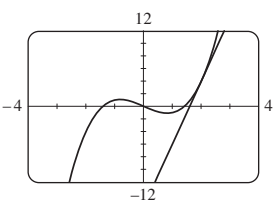
15. $-\infty$ **17.** 2 **19.** $\pi/2$ **21.** $x = 0$, $y = 0$ **23.** 1

29. a) i) 3 ii) 0 iii) No existe iv) 0 v) 0 vi) 0
b) En 0 y 3 c) 

31. $\mathbb{R}$

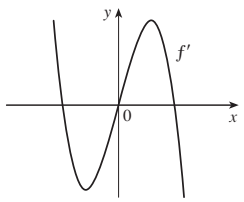
35. a) -8 b) $y = -8x + 17$

37. a) i) 3 m/s ii) 2.75 m/s iii) 2.625 m/s
iv) 2.525 m/s b) 2.5 m/s

39. a) 10 b) $y = 10x - 16$
c) 

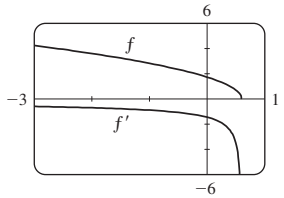
41. a) la tasa a la que el costo cambia respecto a la tasa de interés; dólares/(porcentaje por año)
b) a medida que aumenta la tasa de interés pasado 10%, el costo aumenta a una tasa de \$1200/(porcentaje por año)
c) Siempre positivo.

43.



45. a) $f'(x) = -\frac{5}{2}(3 - 5x)^{-1/2}$ b) $\left(-\infty, \frac{3}{5}\right]$, $\left(-\infty, \frac{3}{5}\right)$

c)



47. −4(discontinuidad), −1 (esquina), 2 (discontinuidad). 5 (tangente vertical).

49. la tasa a la que está cambiando el valor total de la de E.U. moneda en circulación en miles de millones de dólares por año; \$22.2 miles de millones/año

51. 0

PROBLEMAS ADICIONALES ■ PÁGINA 170

1. $\frac{2}{3}$ **3.** -4 **5.** a) no existe b) 1

7. $a = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$ **9.** $\frac{3}{4}$ **11.** b) Sí c) Sí, no

13. a) 0 b) 1 c) $f'(x) = x^2 + 1$

CAPÍTULO 3

EJERCICIOS 3.1 ■ PÁGINA 181

1. a) Ver definición del número e (pág. 180)

b) 0.99, 1.03; $2.7 < e < 2.8$

3. $f'(x) = 0$ **5.** $f'(t) = -\frac{2}{3}$ **7.** $f'(x) = 3x^2 - 4$

9. $g'(x) = 2x - 6x^2$ **11.** $g'(t) = -\frac{3}{2}t^{-7/4}$ **13.** $A'(s) = 60/s^6$

15. $R'(a) = 18a + 6$ **17.** $S'(p) = \frac{1}{2}p^{-1/2} - 1$

19. $y' = 3e^x - \frac{4}{3}x^{-4/3}$ **21.** $h'(u) = 3Au^2 + 2Bu + C$

23. $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{3}{2x\sqrt{x}}$ **25.** $j'(x) = 2.4x^{1.4}$

27. $H'(x) = 3x^2 + 3 - 3x^{-2} - 3x^{-4}$

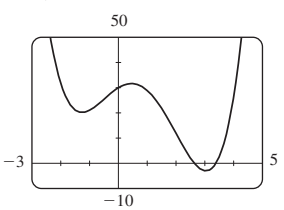
29. $u' = \frac{1}{5}t^{-4/5} + 10t^{3/2}$

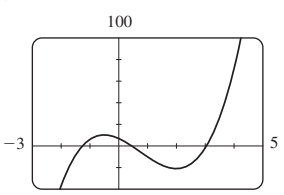
31. $z' = -10A/y^{11} + Be^y$ **33.** $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$

35. Tangente: $y = 2x + 2$; normal: $y = -\frac{1}{2}x + 2$

37. $y = 3x - 1$ **39.** $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x$

41. a) c) $4x^3 - 9x^2 - 12x + 7$





43. $f'(x) = 100x^9 + 25x^4 - 1$; $f''(x) = 900x^8 + 100x^3$

45. $f'(x) = 2 - \frac{15}{4}x^{-1/4}$, $f''(x) = \frac{15}{16}x^{-5/4}$

47. a) $v(t) = 3t^2 - 3$, $a(t) = 6t$ b) 12 m/s^2

c) $a(1) = 6$ m/s^2

49. a) $V = 5.3/P$

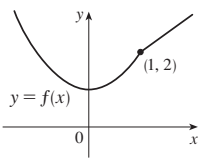
b) −0.00212; razón de cambio instantánea del volumen con respecto a la presión a 25 °C; m^3/kPa

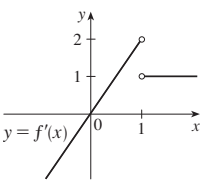
51. $(-2, 21)$, $(1, -6)$

55. $y = 12x - 15$, $y = 12x + 17$ **57.** $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$

59. $(\pm 2, 4)$ **63.** $P(x) = x^2 - x + 3$ **65.** $y = \frac{3}{16}x^3 - \frac{9}{4}x + 3$

67. No

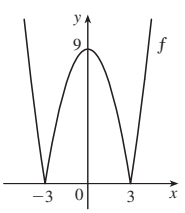


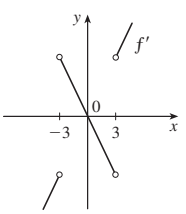


69. a) No derivable en 3 0 −3

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } |x| > 3 \\ -2x & \text{si } |x| < 3 \end{cases}$$

b)





71. $y = 2x^2 - x$ **73.** $a = -\frac{1}{2}$, $b = 2$ **75.** $m = 4$, $b = -4$

77. 1000 **79.** 3; 1

EJERCICIOS 3.2 ■ PÁGINA 189

1. $1 - 2x + 6x^2 - 8x^3$ **3.** $f'(x) = e^x(x^3 + 3x^2 + 2x + 2)$

5. $y' = \dfrac{1 - x}{e^x}$ **7.** $g'(x) = \dfrac{10}{(3 - 4x)^2}$ **9.** $H'(u) = 2u - 1$

11. $F'(y) = 5 + \dfrac{14}{y^2} + \dfrac{9}{y^4}$

13. $y' = \dfrac{x^2(3 - x^2)}{(1 - x^2)^2}$ **15.** $y' = \dfrac{2t(-t^4 - 4t^2 + 7)}{(t^4 - 3t^2 + 1)^2}$

17. $y' = e^p\left(1 + \frac{3}{2}\sqrt{p} + p + p\sqrt{p}\right)$ **19.** $y' = 2v - 1/\sqrt{v}$

21. $f'(t) = \dfrac{4 + t^{1/2}}{(2 + \sqrt{t})^2}$ **23.** $f'(x) = \dfrac{-ACe^x}{(B + Ce^x)^2}$

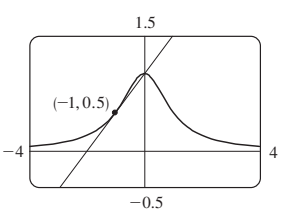
25. $f'(x) = \dfrac{2cx}{(x^2 + c)^2}$

27. $(x^4 + 4x^3)e^x$; $(x^4 + 8x^3 + 12x^2)e^x$

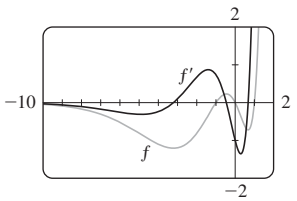
29. $\dfrac{2x^2 + 2x}{(1 + 2x)^2}$, $\dfrac{2}{(1 + 2x)^3}$ **31.** $y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$

33. $y = 2x$; $y = -\frac{1}{2}x$

35. a) $y = \frac{1}{2}x + 1$ b)

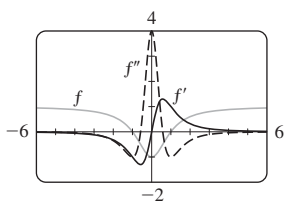


37. a) $e^x(x^3 + 3x^2 - x - 1)$ b)



39. a) $f'(x) = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$; $f''(x) = \dfrac{4(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}$

b)



41. $\frac{1}{4}$ **43.** a) -16 b) $-\frac{20}{9}$ c) 20 **45.** 7

47. $y = -2x + 18$

49. a) 0 b) $-\frac{2}{3}$

51. a) $y' = xg'(x) + g(x)$

b) $y' = \dfrac{g(x) - xg'(x)}{[g(x)]^2}$ c) $y' = \dfrac{xg'(x) - g(x)}{x^2}$

53. Dos, $\left(-2 \pm \sqrt{3}, \frac{1}{2}(1 \mp \sqrt{3})\right)$ **55.** 1

57. \$1 627 billones/año **59.** c) $3e^{3x}$

61. $f'(x) = (x^2 + 2x)e^x$, $f''(x) = (x^2 + 4x + 2)e^x$, $f'''(x) = (x^2 + 6x + 6)e^x$, $f^{(4)}(x) = (x^2 + 8x + 12)e^x$, $f^{(5)}(x) = (x^2 + 10x + 20)e^x$; $f^{(n)}(x) = [x^2 + 2nx + n(n-1)]e^x$

EJERCICIOS 3.3 ■ PÁGINA 197

1. $f'(x) = 6x + 2\operatorname{sen} x$ **3.** $f'(x) = \cos x - \frac{1}{2}\csc^2 x$

5. $y' = \sec\theta\,(\sec^2\theta + \tan^2\theta)$

7. $y' = -c\operatorname{sen} t + t(t\cos t + 2\operatorname{sen} t)$

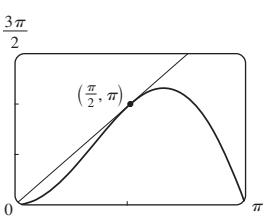
9. $y' = \dfrac{2 - \tan x + x\sec^2 x}{(2 - \tan x)^2}$ **11.** $f'(\theta) = \dfrac{\sec\theta\tan\theta}{(1+\sec\theta)^2}$

13. $y' = \dfrac{(t^2+t)\cos t + \operatorname{sen} t}{(1+t)^2}$

15. $f'(x) = e^x \csc x(-x\cot x + x + 1)$

21. $y = 2\sqrt{3}x - \frac{2}{3}\sqrt{3}\pi + 2$ **23.** $y = x - \pi - 1$

25. a) $y = 2x$ b)



27. a) $\sec x\tan x - 1$

29. $\theta\cos\theta + \operatorname{sen}\theta$; $2\cos\theta - \theta\operatorname{sen}\theta$

31. a) $f'(x) = (1 + \tan x)/\sec x$ b) $f'(x) = \cos x + \operatorname{sen} x$

33. $(2n+1)\pi \pm \frac{1}{3}\pi$, n un entero

35. a) $v(t) = 8\cos t$, $a(t) = -8\operatorname{sen} t$

b) $4\sqrt{3}$, -4, $-4\sqrt{3}$; a la izquierda

37. 5 pies/rad **39.** 3 **41.** 3 **43.** $-\frac{3}{4}$

45. $\frac{1}{2}$ **47.** $-\sqrt{2}$ **49.** $-\cos x$ **51.** $A = -\frac{3}{10}$, $B = -\frac{1}{10}$

53. a) $\sec^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ b) $\sec x\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$

c) $\cos x - \operatorname{sen} x = \dfrac{\cot x - 1}{\csc x}$

55. 1

EJERCICIOS 3.4 ■ PÁGINA 205

1. $\dfrac{4}{3\sqrt[3]{(1+4x)^2}}$ **3.** $\pi\sec^2\pi x$ **5.** $\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

7. $F'(x) = 10x(x^4 + 3x^2 - 2)^4(2x^2 + 3)$

9. $F'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$ **11.** $f'(z) = -\dfrac{2z}{(z^2+1)^2}$

13. $y' = -3x^2\operatorname{sen}(a^3 + x^3)$ **15.** $y' = e^{-kx}(-kx + 1)$

17. $f'(x) = (2x-3)^3(x^2+x+1)^4(28x^2 - 12x - 7)$

19. $h'(t) = \frac{2}{3}(t+1)^{-1/3}(2t^2-1)^2(20t^2 + 18t - 1)$

21. $y' = \dfrac{-12x(x^2+1)^2}{(x^2-1)^4}$ **23.** $y' = \dfrac{3e^{3x}}{\sqrt{1+2e^{3x}}}$

25. $y' = 5^{-1/x}(\ln 5)/x^2$ **27.** $y' = (r^2+1)^{-3/2}$

29. $F'(t) = e^{t\operatorname{sen} 2t}(2t\cos 2t + \operatorname{sen} 2t)$

31. $y' = 2\cos(\tan 2x)\sec^2(2x)$ **33.** $y' = 2^{\operatorname{sen}\pi x}(\pi\ln 2)\cos\pi x$

35. $y' = \dfrac{4e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}\operatorname{sen}\dfrac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}}$

37. $y' = -2\cos\theta\cot(\operatorname{sen}\theta)\csc^2(\operatorname{sen}\theta)$

39. $f'(t) = \sec^2(e^t)e^t + e^{\tan t}\sec^2 t$

41. $f'(t) = 4\operatorname{sen}(e^{\operatorname{sen}^2 t})\cos(e^{\operatorname{sen}^2 t})\,e^{\operatorname{sen}^2 t}\operatorname{sen} t\cos t$

43. $g'(x) = 2r^2p(\ln a)(2ra^{rx} + n)^{p-1}a^{rx}$

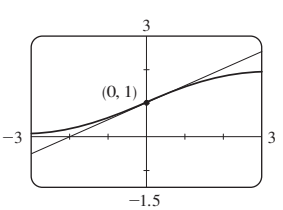
45. $y' = \dfrac{-\pi\cos(\tan\pi x)\sec^2(\pi x)\operatorname{sen}\sqrt{\operatorname{sen}(\tan\pi x)}}{2\sqrt{\operatorname{sen}(\tan\pi x)}}$

47. $y' = -2x\operatorname{sen}(x^2)$; $y'' = -4x^2\cos(x^2) - 2\operatorname{sen}(x^2)$

49. $e^{\alpha x}(\beta\cos\beta x + \alpha\operatorname{sen}\beta x)$; $e^{\alpha x}[(\alpha^2 - \beta^2)\operatorname{sen}\beta x + 2\alpha\beta\cos\beta x]$

51. $y = 20x + 1$ **53.** $y = -x + \pi$

55. a) $y = \frac{1}{2}x + 1$ b)



57. a) $f'(x) = \dfrac{2 - 2x^2}{\sqrt{2 - x^2}}$

59. $((\pi/2) + 2n\pi, 3)$, $((3\pi/2) + 2n\pi, -1)$, n un entero

61. 24 **63.** a) 30 b) 36

65. a) $\frac{3}{4}$ b) No existe c) -2

67. $-\frac{1}{6}\sqrt{2}$

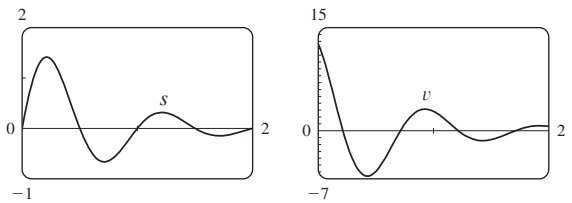
69. a) $F'(x) = e^x f'(e^x)$ b) $G'(x) = e^{f(x)}f'(x)$

71. 120 **73.** 96

77. $-2^{50}\cos 2x$ **79.** $v(t) = \frac{5}{2}\pi\cos(10\pi t)$ cm/s

81. a) $\dfrac{dB}{dt} = \dfrac{7\pi}{54}\cos\dfrac{2\pi t}{5.4}$ b) 0.16

83. $v(t) = 2e^{-1.5t}(2\pi\cos 2\pi t - 1.5\operatorname{sen} 2\pi t)$



85. dv/dt es la razón de cambio de la velocidad respecto al tiempo; dv/ds es la razón de cambio de la velocidad respecto al desplazamiento.

87. a) $y = ab^t$ donde $a \approx 100.01244$ y $b \approx 0.000045146$
b) $-670.63\ \mu A$

89. b) La forma factorizada **93.** b) $-n\cos^{n-1}x\operatorname{sen}[(n+1)x]$

EJERCICIOS 3.5 ■ PÁGINA 215

1. a) $y' = 9x/y$ b) $y = \pm\sqrt{9x^2 - 1}$, $y' = \pm 9x/\sqrt{9x^2 - 1}$

3. a) $y' = -y^2/x^2$ b) $y = x/(x-1)$, $y' = -1/(x-1)^2$

5. $y' = -\dfrac{x^2}{y^2}$ **7.** $y' = \dfrac{2x + y}{2y - x}$

9. $y' = \dfrac{3y^2 - 5x^4 - 4x^3y}{x^4 + 3y^2 - 6xy}$ **11.** $y' = \dfrac{2x + y\operatorname{sen} x}{\cos x - 2y}$

13. $y' = \tan x \tan y$ **15.** $y' = \dfrac{y(y - e^{x/y})}{y^2 - xe^{x/y}}$

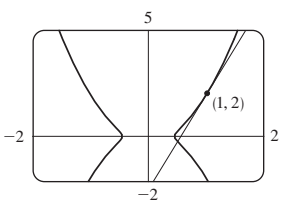
17. $y' = \dfrac{1 + x^4y^2 + y^2 + x^4y^4 - 2xy}{x^2 - 2xy - 2x^5y^3}$

19. $y' = \dfrac{e^y\operatorname{sen} x + y\cos(xy)}{e^y\cos x - x\cos(xy)}$ **21.** $-\frac{16}{13}$

23. $x' = \dfrac{-2x^4y + x^3 - 6xy^2}{4x^3y^2 - 3x^2y + 2y^3}$ **25.** $y = \frac{1}{2}x$

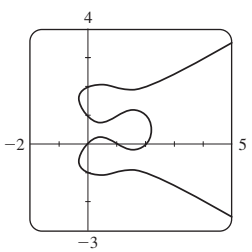
27. $y = -x + 2$ **29.** $y = x + \frac{1}{2}$ **31.** $y = -\frac{9}{13}x + \frac{40}{13}$

33. a) $y = \frac{9}{2}x - \frac{5}{2}$ b)



35. $-81/y^3$ **37.** $-2x/y^5$ **39.** $1/e^2$

41. a)



ocho; $x \approx 0.42, 1.58$

b) $y = -x + 1$, $y = \frac{1}{3}x + 2$ c) $1 \mp \frac{1}{3}\sqrt{3}$

43. $\left(\pm\frac{5}{4}\sqrt{3}, \pm\frac{5}{4}\right)$ **45.** $(x_0x/a^2) - (y_0y/b^2) = 1$

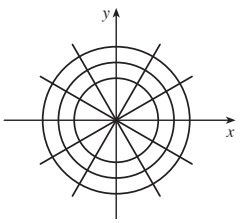
49. $y' = \dfrac{2\tan^{-1}x}{1 + x^2}$ **51.** $y' = \dfrac{1}{\sqrt{-x^2 - x}}$

53. $G'(x) = -1 - \dfrac{x\arccos x}{\sqrt{1 - x^2}}$ **55.** $h'(t) = 0$

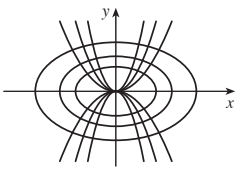
57. $y' = \operatorname{sen}^{-1}x$ **59.** $y' = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a + b\cos x}$

61. $1 - \dfrac{x\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1 - x^2}}$

65.



67.



71. a) $\dfrac{V^3(nb - V)}{PV^3 - n^2aV + 2n^3ab}$ b) -4.04 L/atm

73. $(\pm\sqrt{3}, 0)$ **75.** $(-1, -1)$, $(1, 1)$ **77.** b) $\frac{3}{2}$

79. a) 0 b) $-\frac{1}{2}$

EJERCICIOS 3.6 ■ PÁGINA 223

1. La fórmula de derivación es más simple.

3. $f'(x) = \dfrac{\cos(\ln x)}{x}$ **5.** $f'(x) = -\dfrac{1}{x}$

7. $f'(x) = \dfrac{3x^2}{(x^3 + 1)\ln 10}$ **9.** $f'(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} + \cos x\ln(5x)$

11. $g'(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{x(x^2 - 1)}$ **13.** $G'(y) = \dfrac{10}{2y + 1} - \dfrac{y}{y^2 + 1}$

15. $F'(s) = \dfrac{1}{s\ln s}$ **17.** $y' = \sec^2(\ln(ax + b))\dfrac{a}{ax + b}$

19. $y' = \dfrac{-x}{1 + x}$ **21.** $y' = \dfrac{1}{\ln 10} + \log_{10}x$

23. $y' = x + 2x\ln(2x)$; $y'' = 3 + 2\ln(2x)$

25. $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$; $y'' = \dfrac{-x}{(1 + x^2)^{3/2}}$

27. $f'(x) = \dfrac{2x - 1 - (x - 1)\ln(x - 1)}{(x - 1)[1 - \ln(x - 1)]^2}$;
$(1, 1 + e) \cup (1 + e, \infty)$

29. $f'(x) = \dfrac{2(x - 1)}{x(x - 2)}$; $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ **31.** 1

33. $y = 3x - 9$ **35.** $\cos x + 1/x$ **37.** 7

39. $y' = (x^2 + 2)^2(x^4 + 4)^4\left(\dfrac{4x}{x^2 + 2} + \dfrac{16x^3}{x^4 + 4}\right)$

41. $y' = \sqrt{\dfrac{x - 1}{x^4 + 1}}\left(\dfrac{1}{2x - 2} - \dfrac{2x^3}{x^4 + 1}\right)$

43. $y' = x^x(1 + \ln x)$

45. $y' = x^{\operatorname{sen} x}\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} + \cos x\ln x\right)$

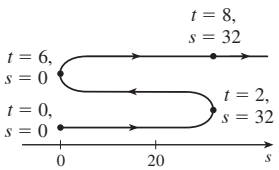
47. $y' = (\cos x)^x(-x\tan x + \ln\cos x)$

49. $y' = (\tan x)^{1/x}\left(\dfrac{\sec^2 x}{x\tan x} - \dfrac{\ln\tan x}{x^2}\right)$

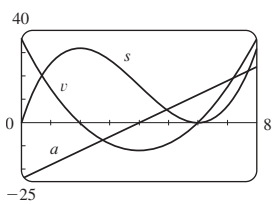
51. $y' = \dfrac{2x}{x^2 + y^2 - 2y}$ **53.** $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x-1)^n}$

EJERCICIOS 3.7 ■ PÁGINA 233

1. a) $3t^2 - 24t + 36$ b) -9 pies/s c) $t = 2, 6$
d) $0 \leq t < 2, t > 6$ e) 96 pies
f)

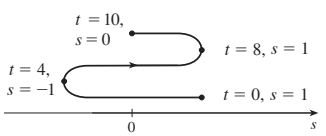


g) $6t - 24$; -6 pies/s^2
h)

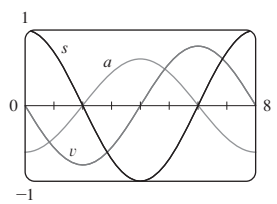


i) acelerar cuando $2 < t < 4$ o $t > 6$; desacelerar cuando $0 \leq t < 2$ o $4 < t < 6$

3. a) $-\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{4}\right)$ b) $-\frac{1}{8}\pi\sqrt{2}$ pies/s c) $t = 0, 4, 8$
d) $4 < t < 8$ e) 4 pies
f)



g) $-\frac{1}{16}\pi^2\cos(\pi t/4)$; $\frac{1}{32}\pi^2\sqrt{2}$ pies/s^2
h)



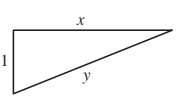
i) acelerar cuando $0 < t < 2$, $4 < t < 6$, $8 < t < 10$; desacelerar cuando $2 < t < 4$, $6 < t < 8$
5. a) acelerar cuando $0 < t < 1$ o $2 < t < 3$; desacelerar cuando $1 < t < 2$
b) acelerar cuando $1 < t < 2$ o $3 < t < 4$; desacelerar cuando $0 < t < 1$ o $2 < t < 3$
7. a) 4.9 m/s; -14.7 m/s b) Después de 2.5 s c) $32\frac{5}{16}$ m
d) ≈ 5.08 s e) ≈ -25.3 m/s
9. a) 7.56 m/s b) 6.24 m/s; -6.24 m/s
11. a) 30 mm^2/mm; la razón a la que está creciendo el área con respecto a la longitud del lado cuando x alcanza 15 mm
b) $\Delta A \approx 2x\,\Delta x$
13. a) i) 5π ii) 4.5π iii) 4.1π
b) 4π c) $\Delta A \approx 2\pi r\,\Delta r$
15. a) 8π pies^2/pies b) 16π pies^2/pies c) 24π pies^2/pies
La razón crece cuando el radio crece.
17. a) 6 kg/m b) 12 kg/m c) 18 kg/m
en el extremo derecho; en el extremo izquierdo
19. a) 4.75 A b) 5 A; $t = \frac{2}{3}$ s
23. a) $dV/dP = -C/P^2$ b) al principio
25. $400(3^t)\ln 3$; ≈ 6850 bacteria/h
27. a) 16 millones/año; 78.5 millones/año
b) $P(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$, donde $a \approx 0.00129371$, $b \approx -7.061422$, $c \approx 12{,}822.979$, $d \approx -7{,}743{,}770$
c) $P'(t) = 3at^2 + 2bt + c$
d) 14.48 millones/año; 75.29 millones/año (pequeño)
e) 81.62 millones/año
29. a) 0.926 cm/s; 0.694 cm/s; 0
b) 0; -92.6 (cm/s)/cm; -185.2 (cm/s)/cm
c) en el centro; en la orilla.
31. a) $C'(x) = 12 - 0.2x + 0.0015x^2$
b) \$32/yarda; el costo de producir la yarda
c) \$32.20
33. a) $[xp'(x) - p(x)]/x^2$; la productividad promedio crece cuando se agregan nuevos trabajadores.
35. -0.2436 K/min
37. a) 0 y 0 b) $C = 0$
c) (0, 0), (500, 50); es posible para que las especies coexistan.

EJERCICIOS 3.8 ■ PÁGINA 242

1. Cerca de 235
3. a) $100(4.2)^t$ b) ≈ 7409 c) $\approx 10\,632$ bacteria/h
d) $(\ln 100)/(\ln 4.2) \approx 3.2$ h
5. a) 1 508 millones, 1 871 millones b) 2 161 millones
c) 3972 millones; guerras en la primera mitad del siglo, crecimiento de la esperanza de vida en la segunda mitad.
7. a) $Ce^{-0.0005t}$ b) $-2\,000 \ln 0.9 \approx 211$ s
9. a) $100 \times 2^{-t/30}$ mg b) ≈ 9.92 mg c) ≈ 199.3 years
11. $\approx 2\,500$ años **13.** a) $\approx 137\,^\circ$F b) ≈ 116 min
15. a) $13.\overline{3}\,^\circ$C b) ≈ 67.74 min
17. a) ≈ 64.5 kPa b) ≈ 39.9 kPa
19. a) i) \$3 828.84 ii) \$3 840.25 iii) \$3 850.08
iv) \$3 851.61 v) \$3 852.01 vi) \$3 852.08
b) $dA/dt = 0.05A$, $A(0) = 3000$

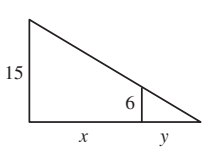
EJERCICIOS 3.9 ■ PÁGINA 248

1. $dV/dt = 3x^2\,dx/dt$ **3.** 48 cm^2/s
5. $3/(25\pi)$ m/min **7.** a) 1 b) 25 **9.** -18
11. a) La altitud del avión es 1 milla y su velocidad es 500 mi/h.
b) La razón de crecimiento de la distancia con respecto a la estación, cuando el avión está a 2 millas de la estación.
c)



d) $y^2 = x^2 + 1$
e) $250\sqrt{3}$ mi/h

13. a) La altura del poste (15 pies), la altura del hombre (6 pies), y la rapidez del hombre (5 pies/s)
b) La razón a la cual la parte alta de la sombra del hombre se está moviendo cuando está a 40 pies del poste
c)



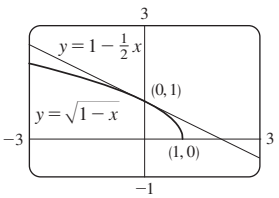
d) $\frac{15}{6} = \frac{x + y}{y}$ e) $\frac{25}{3}$ pies/s
15. 65 mi/h **17.** $837/\sqrt{8674} \approx 8.99$ pies/s
19. -1.6 cm/min **21.** $\frac{720}{13} \approx 55.4$ km/h

23. $(10{,}000 + 800{,}000\pi/9) \approx 2.89 \times 10^5$ cm^3/min
25. $\frac{10}{3}$ cm/min **27.** $6/(5\pi) \approx 0.38$ pies/min **29.** 0.3 m^2/s
31. 5 m **33.** 80 cm^3/min **35.** $\frac{107}{810} \approx 0.132\ \Omega$/s
37. 0.396 m/min **39.** a) 360 pies/s b) 0.096 rad/s
41. $\frac{10}{9}\pi$ km/min **43.** $1650/\sqrt{31} \approx 296$ km/h
45. $\frac{7}{4}\sqrt{15} \approx 6.78$ m/s

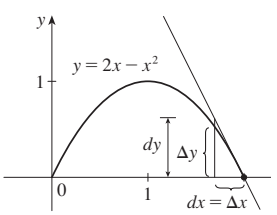
EJERCICIOS 3.10 ■ PÁGINA 255

1. $L(x) = -10x - 6$ **3.** $L(x) = \frac{1}{4}x + 1$

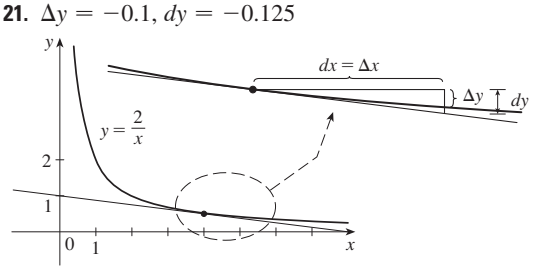
5. $\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x$;
$\sqrt{0.9} \approx 0.95$,
$\sqrt{0.99} \approx 0.995$



7. $-0.383 < x < 0.516$ **9.** $-0.368 < x < 0.677$
11. a) $dy = 2x(x\cos 2x + \operatorname{sen} 2x)\,dx$ b) $dy = \dfrac{t}{1+t^2}\,dt$
13. a) $dy = \dfrac{\sec^2\sqrt{t}}{2\sqrt{t}}\,dt$ b) $dy = \dfrac{-4v}{(1+v^2)^2}\,dv$
15. a) $dy = \frac{1}{10}e^{x/10}\,dx$ b) 0.01
17. a) $dy = \dfrac{x}{\sqrt{3+x^2}}\,dx$ b) -0.05
19. $\Delta y = 0.64$, $dy = 0.8$



21. $\Delta y = -0.1$, $dy = -0.125$



23. 15.968 **25.** $10.00\overline{3}$ **27.** $1 - \pi/90 \approx 0.965$
33. a) 270 cm^3, 0.01, 1% b) 36 cm^2, $0.00\overline{6}$, $0.\overline{6}$%
35. a) $84/\pi \approx 27$ cm^2; $\frac{1}{84} \approx 0.012 = 1.2\%$
b) $1764/\pi^2 \approx 179$ cm^3; $\frac{1}{56} \approx 0.018 = 1.8\%$
37. a) $2\pi rh\,\Delta r$ b) $\pi(\Delta r)^2 h$
43. a) 4.8, 5.2 b) Demasiado grande

EJERCICIOS 3.11 ■ PÁGINA 262

1. a) 0 b) 1 **3.** a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{1}{2}(e^2 - e^{-2}) \approx 3.62686$
5. a) 1 b) 0
21. $\operatorname{sech} x = \frac{3}{5}$, $\operatorname{senh} x = \frac{4}{3}$, $\operatorname{csch} x = \frac{3}{4}$, $\tanh x = \frac{4}{5}$, $\coth x = \frac{5}{4}$
23. a) 1 b) -1 c) ∞ d) $-\infty$ e) 0 f) 1
g) ∞ h) $-\infty$ i) 0
31. $f'(x) = x\cosh x$ **33.** $h'(x) = \tanh x$
35. $y' = 3e^{\cosh 3x}\operatorname{senh} 3x$ **37.** $f'(t) = -2e^t \operatorname{sech}^2(e^t)\tanh(e^t)$
39. $G'(x) = \dfrac{-2\operatorname{senh} x}{(1+\cosh x)^2}$ **41.** $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x(x-1)}}$
43. $y' = \operatorname{senh}^{-1}(x/3)$ **45.** $y' = -\csc x$
51. a) 0.3572 b) 70.34°
53. a) 164.50 m b) 120 m; 164.13 m
55. b) $y = 2\operatorname{senh} 3x - 4\cosh 3x$
57. $\left(\ln(1+\sqrt{2}), \sqrt{2}\right)$

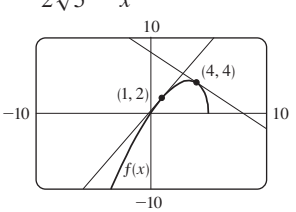
REPASO DEL CAPÍTULO 3 ■ PÁGINA 264

Examen rápido Verdadero-Falso

1. Verdadero **3.** Verdadero **5.** Falso **7.** Falso **9.** Verdadero
11. Verdadero **13.** Verdadero **15.** Verdadero

Ejercicios

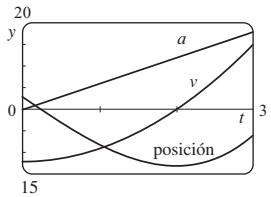
1. $4x^7(x+1)^3(3x+2)$ **3.** $\frac{3}{2}\sqrt{x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$
5. $x(\pi x\cos\pi x + 2\operatorname{sen}\pi x)$
7. $\dfrac{8t^3}{(t^4+1)^2}$ **9.** $\dfrac{1+\ln x}{x\ln x}$ **11.** $\dfrac{\cos\sqrt{x} - \sqrt{x}\operatorname{sen}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$
13. $-\dfrac{e^{1/x}(1+2x)}{x^4}$ **15.** $\dfrac{2xy - \cos y}{1 - x\operatorname{sen} y - x^2}$
17. $\dfrac{1}{2\sqrt{\arctan x}\,(1+x^2)}$ **19.** $\dfrac{1-t^2}{(1+t^2)^2}\sec^2\left(\dfrac{t}{1+t^2}\right)$
21. $3^{x\ln x}(\ln 3)(1+\ln x)$ **23.** $-(x-1)^{-2}$
25. $\dfrac{2x - y\cos(xy)}{x\cos(xy) + 1}$ **27.** $\dfrac{2}{(1+2x)\ln 5}$
29. $\cot x - \operatorname{sen} x\cos x$ **31.** $\dfrac{4x}{1+16x^2} + \tan^{-1}(4x)$
33. $5\sec 5x$ **35.** $-6x\csc^2(3x^2+5)$
37. $\cos(\tan\sqrt{1+x^3})(\sec^2\sqrt{1+x^3})\dfrac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}$
39. $2\cos\theta\tan(\operatorname{sen}\theta)\sec^2(\operatorname{sen}\theta)$
41. $\dfrac{(x-2)^4(3x^2-55x-52)}{2\sqrt{x+1}\,(x+3)^8}$ **43.** $2x^2\cosh(x^2) + \operatorname{senh}(x^2)$
45. $3\tanh 3x$ **47.** $\dfrac{\cosh x}{\sqrt{\operatorname{senh}^2 x - 1}}$
49. $\dfrac{-3\operatorname{sen}\left(e^{\sqrt{\tan 3x}}\right)e^{\sqrt{\tan 3x}}\sec^2(3x)}{2\sqrt{\tan 3x}}$ **51.** $-\frac{4}{27}$
53. $-5x^4/y^{11}$ **57.** $y = 2\sqrt{3}x + 1 - \pi\sqrt{3}/3$
59. $y = 2x + 1$ **61.** $y = -x + 2$; $y = x + 2$
63. a) $\dfrac{10 - 3x}{2\sqrt{5-x}}$ b) $y = \frac{7}{4}x + \frac{1}{4}$, $y = -x + 8$
c)



65. $(\pi/4, \sqrt{2}), (5\pi/4, -\sqrt{2})$ **69.** a) 2 b) 44
71. $2xg(x) + x^2g'(x)$ **73.** $2g(x)g'(x)$

75. $g'(e^x)e^x$ **77.** $g'(x)/g(x)$ **79.** $\dfrac{f'(x)[g(x)]^2 + g'(x)\,[f(x)]^2}{[f(x) + g(x)]^2}$

81. $f'(g(\operatorname{sen} 4x))g'(\operatorname{sen} 4x)(\cos 4x)(4)$
83. $(-3, 0)$ **85.** $y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{14}{3}x$
87. $v(t) = -Ae^{-ct}[c\cos(\omega t + \delta) + \omega \operatorname{sen}(\omega t + \delta)]$,
$a(t) = Ae^{-ct}[(c^2 - \omega^2)\cos(\omega t + \delta) + 2c\omega \operatorname{sen}(\omega t + \delta)]$
89. a) $v(t) = 3t^2 - 12$; $a(t) = 6t$ b) $t > 2$; $0 \leqslant t < 2$
c) 23 d) e) $t > 2$; $0 < t < 2$



91. 4 kg/m
93. a) $200(3.24)^t$ b) $\approx$22,040
c) $\approx$25,910 bacteria/h d) $(\ln 50)/(\ln 3.24) \approx 3.33$ h
95. a) C_0e^{-kt} b) $\approx$100 h **97.** $\frac{4}{3}$ cm^2/min
99. 13 pies/s **101.** 400 pies/h
103. a) $L(x) = 1 + x$; $\sqrt[3]{1 + 3x} \approx 1 + x$; $\sqrt[3]{1.03} \approx 1.01$
b) $-0.235 < x < 0.401$
105. $12 + \frac{3}{2}\pi \approx 16.7$ cm^2 **107.** $\frac{1}{32}$ **109.** $\frac{1}{4}$ **111.** $\frac{1}{8}x^2$

PROBLEMAS ADICIONALES ■ PÁGINA 269

1. $(\pm\sqrt{3}/2, \frac{1}{4})$ **5.** $3\sqrt{2}$ **11.** $(0, \frac{5}{4})$
13. a) $4\pi\sqrt{3}/\sqrt{11}$ rad/s b) $40\left(\cos\theta + \sqrt{8 + \cos^2\theta}\right)$ cm
c) $-480\pi \operatorname{sen}\theta\left(1 + \cos\theta/\sqrt{8 + \cos^2\theta}\right)$ cm/s
17. $x_T \in (3, \infty)$, $y_T \in (2, \infty)$, $x_N \in \left(0, \frac{5}{3}\right)$, $y_N \in \left(-\frac{5}{2}, 0\right)$
19. b) i) 53° (o 127°) ii) 63° (o 117°)
21. R se aproxima al punto medio del radio AO.
23. $-\operatorname{sen} a$ **25.** $2\sqrt{e}$ **29.** $(1, -2), (-1, 0)$
31. $\sqrt{29}/58$ **33.** $2 + \frac{375}{128}\pi \approx 11.204$ cm^3/min

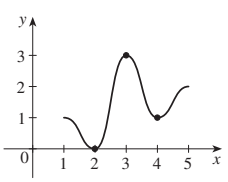
CAPÍTULO 4

EJERCICIOS 4.1 ■ PÁGINA 280

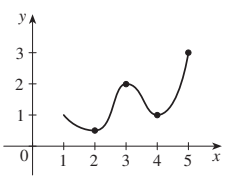
Abreviaciones: abs, absoluto; loc, local; máx, máximo; mín, mínimo

1. abs min: el valor más pequeño de la función sobre el dominio de la función; loc mín en c: el valor más pequeño de la función cuando x está cerca de c.
3. Abs máx en s, abs mín en r, loc máx en c, loc mín en b y r, no hay máx o mín en a y d.
5. abs máx $f(4) = 5$, loc máx $f(4) = 5$ y $f(6) = 4$, loc mín $f(2) = 2$ y $f(1) = f(5) = 3$

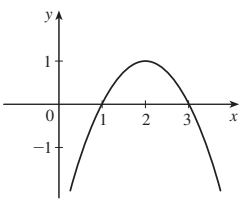
7.



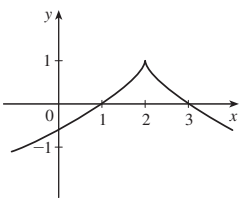
9.



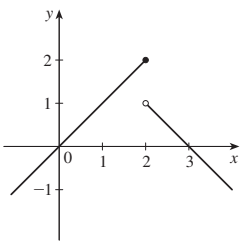
11. a)



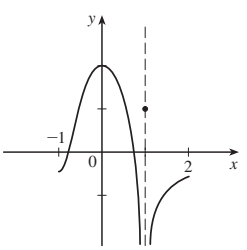
b)



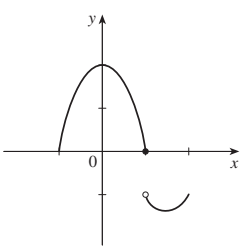
c)



13. a)



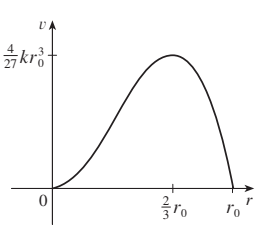
b)



15. abs máx $f(3) = 4$ **17.** abs máx $f(1) = 1$
19. abs mín $f(0) = 0$
21. abs máx $f(\pi/2) = 1$; abs mín $f(-\pi/2) = -1$
23. abs máx $f(2) = \ln 2$ **25.** abs máx $f(0) = 1$
27. abs máx $f(3) = 2$ **29.** $\frac{1}{3}$ **31.** $-2, 3$ **33.** 0
35. 0, 2 **37.** $0, \frac{4}{9}$ **39.** $0, \frac{8}{7}, 4$ **41.** $n\pi$ (n un entero)
43. $0, \frac{2}{3}$ **45.** 10 **47.** $f(2) = 16, f(5) = 7$
49. $f(-1) = 8, f(2) = -19$ **51.** $f(-2) = 33, f(2) = -31$
53. $f(0.2) = 5.2, f(1) = 2$ **55.** $f\left(\sqrt{2}\right) = 2, f(-1) = -\sqrt{3}$
57. $f(\pi/6) = \frac{3}{2}\sqrt{3}, f(\pi/2) = 0$
59. $f(2) = 2/\sqrt{e}, f(-1) = -1/\sqrt[8]{e}$
61. $f(1) = \ln 3, f\left(-\frac{1}{2}\right) = \ln\frac{3}{4}$

63. $f\left(\dfrac{a}{a + b}\right) = \dfrac{a^a b^b}{(a + b)^{a+b}}$

65. a) 2.19, 1.81 b) $\frac{6}{25}\sqrt{\frac{3}{5}} + 2, -\frac{6}{25}\sqrt{\frac{3}{5}} + 2$
67. a) 0.32, 0.00 b) $\frac{3}{16}\sqrt{3}$, 0 **69.** $\approx$3.9665°C
71. más barato, $t \approx 0.855$ (junio de 1994);
más caro, $t \approx 4.618$ (marzo de 1998)
73. a) $r = \frac{2}{3}r_0$ b) $v = \frac{4}{27}kr_0^3$
c)



EJERCICIOS 4.2 ■ PÁGINA 288

1. 2 **3.** $\frac{9}{4}$ **5.** f No derivable sobre $(-1, 1)$
7. 0.3, 3, 6.3 **9.** 1 **11.** $3/\ln 4$ **13.** 1
15. f no es continua en 3 **23.** 16 **25.** No **31.** No

EJERCICIOS 4.3 ■ PÁGINA 297

Abreviaciones: creciente; dec, decreciente; CD, cóncava hacia abajo; CU, cóncava hacia arriba; HA, asíntota horizontal; VA, asíntota vertical; IP, punto(s) de inflexión.

1. a) $(1, 3), (4, 6)$ b) $(0, 1), (3, 4)$ c) $(0, 2)$
d) $(2, 4), (4, 6)$ e) $(2, 3)$

3. a) I/D prueba b) prueba de concavidad
c) encontrar puntos en los que la concavidad cambia.

5. a) Inc sobre $(1, 5)$; dec sobre $(0, 1)$ y $(5, 6)$
b) Loc máx en $x = 5$, loc mín en $x = 1$

7. a) 3, 5 b) 2, 4, 6 c) 1, 7

9. a) Inc sobre $(-\infty, -3), (2, \infty)$; dec sobre $(-3, 2)$
b) Loc máx $f(-3) = 81$; mín $f(2) = -44$
c) CU sobre $(-\frac{1}{2}, \infty)$; CD sobre $(-\infty, -\frac{1}{2})$; IP $(-\frac{1}{2}, \frac{37}{2})$

11. a) Inc sobre $(-1, 0), (1, \infty)$; dec sobre $(-\infty, -1), (0, 1)$
b) Loc máx $f(0) = 3$; loc mín $f(\pm 1) = 2$
c) CU sobre $(-\infty, -\sqrt{3}/3), (\sqrt{3}/3, \infty)$;
CD sobre $(-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$; IP $(\pm\sqrt{3}/3, \frac{22}{9})$

13. a) Inc sobre $(0, \pi/4), (5\pi/4, 2\pi)$; dec sobre $(\pi/4, 5\pi/4)$
b) Loc máx $f(\pi/4) = \sqrt{2}$; loc mín $f(5\pi/4) = -\sqrt{2}$
c) CU sobre $(3\pi/4, 7\pi/4)$; CD sobre $(0, 3\pi/4), (7\pi/4, 2\pi)$;
IP $(3\pi/4, 0), (7\pi/4, 0)$

15. a) Inc sobre $(-\frac{1}{3}\ln 2, \infty)$; dec sobre $(-\infty, -\frac{1}{3}\ln 2)$
b) Loc mín $f(-\frac{1}{3}\ln 2) = 2^{-2/3} + 2^{1/3}$ c) CU sobre $(-\infty, \infty)$

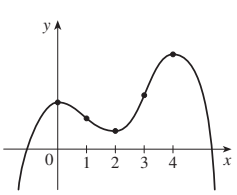
17. a) Inc sobre $(1, \infty)$; dec sobre $(0, 1)$ b) Loc mín $f(1) = 0$
c) CU sobre $(0, \infty)$; No IP

19. Loc máx $f(1) = 2$; loc mín $f(0) = 1$

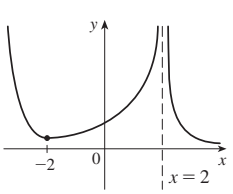
21. Loc mín $f(\frac{1}{16}) = -\frac{1}{4}$

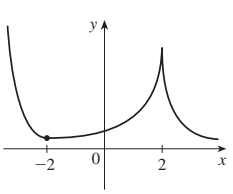
23. a) f tiene un máximo local en 2.
b) f tiene una tangente horizontal en 6

25.

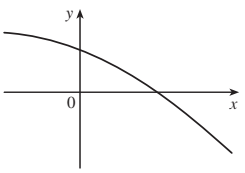


27.

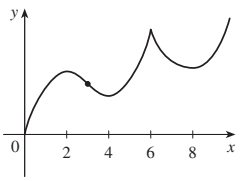




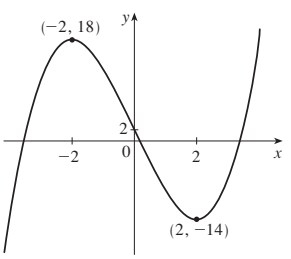
29.



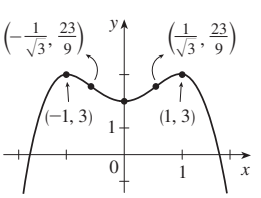
31. a) Inc sobre $(0, 2), (4, 6), (8, \infty)$; dec on $(2, 4), (6, 8)$
b) Loc máx en $x = 2, 6$;
loc mín en $x = 4, 8$
c) CU sobre $(3, 6), (6, \infty)$;
CD sobre $(0, 3)$
d) 3
e) Ver gráfica a la derecha



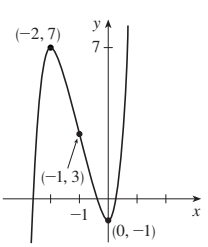
33. a) Inc sobre $(-\infty, -2), (2, \infty)$; dec sobre $(-2, 2)$
b) Loc máx $f(-2) = 18$; loc mín $f(2) = -14$
c) CU sobre $(0, \infty)$, CD sobre $(-\infty, 0)$; IP $(0, 2)$
d)



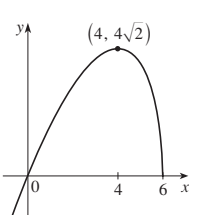
35. a) Inc sobre $(-\infty, -1), (0, 1)$;
dec sobre $(-1, 0), (1, \infty)$
b) Loc máx $f(-1) = 3, f(1) = 3$;
loc mín $f(0) = 2$
c) CU sobre $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$;
CD sobre $(-\infty, -1/\sqrt{3}), (1/\sqrt{3}, \infty)$;
IP $(\pm 1/\sqrt{3}, \frac{23}{9})$
d) Ver gráfica a la derecha



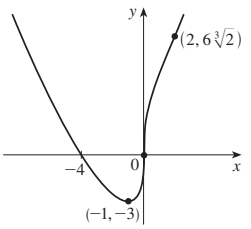
37. a) Inc sobre $(-\infty, -2), (0, \infty)$;
dec sobre $(-2, 0)$
b) Loc máx $h(-2) = 7$;
loc mín $h(0) = -1$
c) CU sobre $(-1, \infty)$;
CD sobre $(-\infty, -1)$; IP $(-1, 3)$
d) Ver gráfica a la derecha



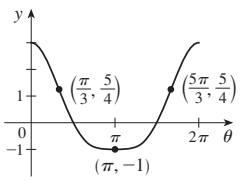
39. a) Inc sobre $(-\infty, 4)$; dec sobre $(4, 6)$
b) Loc máx $f(4) = 4\sqrt{2}$
c) CD sobre $(-\infty, 6)$; No IP
d) Ver gráfica a la derecha.



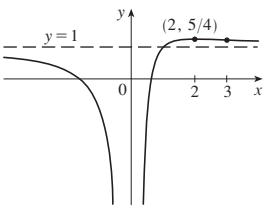
41. a) Inc sobre $(-1, \infty)$;
dec sobre $(-\infty, -1)$
b) Loc mín $C(-1) = -3$
c) CU sobre $(-\infty, 0)$, $(2, \infty)$;
CD sobre $(0, 2)$;
IP $(0, 0)$, $\left(2, 6\sqrt[3]{2}\right)$
d) Ver gráfica a la derecha.



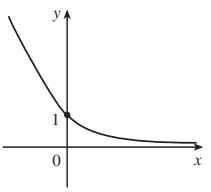
43. a) Inc sobre $(\pi, 2\pi)$;
dec sobre $(0, \pi)$
b) Loc mín $f(\pi) = -1$
c) CU sobre $(\pi/3, 5\pi/3)$;
CD sobre $(0, \pi/3)$, $(5\pi/3, 2\pi)$;
IP $\left(\pi/3, \frac{5}{4}\right)$, $\left(5\pi/3, \frac{5}{4}\right)$
d) Ver gráfica a la derecha.



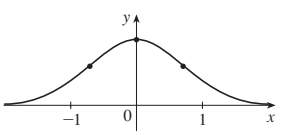
45. a) VA $x = 0$; HA $y = 1$
b) Inc sobre $(0, 2)$;
dec sobre $(-\infty, 0)$, $(2, \infty)$
c) Loc máx $f(2) = \frac{5}{4}$
d) CU sobre $(3, \infty)$;
CD sobre $(-\infty, 0)$, $(0, 3)$; IP $\left(3, \frac{11}{9}\right)$
e) Ver gráfica a la derecha



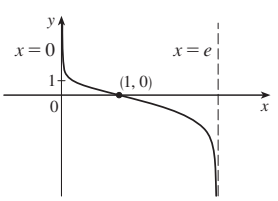
47. a) HA $y = 0$
b) Dec sobre $(-\infty, \infty)$
c) Ninguna
d) CU sobre $(-\infty, \infty)$
e) Ver gráfica a la derecha.



49. a) HA $y = 0$
b) Inc sobre $(-\infty, 0)$, dec sobre $(0, \infty)$
c) Loc máx $f(0) = 1$
d) CU sobre $\left(-\infty, -1\sqrt{2}\right)$, $\left(1/\sqrt{2}, \infty\right)$;
CD sobre $\left(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right)$;
IP $\left(\pm 1/\sqrt{2}, e^{-1/2}\right)$
e) Ver gráfica a la derecha.



51. a) VA $x = 0$, $x = e$
b) Dec sobre $(0, e)$
c) Ninguna
d) CU sobre $(0, 1)$; CD sobre $(1, e)$;
IP $(1, 0)$
e) Ver gráfica a la derecha.



53. $(3, \infty)$
55. a) Loc y abs máx $f(1) = \sqrt{2}$, no hay mín
b) $\frac{1}{4}\left(3 - \sqrt{17}\right)$
57. b) CU sobre (0.94, 2.57), (3.71, 5.35);
CD sobre (0, 0.94), (2.57, 3.71), (5.35, 2π);
IP (0.94, 0.44), (2.57, −0.63), (3.71, −0.63), (5.35, 0.44)
59. CU sobre $(-\infty, -0.6)$, $(0.0, \infty)$; CD sobre $(-0.6, 0.0)$

61. a) La razón de crecimiento es inicialmente muy pequeña, crece al máximo en $t \approx 8$ h, después decrece hacia 0.
b) Cuando $t = 8$ c) CU sobre (0, 8); CD sobre (8, 18)
d) (8, 350)
63. $K(3) - K(2)$; CD
65. 28.57 min, cuando la razón de crecimiento del medicamento en el torrente sanguíneo es mayor; 85.71 min cuando la razón de decrecimiento es mayor.
67. $f(x) = \frac{1}{9}(2x^3 + 3x^2 - 12x + 7)$
69. a) $a = 0$, $b = -1$ b) $y = -x$ en (0, 0)

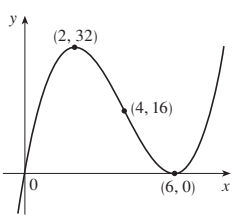
EJERCICIOS 4.4 ■ PÁGINA 307

1. a) Indeterminada b) 0 c) 0
d) ∞, $-\infty$, o no existe e) Indeterminada
3. a) $-\infty$ b) Indeterminada c) ∞
5. $\frac{9}{4}$ **7.** 2 **9.** $-\frac{1}{3}$ **11.** $-\infty$ **13.** 2 **15.** $\frac{1}{4}$
17. 0 **19.** $-\infty$ **21.** $\frac{8}{5}$ **23.** 3 **25.** $\frac{1}{2}$ **27.** 1
29. 1 **31.** $1/\ln 3$ **33.** 0 **35.** $-1/\pi^2$ **37.** $\frac{1}{2}a(a-1)$
39. $\frac{1}{24}$ **41.** π **43.** 3 **45.** 0 **47.** $-2/\pi$ **49.** $\frac{1}{2}$
51. $\frac{1}{2}$ **53.** ∞ **55.** 1 **57.** e^{-2} **59.** $1/e$
61. 1 **63.** e^4 **65.** $1/\sqrt{e}$ **67.** e^2 **69.** $\frac{1}{4}$ **73.** 1
75. f tiene un valor absoluto para $c > 0$. Cuando c crece, los puntos mínimos se alejan del origen.
81. $\frac{16}{9}a$ **83.** $\frac{1}{2}$ **85.** 56 **89.** a) 0

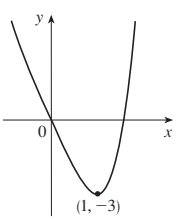
EJERCICIOS 4.5 ■ PÁGINA 317

Abreviaciones: int, intersección; SA, asíntota oblicua

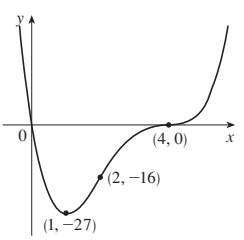
1. A. $\mathbb{R}$ B. y-int 0; x-int 0, 6
C. Ninguna D. Ninguna
E. Inc sobre $(-\infty, 2)$, $(6, \infty)$;
dec sobre $(2, 6)$
F. Loc máx $f(2) = 32$;
loc mín $f(6) = 0$
G. CU sobre $(4, \infty)$; CD sobre $(-\infty, 4)$;
IP $(4, 16)$
H. Ver gráfica a la derecha



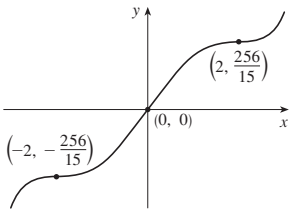
3. A. $\mathbb{R}$ B. y-int 0; x-int 0, $\sqrt[3]{4}$
C. Ninguna D. Ninguna
E. Inc sobre $(1, \infty)$; dec sobre $(-\infty, 1)$
F. Loc mín $f(1) = -3$
G. CU sobre $(-\infty, \infty)$
H. Ver gráfica a la derecha.



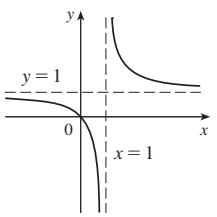
5. A. $\mathbb{R}$ B. y-int 0; x-int 0, 4
C. Ninguna D. Ninguna
E. Inc sobre $(1, \infty)$; dec sobre $(-\infty, 1)$
F. Loc mín $f(1) = -27$
G. CU sobre $(-\infty, 2)$, $(4, \infty)$;
CD sobre $(2, 4)$;
IP $(2, -16)$, $(4, 0)$
H. Ver gráfica a la derecha.



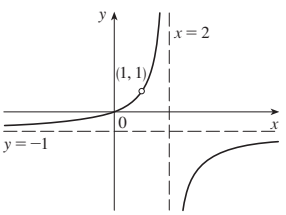
7. A. $\mathbb{R}$ B. y-int 0; x-int 0
C. Alrededor (0, 0) D. Ninguna
E. Inc sobre $(-\infty, \infty)$
F. Ninguno
G. CU sobre $(-2, 0)$, $(2, \infty)$;
CD sobre $(-\infty, -2)$, $(0, 2)$;
IP $\left(-2, -\frac{256}{15}\right)$, $(0, 0)$, $\left(2, \frac{256}{15}\right)$
H. Ver gráfica a la derecha.



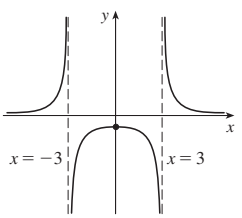
9. A. $\{x \mid x \neq 1\}$ B. y-int 0; x-int 0
C. Ninguna D. VA $x = 1$, HA $y = 1$
E. Dec sobre $(-\infty, 1)$, $(1, \infty)$
F. Ninguno
G. CU sobre $(1, \infty)$; CD sobre $(-\infty, 1)$
H. Ver gráfica a la derecha.



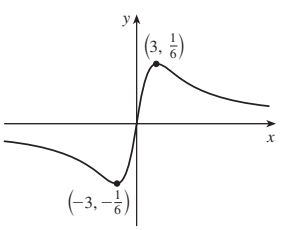
11. A. $(-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, \infty)$
B. y-int 0; x-int 0 C. Ninguna
D. HA $y = -1$; VA $x = 2$
E. Inc sobre $(-\infty, 1)$, $(1, 2)$, $(2, \infty)$
F. Ninguno
G. CU sobre $(-\infty, 1)$, $(1, 2)$;
CD sobre $(2, \infty)$
H. Ver gráfica a la derecha.



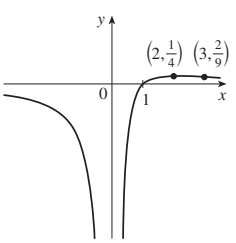
13. A. $\{x \mid x \neq \pm 3\}$ B. y-int $-\frac{1}{9}$
C. Sobre el eje y D. VA $x = \pm 3$, HA $y = 0$
E. Inc sobre $(-\infty, -3)$, $(-3, 0)$;
dec sobre $(0, 3)$, $(3, \infty)$
F. Loc máx $f(0) = -\frac{1}{9}$
G. CU sobre $(-\infty, -3)$, $(3, \infty)$;
CD sobre $(-3, 3)$
H. Ver gráfica a la derecha.



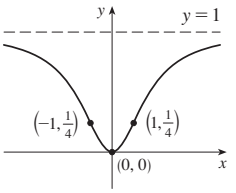
15. A. $\mathbb{R}$ B. y-int 0; x-int 0
C. Cerca de (0, 0) D. HA $y = 0$
E. Inc sobre $(-3, 3)$;
dec sobre $(-\infty, -3)$, $(3, \infty)$
F. Loc mín $f(-3) = -\frac{1}{6}$;
loc máx $f(3) = \frac{1}{6}$;
G. CU sobre $\left(-3\sqrt{3}, 0\right)$, $\left(3\sqrt{3}, \infty\right)$;
CD sobre $\left(-\infty, -3\sqrt{3}\right)$, $\left(0, 3\sqrt{3}\right)$;
IP $(0, 0)$, $\left(\pm 3\sqrt{3}, \pm\sqrt{3}/12\right)$
H. Ver gráfica a la derecha.



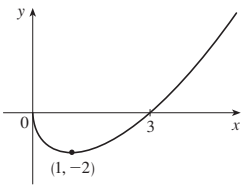
17. A. $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ B. x-int 1
C. Ninguna D. HA $y = 0$; VA $x = 0$
E. Inc sobre $(0, 2)$;
dec sobre $(-\infty, 0)$, $(2, \infty)$
F. Loc máx $f(2) = \frac{1}{4}$
G. CU sobre $(3, \infty)$;
CD sobre $(-\infty, 0)$, $(0, 3)$; IP $\left(3, \frac{2}{9}\right)$
H. Ver gráfica a la derecha.



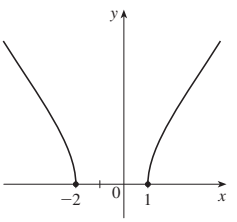
19. A. $\mathbb{R}$ B. y-int 0; x-int 0
C. Sobre el eje y D. HA $y = 1$
E. Inc sobre $(0, \infty)$; dec sobre $(-\infty, 0)$
F. Loc mín $f(0) = 0$
G. CU sobre $(-1, 1)$;
CD sobre $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$; IP $\left(\pm 1, \frac{1}{4}\right)$
H. Ver gráfica a la derecha.



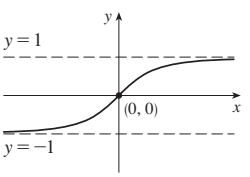
21. A. $[0, \infty)$ B. y-int 0; x-int 0, 3
C. Ninguna D. Ninguna
E. Inc sobre $(1, \infty)$; dec sobre $(0, 1)$
F. Loc mín $f(1) = -2$
G. CU sobre $(0, \infty)$
H. Ver gráfica a la derecha.



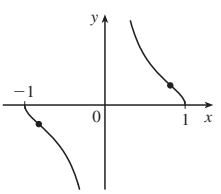
23. A. $(-\infty, -2] \cup [1, \infty)$
B. x-int -2, 1
C. Ninguna D. Ninguna
E. Inc sobre $(1, \infty)$; dec sobre $(-\infty, -2)$
F. Ninguno
G. CD sobre $(-\infty, -2)$, $(1, \infty)$
H. Ver gráfica a la derecha.



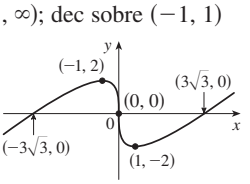
25. A. $\mathbb{R}$ B. y-int 0; x-int 0
C. Cerca del origen
D. HA $y = \pm 1$
E. Inc sobre $(-\infty, \infty)$ F. Ninguno
G. CU sobre $(-\infty, 0)$;
CD sobre $(0, \infty)$; IP $(0, 0)$
H. Ver gráfica a la derecha.



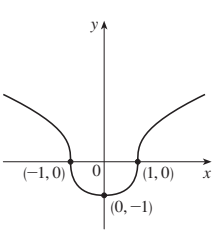
27. A. $\{x \mid |x| \leq 1, x \neq 0\} = [-1, 0) \cup (0, 1]$
B. x-int ± 1 C. Cerca de (0, 0)
D. VA $x = 0$
E. Dec sobre $(-1, 0)$, $(0, 1)$
F. Ninguno
G. CU sobre $\left(-1, -\sqrt{2/3}\right)$,
$\left(0, \sqrt{2/3}\right)$;
CD sobre $\left(-\sqrt{2/3}, 0\right)$, $\left(\sqrt{2/3}, 1\right)$;
IP $\left(\pm\sqrt{2/3}, \pm 1/\sqrt{2}\right)$
H. Ver gráfica a la derecha.



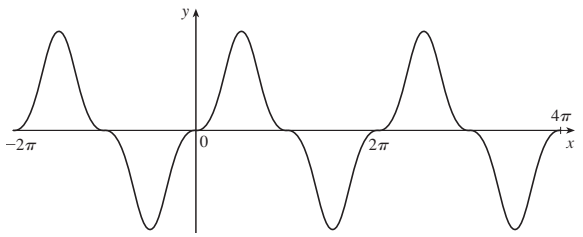
29. A. $\mathbb{R}$ B. y-int 0; x-int 0, $\pm 3\sqrt{3}$ C. Cerca del origen
D. Ninguna E. Inc sobre $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$; dec sobre $(-1, 1)$
F. Loc máx $f(-1) = 2$;
loc mín $f(1) = -2$
G. CU sobre $(0, \infty)$; CD sobre $(-\infty, 0)$;
IP $(0, 0)$
H. Ver gráfica a la derecha.



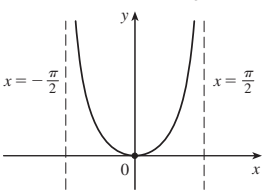
31. A. $\mathbb{R}$ B. y-int -1; x-int ± 1
C. Cerca del eje y D. Ninguna
E. Inc sobre $(0, \infty)$; dec sobre $(-\infty, 0)$
F. Loc mín $f(0) = -1$
G. CU sobre ;
CD sobre ;
IP
H. Ver gráfica a la derecha.



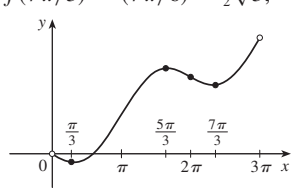
33. A. $\mathbb{R}$ B. y-int 0; x-int $n\pi$ (n un entero)
C. Cerca de (0, 0), periodo 2π D. Ninguna
E–G Respuesta para $0 \leq x \leq \pi$:
E. Inc sobre $(0, \pi/2)$; dec sobre $(\pi/2, \pi)$ F. Loc máx $f(\pi/2) = 1$
G. Sea $\alpha = \text{sen}^{-1}\sqrt{2/3}$; CU sobre $(0, \alpha)$, $(\pi - \alpha, \pi)$; CD sobre $(\alpha, \pi - \alpha)$; IP at $x = 0, \pi, \alpha, \pi - \alpha$
H.



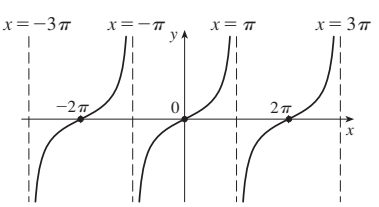
35. A. $(-\pi/2, \pi/2)$ B. y-int 0; x-int 0 C. Sobre el eje y
D. VA $x = \pm\pi/2$
E. Inc sobre $(0, \pi/2)$; dec sobre $(-\pi/2, 0)$
F. Loc mín $f(0) = 0$
G. CU sobre $(-\pi/2, \pi/2)$
H. Ver gráfica a la derecha.



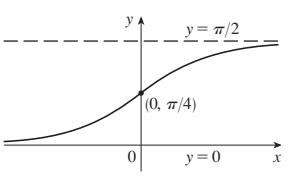
37. A. $(0, 3\pi)$ C. Ninguna D. Ninguna
E. Inc sobre $(\pi/3, 5\pi/3)$, $(7\pi/3, 3\pi)$; dec sobre $(0, \pi/3)$, $(5\pi/3, 7\pi/3)$
F. Loc mín $f(\pi/3) = (\pi/6) - \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $f(7\pi/3) = (7\pi/6) - \frac{1}{2}\sqrt{3}$; loc máx $f(5\pi/3) = (5\pi/6) + \frac{1}{2}\sqrt{3}$
G. CU sobre $(0, \pi)$, $(2\pi, 3\pi)$; CD sobre $(\pi, 2\pi)$;
IP $(\pi, \pi/2)$, $(2\pi, \pi)$
H. Ver gráfica a la derecha.



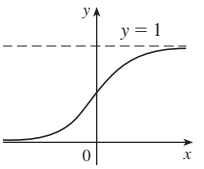
39. A. Todos reales excepto $(2n + 1)\pi$ (n un entero)
B. y-int 0; x-int $2n\pi$
C. sobre el origen, periodo2π
D. VA $x = (2n + 1)\pi$
E. Inc sobre $((2n - 1)\pi, (2n + 1)\pi)$ F. Ninguno
G. CU sobre $(2n\pi, (2n + 1)\pi)$; CD sobre $((2n - 1)\pi, 2n\pi)$; IP $(2n\pi, 0)$
H.



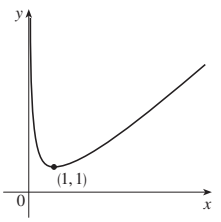
41. A. $\mathbb{R}$ B. y-int $\pi/4$
C. Ninguna
D. HA $y = 0$, $y = \pi/2$
E. Inc sobre $(-\infty, \infty)$ F. Ninguno
G. CU sobre $(-\infty, 0)$; CD sobre $(0, \infty)$;
IP $(0, \pi/4)$
H. Ver gráfica a la derecha.



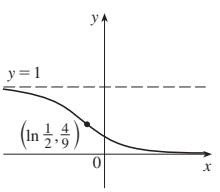
43. A. $\mathbb{R}$ B. y-int. $\frac{1}{2}$ C. Ninguna
D. HA $y = 0$, $y = 1$
E. Inc sobre $\mathbb{R}$ F. Ninguno
G. CU sobre $(-\infty, 0)$; CD sobre $(0, \infty)$;
IP $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ H. Ver gráfica a la derecha.



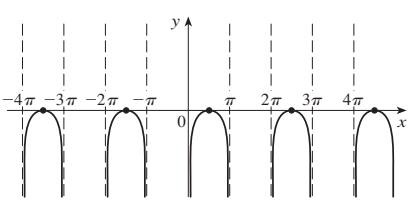
45. A. $(0, \infty)$ B. Ninguno
C. Ninguna D. VA $x = 0$
E. Inc sobre $(1, \infty)$; dec sobre $(0, 1)$
F. Loc mín $f(1) = 1$
G. CU sobre $(0, \infty)$
H. Ver gráfica a la derecha.



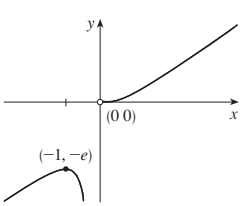
47. A. $\mathbb{R}$ B. y-int $\frac{1}{4}$ C. Ninguna
D. HA $y = 0$, $y = 1$
E. Dec sobre $\mathbb{R}$ F. Ninguno
G. CU sobre ; CD sobre $(-\infty, \ln \frac{1}{2})$;
IP $\left(\ln \frac{1}{2}, \frac{4}{9}\right)$
H. Ver gráfica a la derecha.



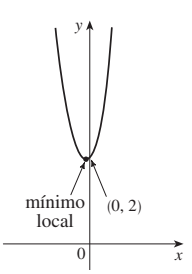
49. A. Toda x en $(2n\pi, (2n + 1)\pi)$ (n un entero)
B. x-int $\pi/2 + 2n\pi$ C. Periodo 2π D. VA $x = n\pi$
E. Inc sobre $(2n\pi, \pi/2 + 2n\pi)$; dec sobre $(\pi/2 + 2n\pi, (2n + 1)\pi)$
F. Loc máx $f(\pi/2 + 2n\pi) = 0$ G. CD sobre $(2n\pi, (2n + 1)\pi)$
H.



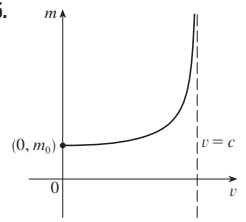
51. A. $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
B. Ninguno C. Ninguna D. VA $x = 0$
E. Inc sobre $(-\infty, -1)$, $(0, \infty)$; dec sobre $(-1, 0)$
F. Loc máx $f(-1) = -e$
G. CU sobre $(0, \infty)$; CD sobre $(-\infty, 0)$
H. Ver gráfica a la derecha.



53. A. $\mathbb{R}$ B. y-int 2
C. Ninguna D. Ninguna
E. Inc sobre $\left(\frac{1}{5}\ln\frac{2}{3}, \infty\right)$; dec sobre $\left(-\infty, \frac{1}{5}\ln\frac{2}{3}\right)$
F. Loc mín $f\left(\frac{1}{5}\ln\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^{3/5} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-2/5}$
G. CU sobre $(-\infty, \infty)$
H. Ver gráfica a la derecha.

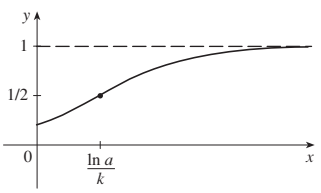


55.

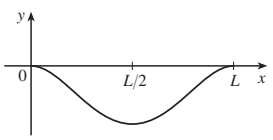


57. a) Cuando $t = (\ln a)/k$ b) Cuando $t = (\ln a)/k$

c)

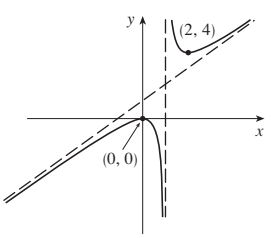


59.

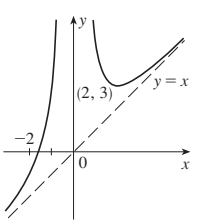


61. $y = x - 1$ **63.** $y = 2x - 2$

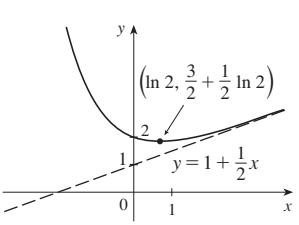
65. A. $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$
B. y-int 0; x-int 0 C. Ninguna
D. VA $x = 1$; SA $y = x + 1$
E. Inc sobre $(-\infty, 0)$, $(2, \infty)$;
dec sobre $(0, 1)$, $(1, 2)$
F. Loc máx $f(0) = 0$;
loc mín $f(2) = 4$
G. CU sobre $(1, \infty)$; CD sobre $(-\infty, 1)$
H. Ver gráfica a la derecha.



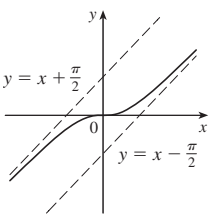
67. A. $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
B. x-int $-\sqrt[3]{4}$ C. Ninguna
D. VA $x = 0$; SA $y = x$
E. Inc sobre $(-\infty, 0)$, $(2, \infty)$;
dec sobre $(0, 2)$
F. Loc mín $f(2) = 3$
G. CU sobre $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$
H. Ver gráfica a la derecha.



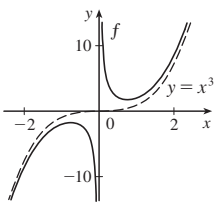
69. A. $\mathbb{R}$ B. y-int 2
C. Ninguna
D. SA $y = 1 + \frac{1}{2}x$
E. Inc sobre $(\ln 2, \infty)$;
dec sobre $(-\infty, \ln 2)$
F. Loc mín $f(\ln 2) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\ln 2$
G. CU sobre $(-\infty, \infty)$
H. Ver gráfica a la derecha.



71.

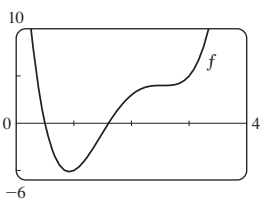


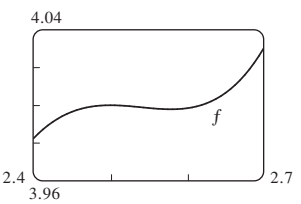
75. VA $x = 0$, asíntota para $y = x^3$



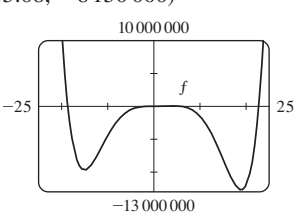
EJERCICIOS 4.6 ■ PÁGINA 324

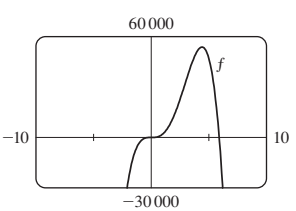
1. Inc sobre $(0.92, 2.5)$, $(2.58, \infty)$; dec sobre, $(2.5, 2.58)$;
loc máx $f(2.5) = 4$; loc mín $f(0.92) \approx -5.12$, $f(2.58) \approx 3.998$;
CU sobre $(-\infty, 1.46)$, $(2.54, \infty)$;
CD sobre $(1.46, 2.54)$; IP $(1.46, -1.40)$, $(2.54, 3.999)$



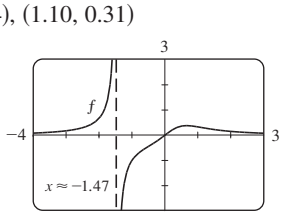


3. Inc sobre $(-15, 4.40)$, $(18.93, \infty)$;
dec sobre $(-\infty, -15)$, $(4.40, 18.93)$;
loc máx $f(4.40) \approx 53\,800$; loc mín $f(-15) \approx -9\,700\,000$,
$f(18.93) \approx -12\,700\,000$; CU sobre $(-\infty, -11.34)$, $(0, 2.92)$,
$(15.08, \infty)$; CD sobre $(-11.34, 0)$, $(2.92, 15.08)$;
IP $(0, 0)$, $\approx (-11.34, -6\,250\,000)$, $(2.92, 31\,800)$,
$(15.08, -8\,150\,000)$

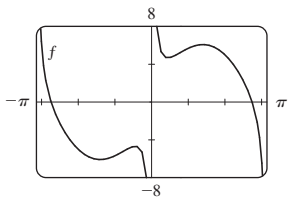




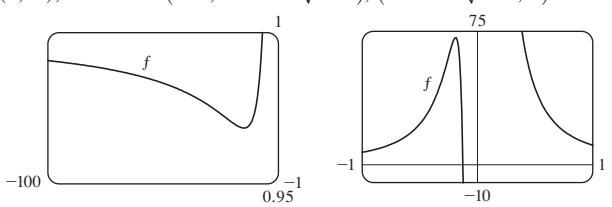
5. Inc sobre $(-\infty, -1.47)$, $(-1.47, 0.66)$; dec sobre $(0.66, \infty)$;
loc máx $f(0.66) \approx 0.38$; CU sobre $(-\infty, -1.47)$, $(-0.49, 0)$,
$(1.10, \infty)$; CD sobre $(-1.47, -0.49)$, $(0, 1.10)$;
IP $(-0.49, -0.44)$, $(1.10, 0.31)$



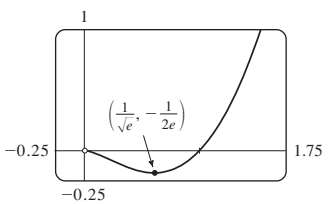
7. Inc sobre $(-1.40, -0.44)$, $(0.44, 1.40)$; dec sobre $(-\pi, -1.40)$, $(-0.44, 0)$, $(0, 0.44)$, $(1.40, \pi)$; loc máx $f(-0.44) \approx -4.68$, $f(1.40) \approx 6.09$; loc mín $f(-1.40) \approx -6.09$, $f(0.44) \approx 5.22$; CU sobre $(-\pi, -0.77)$, $(0, 0.77)$; CD sobre $(-0.77, 0)$, $(0.77, \pi)$; IP $(-0.77, -5.22)$, $(0.77, 5.22)$



9. Inc sobre $\left(-8 - \sqrt{61}, -8 + \sqrt{61}\right)$; dec sobre $\left(-\infty, -8 - \sqrt{61}\right)$, $\left(-8 + \sqrt{61}, 0\right)$, $(0, \infty)$; CU sobre $\left(-12 - \sqrt{138}, -12 + \sqrt{138}\right)$, $(0, \infty)$; CD sobre $\left(-\infty, -12 - \sqrt{138}\right)$, $\left(-12 + \sqrt{138}, 0\right)$



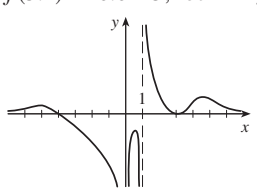
11. a)

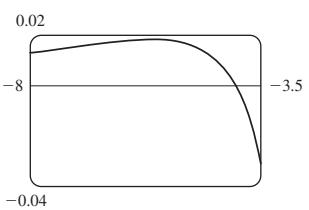


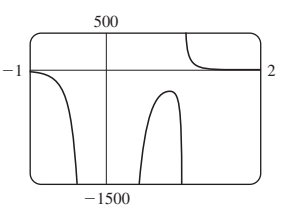
b) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$

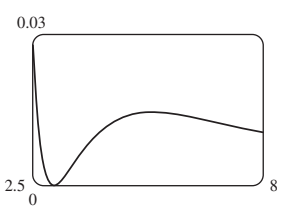
c) Loc mín $f\left(1/\sqrt{e}\right) = -1/(2e)$; CD sobre $(0, e^{-3/2})$; CU sobre $(e^{-3/2}, \infty)$

13. Loc máx $f(-5.6) \approx 0.018$, $f(0.82) \approx -281.5$, $f(5.2) \approx 0.0145$; loc mín $f(3) = 0$







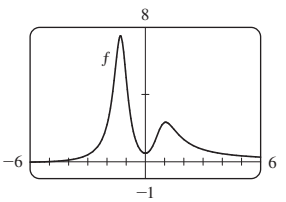


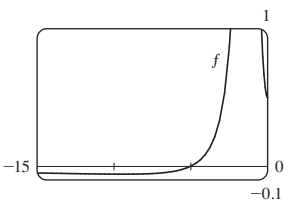
15. $f'(x) = -\dfrac{x(x+1)^2(x^3 + 18x^2 - 44x - 16)}{(x-2)^3(x-4)^5}$

$f''(x) = 2\dfrac{(x+1)(x^6 + 36x^5 + 6x^4 - 628x^3 + 684x^2 + 672x + 64)}{(x-2)^4(x-4)^6}$

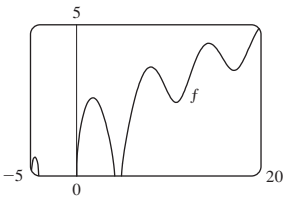
CU sobre $(-35.3, -5.0)$, $(-1, -0.5)$, $(-0.1, 2)$, $(2, 4)$, $(4, \infty)$; CD sobre $(-\infty, -35.3)$, $(-5.0, -1)$, $(-0.5, -0.1)$; IP $(-35.3, -0.015)$, $(-5.0, -0.005)$, $(-1, 0)$, $(-0.5, 0.00001)$, $(-0.1, 0.0000066)$

17. Inc sobre $(-9.41, -1.29)$, $(0, 1.05)$; dec sobre $(-\infty, -9.41)$, $(-1.29, 0)$, $(1.05, \infty)$; loc máx $f(-1.29) \approx 7.49$, $f(1.05) \approx 2.35$; loc mín $f(-9.41) \approx -0.056$, $f(0) = 0.5$; CU sobre $(-13.81, -1.55)$, $(-1.03, 0.60)$, $(1.48, \infty)$; CD sobre $(-\infty, -13.81)$, $(-1.55, -1.03)$, $(0.60, 1.48)$; IP $(-13.81, -0.05)$, $(-1.55, 5.64)$, $(-1.03, 5.39)$, $(0.60, 1.52)$, $(1.48, 1.93)$

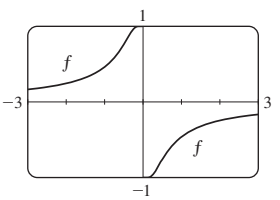




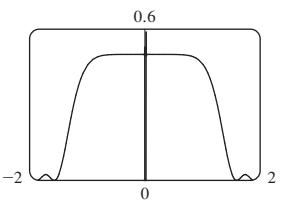
19. Inc sobre $(-4.91, -4.51)$, $(0, 1.77)$, $(4.91, 8.06)$, $(10.79, 14.34)$, $(17.08, 20)$;
dec sobre $(-4.51, -4.10)$, $(1.77, 4.10)$, $(8.06, 10.79)$, $(14.34, 17.08)$;
loc máx $f(-4.51) \approx 0.62$, $f(1.77) \approx 2.58$, , $f(14.34) \approx 4.39$;
loc mín $f(10.79) \approx 2.43$, $f(17.08) \approx 3.49$;
CU sobre $(9.60, 12.25)$, $(15.81, 18.65)$;
CD sobre $(-4.91, -4.10)$, $(0, 4.10)$, $(4.91, 9.60)$, $(12.25, 15.81)$, $(18.65, 20)$;
IP en $(9.60, 2.95)$, $(12.25, 3.27)$, $(15.81, 3.91)$, $(18.65, 4.20)$

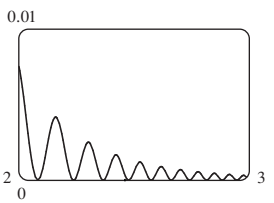


21. Inc sobre $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$;
CU sobre $(-\infty, -0.42)$, $(0, 0.42)$;
CD sobre $(-0.42, 0)$, $(0.42, \infty)$;
IP $(\mp 0.42, \pm 0.83)$

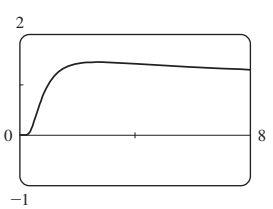


23.





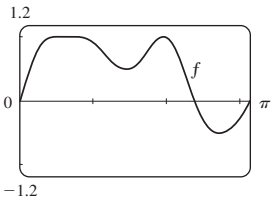
25. a)

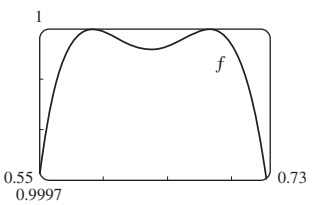


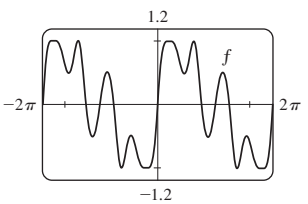
b) $\lim_{x \to 0^+} x^{1/x} = 0$, $\lim_{x \to \infty} x^{1/x} = 1$

c) Loc máx $f(e) = e^{1/e}$ d) IP en $x \approx 0.58, 4.37$

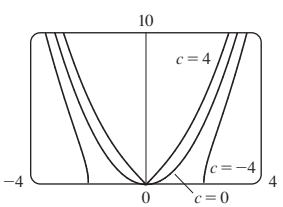
27. Máx $f(0.59) \approx 1$, $f(0.68) \approx 1$, $f(1.96) \approx 1$; mín $f(0.64) \approx 0.99996$, $f(1.46) \approx 0.49$, $f(2.73) \approx -0.51$; IP (0.61, 0.99998), (0.66, 0.99998), (1.17, 0.72), (1.75, 0.77), (2.28, 0.34)



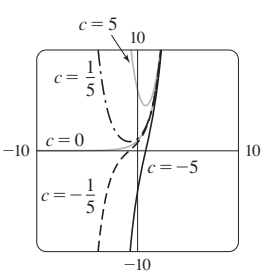




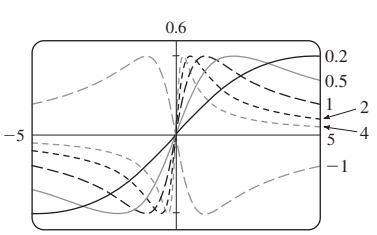
29. Para $c \geqslant 0$, existe un mínimo absoluto en el origen. No hay otros máximos o mínimos. Las c más negativas están más alejados de los dos IP movidos desde el origen. $c = 0$ es un valor de transición.



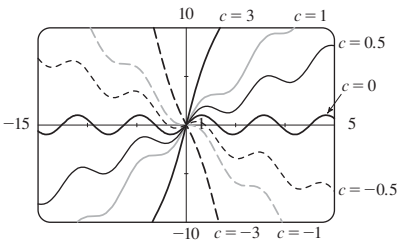
31. Para $c < 0$, no hay ningún punto extremo y una IP, que disminuye a lo largo del eje x. Para $c > 0$, no hay ninguna IP y un punto mínimo.



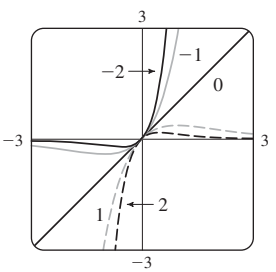
33. Para $c > 0$, los valores máximos y mínimos siempre son $\pm\frac{1}{2}$, pero los puntos extremos e IP se acercan al eje y conforme c aumenta. $c = 0$ es un valor de transición: cuando c se sustituye por $-c$, la curva se refleja en el eje x.



35. Para $|c| < 1$, la gráfica tiene valores loc máx y mín; para $|c| \geqslant 1$ que no es. La función aumenta para $c \geqslant 1$ y disminuye para $c \leqslant -1$. Cuando c cambia, el IP se mueve verticalmente pero no horizontalmente.

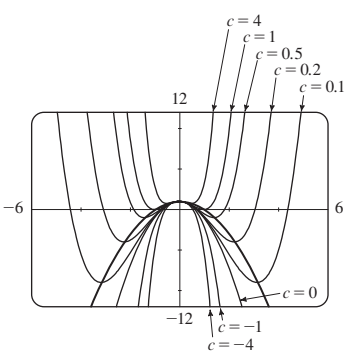


37.



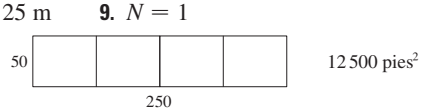
Para $c > 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
Para $c < 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
Cuando $|c|$ crece, los puntos máx y mín y los IP se acercan al origen.

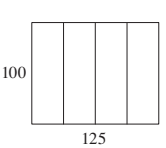
39. a) Positiva b)



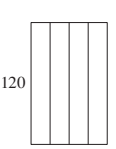
EJERCICIOS 4.7 ■ PÁGINA 331

1. a) 11, 12 b) 11.5, 11.5 **3.** 10, 10 **5.** $\frac{9}{4}$
7. 25 m por 25 m **9.** $N = 1$
11. a)



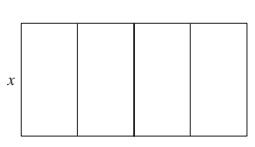


12 500 pies²



9 000 pies²

b)



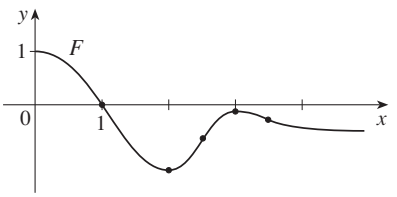
c) $A = xy$ d) $5x + 2y = 750$ e) $A(x) = 375x - \frac{5}{2}x^2$
f) 14062.5 pies^2
13. 1000 pies por 1500 pies **15.** 4000 cm^3 **17.** \$191.28
19. $\left(-\frac{6}{5}, \frac{3}{5}\right)$ **21.** $\left(-\frac{1}{3}, \pm\frac{4}{3}\sqrt{2}\right)$ **23.** Cuadrado, lado $\sqrt{2}r$
25. $L/2$, $\sqrt{3}\,L/4$ s **27.** Base $\sqrt{3}r$, altura $3r/2$
29. $4\pi r^3/(3\sqrt{3})$ **31.** $\pi r^2(1 + \sqrt{5})$ **33.** 24 cm, 36 cm
35. a) Utilice todo alambre para el cuadrado
b) $40\sqrt{3}/(9 + 4\sqrt{3})$ m para el cuadrado
37. Altura = radio = $\sqrt[3]{V/\pi}$ cm
39. $V = 2\pi R^3/(9\sqrt{3})$ **43.** $E^2/(4r)$
45. a) $\frac{3}{2}s^2 \csc\theta\,(\csc\theta - \sqrt{3}\cot\theta)$ b) $\cos^{-1}(1/\sqrt{3}) \approx 55°$
c) $6s[h + s/(2\sqrt{2})]$
47. directamente a B **49.** $\approx$4.85 km al este de la refinería
51. $10\sqrt[3]{3}/(1 + \sqrt[3]{3})$ pies de la fuente mayor
53. $(a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$ **55.** $2\sqrt{6}$
57. b) i) \$342,491; \$342/unidades; \$390/unidad ii) 400
iii) \$320/unidad
59. a) $p(x) = 19 - \frac{1}{3000}x$ b) \$9.50
61. a) $p(x) = 550 - \frac{1}{10}x$ b) \$175 c) \$100
65. 9.35 m **69.** $x = 6$ pulg **71.** $\pi/6$
73. A una distancia $5 - 2\sqrt{5}$ de A **75.** $\frac{1}{2}(L + W)^2$
77. a) Cerca de 5.1 km de B b) C está cerca de B;
C está cerca de a $W/L = \sqrt{25 + x^2}/x$ donde $x = |BC|$
c) $\approx$1.07; no hay tal valor d) $\sqrt{41}/4 \approx 1.6$

EJERCICIOS 4.8 ■ PÁGINA 342

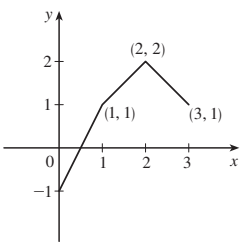
1. a) $x_2 \approx 2.3$, $x_3 \approx 3$ b) No
3. $\frac{9}{2}$ **5.** a, b, c **7.** 1.1785 **9.** -1.25 **11.** 1.82056420
13. 1.217562 **15.** -1.964636
17. -3.637958, -1.862365, 0.889470
19. 1.412391, 3.057104 **21.** 0, $\pm$0.902025
23. -1.93822883, -1.21997997, 1.13929375, 2.98984102
25. 0.76682579 **27.** 0.21916368, 1.08422462
29. b) 31.622777
35. a) -1.293227, -0.441731, 0.507854 b) -2.0212
37. (1.520092, 2.306964) **39.** (0.410245, 0.347810)
41. 0.76286%

EJERCICIOS 4.9 PÁGINA 348

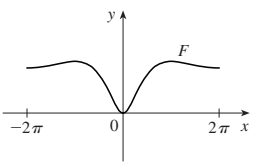
1. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + C$ **3.** $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{5}x^4 + C$
5. $F(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + C$ **7.** $F(x) = 5x^{7/5} + 40x^{1/5} + C$
9. $F(x) = \sqrt{2}x + C$ **11.** $F(x) = 2x^{3/2} - \frac{3}{2}x^{4/3} + C$
13. $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}x - 2\ln|x| + C_1 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{5}x - 2\ln|x| + C_2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$
15. $G(t) = 2t^{1/2} + \frac{2}{3}t^{3/2} + \frac{2}{5}t^{5/2} + C$
17. $H(\theta) = -2\cos\theta - \tan\theta + C_n$ sobre $(n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2)$, n un entero
19. $F(x) = 5e^x - 3\operatorname{senh} x + C$
21. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln|x| - 1/x^2 + C$
23. $F(x) = x^5 - \frac{1}{3}x^6 + 4$ **25.** $f(x) = x^5 - x^4 + x^3 + Cx + D$
27. $\frac{3}{20}x^{8/3} + Cx + D$ **29.** $f(t) = -\operatorname{sen} t + Ct^2 + Dt + E$
31. $f(x) = x + 2x^{3/2} + 5$ **33.** $f(t) = 4\arctan t - \pi$
35. $2\operatorname{sen} t + \tan t + 4 - 2\sqrt{3}$
37. $\frac{3}{2}x^{2/3} - \frac{1}{2}$ si $x > 0$; $\frac{3}{2}x^{2/3} - \frac{5}{2}$ si $x < 0$
39. $-x^2 + 2x^3 - x^4 + 12x + 4$ **41.** $-\operatorname{sen}\theta - \cos\theta + 5\theta + 4$
43. $f(x) = 2x^2 + x^3 + 2x^4 + 2x + 3$ **45.** $x^2 - \cos x - \frac{1}{2}\pi x$
47. $-\ln x + (\ln 2)x - \ln 2$ **49.** 10 **51.** b
53.



55.



57.



59. $s(t) = 1 - \cos t - \operatorname{sen} t$
61. $s(t) = \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - 2t + 3$
63. $s(t) = -10\operatorname{sen} t - 3\cos t + (6/\pi)t + 3$
65. a) $s(t) = 450 - 4.9t^2$ b) $\sqrt{450/4.9} \approx 9.58$ s
c) $-9.8\sqrt{450/4.9} \approx -93.9$ m/s d) Acerca de 9.09 s
69. 225 pies **71.** \$742.08 **73.** $\frac{130}{11} \approx 11.8$ s
75. $\frac{88}{15} \approx 5.87$ pies/s^2 **77.** 62500 km/h^2 ≈ 4.82 m/s^2
79. a) 22.9125 mi b) 21.675 mi c) 30 mín 33 s
d) 55.425 mi

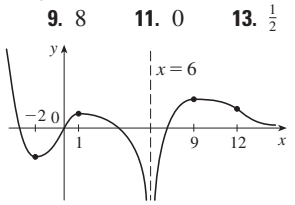
REPASO DEL CAPÍTULO 4 ■ PÁGINA 351

Examen rápido Verdadero-Falso

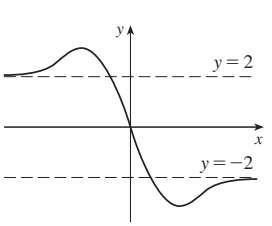
1. Falsa **3.** Falsa **5.** Verdadero **7.** Falsa **9.** Verdadero
11. Verdadero **13.** Falsa **15.** Verdadero **17.** Verdadero
19. Verdadero

Ejercicios

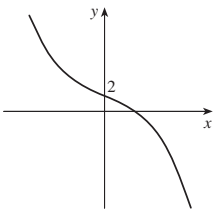
1. Abs máx $f(4) = 5$, abs y loc mín $f(3) = 1$
3. Abs máx $f(2) = \frac{2}{5}$, abs y loc mín $f(-\frac{1}{3}) = -\frac{9}{2}$
5. Abs y loc máx $f(\pi/6) = \pi/6 + \sqrt{3}$,
abs mín $f(-2) = -\pi - 2$, loc mín $f(5\pi/6) = 5\pi/6 - \sqrt{3}$
7. 1 **9.** 8 **11.** 0 **13.** $\frac{1}{2}$
15.



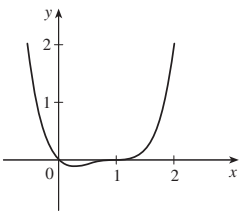
17.



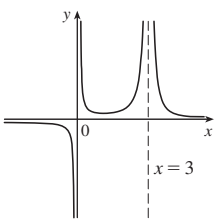
19. A. $\mathbb{R}$ B. y-int 2
C. Ninguna D. Ninguna
E. Dec sobre $(-\infty, \infty)$ F. Ninguno
G. CU sobre $(-\infty, 0)$;
CD sobre $(0, \infty)$; IP $(0, 2)$
H. Ver gráfica a la derecha.



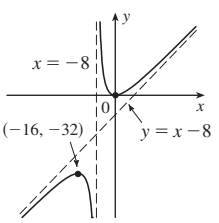
21. A. $\mathbb{R}$ B. y-int 0; x-int 0, 1
C. Ninguna D. Ninguna
E. Inc sobre $\left(\frac{1}{4}, \infty\right)$, dec sobre $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$
F. Loc mín $f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{27}{256}$
G. CU sobre $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$, $(1, \infty)$;
CD sobre $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$; IP $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{16}\right)$, $(1, 0)$
H. Ver gráfica a la derecha



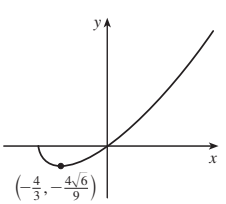
23. A. $\{x \mid x \neq 0, 3\}$
B. Ninguna C. Ninguna
D. HA $y = 0$; VA $x = 0$, $x = 3$
E. Inc sobre $(1, 3)$; dec sobre $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(3, \infty)$
F. Loc mín $f(1) = \frac{1}{4}$
G. CU sobre $(0, 3)$, $(3, \infty)$; CD sobre $(-\infty, 0)$
H. Ver gráfica a la derecha



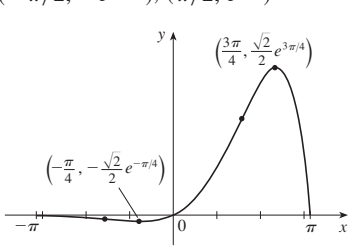
25. A. $\{x \mid x \neq -8\}$
B. y-int 0, x-int 0 C. Ninguna
D. VA $x = -8$; SA $y = x - 8$
E. Inc sobre $(-\infty, -16)$, $(0, \infty)$;
dec sobre $(-16, -8)$, $(-8, 0)$
F. Loc máx $f(-16) = -32$;
loc mín $f(0) = 0$
G. CU sobre $(-8, \infty)$; CD sobre $(-\infty, -8)$
H. Ver gráfica a la derecha.



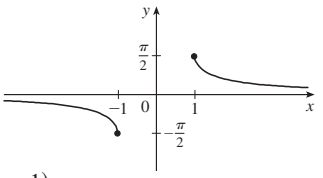
27. A. $[-2, \infty)$
B. y-int 0; x-int -2, 0
C. Ninguna D. Ninguna
E. Inc sobre $\left(-\frac{4}{3}, \infty\right)$, dec sobre $\left(-2, -\frac{4}{3}\right)$
F. Loc mín $f\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{4}{9}\sqrt{6}$
G. CU sobre $(-2, \infty)$
H. Ver gráfica a la derecha.



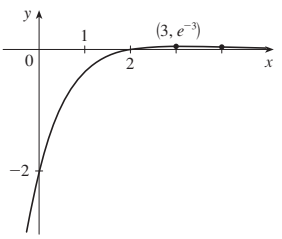
29. A. $[-\pi, \pi]$ B. y-int 0; x-int $-\pi$, 0, π
C. Ninguna D. Ninguna
E. Inc sobre $\left(-\pi/4, 3\pi/4\right)$; dec sobre $\left(-\pi, -\pi/4\right)$, $\left(3\pi/4, \pi\right)$
F. Loc máx $f(3\pi/4) = \frac{1}{2}\sqrt{2}\, e^{3\pi/4}$, loc mín $f(-\pi/4) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\, e^{3\pi/4}$
G. CU sobre $(-\pi/2, \pi/2)$; CD sobre $(-\pi, -\pi/2)$, $(\pi/2, \pi)$;
IP $(-\pi/2, -e^{-\pi/2})$, $(\pi/2, e^{\pi/2})$
H.



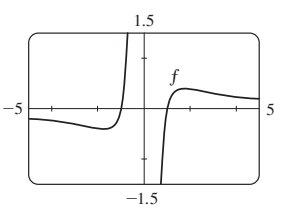
31. A. $\{x \mid |x| \geq 1\}$
B. Ninguna C. Acerca de (0, 0)
D. HA $y = 0$
E. Dec sobre $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$
F. Ninguno
G. CU sobre $(1, \infty)$; CD sobre $(-\infty, -1)$
H. Ver gráfica a la derecha.



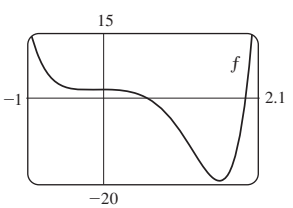
33. A. $\mathbb{R}$
B. y-int -2; x-int 2
C. Ninguna D. HA $y = 0$
E. Inc sobre $(-\infty, 3)$; dec sobre $(3, \infty)$
F. Loc máx $f(3) = e^{-3}$
G. CU sobre $(4, \infty)$; CD sobre $(-\infty, 4)$;
IP $(4, 2e^{-4})$
H. Ver gráfica a la derecha.

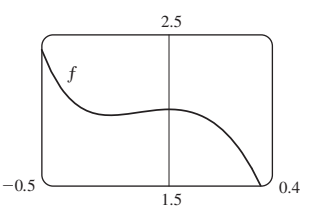


35. Inc sobre $\left(-\sqrt{3}, 0\right)$, $\left(0, \sqrt{3}\right)$;
dec sobre $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$, $\left(\sqrt{3}, \infty\right)$;
loc máx $f\left(\sqrt{3}\right) = \frac{2}{9}\sqrt{3}$,
loc mín $f\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{2}{9}\sqrt{3}$;
CU sobre $\left(-\sqrt{6}, 0\right)$, $\left(\sqrt{6}, \infty\right)$;
CD sobre $\left(-\infty, -\sqrt{6}\right)$, $\left(0, \sqrt{6}\right)$;
IP $\left(\sqrt{6}, \frac{5}{36}\sqrt{6}\right)$, $\left(-\sqrt{6}, -\frac{5}{36}\sqrt{6}\right)$

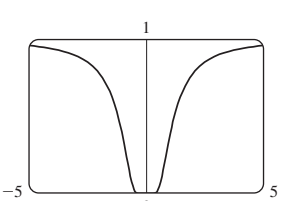


37. Inc sobre $(-0.23, 0)$, $(1.62, \infty)$; dec sobre $(-\infty, -0.23)$, $(0, 1.62)$;
loc máx $f(0) = 2$; loc mín $f(-0.23) \approx 1.96$, $f(1.62) \approx -19.2$; CU sobre $(-\infty, -0.12)$, $(1.24, \infty)$;
CD sobre $(-0.12, 1.24)$; IP $(-0.12, 1.98)$, $(1.24, -12.1)$





39. $(\pm 0.82, 0.22)$; $\left(\pm\sqrt{2/3}, e^{-3/2}\right)$



41. -2.96, -0.18, 3.01; -1.57, 1.57; -2.16, -0.75, 0.46, 2.21

43. Para $C > -1$, f es periódica con periodo 2π y tiene máximos locales en $2n\pi + \pi/2$, n un número entero. $C \leq -1$, f no tiene ningún gráfico. Para $-1 < C \leq 1$ tiene asíntotas verticales. $C > 1$, f es continua sobre $\mathbb{R}$. Cuando C aumenta, f se mueve hacia arriba y sus oscilaciones son menos pronunciadas.

49. a) 0 b) CU sobre $\mathbb{R}$ **53.** $3\sqrt{3}\, r^2$
55. $4/\sqrt{3}$ cm de D **57.** $L = C$ **59.** \$11.50
61. 1.297383 **63.** 1.16718557

65. $f(x) = \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^{-1} x + C$

67. $f(x) = \frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{3}{5}x^{5/3} + C$

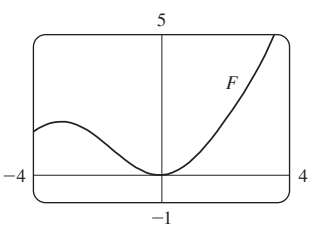
69. $f(t) = t^2 + 3\cos t + 2$

71. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x^3 + 4x^4 + 2x + 1$

73. $s(t) = t^2 - \tan^{-1} t + 1$

75. b) $0.1e^x - \cos x + 0.9$

c)



77. No

79. b) Acerca de 8.5 pulg por 2 pulg c) $20/\sqrt{3}$ pulg, $20\sqrt{2/3}$ pulg

83. a) $20\sqrt{2} \approx 28$ pies

b) $\dfrac{dI}{dt} = \dfrac{-480k(h-4)}{[(h-4)^2 + 1600]^{5/2}}$, donde k es la constante de proporcionalidad.

PROBLEMAS ADICIONALES ■ PÁGINA 356

3. Abs máx $f(-5) = e^{45}$, no abs mín **7.** 24

9. $(-2, 4), (2, -4)$ **13.** $(m/2, m^2/4)$ **15.** $a \leqslant e^{1/e}$

19. a) $T_1 = D/c_1$, $T_2 = (2h \sec\theta)/c_1 + (D - 2h\tan\theta)/c_2$, $T_3 = \sqrt{4h^2 + D^2}/c_1$

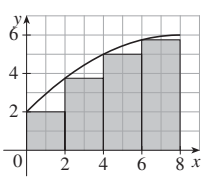
c) $c_1 \approx 3.85$ km/s, $c_2 \approx 7.66$ km/s, $h \approx 0.42$ km

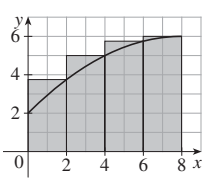
23. $3/(\sqrt[3]{2} - 1) \approx 11\frac{1}{2}$ h

CAPÍTULO 5

EJERCICIOS 5.1 ■ PÁGINA 369

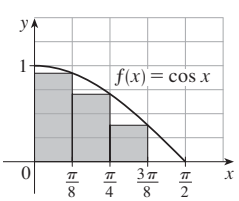
1. a) $L_4 = 33$, $R_4 = 41$

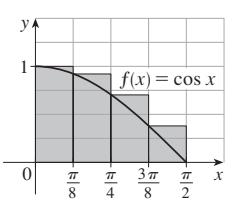




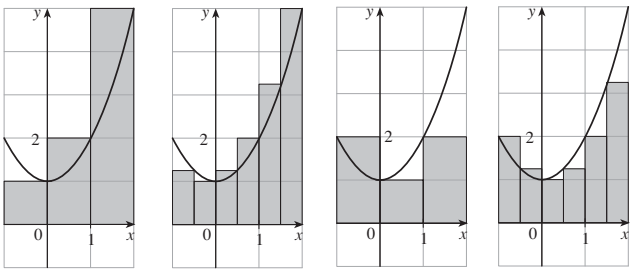
b) $L_8 \approx 35.2$, $R_8 \approx 39.2$

3. a) 0.7908, subestimado b) 1.1835, sobreestimado

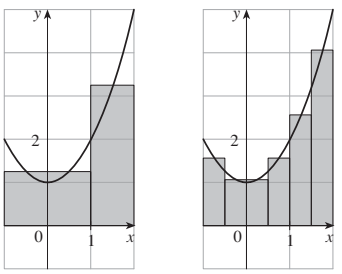




5. a) 8, 6.875 b) 5, 5.375

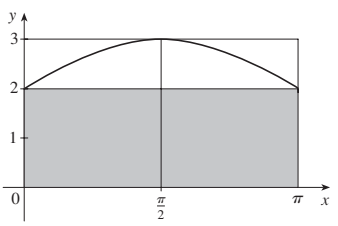


c) 5.75, 5.9375

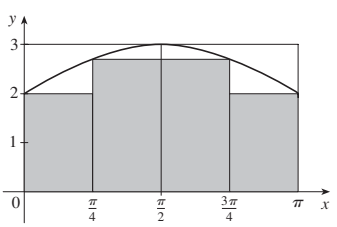


d) M_6

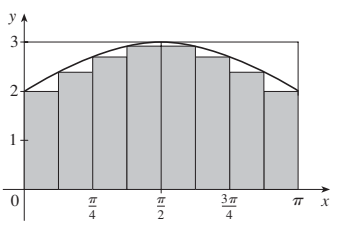
7. $n = 2$: superior $= 3\pi \approx 9.42$, inferior $= 2\pi \approx 6.28$



$n = 4$: superior $= (10 + \sqrt{2})(\pi/4) \approx 8.96$,
inferior $= (8 + \sqrt{2})(\pi/4) \approx 7.39$



$n = 8$: superior ≈ 8.65, inferior ≈ 7.86



9. 0.2533, 0.2170, 0.2101, 0.2050; 0.2

11. a) Izquierda: 0.8100, 0.7937, 0.7904; derecha: 0.7600, 0.7770, 0.7804

13. 34.7 pies, 44.8 pies **15.** 63.2 L, 70 L **17.** 155 pies

19. $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\dfrac{2(1+2i/n)}{(1+2i/n)^2+1}\cdot\dfrac{2}{n}$ **21.** $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\operatorname{sen}(\pi i/n)}\cdot\dfrac{\pi}{n}$

23. La región bajo la gráfica de $y=\tan x$ de 0 a $\pi/4$

25. a) $L_n < A < R_n$

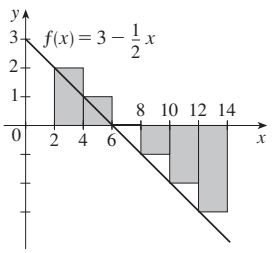
27. a) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{64}{n^6}\sum_{i=1}^{n} i^5$ b) $\dfrac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$ c) $\frac{32}{3}$

29. sen b, 1

EJERCICIOS 5.2 ■ PÁGINA 382

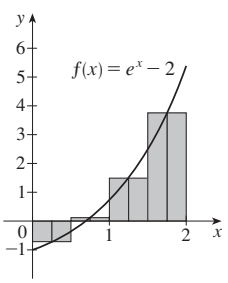
1. -6

La suma de Riemann representa la suma de las áreas de los dos rectángulos arriba del eje de las x menos la suma de las áreas de los tres rectángulos bajo el eje de las x; esto es, el área neta de los rectángulos con respecto al eje x.



3. 2.322986

La suma de Riemann representa la suma de las áreas de los tres rectángulos por encima del eje de las x menos el área de los rectángulos bajo el eje x.



5. a) 6 b) 4 c) 2

7. Inferior, $L_5=-64$; superior, $R_5=16$

9. 6.1820 **11.** 0.9071 **13.** 0.9029, 0.9018

15.

n	R_n
5	1.933766
10	1.983524
50	1.999342
100	1.999836

Los valores de R_n parecen aproximarse a 2

17. $\int_2^6 x\ln(1+x^2)\,dx$ **19.** $\int_2^7 (5x^3-4x)\,dx$

21. -9 **23.** $\frac{2}{3}$ **25.** $-\frac{3}{4}$

29. $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\dfrac{2+4i/n}{1+(2+4i/n)^5}\cdot\dfrac{4}{n}$

31. $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\operatorname{sen}\dfrac{5\pi i}{n}\right)\dfrac{\pi}{n}=\dfrac{2}{5}$

33. a) 4 b) 10 c) -3 d) 2

35. $\frac{3}{2}$ **37.** $3+\frac{9}{4}\pi$ **39.** $\frac{5}{2}$ **41.** 0 **43.** 3

45. e^5-e^3 **47.** $\int_{-1}^{5} f(x)\,dx$ **49.** 122

51. B < E < A < D < C **53.** 15

59. $3\le\int_1^4\sqrt{x}\,dx\le 6$ **61.** $\dfrac{\pi}{12}\le\int_{\pi/4}^{\pi/3}\tan x\,dx\le\dfrac{\pi}{12}\sqrt{3}$

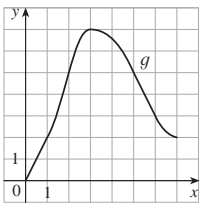
63. $0\le\int_0^2 xe^{-x}\,dx\le 2/e$ **71.** $\int_0^1 x^4\,dx$ **73.** $\frac{1}{2}$

EJERCICIOS 5.3 ■ PÁGINA 394

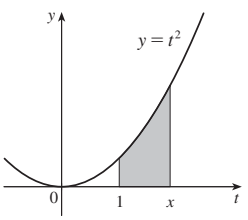
1. Un proceso deshace lo que hace el otro. Ver el teorema fundamental del cálculo, página 393

3. a) 0, 2, 5, 7, 3
b) (0, 3)
c) $x=3$

d)



5.



a), b) x^2

7. $g'(x)=1/(x^3+1)$ **9.** $g'(s)=(s-s^2)^8$

11. $F'(x)=-\sqrt{1+\sec x}$ **13.** $h'(x)=xe^x$

15. $y'=\sqrt{\tan x+\sqrt{\tan x}}\,\sec^2 x$

17. $y'=\dfrac{3(1-3x)^3}{1+(1-3x)^2}$ **19.** $\frac{3}{4}$ **21.** 63 **23.** $\frac{52}{3}$

25. $1+\sqrt{3}/2$ **27.** $-\frac{37}{6}$ **29.** $\frac{40}{3}$ **31.** 1 **33.** $\frac{49}{3}$

35. $\ln 2+7$ **37.** $\dfrac{1}{e+1}+e-1$ **39.** $4\pi/3$

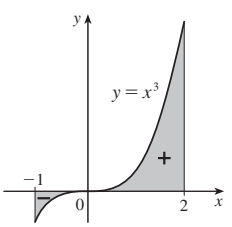
41. e^2-1 **43.** 0

45. La función $f(x)=x^{-4}$ no es continua sobre el intervalo $[-2, 1]$, por lo que el TFC2 no es aplicable.

47. La función $f(\theta)=\sec\theta\tan\theta$ no es continua sobre el intervalo $[\pi/3, \pi]$, de manera que TFC2 no es aplicable.

49. $\frac{243}{4}$ **51.** 2

53. 3.75



55. $g'(x)=\dfrac{-2(4x^2-1)}{4x^2+1}+\dfrac{3(9x^2-1)}{9x^2+1}$

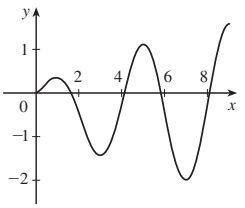
57. $F'(x)=2xe^{x^4}-e^{x^2}$

59. $y'=\operatorname{sen}x\ln(1+2\cos x)+\cos x\ln(1+2\operatorname{sen}x)$

61. $(-4, 0)$ **63.** 29

65. a) $-2\sqrt{n}$, $\sqrt{4n-2}$, n es un entero >0
b) $(0, 1)$, $\left(-\sqrt{4n-1}, -\sqrt{4n-3}\right)$, y $\left(\sqrt{4n-1}, \sqrt{4n+1}\right)$, n es un entero >0 c) 0.74

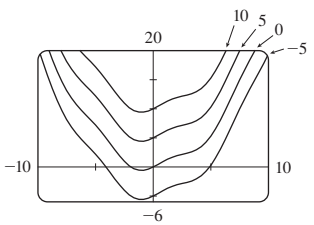
67. a) Loc máx en 1 y 5; loc mín en 3 y 7
b) $x = 9$
c) $(\frac{1}{2}, 2)$, (4, 6), (8, 9)
d) Véase la gráfica a la derecha.



69. $\frac{1}{4}$ **77.** $f(x) = x^{3/2}$, $a = 9$
79. b) gasto promedio sobre $[0, t]$; minimiza el gasto promedio

EJERCICIOS 5.4 ■ PÁGINA 403

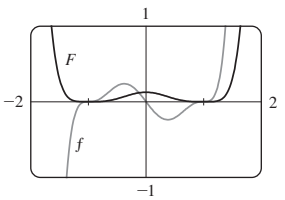
5. $\frac{1}{3}x^3 - (1/x) + C$ **7.** $\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{8}x^2 - 2x + C$
9. $\frac{2}{3}u^3 + \frac{9}{2}u^2 + 4u + C$ **11.** $\frac{1}{3}x^3 - 4\sqrt{x} + C$
13. $-\cos x + \cosh x + C$ **15.** $\frac{1}{2}\theta^2 + \csc\theta + C$
17. $\tan\alpha + C$
19. $\operatorname{sen} x + \frac{1}{4}x^2 + C$

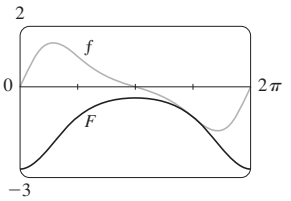


21. $-\frac{10}{3}$ **23.** $\frac{21}{5}$ **25.** -2 **27.** $5e^{\pi} + 1$ **29.** 36
31. $\frac{55}{63}$ **33.** $\frac{3}{4} - 2\ln 2$ **35.** $\dfrac{1}{11} + \dfrac{9}{\ln 10}$ **37.** $1 + \pi/4$
39. $\frac{256}{5}$ **41.** $\pi/3$ **43.** $\pi/6$ **45.** -3.5
47. ≈ 1.36 **49.** $\frac{4}{3}$
51. El aumento de peso del niño (en libras) entre las edades de 5 y 10
53. Número de galones de petróleo se filtró en las primeras 2 horas
55. Aumento de los ingresos cuando la producción se aumentó de 1 000 a 5 000 unidades.
57. Newton-metros **59.** a) $-\frac{3}{2}$ m b) $\frac{41}{6}$ m
61. a) $v(t) = \frac{1}{2}t^2 + 4t + 5$ m/s b) $416\frac{2}{3}$ m
63. $46\frac{2}{3}$ kg **65.** 1.4 mi **67.** \$58 000
69. 5443 bacterias **71.** 4.75×10^5 megawatts-hora

EJERCICIOS 5.5 ■ PÁGINA 413

1. $-e^{-x} + C$ **3.** $\frac{2}{9}(x^3 + 1)^{3/2} + C$ **5.** $-\frac{1}{4}\cos^4\theta + C$
7. $-\frac{1}{2}\cos(x^2) + C$ **9.** $-\frac{1}{20}(1 - 2x)^{10} + C$
11. $\frac{1}{3}(2x + x^2)^{3/2} + C$ **13.** $-\frac{1}{3}\ln|5 - 3x| + C$
15. $-(1/\pi)\cos\pi t + C$ **17.** $\dfrac{1}{1 - e^u} + C$
19. $\frac{2}{3}\sqrt{3ax + bx^3} + C$ **21.** $\frac{1}{3}(\ln x)^3 + C$ **23.** $\frac{1}{4}\tan^4\theta + C$
25. $\frac{2}{3}(1 + e^x)^{3/2} + C$ **27.** $\frac{1}{15}(x^3 + 3x)^5 + C$
29. $-\dfrac{1}{\ln 5}\cos(5^t) + C$ **31.** $e^{\tan x} + C$ **33.** $-\dfrac{1}{\operatorname{sen} x} + C$
35. $-\frac{2}{3}(\cot x)^{3/2} + C$ **37.** $\frac{1}{3}\operatorname{senh}^3 x + C$
39. $-\ln(1 + \cos^2 x) + C$ **41.** $\ln|\operatorname{sen} x| + C$
43. $\ln|\operatorname{sen}^{-1} x| + C$ **45.** $\tan^{-1} x + \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C$
47. $\frac{1}{40}(2x + 5)^{10} - \frac{5}{36}(2x + 5)^9 + C$
49. $\frac{1}{8}(x^2 - 1)^4 + C$ **51.** $-e^{\cos x} + C$





53. $2/\pi$ **55.** $\frac{45}{28}$ **57.** 4 **59.** $e - \sqrt{e}$ **61.** 0
63. 3 **65.** $\frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1)a^3$ **67.** $\frac{16}{15}$ **69.** 2
71. $\ln(e + 1)$ **73.** $\frac{1}{6}$ **75.** $\sqrt{3} - \frac{1}{3}$ **77.** 6π
79. Todas las áreas son iguales **81.** ≈ 4512 L
83. $\dfrac{5}{4\pi}\left(1 - \cos\dfrac{2\pi t}{5}\right)$ L **85.** 5 **91.** $\pi^2/4$

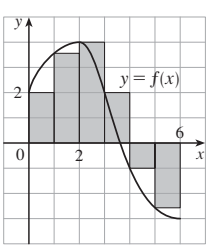
REPASO DEL CAPÍTULO 5 ■ PÁGINA 416

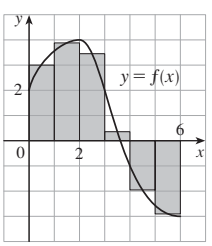
Examen rápido Verdadero-Falso

1. Verdadero **3.** Verdadero **5.** Falsa **7.** Verdadero
9. Verdadero **11.** Falso **13.** Verdadero **15.** Falso
17. Falso

Ejercicios

1. a) 8 b) 5.7





3. $\frac{1}{2} + \pi/4$ **5.** 3 **7.** f es c, f' es b, $\int_0^x f(t)\,dt$ es a
9. 37 **11.** $\frac{9}{10}$ **13.** -76 **15.** $\frac{21}{4}$ **17.** No existe
19. $\frac{1}{3}\operatorname{sen} 1$ **21.** 0 **23.** $-(1/x) - 2\ln|x| + x + C$
25. $\sqrt{x^2 + 4x} + C$ **27.** $\dfrac{1}{2\pi}\operatorname{sen}^2\pi t + C$
29. $2e^{\sqrt{x}} + C$ **31.** $-\frac{1}{2}[\ln(\cos x)]^2 + C$
33. $\frac{1}{4}\ln(1 + x^4) + C$ **35.** $\ln|1 + \sec\theta| + C$ **37.** $\frac{23}{3}$
39. $2\sqrt{1 + \operatorname{sen} x} + C$ **41.** $\frac{64}{5}$ **43.** $F'(x) = x^2/(1 + x^3)$
45. $g'(x) = 4x^3\cos(x^8)$ **47.** $y' = (2e^x - e^{\sqrt{x}})/(2x)$
49. $4 \leq \int_1^3 \sqrt{x^2 + 3}\,dx \leq 4\sqrt{3}$ **55.** 0.280981
57. Número de barriles de petróleo consumidos desde 01 de enero de 2000 hasta 01 de enero de 2008.

59. 72,400 **61.** 3 **63.** $c \approx 1.62$
65. $e^{2x}(2x - 1)/(1 - e^{-x})$ **71.** $\frac{2}{3}$

PROBLEMAS ADICIONALES ■ PÁGINA 420

1. $\pi/2$ **3.** $2k$ **5.** -1 **7.** e^{-2} **9.** $[-1, 2]$
11. a) $\frac{1}{2}(n - 1)n$
b) $\frac{1}{2}[\![b]\!](2b - [\![b]\!] - 1) - \frac{1}{2}[\![a]\!](2a - [\![a]\!] - 1)$
17. $2(\sqrt{2} - 1)$

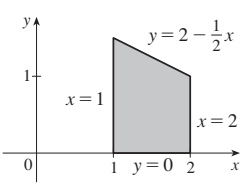
CAPÍTULO 6

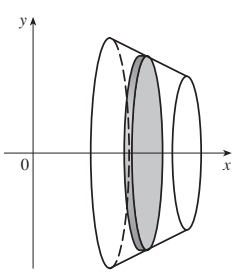
EJERCICIOS 6.1 ■ PÁGINA 427

1. $\frac{32}{3}$ **3.** $e - (1/e) + \frac{10}{3}$ **5.** $e - (1/e) + \frac{4}{3}$ **7.** $\frac{9}{2}$
9. $\ln 2 - \frac{1}{2}$ **11.** $\frac{8}{3}$ **13.** 72 **15.** $e - 2$ **17.** $\frac{32}{3}$
19. $2/\pi + \frac{2}{3}$ **21.** $2 - 2 \ln 2$ **23.** $\frac{1}{2}$ **25.** $\frac{59}{12}$ **27.** $\ln 2$
29. $\frac{5}{2}$ **31.** $\frac{3}{2}\sqrt{3} - 1$ **33.** 0, 0.90; 0.04
35. -1.11, 1.25, 2.86; 8.38 **37.** 2.80123 **39.** 0.25142
41. $12\sqrt{6} - 9$ **43.** $117\frac{1}{3}$ pies **45.** 4232 cm^2
47. a) auto A b) la distancia a la que A es aventajado por B después de un minuto c) auto A d) $t \approx 2.2$ mín
49. $\frac{24}{5}\sqrt{3}$ **51.** $4^{2/3}$ **53.** ± 6
55. $0 < m < 1$; $m - \ln m - 1$

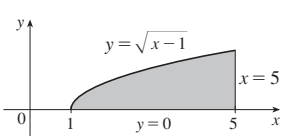
EJERCICIOS 6.2 ■ PÁGINA 438

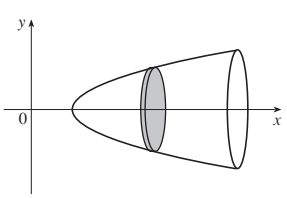
1. $19\pi/12$



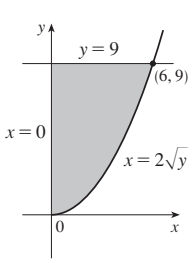


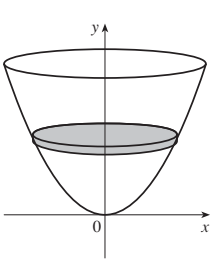
3. 8π



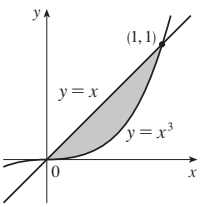


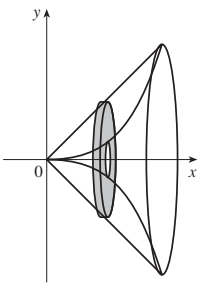
5. 162π



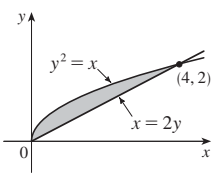


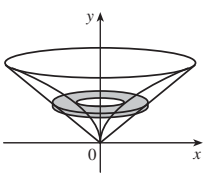
7. $4\pi/21$



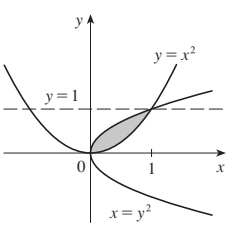


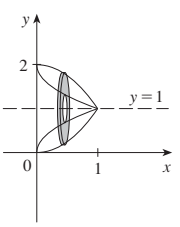
9. $64\pi/15$



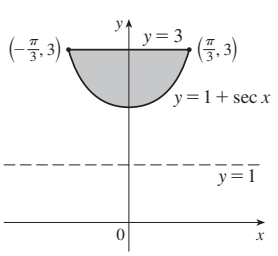


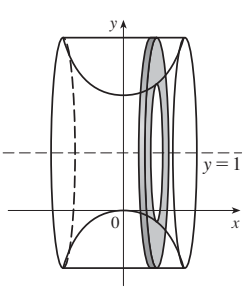
11. $11\pi/30$



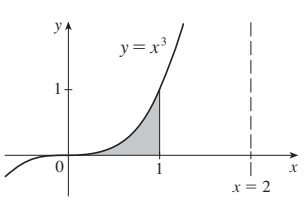


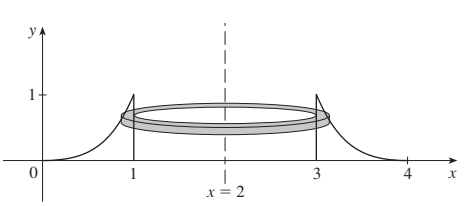
13. $2\pi(\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3})$



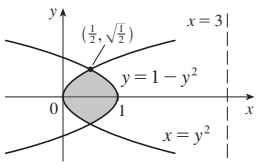


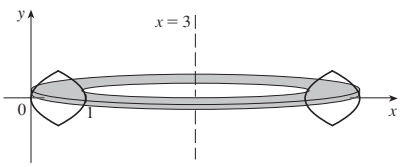
15. $3\pi/5$





17. $10\sqrt{2}\,\pi/3$





19. $\pi/3$ **21.** $\pi/3$ **23.** $\pi/3$

25. $13\pi/45$ **27.** $\pi/3$ **29.** $17\pi/45$

31. a) $2\pi\int_0^1 e^{-2x^2}\,dx \approx 3.75825$

b) $2\pi\int_0^1 \left(e^{-2x^2} + 2e^{-x^2}\right) dx \approx 13.14312$

33. a) $2\pi\int_0^2 8\sqrt{1 - x^2/4}\;dx \approx 78.95684$

b) $2\pi\int_0^1 8\sqrt{4 - 4y^2}\;dy \approx 78.95684$

35. $-1.288,\ 0.884;\ 23.780$ **37.** $\frac{11}{8}\pi^2$

39. Sólido obtenido al rotar la región $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \sqrt{\operatorname{sen} x}$ en torno al eje x.

41. Sólido obtenido al rotar la región limitada por el eje x, $x = y^2$ y $x = y^4$ en torno al eje y.

43. $1110\ \text{cm}^3$ **45.** a) 196 b) 838

47. $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ **49.** $\pi h^2\left(r - \frac{1}{3}h\right)$ **51.** $\frac{2}{3}b^2 h$

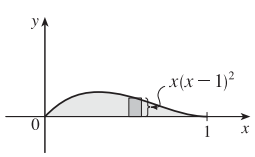
53. $10\ \text{cm}^3$ **55.** 24 **57.** $\frac{1}{3}$ **59.** $\frac{8}{15}$

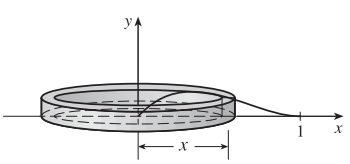
61. a) $8\pi R\int_0^r \sqrt{r^2 - y^2}\,dy$ b) $2\pi^2 r^2 R$

63. b) $\pi r^2 h$ **65.** $\frac{5}{12}\pi r^3$ **67.** $8\int_0^r \sqrt{R^2 - y^2}\sqrt{r^2 - y^2}\,dy$

EJERCICIOS 6.3 ■ PÁGINA 444

1. Circunferencia $= 2\pi x$, altura $= x(x-1)^2$; $\pi/15$





3. $6\pi/7$ **5.** $\pi(1 - 1/e)$ **7.** 8π **9.** 4π **11.** $768\pi/7$

13. $16\pi/3$ **15.** $7\pi/15$ **17.** $8\pi/3$ **19.** $5\pi/14$

21. a) $2\pi\int_0^2 x^2 e^{-x}\,dx$ b) 4.06300

23. a) $4\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\pi - x)\cos^4 x\,dx$ b) 46.50942

25. a) $\int_0^{\pi} 2\pi(4 - y)\sqrt{\operatorname{sen} y}\,dy$ b) 36.57476

27. 3.68

29. Sólido obtenido al rotar la región $0 \leq y \leq x^4$, $0 \leq x \leq 3$ en torno al eje y.

31. Sólido obtenido al rotar la región acotada por i) $x = 1 - y^2$, $x = 0$, y $y = 0$, o ii) $x = y^2$, $x = 1$, y $y = 0$ en torno a la recta $y = 3$

33. 0.13 **35.** $\frac{1}{32}\pi^3$ **37.** 8π **39.** $4\sqrt{3}\,\pi$ **41.** $4\pi/3$

43. $117\pi/5$ **45.** $\frac{4}{3}\pi r^3$ **47.** $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

EJERCICIOS 6.4 ■ PÁGINA 449

1. a) 7200 pies-lb b) 7200 pies-lb

3. 4.5 pies-lb **5.** 180 J **7.** $\frac{15}{4}$ pies-lb

9. a) $\frac{25}{24} \approx 1.04$ J b) 10.8 cm **11.** $W_2 = 3W_1$

13. a) 625 pies-lb b) $\frac{1875}{4}$ pies-lb **15.** 650000 pies-lb

17. 3857 J **19.** 2450 J **21.** $\approx 1.06 \times 10^6$ J

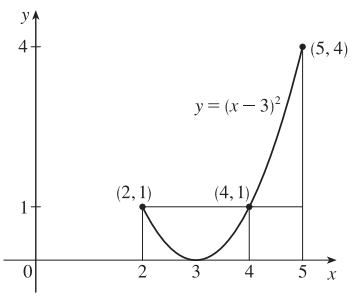
23. $\approx 1.04 \times 10^5$ pies-lb **25.** 2.0 m

29. a) $Gm_1m_2\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)$ b) $\approx 8.50 \times 10^9$ J

EJERCICIOS 6.5 ■ PÁGINA 453

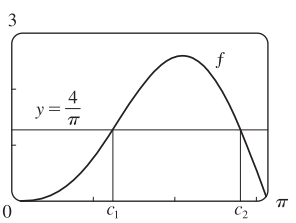
1. $\frac{8}{3}$ **3.** $\frac{45}{28}$ **5.** $(2/\pi)(e - 1)$ **7.** $2/(5\pi)$

9. a) 1 b) 2, 4 c)



11. a) $4/\pi$ b) $\approx 1.24, 2.81$

c)



15. $\frac{9}{8}$ **17.** $(50 + 28/\pi)°\text{F} \approx 59°\text{F}$ **19.** 6 kg/m

21. Cerca de 4056 millones (o cuatro billones) de personas

23. $5/(4\pi) \approx 0.4$ L

REPASO DEL CAPÍTULO 6 ■ PÁGINA 457

Ejercicios

1. $\frac{8}{3}$ **3.** $\frac{7}{12}$ **5.** $\frac{4}{3} + 4/\pi$ **7.** $64\pi/15$ **9.** $1656\pi/5$

11. $\frac{4}{3}\pi(2ah + h^2)^{3/2}$ **13.** $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} 2\pi\left(\pi/2 - x\right)\left(\cos^2 x - \frac{1}{4}\right) dx$

15. a) $2\pi/15$ b) $\pi/6$ c) $8\pi/15$

17. a) 0.38 b) 0.87

19. Sólido obtenido al rotar la región $0 \leq y \leq \cos x$, $0 \leq x \leq \pi/2$ en torno al eje y.

21. Sólido obtenido al rotar la región $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq 2 - \operatorname{sen} x$ en torno al eje x.

23. 36 **25.** $\frac{125}{3}\sqrt{3}\ \text{m}^3$ **27.** 3.2 J

29. a) $8000\pi/3 \approx 8378$ pies-lb b) 2.1 pies

31. $f(x)$

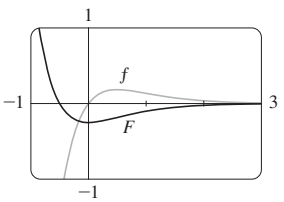
PROBLEMAS ADICIONALES ■ PÁGINA 459

1. a) $f(t) = 3t^2$ b) $f(x) = \sqrt{2x/\pi}$ **3.** $\frac{32}{27}$
5. b) 0.2261 c) 0.6736 m
d) i) $1/(105\pi) \approx 0.003$ pulg/s ii) $370\pi/3$ s ≈ 6.5 min
9. $y = \frac{32}{9}x^2$
11. a) $V = \int_0^h \pi[f(y)]^2\,dy$
c) $f(y) = \sqrt{kA/(\pi C)}\,y^{1/4}$. Ventaja: las marcas sobre el contenedor están igualmente espaciadas.
13. $b = 2a$ **15.** $B = 16A$

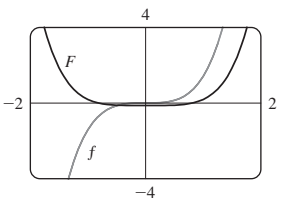
CAPÍTULO 7

EJERCICIOS 7.1 ■ PÁGINA 468

1. $\frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + C$ **3.** $\frac{1}{5}x \operatorname{sen} 5x + \frac{1}{25}\cos 5x + C$
5. $-\frac{1}{3}te^{-3t} - \frac{1}{9}e^{-3t} + C$
7. $(x^2 + 2x)\operatorname{sen} x + (2x + 2)\cos x - 2\operatorname{sen} x + C$
9. $x \ln \sqrt[3]{x} - \frac{1}{3}x + C$ **11.** $t \arctan 4t - \frac{1}{8}\ln(1 + 16t^2) + C$
13. $\frac{1}{2}t \tan 2t - \frac{1}{4}\ln|\sec 2t| + C$
15. $x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C$
17. $\frac{1}{13}e^{2\theta}(2 \operatorname{sen} 3\theta - 3\cos 3\theta) + C$
19. $z^3e^z - 3z^2e^z + 6ze^z - 6e^z + C$
21. $\dfrac{e^{2x}}{4(2x + 1)} + C$ **23.** $\dfrac{\pi - 2}{2\pi^2}$
25. $1 - 1/e$ **27.** $\frac{81}{4}\ln 3 - 5$ **29.** $\frac{1}{4} - \frac{3}{4}e^{-2}$
31. $\frac{1}{6}\left(\pi + 6 - 3\sqrt{3}\right)$ **33.** $\operatorname{sen} x\,(\ln \operatorname{sen} x - 1) + C$
35. $\frac{32}{5}(\ln 2)^2 - \frac{64}{25}\ln 2 + \frac{62}{125}$
37. $2\sqrt{x}\operatorname{sen}\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x} + C$ **39.** $-\frac{1}{2} - \pi/4$
41. $\frac{1}{2}(x^2 - 1)\ln(1 + x) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} + C$
43. $-\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C$



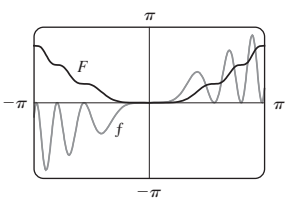
45. $\frac{1}{3}x^2(1 + x^2)^{3/2} - \frac{2}{15}(1 + x^2)^{5/2} + C$



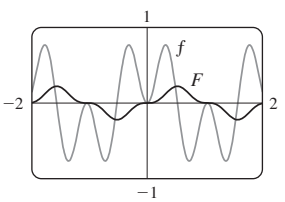
47. b) $-\frac{1}{4}\cos x \operatorname{sen}^3 x + \frac{3}{8}x - \frac{3}{16}\operatorname{sen} 2x + C$
49. b) $\frac{2}{3}, \frac{8}{15}$
55. $x[(\ln x)^3 - 3(\ln x)^2 + 6 \ln x - 6] + C$
57. $\frac{16}{3}\ln 2 - \frac{29}{9}$ **59.** $-1.75119,\ 1.17210;\ 3.99926$
61. $4 - 8/\pi$ **63.** $2\pi e$ **65.** $1 - (2/\pi)\ln 2$
67. $2 - e^{-t}(t^2 + 2t + 2)$ m **69.** 2

EJERCICIOS 7.2 ■ PÁGINA 476

1. $\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x - \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x + C$ **3.** $\frac{1}{120}$
5. $\dfrac{1}{3\pi}\operatorname{sen}^3(\pi x) - \dfrac{2}{5\pi}\operatorname{sen}^5(\pi x) + \dfrac{1}{7\pi}\operatorname{sen}^7(\pi x) + C$
7. $\pi/4$ **9.** $3\pi/8$ **11.** $\pi/16$
13. $\frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{4}t \operatorname{sen} 2t - \frac{1}{8}\cos 2t + C$
15. $\frac{2}{45}\sqrt{\operatorname{sen}\alpha}\,(45 - 18\operatorname{sen}^2\alpha + 5\operatorname{sen}^4\alpha) + C$
17. $\frac{1}{2}\cos^2 x - \ln|\cos x| + C$ **19.** $\ln|\operatorname{sen} x| + 2\operatorname{sen} x + C$
21. $\frac{1}{3}\sec^3 x + C$ **23.** $\tan x - x + C$
25. $\frac{1}{9}\tan^9 x + \frac{2}{7}\tan^7 x + \frac{1}{5}\tan^5 x + C$ **27.** $\frac{117}{8}$
29. $\frac{1}{3}\sec^3 x - \sec x + C$
31. $\frac{1}{4}\sec^4 x - \tan^2 x + \ln|\sec x| + C$
33. $x \sec x - \ln|\sec x + \tan x| + C$ **35.** $\sqrt{3} - \frac{1}{3}\pi$
37. $\frac{22}{105}\sqrt{2} - \frac{8}{105}$ **39.** $\ln|\csc x - \cot x| + C$
41. $-\frac{1}{6}\cos 3x - \frac{1}{26}\cos 13x + C$ **43.** $\frac{1}{8}\operatorname{sen} 4\theta - \frac{1}{12}\operatorname{sen} 6\theta + C$
45. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ **47.** $\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + C$
49. $x \tan x - \ln|\sec x| - \frac{1}{2}x^2 + C$
51. $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(x^2)\cos(x^2) + C$



53. $\frac{1}{6}\operatorname{sen} 3x - \frac{1}{18}\operatorname{sen} 9x + C$



55. 0 **57.** 1 **59.** 0 **61.** $\pi^2/4$ **63.** $\pi\left(2\sqrt{2} - \frac{5}{2}\right)$
65. $s = (1 - \cos^3\omega t)/(3\omega)$

EJERCICIOS 7.3 ■ PÁGINA 483

1. $-\dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{4x} + C$ **3.** $\sqrt{x^2 - 4} - 2\sec^{-1}\left(\dfrac{x}{2}\right) + C$
5. $\dfrac{\pi}{24} + \dfrac{\sqrt{3}}{8} - \dfrac{1}{4}$ **7.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}\,a^2}$
9. $\ln\left(\sqrt{x^2 + 16} + x\right) + C$ **11.** $\frac{1}{4}\operatorname{sen}^{-1}(2x) + \frac{1}{2}x\sqrt{1 - 4x^2} + C$
13. $\frac{1}{6}\sec^{-1}(x/3) - \sqrt{x^2 - 9}/(2x^2) + C$
15. $\frac{1}{16}\pi a^4$ **17.** $\sqrt{x^2 - 7} + C$
19. $\ln\left|\left(\sqrt{1 + x^2} - 1\right)/x\right| + \sqrt{1 + x^2} + C$ **21.** $\frac{9}{500}\pi$
23. $\frac{9}{2}\operatorname{sen}^{-1}((x - 2)/3) + \frac{1}{2}(x - 2)\sqrt{5 + 4x - x^2} + C$
25. $\sqrt{x^2 + x + 1} - \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{x^2 + x + 1} + x + \frac{1}{2}\right) + C$
27. $\frac{1}{2}(x + 1)\sqrt{x^2 + 2x} - \frac{1}{2}\ln\left|x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x}\right| + C$
29. $\frac{1}{4}\operatorname{sen}^{-1}(x^2) + \frac{1}{4}x^2\sqrt{1 - x^4} + C$
33. $\frac{1}{6}\left(\sqrt{48} - \sec^{-1} 7\right)$ **37.** $\frac{3}{8}\pi^2 + \frac{3}{4}\pi$
41. $2\pi^2 Rr^2$ **43.** $r\sqrt{R^2 - r^2} + \pi r^2/2 - R^2 \operatorname{arcsen}(r/R)$

EJERCICIOS 7.4 ■ PÁGINA 492

1. a) $\dfrac{A}{4x-3}+\dfrac{B}{2x+5}$ b) $\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{5-2x}$

3. a) $\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{x^3}+\dfrac{Dx+E}{x^2+4}$

b) $\dfrac{A}{x+3}+\dfrac{B}{(x+3)^2}+\dfrac{C}{x-3}+\dfrac{D}{(x-3)^2}$

5. a) $x^4+4x^2+16+\dfrac{A}{x+2}+\dfrac{B}{x-2}$

b) $\dfrac{Ax+B}{x^2-x+1}+\dfrac{Cx+D}{x^2+2}+\dfrac{Ex+F}{(x^2+2)^2}$

7. $\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+\ln|x-1|+C$

9. $\frac{1}{2}\ln|2x+1|+2\ln|x-1|+C$ **11.** $2\ln\frac{3}{2}$

13. $a\ln|x-b|+C$ **15.** $\frac{7}{6}+\ln\frac{2}{3}$

17. $\frac{27}{5}\ln 2-\frac{9}{5}\ln 3$ (o bien, $\frac{9}{5}\ln\frac{8}{3}$)

19. $10\ln|x-3|-9\ln|x-2|+\dfrac{5}{x-2}+C$

21. $\frac{1}{2}x^2-2\ln(x^2+4)+2\tan^{-1}(x/2)+C$

23. $\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln(x^2+9)-\frac{1}{3}\tan^{-1}(x/3)+C$

25. $-2\ln|x+1|+\ln(x^2+1)+2\tan^{-1}x+C$

27. $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\left(1/\sqrt{2}\right)\tan^{-1}\left(x/\sqrt{2}\right)+C$

29. $\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5)+\frac{3}{2}\tan^{-1}\left(\dfrac{x+1}{2}\right)+C$

31. $\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$

33. $\frac{1}{4}\ln\frac{8}{3}$ **35.** $\frac{1}{16}\ln|x|-\frac{1}{32}\ln(x^2+4)+\dfrac{1}{8(x^2+4)}+C$

37. $\frac{7}{8}\sqrt{2}\,\tan^{-1}\left(\dfrac{x-2}{\sqrt{2}}\right)+\dfrac{3x-8}{4(x^2-4x+6)}+C$

39. $2\sqrt{x+1}-\ln\left(\sqrt{x+1}+1\right)+\ln\left|\sqrt{x+1}-1\right|+C$

41. $-2\ln\sqrt{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}+2\ln\left(\sqrt{x}+1\right)+C$

43. $\frac{3}{10}(x^2+1)^{5/3}-\frac{3}{4}(x^2+1)^{2/3}+C$

45. $2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|+C$

47. $\ln\dfrac{(e^x+2)^2}{e^x+1}+C$

49. $\ln|\tan t+1|-\ln|\tan t+2|+C$

51. $x-\ln(e^x+1)+C$

53. $\left(x-\frac{1}{2}\right)\ln(x^2-x+2)-2x+\sqrt{7}\tan^{-1}\left(\dfrac{2x-1}{\sqrt{7}}\right)+C$

55. $-\frac{1}{2}\ln 3\approx -0.55$

57. $\frac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-2}{x}\right|+C$ **61.** $\frac{1}{5}\ln\left|\dfrac{2\tan(x/2)-1}{\tan(x/2)+2}\right|+C$

63. $4\ln\frac{2}{3}+2$ **65.** $-1+\frac{11}{3}\ln 2$

67. $t=-\ln P-\frac{1}{9}\ln(0.9P+900)+C$, donde $C\approx 10.23$

69. a) $\dfrac{24\,110}{4\,879}\dfrac{1}{5x+2}-\dfrac{668}{323}\dfrac{1}{2x+1}-\dfrac{9\,438}{80\,155}\dfrac{1}{3x-7}+\dfrac{1}{260\,015}\dfrac{22\,098x+48\,935}{x^2+x+5}$

b) $\dfrac{4822}{4879}\ln|5x+2|-\dfrac{334}{323}\ln|2x+1|-\dfrac{3146}{80\,155}\ln|3x-7|+\dfrac{11\,049}{260\,015}\ln(x^2+x+5)+\dfrac{75{,}772}{260\,015\sqrt{19}}\tan^{-1}\dfrac{2x+1}{\sqrt{19}}+C$

El SAC omite los signos de valor absoluto y la constante de integración

73. $\dfrac{1}{a^n(x-a)}-\dfrac{1}{a^n x}-\dfrac{1}{a^{n-1}x^2}-\cdots-\dfrac{1}{ax^n}$

EJERCICIOS 7.5 ■ PÁGINA 499

1. $\operatorname{sen}x+\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3x+C$

3. $\operatorname{sen}x+\ln|\csc x-\cot x|+C$

5. $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\dfrac{t^2}{\sqrt{2}}\right)+C$ **7.** $e^{\pi/4}-e^{-\pi/4}$

9. $\frac{243}{5}\ln 3-\frac{242}{25}$ **11.** $\frac{1}{2}\ln(x^2-4x+5)+\tan^{-1}(x-2)+C$

13. $-\frac{1}{5}\cos^5 t+\frac{2}{7}\cos^7 t-\frac{1}{9}\cos^9 t+C$ **15.** $x/\sqrt{1-x^2}+C$

17. $\frac{1}{4}\pi^2$ **19.** $e^{e^x}+C$ **21.** $(x+1)\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+C$

23. $\frac{4097}{45}$ **25.** $3x+\frac{23}{3}\ln|x-4|-\frac{5}{3}\ln|x+2|+C$

27. $x-\ln(1+e^x)+C$

29. $x\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)-\sqrt{x^2-1}+C$

31. $\operatorname{sen}^{-1}x-\sqrt{1-x^2}+C$

33. $2\operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{x+1}{2}\right)+\dfrac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2}+C$

35. $\frac{1}{8}\operatorname{sen}4x+\frac{1}{16}\operatorname{sen}8x+C$ **37.** $\frac{1}{4}$

39. $\ln|\sec\theta-1|-\ln|\sec\theta|+C$

41. $\theta\tan\theta-\frac{1}{2}\theta^2-\ln|\sec\theta|+C$ **43.** $\frac{2}{3}\tan^{-1}(x^{3/2})+C$

45. $-\frac{1}{3}(x^3+1)e^{-x^3}+C$

47. $\ln|x-1|-3(x-1)^{-1}-\frac{3}{2}(x-1)^{-2}-\frac{1}{3}(x-1)^{-3}+C$

49. $\ln\left|\dfrac{\sqrt{4x+1}-1}{\sqrt{4x+1}+1}\right|+C$ **51.** $-\ln\left|\dfrac{\sqrt{4x^2+1}+1}{2x}\right|+C$

53. $\dfrac{1}{m}x^2\cosh(mx)-\dfrac{2}{m^2}x\operatorname{senh}(mx)+\dfrac{2}{m^3}\cosh(mx)+C$

55. $2\ln\sqrt{x}-2\ln\left(1+\sqrt{x}\right)+C$

57. $\frac{3}{7}(x+c)^{7/3}-\frac{3}{4}c(x+c)^{4/3}+C$

59. $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}x)-\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3(\operatorname{sen}x)+C$

61. $\csc\theta-\cot\theta+C$ o $\tan(\theta/2)+C$

63. $2\left(x-2\sqrt{x}+2\right)e^{\sqrt{x}}+C$

65. $-\tan^{-1}(\cos^2 x)+C$ **67.** $\frac{2}{3}[(x+1)^{3/2}-x^{3/2}]+C$

69. $\sqrt{2}-2/\sqrt{3}+\ln\left(2+\sqrt{3}\right)-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

71. $e^x-\ln(1+e^x)+C$

73. $-\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}(\operatorname{arcsen}x)^2+C$

75. $\frac{1}{8}\ln|x-2|-\frac{1}{16}\ln(x^2+4)-\frac{1}{8}\tan^{-1}(x/2)+C$

77. $2(x-2)\sqrt{1+e^x}+2\ln\dfrac{\sqrt{1+e^x}+1}{\sqrt{1+e^x}-1}+C$

79. $\frac{1}{3}x\operatorname{sen}^3x+\frac{1}{3}\cos x-\frac{1}{9}\cos^3 x+C$

81. $2\sqrt{1+\operatorname{sen}x}+C$ **83.** $xe^{x^2}+C$

EJERCICIOS 7.6 ■ PÁGINA 504

1. $-\frac{5}{21}$ **3.** $\sqrt{13} - \frac{3}{4}\ln(4 + \sqrt{13}) - \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\ln 3$

5. $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\ln(1 + \frac{1}{16}\pi^2)$ **7.** $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{\operatorname{sen} x - 3}{\operatorname{sen} x + 3}\right| + C$

9. $-\sqrt{4x^2 + 9}/(9x) + C$ **11.** $e - 2$

13. $-\frac{1}{2}\tan^2(1/z) - \ln|\cos(1/z)| + C$

15. $\frac{1}{2}(e^{2x} + 1)\arctan(e^x) - \frac{1}{2}e^x + C$

17. $\frac{2y - 1}{8}\sqrt{6 + 4y - 4y^2} + \frac{7}{8}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{2y - 1}{\sqrt{7}}\right) - \frac{1}{12}(6 + 4y - 4y^2)^{3/2} + C$

19. $\frac{1}{9}\operatorname{sen}^3 x\,[3\ln(\operatorname{sen} x) - 1] + C$ **21.** $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{e^x + \sqrt{3}}{e^x - \sqrt{3}}\right| + C$

23. $\frac{1}{4}\tan x\sec^3 x + \frac{3}{8}\tan x\sec x + \frac{3}{8}\ln|\sec x + \tan x| + C$

25. $\frac{1}{2}(\ln x)\sqrt{4 + (\ln x)^2} + 2\ln\left[\ln x + \sqrt{4 + (\ln x)^2}\right] + C$

27. $-\frac{1}{2}x^{-2}\cos^{-1}(x^{-2}) + \frac{1}{2}\sqrt{1 - x^{-4}} + C$

29. $\sqrt{e^{2x} - 1} - \cos^{-1}(e^{-x}) + C$

31. $\frac{1}{5}\ln|x^5 + \sqrt{x^{10} - 2}| + C$ **33.** $\frac{3}{8}\pi^2$

37. $\frac{1}{3}\tan x\sec^2 x + \frac{2}{3}\tan x + C$

39. $\frac{1}{4}x(x^2 + 2)\sqrt{x^2 + 4} - 2\ln\left(\sqrt{x^2 + 4} + x\right) + C$

41. $\frac{1}{4}\cos^3 x\operatorname{sen} x + \frac{3}{8}x + \frac{3}{8}\operatorname{sen} x\cos x + C$

43. $\frac{1}{4}\tan^4 x - \frac{1}{2}\tan^2 x - \ln|\cos x| + C$

45. a) $-\ln\left|\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right| + C$;
ambos tienen dominio $(-1, 0) \cup (0, 1)$

EJERCICIOS 7.7 ■ PÁGINA 516

1. a) $L_2 = 6$, $R_2 = 12$, $M_2 \approx 9.6$
b) L_2 es subestimada, R_2 y M_2 son sobrestimadas
c) $T_2 = 9 < I$ d) $L_n < T_n < I < M_n < R_n$

3. a) $T_4 \approx 0.895759$ (subestimada)
b) $M_4 \approx 0.908907$ (sobrestimada)
$T_4 < I < M_4$

5. a) $M_{10} \approx 0.806598$, $E_M \approx -0.001879$
b) $S_{10} \approx 0.804779$, $E_S \approx -0.000060$

7. a) 1.506361 b) 1.518362 c) 1.511519

9. a) 2.660833 b) 2.664377 c) 2.663244

11. a) 2.591334 b) 2.681046 c) 2.631976

13. a) 4.513618 b) 4.748256 c) 4.675111

15. a) −0.495333 b) −0.543321 c) −0.526123

17. a) 8.363853 b) 8.163298 c) 8.235114

19. a) $T_8 \approx 0.902333$, $M_8 \approx 0.905620$
b) $|E_T| \leq 0.0078$, $|E_M| \leq 0.0039$
c) $n = 71$ para T_n, $n = 50$ para M_n

21. a) $T_{10} \approx 1.983524$, $E_T \approx 0.016476$;
$M_{10} \approx 2.008248$, $E_M \approx -0.008248$;
$S_{10} \approx 2.000110$, $E_S \approx -0.000110$
b) $|E_T| \leq 0.025839$, $|E_M| \leq 0.012919$, $|E_S| \leq 0.000170$
c) $n = 509$ para T_n, $n = 360$ para M_n, $n = 22$ para S_n

23. a) 2.8 b) 7.954926518 c) 0.2894
d) 7.954926521 e) El error real es mucho menor
f) 10.9 g) 7.953789422 h) 0.0593
i) El error real es menor. j) $n \geq 50$

25.

n	L_n	R_n	T_n	M_n
5	0.742943	1.286599	1.014771	0.992621
10	0.867782	1.139610	1.003696	0.998152
20	0.932967	1.068881	1.000924	0.999538

n	E_L	E_R	E_T	E_M
5	0.257057	−0.286599	−0.014771	0.007379
10	0.132218	−0.139610	−0.003696	0.001848
20	0.067033	−0.068881	−0.000924	0.000462

Las observaciones son las mismas que en el ejemplo 1

27.

n	T_n	M_n	S_n
6	6.695473	6.252572	6.403292
12	6.474023	6.363008	6.400206

n	E_T	E_M	E_S
6	−0.295473	0.147428	−0.003292
12	−0.074023	0.036992	−0.000206

Las observaciones son las mismas que en el ejemplo 1

29. a) 19.8 b) 20.6 c) $20.5\overline{3}$

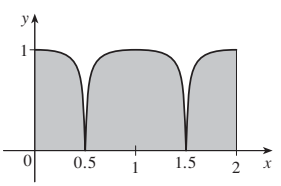
31. a) 14.4 b) $\frac{1}{2}$

33. 64.4°F **35.** $37.7\overline{3}$ pies/s **37.** 10,177 megawatt-hora

39. a) 190 b) 828

41. 6.0 **43.** 59.4

45.



EJERCICIOS 7.8 ■ PÁGINA 527

Abreviaciones: C, convergente; D, divergente

1. a), d) Discontinuidad infinita b), c) Intervalo infinito

3. $\frac{1}{2} - 1/(2t^2)$; 0.495, 0.49995, 0.4999995; 0.5

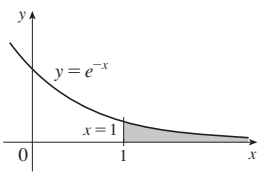
5. 2 **7.** D **9.** $\frac{1}{5}e^{-10}$ **11.** D **13.** 0 **15.** D

17. ln 2 **19.** $-\frac{1}{4}$ **21.** D **23.** $\pi/9$ **25.** $\frac{1}{2}$ **27.** D

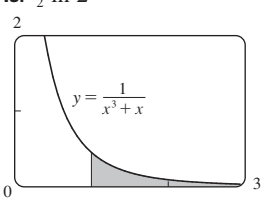
29. $\frac{32}{3}$ **31.** D **33.** $\frac{9}{2}$ **35.** D **37.** $-2/e$

39. $\frac{8}{3}\ln 2 - \frac{8}{9}$

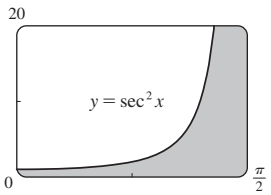
41. $1/e$



43. $\frac{1}{2}\ln 2$



45. Área infinita

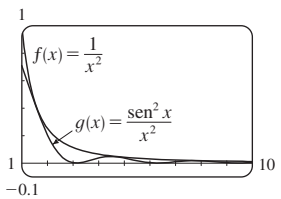


47. a)

t	$\int_1^t [(\operatorname{sen}^2 x)/x^2]\,dx$
2	0.447453
5	0.577101
10	0.621306
100	0.668479
1 000	0.672957
10 000	0.673407

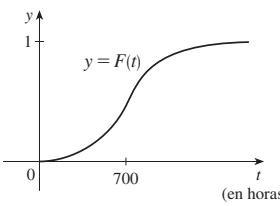
Parece que la integral converge.

c)



49. C **51.** D **53.** D **55.** π **57.** $p < 1,\ 1/(1-p)$
59. $p > -1,\ -1/(p+1)^2$ **65.** $\sqrt{2GM/R}$

67. a)



b) La razón a la que aumenta la fracción $F(t)$ a medida que aumenta t;
c) todas las bombillas se queman eventualmente

69. 1000

71. a) $F(s) = 1/s,\ s > 0$ b) $F(s) = 1/(s-1),\ s > 1$
c) $F(s) = 1/s^2,\ s > 0$

77. $C = 1$; ln 2 **79.** No

REPASO DEL CAPÍTULO 7 ■ PÁGINA 530

Examen rápido Verdadero-Falso

1. Falso **3.** Falso **5.** Falso **7.** Falso
9. a) Verdadero b) Falso **11.** Falso **13.** Falso

Ejercicios

1. $\frac{7}{2} + \ln 2$ **3.** $e - 1$ **5.** $\ln|2t+1| - \ln|t+1| + C$
7. $\frac{2}{15}$ **9.** $-\cos(\ln t) + C$ **11.** $\sqrt{3} - \frac{1}{3}\pi$
13. $3e^{\sqrt[3]{x}}(x^{2/3} - 2x^{1/3} + 2) + C$
15. $-\frac{1}{2}\ln|x| + \frac{3}{2}\ln|x+2| + C$
17. $x \sec x - \ln|\sec x + \tan x| + C$
19. $\frac{1}{18}\ln(9x^2 + 6x + 5) + \frac{1}{9}\tan^{-1}\left[\frac{1}{2}(3x+1)\right] + C$
21. $\ln|x - 2 + \sqrt{x^2 - 4x}| + C$
23. $\ln\left|\dfrac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x}\right| + C$
25. $\frac{3}{2}\ln(x^2+1) - 3\tan^{-1}x + \sqrt{2}\tan^{-1}(x/\sqrt{2}) + C$
27. $\frac{2}{5}$ **29.** 0 **31.** $6 - \frac{3}{2}\pi$
33. $\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}} - \operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{x}{2}\right) + C$
35. $4\sqrt{1+\sqrt{x}} + C$ **37.** $\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{8}\cos 4x + C$
39. $\frac{1}{8}e - \frac{1}{4}$ **41.** $\frac{1}{36}$ **43.** D
45. $4\ln 4 - 8$ **47.** $-\frac{4}{3}$ **49.** $\pi/4$
51. $(x+1)\ln(x^2+2x+2) + 2\arctan(x+1) - 2x + C$
53. 0
55. $\frac{1}{4}(2x-1)\sqrt{4x^2-4x-3} - \ln|2x - 1 + \sqrt{4x^2-4x-3}| + C$
57. $\frac{1}{2}\operatorname{sen} x\sqrt{4+\operatorname{sen}^2 x} + 2\ln\left(\operatorname{sen} x + \sqrt{4+\operatorname{sen}^2 x}\right) + C$
61. No
63. a) 1.925444 b) 1.920915 c) 1.922470
65. a) 0.01348, $n \geq 368$ b) 0.00674, $n \geq 260$
67. 8.6 mi
69. a) 3.8 b) 1.7867, 0.000646 c) $n \geq 30$
71. a) D b) C
73. 2 **75.** $\frac{3}{16}\pi^2$

PROBLEMAS ADICIONALES ■ PÁGINA 534

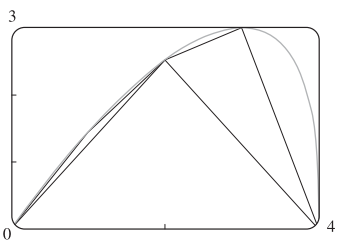
1. Aproximadamente 1.85 pulgadas a partir del centro **3.** 0
7. $f(\pi) = -\pi/2$ **11.** $(b^b a^{-a})^{1/(b-a)} e^{-1}$ **13.** $\frac{1}{8}\pi - \frac{1}{12}$
15. $2 - \operatorname{sen}^{-1}(2/\sqrt{5})$

CAPÍTULO 8

EJERCICIOS 8.1 ■ PÁGINA 543

1. $4\sqrt{5}$ **3.** 3.8202 **5.** 3.6095
7. $\frac{2}{243}(82\sqrt{82} - 1)$ **9.** $\frac{59}{24}$ **11.** $\frac{32}{3}$
13. $\ln(\sqrt{2}+1)$ **15.** $\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$ **17.** $\ln 3 - \frac{1}{2}$
19. $\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})$ **21.** 10.0556
23. 15.374568 **25.** 7.118819

27. a), b)

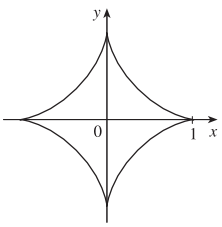


$L_1 = 4$,
$L_2 \approx 6.43$,
$L_4 \approx 7.50$

c) $\int_0^4 \sqrt{1 + [4(3-x)/(3(4-x)^{2/3})]^2}\,dx$ d) 7.7988

29. $\sqrt{5} - \ln(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})) - \sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})$

31. 6



33. $s(x) = \frac{2}{27}\left[(1 + 9x)^{3/2} - 10\sqrt{10}\right]$ **35.** $2\sqrt{2}\left(\sqrt{1 + x} - 1\right)$

37. 209.1 m **39.** 29.36 pulg **41.** 12.4

EJERCICIOS 8.2 ■ PÁGINA 550

1. a) i) $\int_0^{\pi/3} 2\pi \tan x\sqrt{1 + \sec^4 x}\, dx$

(ii) $\int_0^{\pi/3} 2\pi x\sqrt{1 + \sec^4 x}\, dx$ b) i) 10.5017 ii) 7.9353

3. a) i) $\int_{-1}^{1} 2\pi e^{-x^2}\sqrt{1 + 4x^2e^{-2x^2}}\, dx$

(ii) $\int_0^1 2\pi x\sqrt{1 + 4x^2e^{-2x^2}}\, dx$ b) i) 11.0753 ii) 3.9603

5. $\frac{1}{27}\pi\left(145\sqrt{145} - 1\right)$ **7.** $\frac{98}{3}\pi$

9. $2\sqrt{1 + \pi^2} + (2/\pi)\ln\left(\pi + \sqrt{1 + \pi^2}\right)$ **11.** $\frac{21}{2}\pi$

13. $\frac{1}{27}\pi\left(145\sqrt{145} - 10\sqrt{10}\right)$ **15.** πa^2

17. 1 230 507 **19.** 24.144251

21. $\frac{1}{4}\pi\left[4\ln\left(\sqrt{17} + 4\right) - 4\ln\left(\sqrt{2} + 1\right) - \sqrt{17} + 4\sqrt{2}\right]$

23. $\frac{1}{6}\pi\left[\ln\left(\sqrt{10} + 3\right) + 3\sqrt{10}\right]$

27. a) $\frac{1}{3}\pi a^2$ b) $\frac{56}{45}\pi\sqrt{3}a^2$

29. a) $2\pi\left[b^2 + \dfrac{a^2 b\ \text{sen}^{-1}\left(\sqrt{a^2 - b^2}/a\right)}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right]$

b) $2\pi\left[a^2 + \dfrac{ab^2\ \text{sen}^{-1}\left(\sqrt{b^2 - a^2}/b\right)}{\sqrt{b^2 - a^2}}\right]$

31. $\int_a^b 2\pi[c - f(x)]\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$ **33.** $4\pi^2r^2$

EJERCICIOS 8.3 ■ PÁGINA 560

1. a) 187.5 lb/pies^2 b) 1875 lb c) 562.5 lb

3. 6000 lb **5.** 6.7×10^4 N **7.** 9.8×10^3 N

9. 1.2×10^4 lb **11.** $\frac{2}{3}\delta ah^2$

13. 5.27×10^5 N **15.** a) 314 N b) 353 N

17. a) 5.63×10^3 lb b) 5.06×10^4 lb

c) 4.88×10^4 lb d) 3.03×10^5 lb

19. 4148 lb **21.** 330; 22 **23.** 10; 14; (1.4, 1) **25.** $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

27. $\left(\dfrac{1}{e - 1}, \dfrac{e + 1}{4}\right)$ **29.** $\left(\frac{9}{20}, \frac{9}{20}\right)$

31. $\left(\dfrac{\pi\sqrt{2} - 4}{4\left(\sqrt{2} - 1\right)}, \dfrac{1}{4\left(\sqrt{2} - 1\right)}\right)$ **33.** $\left(\frac{8}{5}, -\frac{1}{2}\right)$

35. 60; 160; $\left(\frac{8}{3}, 1\right)$ **37.** $\left(-\frac{1}{5}, -\frac{12}{35}\right)$ **41.** $\left(0, \frac{1}{12}\right)$ **45.** $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

EJERCICIOS 8.4 ■ PÁGINA 566

1. \$21 104 **3.** \$140 000; \$60 000 **5.** \$407.25

7. \$12 000 **9.** 3727; \$37 753

11. $\frac{2}{3}\left(16\sqrt{2} - 8\right) \approx$ \$9.75 millones **13.** $\dfrac{(1 - k)(b^{2-k} - a^{2-k})}{(2 - k)(b^{1-k} - a^{1-k})}$

15. 1.19×10^{-4} cm^3/s **17.** 6.60 L/min **19.** 5.77 L/min

EJERCICIOS 8.5 ■ PÁGINA 573

1. a) La probabilidad de que un neumático elegido al azar tendrá una vida entre 30 000 y 40 000 millas

b) La probabilidad de que un neumático elegido al azar tendrá una duración de por lo menos 25 000 millas.

3. a) $f(x) \geqslant 0$ para toda x y $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$ b) $\frac{17}{81}$

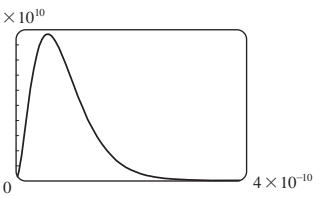
5. a) $1/\pi$ b) $\frac{1}{2}$

7. a) $f(x) \geqslant 0$ para toda x y $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$ b) 5

11. a) $e^{-4/2.5} \approx 0.20$ b) $1 - e^{-2/2.5} \approx 0.55$ c) Si no se sirve en 10 minutos, obtendrá una hamburguesa gratis.

13. ≈44% **15.** a) 0.0668 b) ≈5.21% **17.** ≈0.9545

19. b) 0; a_0 c)



d) $1 - 41e^{-8} \approx 0.986$ e) $\frac{3}{2}a_0$

REPASO DEL CAPÍTULO 8 ■ PÁGINA 575

Ejercicios

1. $\frac{15}{2}$ **3.** a) $\frac{21}{16}$ b) $\frac{41}{10}\pi$

5. 3.8202 **7.** $\frac{124}{5}$ **9.** ≈458 lb **11.** $\left(\frac{8}{5}, 1\right)$

13. $\left(2, \frac{2}{3}\right)$ **15.** $2\pi^2$ **17.** \$7166.67

19. a) $f(x) \geqslant 0$ para toda x y $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$

b) ≈0.3455 c) 5, si

21. a) $1 - e^{-3/8} \approx 0.31$ b) $e^{-5/4} \approx 0.29$

c) $8 \ln 2 \approx 5.55$ mín

PROBLEMAS ADICIONALES ■ PÁGINA 577

1. $\frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{3}$

3. a) $2\pi r(r \pm d)$ b) $\approx 3.36 \times 10^6$ mi^2

d) $\approx 7.84 \times 10^7$ mi^2

5. a) $P(z) = P_0 + g\int_0^z \rho(x)\, dx$

b) $(P_0 - \rho_0 gH)(\pi r^2) + \rho_0 gHe^{L/H}\int_{-r}^{r} e^{x/H} \cdot 2\sqrt{r^2 - x^2}\, dx$

7. Altura $\sqrt{2}\, b$, volumen $\left(\frac{28}{27}\sqrt{6} - 2\right)\pi b^3$ **9.** 0.14 m

11. $2/\pi$, $1/\pi$ **13.** $(0, -1)$

CAPÍTULO 9

EJERCICIOS 9.1 ■ PÁGINA 584

3. a) $\frac{1}{2}$, -1 **5.** d)

7. a) Es cero o decreciente

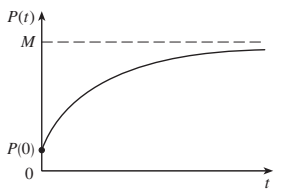
c) $y = 0$ d) $y = 1/(x + 2)$

9. a) $0 < P < 4200$ b) $P > 4200$

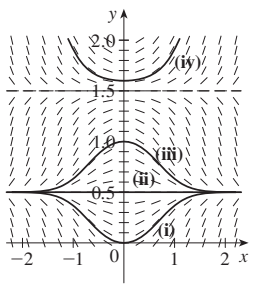
c) $P = 0$, $P = 4200$

13. a) III b) I c) IV d) II

15. a) Al principio permanece positiva, pero decrece

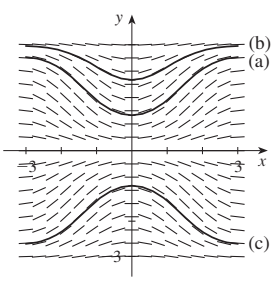
c) 

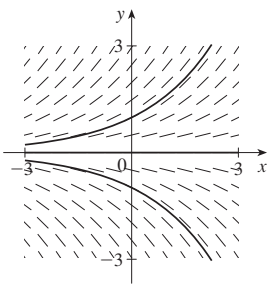
EJERCICIOS 9.2 ■ PÁGINA 592

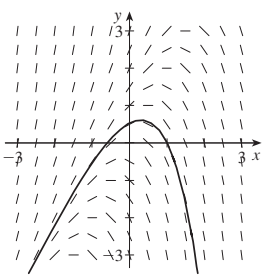
1. a) 

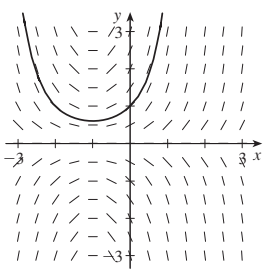
b) $y = 0.5$, $y = 1.5$

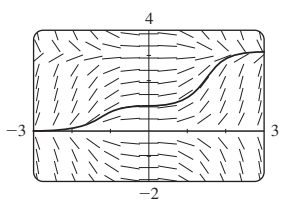
3. III **5.** IV

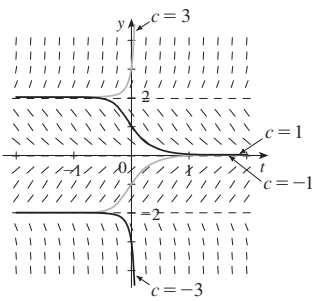
7. 

9. 

11. 

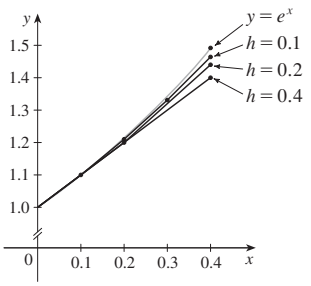
13. 

15. 

17. 

$-2 \leqslant c \leqslant 2$; -2, 0, 2

19. a) i) 1.4 ii) 1.44 iii) 1.4641

b) 

Subestimadas

c) i) 0.0918 ii) 0.0518 iii) 0.0277

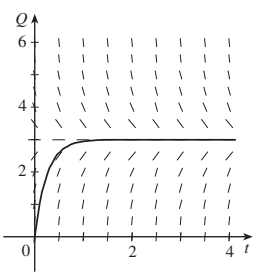
Parece que el error también es la mitad (aproximadamente).

21. -1, -3, -6.5, -12.25 **23.** 1.7616

25. a) i) 3 ii) 2.3928 iii) 2.3701 iv) 2.3681

c) i) -0.6321 ii) -0.0249 iii) -0.0022 iv) -0.0002

Parece que el error también es dividido por 10 (aproximadamente).

27. a), d) 

b) 3

c) Sí; $Q = 3$

e) 2.77 C

EJERCICIOS 9.3 ■ PÁGINA 600

1. $y = \dfrac{2}{K - x^2}$, $y = 0$ **3.** $y = \sqrt[3]{3x + 3\ln|x| + K}$

5. $\frac{1}{2}y^2 - \cos y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + C$

7. $e^y(y - 1) = C - \frac{1}{2}e^{-t^2}$ **9.** $p = Ke^{t^3/3 - t} - 1$

11. $y = -\sqrt{x^2 + 9}$ **13.** $u = -\sqrt{t^2 + \tan t + 25}$

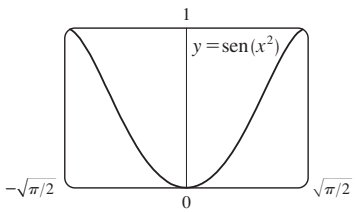
15. $\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}(3 + y^2)^{3/2} = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{41}{12}$

17. $y = \dfrac{4a}{\sqrt{3}} \operatorname{sen} x - a$

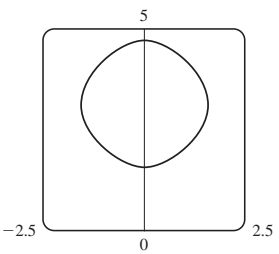
19. $y = e^{x^2/2}$ **21.** $y = Ke^x - x - 1$

23. a) $\operatorname{sen}^{-1} y = x^2 + C$

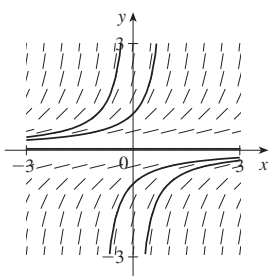
b) $y = \operatorname{sen}(x^2)$, $-\sqrt{\pi/2} \leq x \leq \sqrt{\pi/2}$ c) No



25. $\cos y = \cos x - 1$

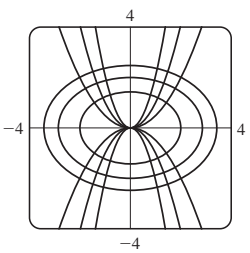


27. a)

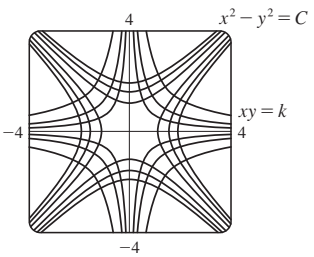


b) $y = \dfrac{1}{K - x}$

29. $y = Cx^2$



31. $x^2 - y^2 = C$



33. $y = 1 + e^{2-x^2/2}$ **35.** $y = \left(\frac{1}{2}x^2 + 2\right)^2$

37. $Q(t) = 3 - 3e^{-4t}$; 3 **39.** $P(t) = M - Me^{-kt}$; M

41. a) $x = a - \dfrac{4}{(kt + 2/\sqrt{a})^2}$

b) $t = \dfrac{2}{k\sqrt{a-b}}\left(\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{b}{a-b}} - \tan^{-1}\sqrt{\dfrac{b-x}{a-b}}\right)$

43. a) $C(t) = (C_0 - r/k)e^{-kt} + r/k$

b) r/k; la concentración se aproxima a r/k independientemente del valor de C_0

45. a) $15e^{-t/100}$ kg b) $15e^{-0.2} \approx 12.3$ kg

47. Cerca de 4.9% **49.** g/k

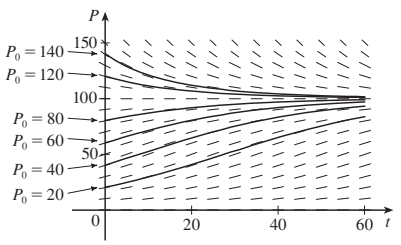
51. a) $L_1 = KL_2^{\,k}$ b) $B = KV^{0.0794}$

53. a) $dA/dt = k\sqrt{A}\,(M - A)$ b) $A(t) = M\left(\dfrac{Ce^{\sqrt{M}kt} - 1}{Ce^{\sqrt{M}kt} + 1}\right)^2$, donde $C = \dfrac{\sqrt{M} + \sqrt{A_0}}{\sqrt{M} - \sqrt{A_0}}$ y $A_0 = A(0)$

EJERCICIOS 9.4 ■ PÁGINA 613

1. a) 100; 0.05 b) Donde P está cerca de 0 o 100; sobre la recta $P = 50$; $0 < P_0 < 100$; $P_0 > 100$

c)



Las soluciones se aproximan a 100; algunas aumentan y algunas disminuyen, algunas tienen un punto de inflexión, pero otros no; soluciones con $P_0 = 20$ y $P_0 = 40$ tienen puntos de inflexión en $P = 50$

d) $P = 0$, $P = 100$; otras soluciones se alejan mucho de $P = 0$ y hacia $P = 100$

3. a) 3.23×10^7 kg b) ≈1.55 años

5. 9 000

7. a) $dP/dt = \frac{1}{265}P(1 - P/100)$, P en billones

b) 5.49 billones c) En billones: 7.81, 27.72

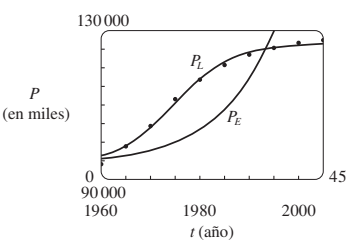
d) En billones: 5.48, 7.61, 22.41

9. a) $dy/dt = ky(1 - y)$ b) $y = \dfrac{y_0}{y_0 + (1 - y_0)e^{-kt}}$

c) 3:36 p.m.

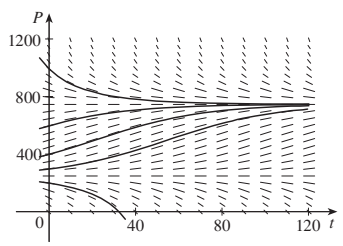
13. $P_E(t) = 1\,578.3(1.0933)^t + 94\,000$;

$P_L(t) = \dfrac{32\,658.5}{1 + 12.75e^{-0.1706t}} + 94\,000$



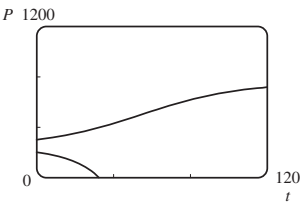
15. a) $P(t) = \dfrac{m}{k} + \left(P_0 - \dfrac{m}{k}\right)e^{kt}$ b) $m < kP_0$

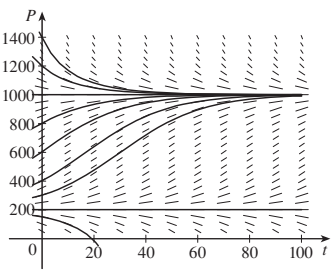
c) $m = kP_0$, $m > kP_0$ d) decreciente

17. a) Se atrapan peces a razón de 15 por semana
b) Ver el inciso d). c) $P = 250$, $P = 750$
d) 

$0 < P_0 < 250$: $P \to 0$;
$P_0 = 250$: $P \to 250$;
$P_0 > 250$: $P \to 750$

e) $P(t) = \dfrac{250 - 750ke^{t/25}}{1 - ke^{t/25}}$
donde $k = \frac{1}{11}, -\frac{1}{9}$



19. b) 

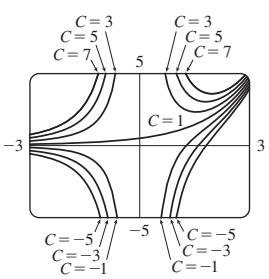
$0 < P_0 < 200$: $P \to 0$;
$P_0 = 200$: $P \to 200$;
$P_0 > 200$: $P \to 1000$

c) $P(t) = \dfrac{m(M - P_0) + M(P_0 - m)e^{(M-m)(k/M)t}}{M - P_0 + (P_0 - m)e^{(M-m)(k/M)t}}$

21. a) $P(t) = P_0 e^{(k/r)[\text{sen}(rt - \phi) + \text{sen}\,\phi]}$ b) No existe

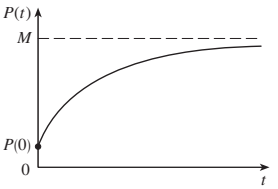
EJERCICIOS 9.5 ■ PÁGINA 620

1. Sí **3.** No **5.** $y = 1 + Ce^{-x}$
7. $y = x - 1 + Ce^{-x}$ **9.** $y = \frac{2}{3}\sqrt{x} + C/x$
11. $y = \dfrac{\int \text{sen}(x^2)\,dx + C}{\text{sen}\,x}$ **13.** $u = \dfrac{t^2 + 2t + 2C}{2(t + 1)}$
15. $y = \dfrac{1}{x}\ln x - \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x^2}$ **17.** $u = -t^2 + t^3$
19. $y = -x\cos x - x$
21. $y = \dfrac{(x - 1)e^x + C}{x^2}$



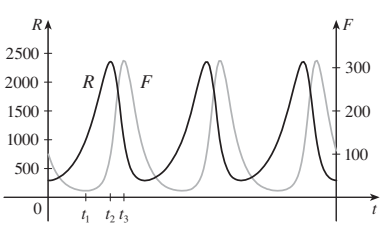
25. $y = \pm\left(Cx^4 + \dfrac{2}{5x}\right)^{-1/2}$

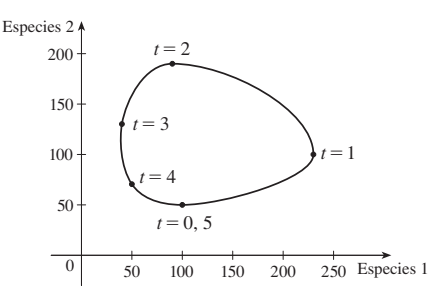
27. a) $I(t) = 4 - 4e^{-5t}$ b) $4 - 4e^{-1/2} \approx 1.57$ A
29. $Q(t) = 3(1 - e^{-4t})$, $I(t) = 12e^{-4t}$
31. $P(t) = M + Ce^{-kt}$



33. $y = \frac{2}{5}(100 + 2t) - 40\,000(100 + 2t)^{-3/2}$; 0.2275 kg/L
35. b) mg/c c) $(mg/c)[t + (m/c)e^{-ct/m}] - m^2g/c^2$
37. b) $P(t) = \dfrac{M}{1 + MCe^{-kt}}$

EJERCICIOS 9.6 ■ PÁGINA 627

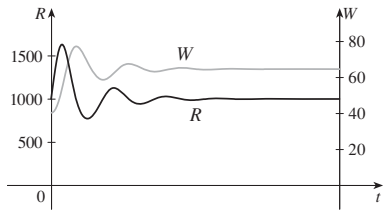
1. a) x = depredadores, y = presas; crecimiento está restringido sólo por depredadores, que sólo se alimentan de presas.
b) x = presas, y = depredadores; el crecimiento es restringido por capacidad y por depredadores, que sólo se alimentan de presas.
3. a) Competencia
b) i) $x = 0$, $y = 0$: cero poblaciones
ii) $x = 0$, $y = 400$: en ausencia de una población x, la población y se estabiliza en 400.
iii) $x = 125$, $y = 0$: en la ausencia de una población y la población x se estabiliza en 125.
iv) $x = 50$, $y = 300$: ambas poblaciones son estables.
5. a) la población de conejos comienza en unos 300, aumenta a 2400, y disminuye para regresar a 300. La población de zorros comienza en 100, disminuye a unos 20, aumenta a unos 315, disminuye a 100, y el ciclo se inicia de nuevo.
b) 

7. 

11. a) la población se estabilice en 5000.
b) i) $W = 0$, $R = 0$: cero poblaciones
ii) $W = 0$, $R = 5000$: en ausencia de lobos, la población de conejos siempre es 5000.
iii) $W = 64$, $R = 1000$: ambas poblaciones son estables.

c) La población se estabiliza en 1000 conejos y 64 lobos

d)



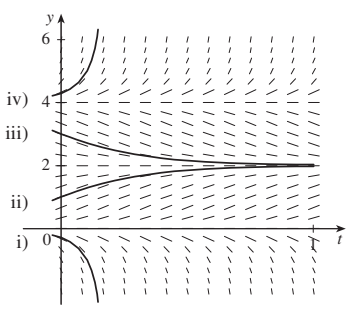
REPASO DEL CAPÍTULO 9 ■ PÁGINA 629

Examen rápido Verdadero-Falso

1. Verdadero **3.** Falso **5.** Verdadero **7.** Verdadero

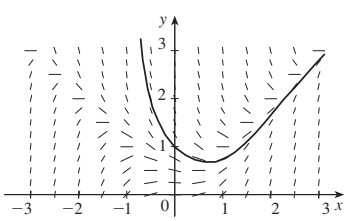
Ejercicios

1. a)



b) $0 \leqslant c \leqslant 4$; $y = 0$, $y = 2$, $y = 4$

3. a)



$y(0.3) \approx 0.8$

b) 0.75676

c) $y = x$ y $y = -x$; hay un loc máx o mín loc

5. $y = \left(\frac{1}{2}x^2 + C\right)e^{-\operatorname{sen} x}$

7. $y = \pm\sqrt{\ln(x^2 + 2x^{3/2} + C)}$

9. $r(t) = 5e^{t-t^2}$ **11.** $y = \frac{1}{2}x(\ln x)^2 + 2x$ **13.** $x = C - \frac{1}{2}y^2$

15. a) $P(t) = \dfrac{2\,000}{1 + 19e^{-0.1t}}$; ≈ 560 b) $t = -10 \ln \frac{2}{57} \approx 33.5$

17. a) $L(t) = L_\infty - [L_\infty - L(0)]e^{-kt}$ b) $L(t) = 53 - 43e^{-0.2t}$

19. 15 días **21.** $k \ln h + h = (-R/V)t + C$

23. a) se estabiliza en 200 000

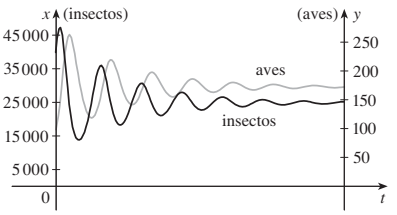
b) i) $x = 0$, $y = 0$: cero poblaciones

ii) $x = 200\,000$, $y = 0$: en la ausencia de aves, la población de insectos es siempre 200 000.

iii) $x = 25\,000$, $y = 175$: ambas poblaciones son estables.

c) las poblaciones estabilizan en 25 000 insectos y 175 aves.

d)



25. a) $y = (1/k)\cosh kx + a - 1/k$ o $y = (1/k)\cosh kx - (1/k)\cosh kb + h$ b) $(2/k)\operatorname{senh} kb$

PROBLEMAS ADICIONALES ■ PÁGINA 633

1. $f(x) = \pm 10e^x$ **5.** $y = x^{1/n}$ **7.** 20°C

9. b) $f(x) = \dfrac{x^2 - L^2}{4L} - \frac{1}{2}L \ln\left(\dfrac{x}{L}\right)$ c) No

11. a) 9.8 h b) $31\,900\pi$ pies^2; $2\,000\pi$ pies^2/h

c) 5.1 h

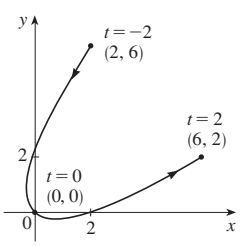
13. $x^2 + (y - 6)^2 = 25$

15. $y = K/x$, $K \neq 0$

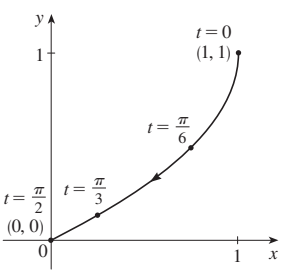
CAPÍTULO 10

EJERCICIOS 10.1 ■ PÁGINA 641

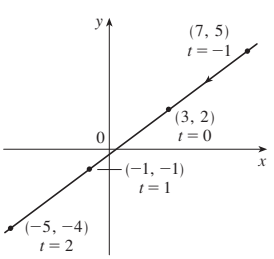
1.



3.

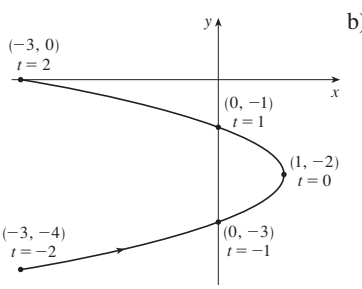


5. a)



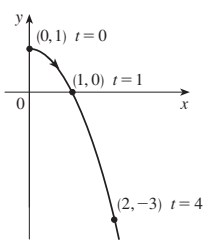
b) $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$

7. a)



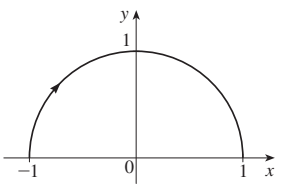
b) $x = -(y + 2)^2 + 1$, $-4 \leqslant y \leqslant 0$

9. a)

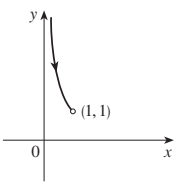


b) $y = 1 - x^2,\ x \geqslant 0$

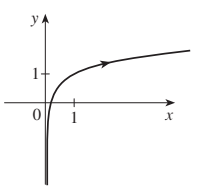
11. a) $x^2 + y^2 = 1,\ y \geqslant 0$ b)



13. a) $y = 1/x,\ y > 1$ b)

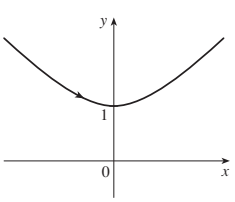


15. a) $y = \frac{1}{2}\ln x + 1$ b)



17. a) $y^2 - x^2 = 1,\ y \geqslant 1$

b)

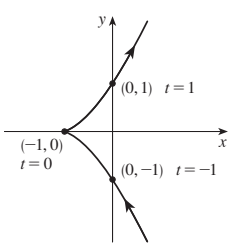


19. Se mueve en sentido contrario a las manecillas del reloj en la circunferencia $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$ de (3, 3) a (3, −1)

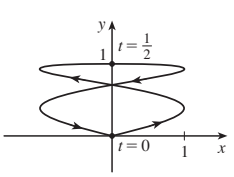
21. Se mueve 3 veces en sentido de las manecillas del reloj alrededor de la elipse $(x^2/25) + (y^2/4) = 1$, comenzando y terminando en (0, −2)

23. Está contenido en el rectángulo descrito por $1 \leqslant x \leqslant 4$ y $2 \leqslant y \leqslant 3$.

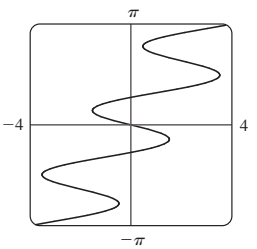
25.



27.



29.



31. b) $x = -2 + 5t,\ y = 7 - 8t,\ 0 \leqslant t \leqslant 1$

33. a) $x = 2\cos t,\ y = 1 - 2\operatorname{sen} t,\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

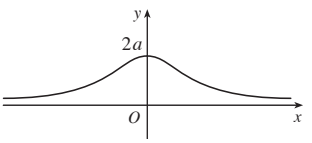
b) $x = 2\cos t,\ y = 1 + 2\operatorname{sen} t,\ 0 \leqslant t \leqslant 6\pi$

c) $x = 2\cos t,\ y = 1 + 2\operatorname{sen} t,\ \pi/2 \leqslant t \leqslant 3\pi/2$

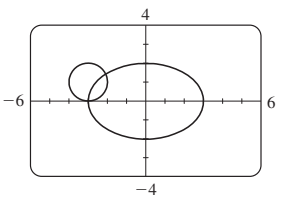
37. La curva $y = x^{2/3}$ se genera en a). En b), se genera sólo la porción con $x \geqslant 0$ y c) obtenemos sólo la porción con $x > 0$.

41. $x = a\cos\theta,\ y = b\operatorname{sen}\theta$; $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$, elipse

43.



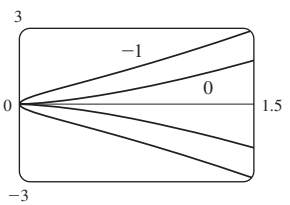
45. a) dos puntos de intersección

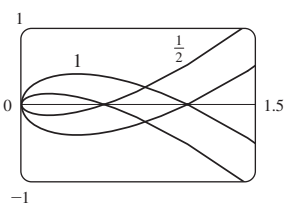


b) un punto de colisión $(-3, 0)$ cuando $t = 3\pi/2$

c) todavía hay dos puntos de intersección, pero ningún punto de colisión.

47. Para $c = 0$, hay una cúspide; $c > 0$, existe un bucle cuyo tamaño aumenta cuando c aumenta.





49. Las curvas esbozadas siguen la recta $y = x$, y se inician con bucles cuando a está entre 1.4 y 1.6, (más precisamente cuando $a > \sqrt{2}$). Los bucles aumentan de tamaño cuando a aumenta.

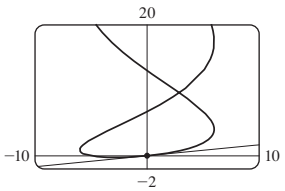
51. A medida que n aumenta, aumenta el número de oscilaciones; a y b determinan la anchura y altura.

EJERCICIOS 10.2 ■ PÁGINA 651

1. $\dfrac{2t + 1}{t\cos t + \operatorname{sen} t}$ **3.** $y = -\frac{3}{2}x + 7$ **5.** $y = \pi x + \pi^2$

7. $y = 2x + 1$

9. $y = \frac{1}{6}x$



11. $\dfrac{2t+1}{2t}, -\dfrac{1}{4t^3}, t < 0$ **13.** $e^{-2t}(1-t), e^{-3t}(2t-3), t > \frac{3}{2}$

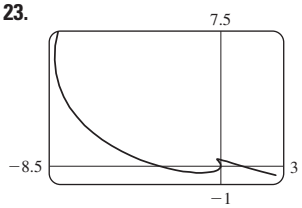
15. $-\frac{3}{2}\tan t, -\frac{3}{4}\sec^3 t, \pi/2 < t < 3\pi/2$

17. Horizontal en $(0, -3)$, vertical en $(\pm 2, -2)$

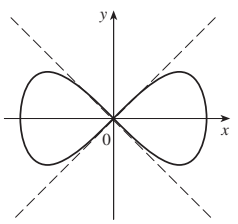
19. Horizontal en $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ y $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$, no hay vertical

21. $(0.6, 2)$; $\left(5 \cdot 6^{-6/5}, e^{6^{-1/5}}\right)$

23.



25. $y = x, y = -x$



27. a) $d \operatorname{sen}\theta/(r - d\cos\theta)$ **29.** $\left(\frac{16}{27}, \frac{29}{9}\right), (-2, -4)$

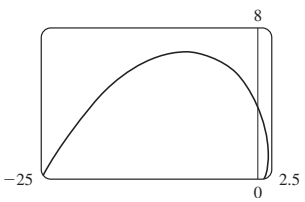
31. πab **33.** $3 - e$ **35.** $2\pi r^2 + \pi d^2$

37. $\int_0^2 \sqrt{2 + 2e^{-2t}}\, dt \approx 3.1416$

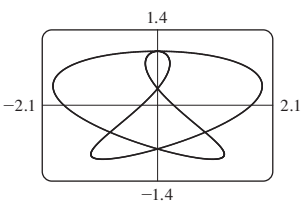
39. $\int_0^{4\pi} \sqrt{5 - 4\cos t}\, dt \approx 26.7298$ **41.** $4\sqrt{2} - 2$

43. $\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\left(1 + \sqrt{2}\right)$

45. $\sqrt{2}\,(e^{\pi} - 1)$

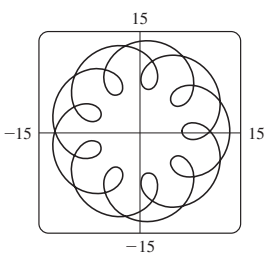


47. 16.7102



49. 612.3053 **51.** $6\sqrt{2}, \sqrt{2}$

55. a)



$t \in [0, 4\pi]$

b) 294

57. $\int_0^{\pi/2} 2\pi t \cos t \sqrt{t^2 + 1}\, dt \approx 4.7394$

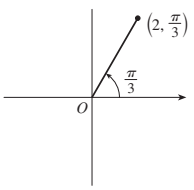
59. $\int_0^1 2\pi(t^2 + 1)e^t\sqrt{e^{2t}(t+1)^2(t^2 + 2t + 2)}\, dt \approx 103.5999$

61. $\frac{2}{1215}\pi\left(247\sqrt{13} + 64\right)$ **63.** $\frac{6}{5}\pi a^2$

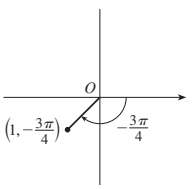
65. $\frac{24}{5}\pi\left(949\sqrt{26} + 1\right)$ **71.** $\frac{1}{4}$

EJERCICIOS 10.3 ■ PÁGINA 662

1. a)

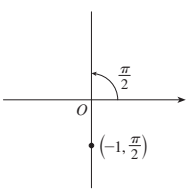


b)



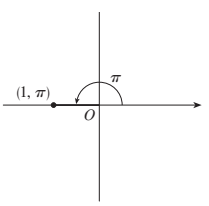
$(2, 7\pi/3), (-2, 4\pi/3)$ $(1, 5\pi/4), (-1, \pi/4)$

c)

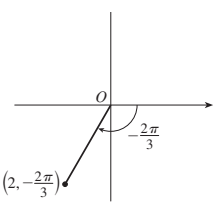


$(1, 3\pi/2), (-1, 5\pi/2)$

3. a)

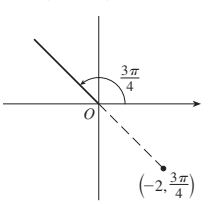


b)



$(-1, 0)$ $\left(-1, -\sqrt{3}\right)$

c)

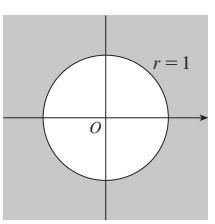


$\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$

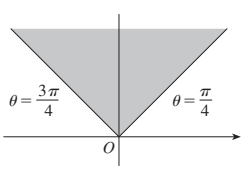
5. a) i) $\left(2\sqrt{2}, 7\pi/4\right)$ ii) $\left(-2\sqrt{2}, 3\pi/4\right)$

b) i) $(2, 2\pi/3)$ ii) $(-2, 5\pi/3)$

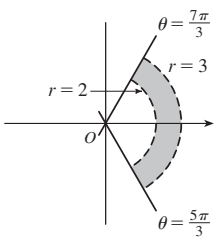
7.



9.



11.



13. $2\sqrt{3}$ **15.** Circunferencia, centro O, radio $\sqrt{5}$

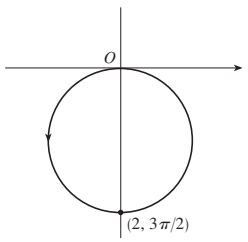
17. Circunferencia, centro (1, 0), radio 1

19. hipérbola, centro O, focos sobre el eje x

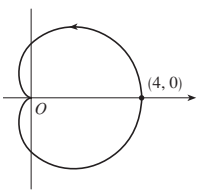
21. $r = 2 \csc\theta$ **23.** $r = 1/(\operatorname{sen}\theta - 3\cos\theta)$

25. $r = 2c\cos\theta$ **27.** a) $\theta = \pi/6$ b) $x = 3$

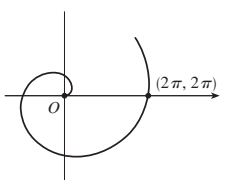
29.



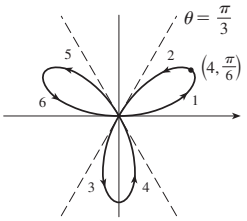
31.



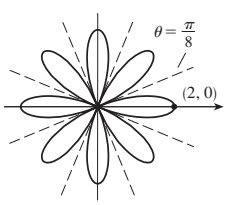
33.



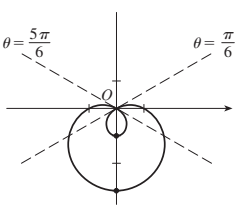
35.



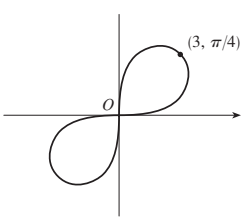
37.



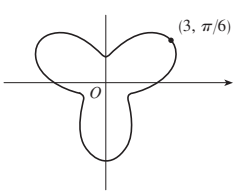
39.



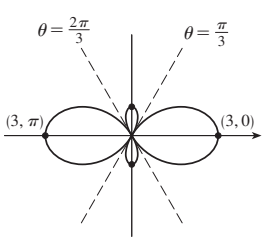
41.



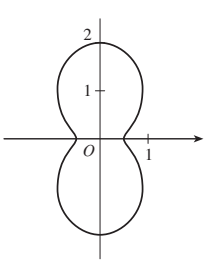
43.



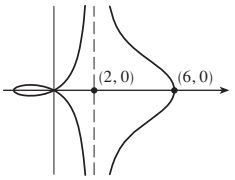
45.



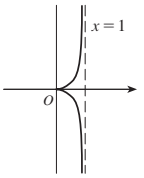
47.



49



51.



53. a) Para $c < -1$, el bucle interior empieza en $\theta = \operatorname{sen}^{-1}(-1/c)$ y termina en $\theta = \pi - \operatorname{sen}^{-1}(-1/c)$ para $c > 1$, empieza en $\theta = \pi + \operatorname{sen}^{-1}(1/c)$ y termina en $\theta = 2\pi - \operatorname{sen}^{-1}(1/c)$

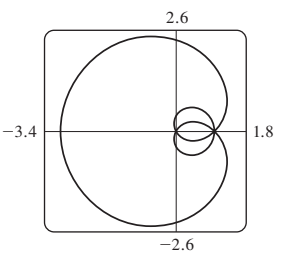
55. $\sqrt{3}$ **57.** $-\pi$ **59.** 1

61. Horizontal en $\left(3/\sqrt{2}, \pi/4\right)$, $\left(-3/\sqrt{2}, 3\pi/4\right)$; vertical en (3, 0), $(0, \pi/2)$

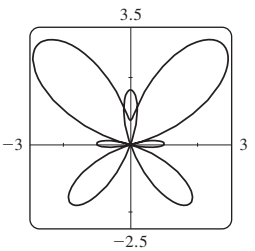
63. Horizontal en $\left(\frac{3}{2}, \pi/3\right)$, $(0, \pi)$ [el poste] y $\left(\frac{3}{2}, 5\pi/3\right)$; vertical en (2, 0), $\left(\frac{1}{2}, 2\pi/3\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 4\pi/3\right)$

65. Centro $(b/2, a/2)$, radio $\sqrt{a^2 + b^2}/2$

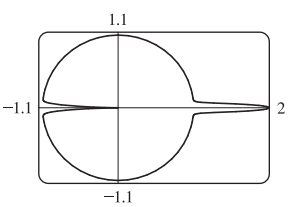
67.



69.



71.



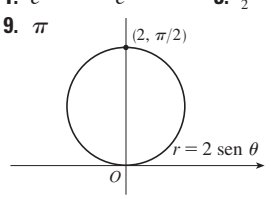
73. Por rotación en sentido contrario a las manecillas del reloj a través del ángulo $\pi/6$, $\pi/3$, o α en torno al origen.

75. Para $c = 0$, la curva es una circunferencia. Cuando c crece, el lado izquierdo se hace plana, entonces tiene un hoyuelo para $0.5 < c < 1$, una cúspide para $c = 1$, y un bucle para $c > 1$.

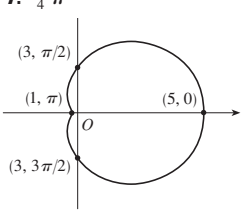
EJERCICIOS 10.4 ■ PÁGINA 668

1. $e^{-\pi/4} - e^{-\pi/2}$ **3.** $\frac{9}{2}$ **5.** π^2 **7.** $\frac{41}{4}\pi$

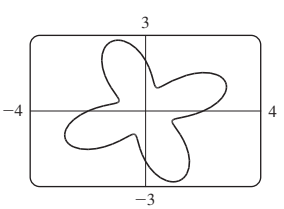
9. π



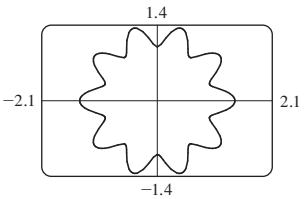
11. 11π



13. $\frac{9}{2}\pi$



15. $\frac{3}{2}\pi$



17. $\frac{4}{3}\pi$ **19.** $\frac{1}{16}\pi$ **21.** $\pi - \frac{3}{2}\sqrt{3}$ **23.** $\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{2}\sqrt{3}$

25. $4\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi$ **27.** π **29.** $\frac{5}{24}\pi - \frac{1}{4}\sqrt{3}$ **31.** $\frac{1}{2}\pi - 1$

33. $1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$ **35.** $\frac{1}{4}(\pi + 3\sqrt{3})$

37. $(\frac{3}{2}, \pi/6)$, $(\frac{3}{2}, 5\pi/6)$, y el polo

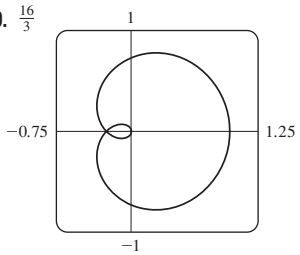
39. $(1, \theta)$ donde $\theta = \pi/12, 5\pi/12, 13\pi/12, 17\pi/12$
y $(-1, \theta)$ donde $\theta = 7\pi/12, 11\pi/12, 19\pi/12, 23\pi/12$

41. $(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \pi/3)$, $(\frac{1}{2}\sqrt{3}, 2\pi/3)$, y el polo

43. Intersección en $\theta \approx 0.89, 2.25$; área ≈ 3.46

45. 2π **47.** $\frac{8}{3}[(\pi^2 + 1)^{3/2} - 1]$

49. $\frac{16}{3}$

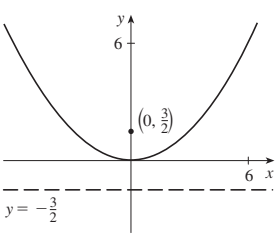


51. 2.4221 **53.** 8.0091

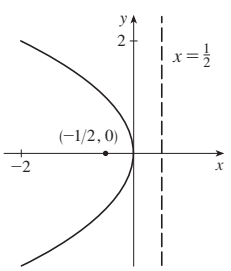
55. b) $2\pi(2 - \sqrt{2})$

EJERCICIOS 10.5 ■ PÁGINA 676

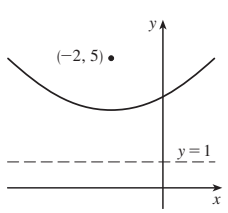
1. $(0, 0)$, $(0, \frac{3}{2})$, $y = -\frac{3}{2}$



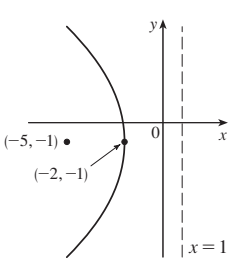
3. $(0, 0)$, $(-\frac{1}{2}, 0)$, $x = \frac{1}{2}$



5. $(-2, 3)$, $(-2, 5)$, $y = 1$

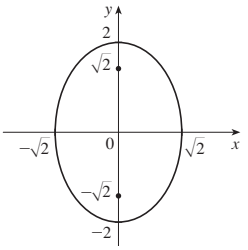


7. $(-2, -1)$, $(-5, -1)$, $x = 1$

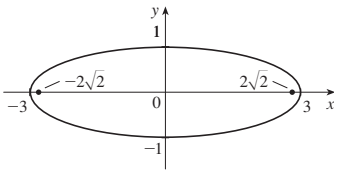


9. $x = -y^2$, foco $(-\frac{1}{4}, 0)$, directriz $x = \frac{1}{4}$

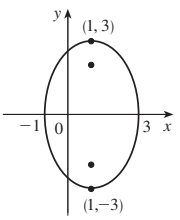
11. $(0, \pm 2)$, $(0, \pm\sqrt{2})$



13. $(\pm 3, 0)$, $(\pm 2\sqrt{2}, 0)$

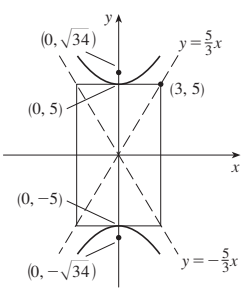


15. $(1, \pm 3)$, $(1, \pm\sqrt{5})$

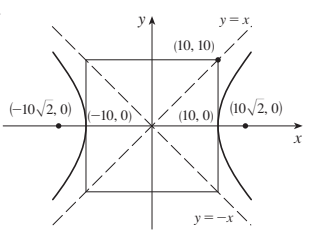


17. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, focos $(0, \pm\sqrt{5})$

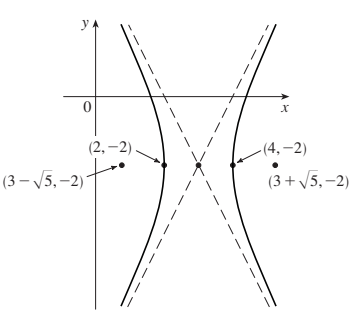
19. $(0, \pm 5)$; $(0, \pm\sqrt{34})$; $y = \pm\frac{5}{3}x$



21. $(\pm 10, 0)$, $(\pm 10\sqrt{2}, 0)$, $y = \pm x$



23. $(4, -2)$, $(2, -2)$; $(3 \pm \sqrt{5}, -2)$; $y + 2 = \pm 2(x - 3)$



25. Parábola, $(0, -1)$, $(0, -\frac{3}{4})$

27. Elipse, $(\pm\sqrt{2}, 1)$, $(\pm 1, 1)$

29. Hipérbola, $(0, 1)$, $(0, -3)$; $(0, -1 \pm \sqrt{5})$

31. $y^2 = 4x$ **33.** $y^2 = -12(x + 1)$ **35.** $y - 3 = 2(x - 2)^2$

37. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{21} = 1$ **39.** $\dfrac{x^2}{12} + \dfrac{(y-4)^2}{16} = 1$

41. $\dfrac{(x+1)^2}{12} + \dfrac{(y-4)^2}{16} = 1$ **43.** $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

45. $\dfrac{(y-1)^2}{25} - \dfrac{(x+3)^2}{39} = 1$ **47.** $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{36} = 1$

49. $\dfrac{x^2}{3\,763\,600} + \dfrac{y^2}{3\,753\,196} = 1$

51. a) $\dfrac{121x^2}{1\,500\,625} - \dfrac{121y^2}{3\,339\,375} = 1$ b) ≈248 mi

55. a) Elipse b) Hipérbola c) No hay curva

59. 15.9

61. $\dfrac{b^2c}{a} + ab\ln\left(\dfrac{a}{b+c}\right)$ donde $c^2 = a^2 + b^2$

63. $(0, 4/\pi)$

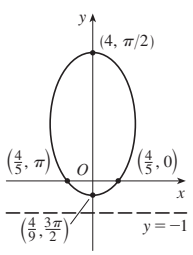
EJERCICIOS 10.6 ■ PÁGINA 684

1. $r = \dfrac{4}{2 + \cos\theta}$ **3.** $r = \dfrac{6}{2 + 3\,\operatorname{sen}\theta}$

5. $r = \dfrac{8}{1 - \operatorname{sen}\theta}$ **7.** $r = \dfrac{4}{2 + \cos\theta}$

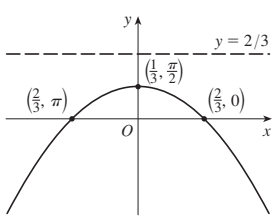
9. a) $\frac{4}{5}$ b) Elipse c) $y = -1$

d)



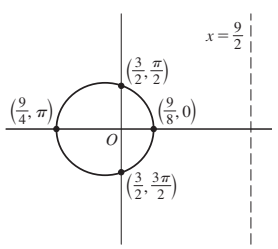
11. a) 1 b) Parábola c) $y = \frac{2}{3}$

d)



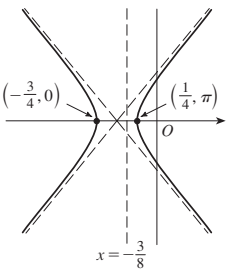
13. a) $\frac{1}{3}$ b) Elipse c) $x = \frac{9}{2}$

d)

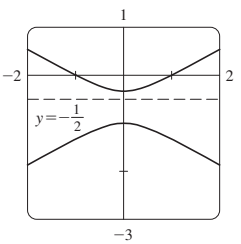


15. a) 2 b) Hipérbola c) $x = -\frac{3}{8}$

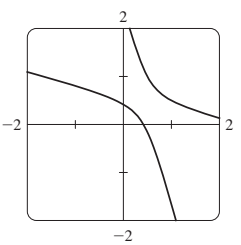
d)



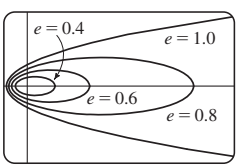
17. a) 2, $y = -\frac{1}{2}$



b) $r = \dfrac{1}{1 - 2\,\operatorname{sen}(\theta - 3\pi/4)}$



19. La elipse es parecida a la circunferencia cuando e está cerca de 0 y está más alargada cuando $e \to 1^-$. En $e = 1$, la curva es una parábola.



25. $r = \dfrac{2.26 \times 10^8}{1 + 0.093\cos\theta}$

27. 35.64 AU **29.** 7.0×10^7 km **31.** 3.6×10^8 km

REPASO DEL CAPÍTULO 10 ■ PÁGINA 685

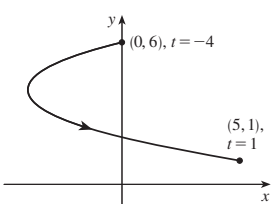
Examen rápido Verdadero-Falso

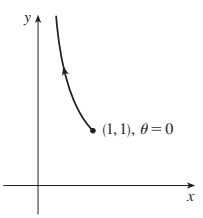
1. Falso **3.** Falso **5.** Verdadero **7.** Falso

9. Verdadero

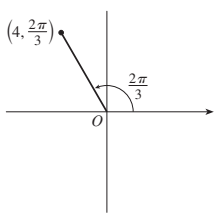
Ejercicios

1. $x = y^2 - 8y + 12$ **3.** $y = 1/x$



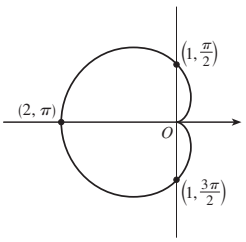


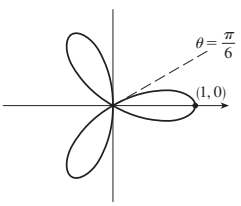
5. $x = t$, $y = \sqrt{t}$; $x = t^4$, $y = t^2$;
$x = \tan^2 t$, $y = \tan t$, $0 \leq t < \pi/2$

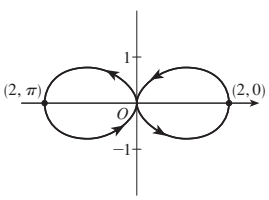
7. a) 

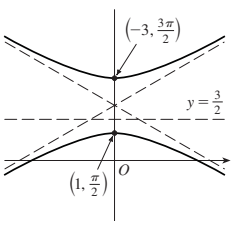
b) $(3\sqrt{2}, 3\pi/4)$, $(-3\sqrt{2}, 7\pi/4)$

$(-2, 2\sqrt{3})$

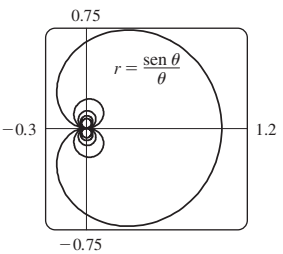
9. 

11. 

13. 

15. 

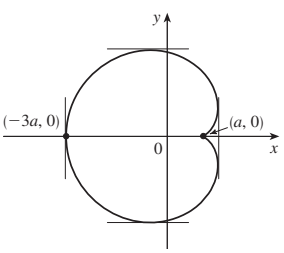
17. $r = \dfrac{2}{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}$

19. 

21. 2 **23.** −1

25. $\dfrac{1 + \operatorname{sen} t}{1 + \cos t}, \dfrac{1 + \cos t + \operatorname{sen} t}{(1 + \cos t)^3}$ **27.** $(\frac{11}{8}, \frac{3}{4})$

29. Tangente vertical en $(\frac{3}{2}a, \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}\,a)$, $(-3a, 0)$; tangente horizontal en $(a, 0)$, $(-\frac{1}{2}a, \pm\frac{3}{2}\sqrt{3}a)$



31. 18 **33.** $(2, \pm\pi/3)$ **35.** $\frac{1}{2}(\pi - 1)$

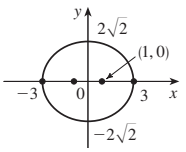
37. $2(5\sqrt{5} - 1)$

39. $\dfrac{2\sqrt{\pi^2 + 1} - \sqrt{4\pi^2 + 1}}{2\pi} + \ln\left(\dfrac{2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 1}}{\pi + \sqrt{\pi^2 + 1}}\right)$

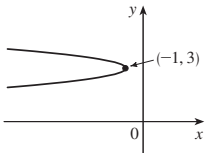
41. $471\,295\pi/1\,024$

43. Todas las curvas tienen la asíntota vertical $x = 1$. $C < -1$, abulta a la curva a la derecha. En $c = -1$, la curva es la recta $x = 1$. Para $-1 < c < 0$, abulta a la izquierda. En $c = 0$ hay una cúspide en (0, 0). $c > 0$, hay un bucle.

45. $(\pm1, 0)$, $(\pm3, 0)$



47. $(-\frac{25}{24}, 3)$, $(-1, 3)$

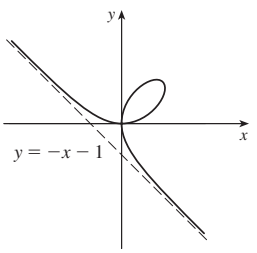


49. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ **51.** $\dfrac{y^2}{72/5} - \dfrac{x^2}{8/5} = 1$

53. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{(8y - 399)^2}{160\,801} = 1$ **55.** $r = \dfrac{4}{3 + \cos\theta}$

57. a) En (0, 0) y $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$

b) Tangente horizontal en (0, 0) y $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$; tangente vertical en (0, 0) y $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$

d) 

g) $\frac{3}{2}$

PROBLEMAS ADICIONALES ■ PÁGINA 688

1. $\ln(\pi/2)$ **3.** $\left[-\frac{3}{4}\sqrt{3}, \frac{3}{4}\sqrt{3}\right] \times [-1, 2]$

CAPÍTULO 11

EJERCICIOS 11.1 ■ PÁGINA 700

Abreviaciones: C, convergente; D, divergente

1. a) Una sucesión es una lista ordenada de números, mientras que una serie es la *suma* de una lista de números.

b) Los términos a_n tienden a 8 cuando n es grande.

c) Los términos a_n son grandes cuando n son grandes

3. $1, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{8}{17}, \frac{5}{13}$ **5.** $\frac{1}{5}, -\frac{1}{25}, \frac{1}{125}, -\frac{1}{625}, \frac{1}{3125}$ **7.** $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \frac{1}{720}$

9. 1, 2, 7, 32, 157 **11.** $2, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \frac{2}{9}$ **13.** $a_n = 1/(2n - 1)$

15. $a_n = -3(-\frac{2}{3})^{n-1}$ **17.** $a_n = (-1)^{n+1}\dfrac{n^2}{n + 1}$

19. 0.4286, 0.4615, 0.4737, 0.4800, 0.4839, 0.4865, 0.4884, 0.4898, 0.4909, 0.4918; sí; $\frac{1}{2}$

21. 0.5000, 1.2500, 0.8750, 1.0625, 0.9688, 1.0156, 0.9922, 1.0039, 0.9980, 1.0010; sí; 1

23. 1 **25.** 5 **27.** 1 **29.** 1 **31.** D **33.** 0

35. D **37.** 0 **39.** 0 **41.** 0 **43.** 0 **45.** 1

47. e^2 **49.** $\ln 2$ **51.** $\pi/2$ **53.** D **55.** D

57. 1 **59.** $\frac{1}{2}$ **61.** D **63.** 0

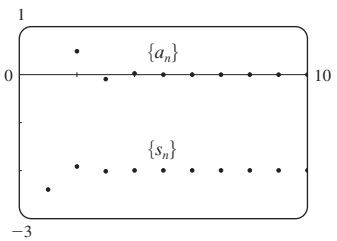
65. a) 1060, 1123.60, 1191.02, 1262.48, 1338.23 b) D

67. a) $P_n = 1.08P_{n-1} - 300$ b) 5734
69. $-1 < r < 1$
71. Converge por el teorema de las sucesiones monótonas; $5 \leq L < 8$
73. Decreciente; sí **75.** No monótona; no
77. Decreciente; sí
79. 2 **81.** $\frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$ **83.** b) $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$
85. a) 0 b) 9, 11

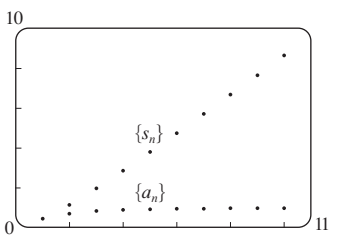
EJERCICIOS 11.2 ■ PÁGINA 711

1. a) Una sucesión es una lista ordenada de números, mientras que una serie es la suma de una lista de números.
b) Una serie es convergente si la sucesión de sumas parciales es una sucesión convergente. Una serie es divergente si es no convergente.
3. 2
5. 1, 1.125, 1.1620, 1.1777, 1.1857, 1.1903, 1.1932, 1.1952; C
7. 0.5, 1.3284, 2.4265, 3.7598, 5.3049, 7.0443, 8.9644, 11.0540; D

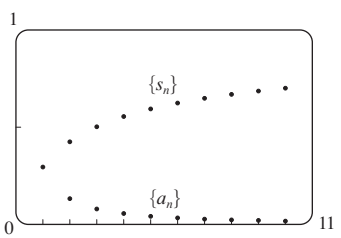
9. $-2.40000, -1.92000, -2.01600, -1.99680, -2.00064, -1.99987, -2.00003, -1.99999, -2.00000, -2.00000$; convergente , suma $= -2$



11. 0.44721, 1.15432, 1.98637, 2.88080, 3.80927, 4.75796, 5.71948, 6.68962, 7.66581, 8.64639; divergente



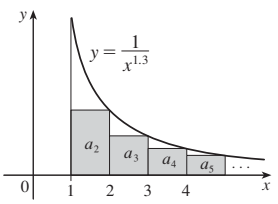
13. 0.29289, 0.42265, 0.50000, 0.55279, 0.59175, 0.62204, 0.64645, 0.66667, 0.68377, 0.69849; convergente , suma $= 1$



15. a) C b) D **17.** D **19.** $\frac{25}{3}$ **21.** 60 **23.** $\frac{1}{7}$
25. D **27.** D **29.** D **31.** $\frac{5}{2}$ **33.** D **35.** D
37. D **39.** D **41.** $e/(e-1)$ **43.** $\frac{3}{2}$ **45.** $\frac{11}{6}$ **47.** $e - 1$
49. b) 1 c) 2 d) todos los números racionales con terminación decimal representativa, excepto cero.
51. $\frac{8}{9}$ **53.** $\frac{838}{333}$ **55.** 5063/3300
57. $-\frac{1}{5} < x < \frac{1}{5}$; $\frac{-5x}{1+5x}$ **59.** $-1 < x < 5$; $\frac{3}{5-x}$
61. $x > 2$ or $x < -2$; $\frac{x}{x-2}$ **63.** $x < 0$; $\frac{1}{1-e^x}$
65. 1 **67.** $a_1 = 0$, $a_n = \frac{2}{n(n+1)}$ para $n > 1$, suma $= 1$
69. a) 157.875 mg; $\frac{3000}{19}(1 - 0.05^n)$ b) 157.895 mg
71. a) $S_n = \frac{D(1-c^n)}{1-c}$ b) 5 **73.** $\frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)$
77. $\frac{1}{n(n+1)}$ **79.** La serie es divergente
85. $\{s_n\}$ es acotada y decreciente.
87. a) $0, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, 1$
89. a) $\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{23}{24}, \frac{119}{120}, \frac{(n+1)! - 1}{(n+1)!}$ c) 1

EJERCICIOS 11.3 ■ PÁGINA 720

1. C



3. D **5.** C **7.** D **9.** C **11.** C **13.** D
15. C **17.** C **19.** C **21.** D **23.** C **25.** C
27. f no es positiva ni decreciente
29. $p > 1$ **31.** $p < -1$ **33.** $(1, \infty)$
35. a) $\frac{9}{10}\pi^4$ b) $\frac{1}{90}\pi^4 - \frac{17}{16}$
37. a) 1.54977, error ≤ 0.1 b) 1.64522, error ≤ 0.005
c) 1.64522 comparado con 1.64493 d) $n > 1000$
39. 0.00145 **45.** $b < 1/e$

EJERCICIOS 11.4 ■ PÁGINA 726

1. a) Nada b) C **3.** C **5.** D **7.** C **9.** D
11. C **13.** C **15.** D **17.** D **19.** D **21.** C
23. C **25.** D **27.** C **29.** C **31.** D
33. 1.249, error < 0.1 **35.** 0.0739, error $< 6.4 \times 10^{-8}$
45. Sí

EJERCICIOS 11.5 ■ PÁGINA 731

1. a) Una serie cuyos términos son alternadamente positivos y negativos b) $0 < b_{n+1} \leq b_n$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, donde $b_n = |a_n|$ c) $|R_n| \leq b_{n+1}$
3. C **5.** C **7.** D **9.** C **11.** C **13.** D **15.** C
17. C **19.** D **21.** -0.5507 **23.** 5 **25.** 4
27. -0.4597 **29.** 0.0676 **31.** Una subestimación
33. p no es un entero negativo **35.** $\{b_n\}$ es no decreciente

EJERCICIOS 11.6 PÁGINA 737

Abreviaciones: AC, absolutamente convergente; CC, condicionalmente convergente

1. a) D b) C c) puede ser convergente o divergente.
3. AC **5.** CC **7.** AC **9.** D **11.** AC **13.** AC
15. AC **17.** CC **19.** AC **21.** AC **23.** D **25.** AC
27. AC **29.** D **31.** D **33.** AC

35. a) y d)

39. a) $\frac{661}{960} \approx 0.68854$, error < 0.00521

b) $n \geqslant 11$, 0.693109

45. b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

EJERCICIOS 11.7 ■ PÁGINA 740

1. C **3.** D **5.** C **7.** D **9.** C **11.** C

13. C **15.** C **17.** C **19.** C **21.** D **23.** D

25. C **27.** C **29.** C **31.** D

33. C **35.** D **37.** C

EJERCICIOS 11.8 ■ PÁGINA 745

1. Una serie de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, donde x es una variable y a y Cn son las constantes.

3. 1, $(-1, 1)$ **5.** 1, $[-1, 1)$

7. ∞, $(-\infty, \infty)$ **9.** 2, $(-2, 2)$ **11.** $\frac{1}{3}$, $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$

13. 4, $(-4, 4]$ **15.** 1, $[1, 3]$ **17.** $\frac{1}{3}$, $\left[-\frac{13}{3}, -\frac{11}{3}\right)$

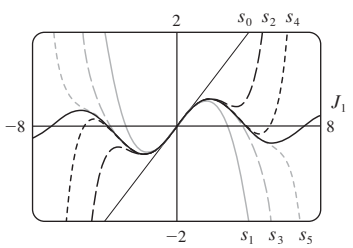
19. ∞, $(-\infty, \infty)$ **21.** b, $(a-b, a+b)$ **23.** 0, $\left\{\frac{1}{2}\right\}$

25. $\frac{1}{5}$, $\left[\frac{3}{5}, 1\right]$ **27.** ∞, $(-\infty, \infty)$ **29.** a) Sí b) No

31. k^k **33.** No

35. a) $(-\infty, \infty)$

b), c)



37. $(-1, 1), f(x) = (1+2x)/(1-x^2)$ **41.** 2

EJERCICIOS 11.9 ■ PÁGINA 751

1. 10 **3.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$, $(-1, 1)$ **5.** $2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} x^n$, $(-3, 3)$

7. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{9^{n+1}} x^{2n+1}$, $(-3, 3)$ **9.** $1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} x^n$, $(-1, 1)$

11. $\sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^{n+1} - \frac{1}{2^{n+1}}\right] x^n$, $(-1, 1)$

13. a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n$, $R = 1$

b) $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+2)(n+1) x^n$, $R = 1$

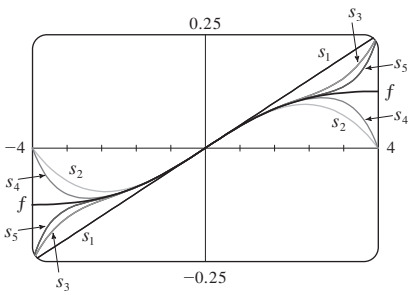
c) $\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n n(n-1) x^n$, $R = 1$

15. $\ln 5 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n5^n}$, $R = 5$

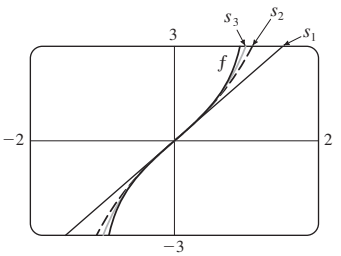
17. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n (n+1) x^{n+1}$, $R = \frac{1}{4}$

19. $\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) x^n$, $R = 1$

21. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{16^{n+1}} x^{2n+1}$, $R = 4$



23. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{2n+1}$, $R = 1$



25. $C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{8n+2}}{8n+2}$, $R = 1$

27. $C + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+3}}{n(n+3)}$, $R = 1$

29. 0.199989 **31.** 0.000983 **33.** 0.19740

35. b) 0.920 **39.** $[-1, 1]$, $[-1, 1)$, $(-1, 1)$

EJERCICIOS 11.10 ■ PÁGINA 765

1. $b_8 = f^{(8)}(5)/8!$ **3.** $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$, $R = 1$

5. $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$, $R = 1$

7. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, $R = \infty$

9. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n}{n!} x^n$, $R = \infty$ **11.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $R = \infty$

13. $-1 - 2(x-1) + 3(x-1)^2 + 4(x-1)^3 + (x-1)^4$, $R = \infty$

15. $\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n\,2^n} (x-2)^n$, $R = 2$

17. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n e^6}{n!} (x-3)^n$, $R = \infty$

19. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n)!} (x-\pi)^{2n}$, $R = \infty$

25. $1 - \frac{1}{4}x - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (4n-5)}{4^n \cdot n!} x^n$, $R = 1$

27. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)}{2^{n+4}} x^n$, $R = 2$

29. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, $R = \infty$

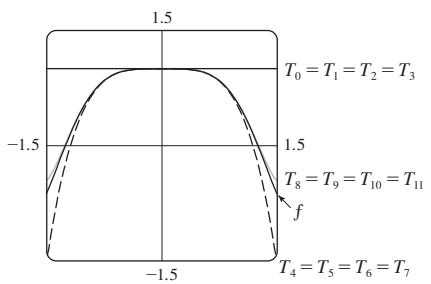
31. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 1}{n!} x^n$, $R = \infty$

33. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{2n}(2n)!} x^{4n+1}$, $R = \infty$

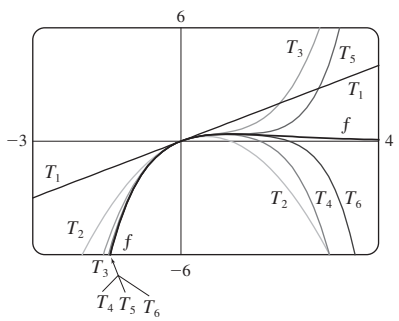
35. $\frac{1}{2}x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{n!\, 2^{3n+1}} x^{2n+1}$, $R = 2$

37. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}$, $R = \infty$

39. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{4n}$, $R = \infty$



41. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} x^n$, $R = \infty$



43. 0.99619

45. a) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2^n n!} x^{2n}$

b) $x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{(2n+1)2^n n!} x^{2n+1}$

47. $C + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{6n+2}}{(6n+2)(2n)!}$, $R = \infty$

49. $C + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n\,(2n)!} x^{2n}$, $R = \infty$

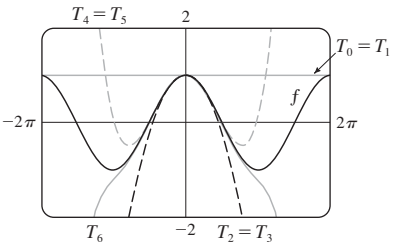
51. 0.0059 **53.** 0.40102 **55.** $\frac{1}{2}$ **57.** $\frac{1}{120}$

59. $1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{25}{24}x^4$ **61.** $1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{360}x^4$ **63.** e^{-x^4}

65. $\ln \frac{8}{5}$ **67.** $1/\sqrt{2}$ **69.** $e^3 - 1$

EJERCICIOS 11.11 ■ PÁGINA 774

1. a) $T_0(x) = 1 = T_1(x)$, $T_2(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 = T_3(x)$,
$T_4(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 = T_5(x)$,
$T_6(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6$

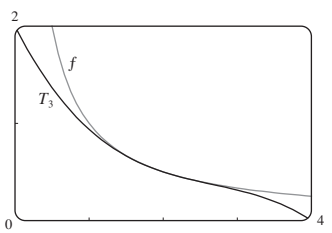


b)

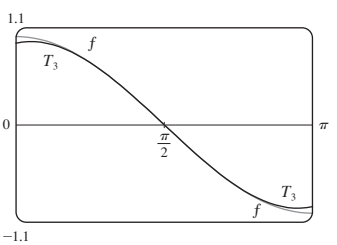
x	f	$T_0 = T_1$	$T_2 = T_3$	$T_4 = T_5$	T_6
$\frac{\pi}{4}$	0.7071	1	0.6916	0.7074	0.7071
$\frac{\pi}{2}$	0	1	−0.2337	0.0200	−0.0009
π	−1	1	−3.9348	0.1239	−1.2114

c) Cuando n crece, $T_n(x)$ es una buena aproximación a $f(x)$ sobre un gran intervalo.

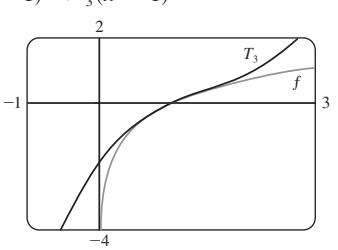
3. $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{8}(x-2)^2 - \frac{1}{16}(x-2)^3$



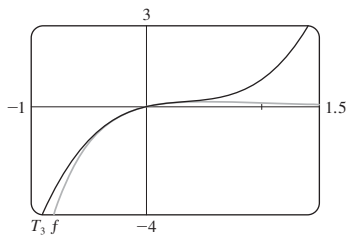
5. $-\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{6}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3$



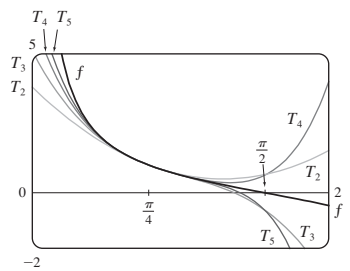
7. $(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3$



9. $x - 2x^2 + 2x^3$



11. $T_5(x) = 1 - 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{8}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{10}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4 - \frac{64}{15}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^5$



13. a) $2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2$ b) 1.5625×10^{-5}

15. a) $1 + \frac{2}{3}(x-1) - \frac{1}{9}(x-1)^2 + \frac{4}{81}(x-1)^3$ b) 0.000097

17. a) $1 + \frac{1}{2}x^2$ b) 0.0014

19. a) $1 + x^2$ b) 0.00006 **21.** a) $x^2 - \frac{1}{6}x^4$ b) 0.042

23. 0.17365 **25.** Cuatro **27.** $-1.037 < x < 1.037$

29. $-0.86 < x < 0.86$ **31.** 21 m, no

37. c) Difieren por cerca de 8×10^{-9} km.

REPASO DEL CAPÍTULO 11 ■ PÁGINA 778

Examen rápido Verdadero-Falso

1. Falso **3.** Verdadero **5.** Falso **7.** Falso **9.** Falso
11. Verdadero **13.** Verdadero **15.** Falso **17.** Verdadero
19. Verdadero **21.** Verdadero

Ejercicios

1. $\frac{1}{2}$ **3.** D **5.** 0 **7.** e^{12} **9.** 2 **11.** C **13.** C
15. D **17.** C **19.** C **21.** C **23.** CC **25.** AC

27. $\frac{1}{11}$ **29.** $\pi/4$ **31.** e^{-e} **35.** 0.9721

37. 0.18976224, error $< 6.4 \times 10^{-7}$

41. 4, $[-6, 2)$ **43.** 0.5, $[2.5, 3.5)$

45. $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{(2n)!}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^{2n} + \frac{\sqrt{3}}{(2n+1)!}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^{2n+1}\right]$

47. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{n+2}$, $R = 1$ **49.** $\ln 4 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n4^n}$, $R = 4$

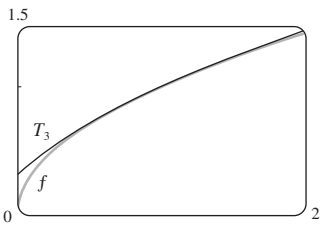
51. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{8n+4}}{(2n+1)!}$, $R = \infty$

53. $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \cdots \cdot (4n-3)}{n!\,2^{6n+1}}x^n$, $R = 16$

55. $C + \ln|x| + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n \cdot n!}$

57. a) $1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3$

b)



c) 0.000006

59. $-\frac{1}{6}$

PROBLEMAS ADICIONALES ■ PÁGINA 781

1. $15!/5! = 10\,897\,286\,400$

3. b) 0 si $x = 0$, $(1/x) - \cot x$ si $x \neq k\pi$, k es un entero

5. a) $s_n = 3 \cdot 4^n$, $l_n = 1/3^n$, $p_n = 4^n/3^{n-1}$ c) $\frac{2}{5}\sqrt{3}$

9. $(-1, 1)$, $\frac{x^3 + 4x^2 + x}{(1-x)^4}$

11. $\ln\frac{1}{2}$ **13.** a) $\frac{250}{101}\pi(e^{-(n-1)\pi/5} - e^{-n\pi/5})$ b) $\frac{250}{101}\pi$

19. $\frac{\pi}{2\sqrt{3}} - 1$

21. $-\left(\frac{\pi}{2} - \pi k\right)^2$ donde k es un entero positivo

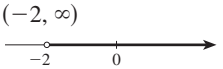
APÉNDICES

EJERCICIOS A ■ PÁGINA A9

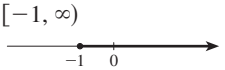
1. 18 **3.** π **5.** $5 - \sqrt{5}$ **7.** $2 - x$

9. $|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{para } x \geqslant -1 \\ -x-1 & \text{para } x < -1 \end{cases}$ **11.** $x^2 + 1$

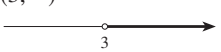
13. $(-2, \infty)$



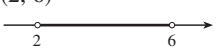
15. $[-1, \infty)$



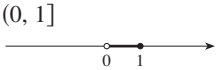
17. $(3, \infty)$



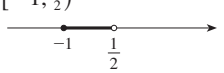
19. $(2, 6)$



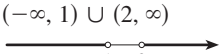
21. $(0, 1]$



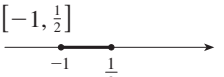
23. $[-1, \frac{1}{2})$



25. $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$



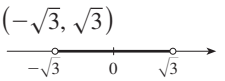
27. $[-1, \frac{1}{2}]$



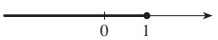
29. $(-\infty, \infty)$



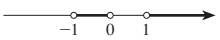
31. $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$



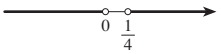
33. $(-\infty, 1]$



35. $(-1, 0) \cup (1, \infty)$



37. $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{4}, \infty\right)$

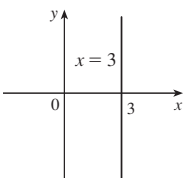


39. $10 \leqslant C \leqslant 35$ **41.** a) $T = 20 - 10h, 0 \leqslant h \leqslant 12$
b) $-30°\text{C} \leqslant T \leqslant 20°\text{C}$ **43.** $\pm\frac{3}{2}$ **45.** $2, -\frac{4}{3}$
47. $(-3, 3)$ **49.** $(3, 5)$ **51.** $(-\infty, -7] \cup [-3, \infty)$
53. $[1.3, 1.7]$ **55.** $[-4, -1] \cup [1, 4]$
57. $x \geqslant (a + b)c/(ab)$ **59.** $x > (c - b)/a$

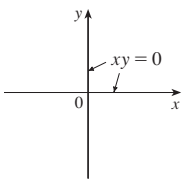
EJERCICIOS B ■ PÁGINA A15

1. 5 **3.** $\sqrt{74}$ **5.** $2\sqrt{37}$ **7.** 2 **9.** $-\frac{9}{2}$

17.

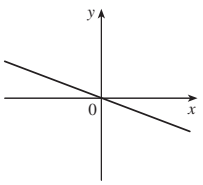


19.

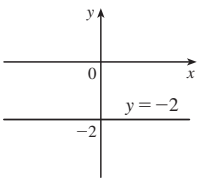


21. $y = 6x - 15$ **23.** $2x - 3y + 19 = 0$
25. $5x + y = 11$ **27.** $y = 3x - 2$ **29.** $y = 3x - 3$
31. $y = 5$ **33.** $x + 2y + 11 = 0$ **35.** $5x - 2y + 1 = 0$

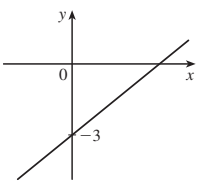
37. $m = -\frac{1}{3}, b = 0$



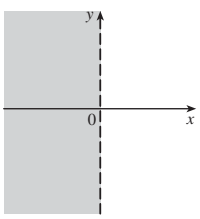
39. $m = 0, b = -2$



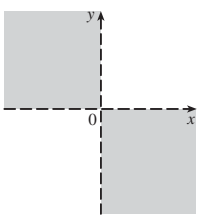
41. $m = \frac{3}{4}, b = -3$



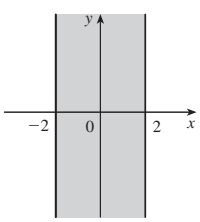
43.



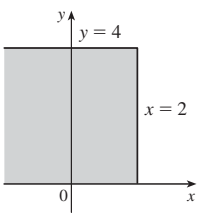
45.



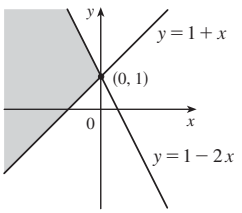
47.



49.



51.

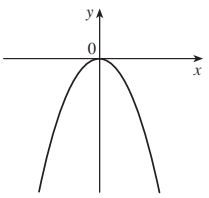


53. $(0, -4)$ **55.** a) $(4, 9)$ b) $(3.5, -3)$ **57.** $(1, -2)$
59. $y = x - 3$ **61.** b) $4x - 3y - 24 = 0$

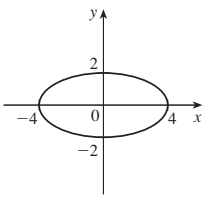
EJERCICIOS C ■ PÁGINA A23

1. $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 25$ **3.** $x^2 + y^2 = 65$
5. $(2, -5), 4$ **7.** $\left(-\frac{1}{2}, 0\right), \frac{1}{2}$ **9.** $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right), \sqrt{10}/4$

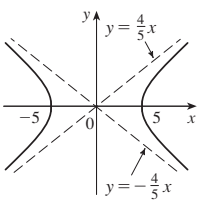
11. Parábola



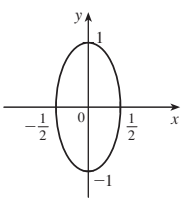
13. Elipse



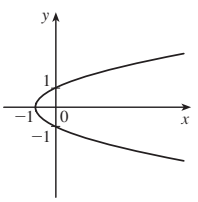
15. Hipérbola



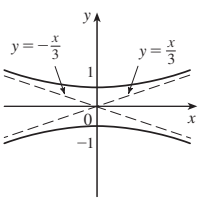
17. Elipse



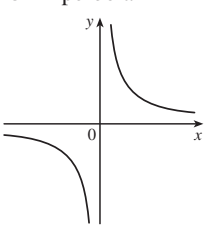
19. Parábola



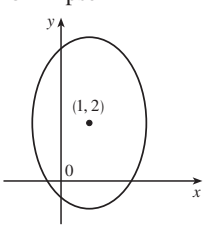
21. Hipérbola



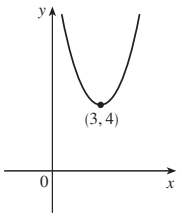
23. Hipérbola



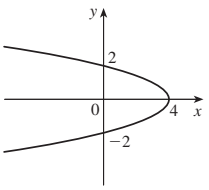
25. Elipse



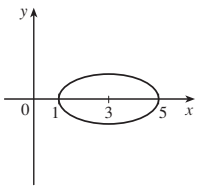
27. Parábola



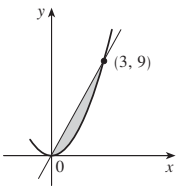
29. Parábola



31. Elipse

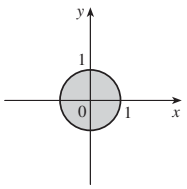


33.

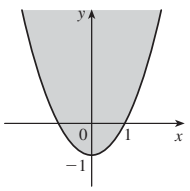


35. $y = x^2 - 2x$

37.



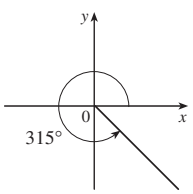
39.



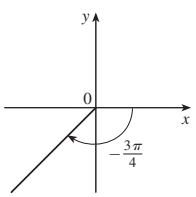
EJERCICIOS D ■ PÁGINA A32

1. $7\pi/6$ **3.** $\pi/20$ **5.** 5π **7.** $720°$ **9.** $75°$
11. $-67.5°$ **13.** 3π cm **15.** $\frac{2}{3}$ rad $= (120/\pi)°$

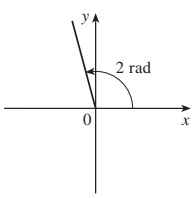
17.



19.



21.



23. $\operatorname{sen}(3\pi/4) = 1/\sqrt{2}$, $\cos(3\pi/4) = -1/\sqrt{2}$, $\tan(3\pi/4) = -1$, $\csc(3\pi/4) = \sqrt{2}$, $\sec(3\pi/4) = -\sqrt{2}$, $\cot(3\pi/4) = -1$

25. $\operatorname{sen}(9\pi/2) = 1$, $\cos(9\pi/2) = 0$, $\csc(9\pi/2) = 1$, $\cot(9\pi/2) = 0$, $\tan(9\pi/2)$ y $\sec(9\pi/2)$ indefinida

27. $\operatorname{sen}(5\pi/6) = \frac{1}{2}$, $\cos(5\pi/6) = -\sqrt{3}/2$, $\tan(5\pi/6) = -1/\sqrt{3}$, $\csc(5\pi/6) = 2$, $\sec(5\pi/6) = -2/\sqrt{3}$, $\cot(5\pi/6) = -\sqrt{3}$

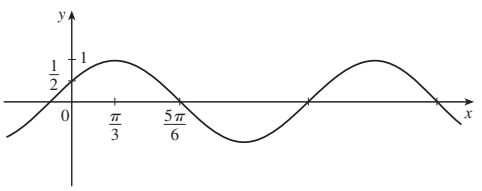
29. $\cos\theta = \frac{4}{5}$, $\tan\theta = \frac{3}{4}$, $\csc\theta = \frac{5}{3}$, $\sec\theta = \frac{5}{4}$, $\cot\theta = \frac{4}{3}$

31. $\operatorname{sen}\phi = \sqrt{5}/3$, $\cos\phi = -\frac{2}{3}$, $\tan\phi = -\sqrt{5}/2$, $\csc\phi = 3/\sqrt{5}$, $\cot\phi = -2/\sqrt{5}$

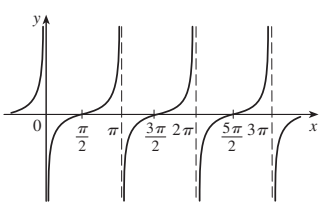
33. $\operatorname{sen}\beta = -1/\sqrt{10}$, $\cos\beta = -3/\sqrt{10}$, $\tan\beta = \frac{1}{3}$, $\csc\beta = -\sqrt{10}$, $\sec\beta = -\sqrt{10}/3$

35. 5.73576 cm **37.** 24.62147 cm **59.** $\frac{1}{15}(4 + 6\sqrt{2})$
61. $\frac{1}{15}(3 + 8\sqrt{2})$ **63.** $\frac{24}{25}$ **65.** $\pi/3, 5\pi/3$
67. $\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$ **69.** $\pi/6, \pi/2, 5\pi/6, 3\pi/2$
71. $0, \pi, 2\pi$ **73.** $0 \leq x \leq \pi/6$ y $5\pi/6 \leq x \leq 2\pi$
75. $0 \leq x < \pi/4$, $3\pi/4 < x < 5\pi/4$, $7\pi/4 < x \leq 2\pi$

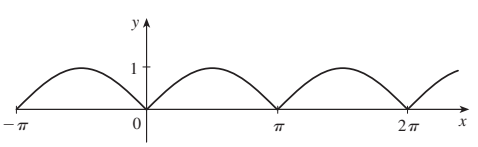
77.



79.



81.



89. 14.34457 cm^2

EJERCICIOS E ■ PÁGINA A38

1. $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5}$ **3.** $3^4 + 3^5 + 3^6$
5. $-1 + \frac{1}{3} + \frac{3}{5} + \frac{5}{7} + \frac{7}{9}$ **7.** $1^{10} + 2^{10} + 3^{10} + \cdots + n^{10}$
9. $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^{n-1}$ **11.** $\sum_{i=1}^{10} i$
13. $\sum_{i=1}^{19} \frac{i}{i+1}$ **15.** $\sum_{i=1}^{n} 2i$ **17.** $\sum_{i=0}^{5} 2^i$ **19.** $\sum_{i=1}^{n} x^i$
21. 80 **23.** 3276 **25.** 0 **27.** 61 **29.** $n(n + 1)$
31. $n(n^2 + 6n + 17)/3$ **33.** $n(n^2 + 6n + 11)/3$
35. $n(n^3 + 2n^2 - n - 10)/4$
41. a) n^4 b) $5^{100} - 1$ c) $\frac{97}{300}$ d) $a_n - a_0$
43. $\frac{1}{3}$ **45.** 14 **49.** $2^{n+1} + n^2 + n - 2$

EJERCICIOS G ■ PÁGINA A54

1. b) 0.405

EJERCICIOS H ■ PÁGINA A62

1. $8 - 4i$ **3.** $13 + 18i$ **5.** $12 - 7i$ **7.** $\frac{11}{13} + \frac{10}{13}i$

9. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ **11.** $-i$ **13.** $5i$ **15.** $12 + 5i$, 13

17. $4i$, 4 **19.** $\pm\frac{3}{2}i$ **21.** $-1 \pm 2i$

23. $-\frac{1}{2} \pm (\sqrt{7}/2)i$ **25.** $3\sqrt{2}\,[\cos(3\pi/4) + i\,\operatorname{sen}(3\pi/4)]$

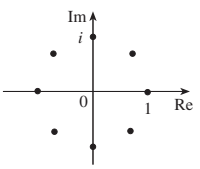
27. $5\{\cos[\tan^{-1}(\frac{4}{3})] + i\,\operatorname{sen}[\tan^{-1}(\frac{4}{3})]\}$

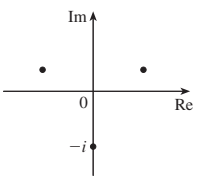
29. $4[\cos(\pi/2) + i\,\operatorname{sen}(\pi/2)]$, $\cos(-\pi/6) + i\,\operatorname{sen}(-\pi/6)$, $\frac{1}{2}[\cos(-\pi/6) + i\,\operatorname{sen}(-\pi/6)]$

31. $4\sqrt{2}\,[\cos(7\pi/12) + i\,\operatorname{sen}(7\pi/12)]$, $(2\sqrt{2})[\cos(13\pi/12) + i\,\operatorname{sen}(13\pi/12)]$, $\frac{1}{4}[\cos(\pi/6) + i\,\operatorname{sen}(\pi/6)]$

33. -1024 **35.** $-512\sqrt{3} + 512i$

37. $\pm 1, \pm i, (1/\sqrt{2})(\pm 1 \pm i)$ **39.** $\pm(\sqrt{3}/2) + \frac{1}{2}i, -i$





41. i **43.** $\frac{1}{2} + (\sqrt{3}/2)i$ **45.** $-e^2$

47. $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\,\operatorname{sen}^2\theta$, $\operatorname{sen} 3\theta = 3\cos^2\theta\,\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta$

Índice

PR denota número de página de referencia.

Abel, Niels, 212
absolutos, 274
aceleración, como una razón de cambio, 161, 224
adaptativa, integración numérica, 515
adición, fórmulas para el seno y coseno, A29
afelio, 683
Airy, función de, 746
Airy, Sir George, 746
algebraica, función, 30
alternantes armónicas, series, 729, 732
alternantes, series, 727
  armónicas, 729, 732
  prueba, 727
  teoría de estimación, 730
alternantes, prueba de series, 727
analítica, geometría, A10
ángulo doble, fórmulas de, A29
ángulo(s), A24
  de desviación, 283
  entre curvas, 271
  negativo o positivo, A25
  posición estándar, A25
antiderivada, 344
antiderivación, fórmulas, 345
apolonio, 677
apóstrofo, notación, 146, 177
aproximación,
  a *e,* 180
  cuadrática, 256
  error en el uso, 508
  lineal, 251
  polinomial de Taylor de *n*-ésimo grado, 257
  por cilindros, 432
  por diferenciales, 253
  por el método de Newton, 339
  por la desigualdad de Taylor, 756, 769
  por la regla de Simpson, 511, 513
  por la regla del punto medio, 378, 507
  por la regla del trapecio, 508
  por polinomiales de Taylor, 768
  por sumas de Riemann, 372
  por superficies, 546
  por tangente, regla, 251
aproximación, aterrizaje de un avión, 208
Aquiles y la tortuga, 5
  arco seno, función, 67
arcoíris, ángulo, 283
arcoíris, formación y ubicación de, 282
área, 2, 360
  bajo una curva, 360, 365, 371
  de un círculo, 480
  de un sector de un círculo, 665
  de una elipse, 479
  de una superficie de revolución, 545, 551
  de una superficie, 650
  encerrada por una curva paramétrica, 647
  en coordenadas polares, 654, 665
  entre curvas, 422, 423
  neta, 373
  por agotamiento, 2, 101
área, funciones, 385
área, problema del, 2, 360
argumento de un número complejo, A59
Arquímedes, 406
Arquímedes, principio de, 460, 113
asíntota(s), 311
  de una hipérbola, 674,
  en una gráfica, 311
  horizontal, 131, 311
  inclinación, 312, 315
  vertical, 94, 311
asintótica, curva, 318
astroide, 215, 645
autónoma, ecuación diferencial, 589

bacteria, crecimiento de, 605, 610
Barrow, Isaac, 3, 101, 153, 386, 406
base, de un cilindro, 430
base, de un logaritmo, 62, A55
  cambio de, 65
beisbol y cálculo, 455
Bernoulli, ecuación diferencial, 621
Bernoulli, James, 594, 621
Bernoulli, John, 303, 310, 594, 640, 754
Bessel, Friedrich, 742
Bessel, función, 217, 742, 746
Bézier, Pierre, 653
Bézier, curvas, 639, 653
binomiales, coeficientes, 760
  descubrimiento por Newton, 767
binomio, teorema, 175, PR1
Boyle, Ley, 235
braquistocrona, problema, 640
  ramas de una hipérbola, 674, A20
Buffon, problema aguja, 578

cable (colgante), 258
calculadora, graficadora, 44, 318, 638, 661. *Ver también* sistema algebraico computarizado
Cálculo, 8
  cancelación, ecuaciones
  diferencial, 3
  integral, 2, 3
  invención del, 8, 406
  para funciones inversas, 61
  para funciones trigonométricas inversas, 61, 67
  para logaritmos, 63
cambio de base, fórmula para, 65
cambio de variable(s)
  en integración, 407
Cantor, Georg, 713
Cantor, conjunto, 713
capacidad,
  de acarreo, 294
  de contención, 236
  de soporte, 581, 606, 607
capital, formación, 567

cardiaca, salida, 565
cardioide, 215, 658
carga, capacidad, 236, 294, 581, 607
carga, eléctrica, 227
cartesiano, plano, All
cartesiano, sistema de coordenadas, A11
Cassini, Giovanni, 665
catenaria, 258
Cauchy, Augustin-Louis, 113, A45
Cauchy, teorema del valor medio, A45
Cavalieri, 513
  principio de, 440
centro de gravedad. *Ver* centro de masa
centro de masa, 554
  de una placa, 557
centroide de una placa plana, 556
cicloide, 639
cilíndricas, capas, 441
cilindro, 430
cilindro circular, 430
cilindro recto, 430
cinética, energía, 455
circuito eléctrico, 593, 596, 619
círculo, área de, 480
circunferencia, ecuación de, A16
circunferencia gorda o gruesa, 213, 544
cisoide de Diocles, 644, 663
Clairaut, teorema de, A48
cociente, ley de los límites, 99
cociente, regla del, 187
coeficiente(s)
  binomial, 760
  de desigualdad, 429
  de fricción, 198, 281
  de una polinomial, 27
  de una serie de potencias, 741
combinaciones de funciones, 39
cometas, órbitas de, 684
comparación, propiedades de la integral, 381
comparación, prueba para las integrales impropias, 525
comparación, prueba para las series, 722
comparación, teorema para integrales, 525
complejo conjugado, A57
complejo exponencial, A63
complejo, número(s), A57
  adición y sustracción de, A57
  argumento de, A59
  división de, A57, A60
  igualdad de, A57
  imaginaria parte de, A57
  módulo de, A58
  multiplicación de, A57, A60
  polar, forma, A59
  potencias de, A61
  principal raíz cuadrada de, A58
  raíces de, A62
  real parte de, A57
completez, axioma de, 698
composición de funciones, 40, 199
  continuidad de, 125
  derivada de 200
compresibilidad, 228
compresión, teorema de, 105, A42
  para sucesiones, 694
compuesto, interés, 241, 309
concavidad, 293
concavidad, prueba de, 293, A44
concentración, 227
concoide, 641, 663
condicionalmente convergente, serie, 733
conjunto, notación, A3
cono, 670
  truncado, 439, 440
cónica, sección, 670, 678
  concoide, 675, A21
  directriz, 670, 678
  excentricidad, 678
  foco, 670, 672, 678
  polar, ecuación, 680
  vértice(s), 670
conjugado, propiedades de, A58
constante, fuerza, 446
constante, función, 174
constante, ley del límite del múltiplo, 99
constante, regla del múltiplo, 177
consumidor, excedente, 563, 564
continua, desarrollo en fracción, 702
continua, variable aleatoria, 568
continuidad,
  de una función, 118
  por la izquierda o derecha, 120
  sobre un intervalo, 120
continuamente, interés compuesto, 241, 309
convergencia,
  absoluta, 732
  condicional, 733
  de una integral impropia, 520, 523
  de una serie, 705
  de una sucesión, 692
  intervalo de, 743
  radio de, 743
convergente, integral impropia, 520, 523
  propiedades de, 709
coordenado, sistema, A2
  cartesiano,
  polares, 654
Cornu, espiral, 652
corriente eléctrica para un bulbo de flash, 83, 207
coseno, función, A26
  derivada de, 193
  gráfica de, 31, A31
  potencias para series, 758, 760
costo, función, 231, 330
crítico, número, 277
cuadrante, A11
cuadrática, aproximación, 256
cúbica, función, 27
corriente, 227
costo promedio, 334
crecimiento estacional, modelo, 615
crecimiento, ley natural de, 237, 606
crecimiento, tasa de, 229, 401
  relativa, 237, 606
cresta, 641
curvatura, 653
curva(s)
  asintótica, 318
  Bézier, 639, 653
  bruja de María Agnesi, 643
  caracoloide, 686
  catastrófica, cola de golondrina, 644
  cisoide de Diocles, 663
  Cornu espiral, 652
  de aprendizaje, 585
  del copo de nieve, 782
  del diablo, 215
  demanda, 563
  epicicloide, 645
  estrofoide, 669, 687
  guía para el trazado de, 311
  longitud de, 538
  nariz de bala, 51, 205
  nivel, 883
  ortogonal, 216
  óvalos de Cassini, 665
  paramétricas, 636
  polares, 656
  rosa de cuatro hojas, 658
  serpentina, 189
  suave, 538
  toroidal espiral, 843
  trocoide, 643
  Tschirnhausen, cúbica, 215, 428
curva, conexión de, 25
curva paramétrica, 636
  área bajo la, 647
  longitud de arco de, 648

De Moivre, Abraham, A61
De Moivre, teorema de, A61
  lineal, 226, 401

líquido, 553
masa *vs*. peso, 553
decaimiento, ley natural de, 237
decaimiento radiactivo, 239
decreciente, función, 19
decreciente, sucesión, 696
delta (Δ), notación, 147, 148
demanda, curva de, 331, 563
demanda, función de, 330, 563
dependiente, variable, 10
derivable, función, 157
derivación, 157
de una serie de potencias, 748
fórmulas para, 188, RP5
implícita, 209, 210
logarítmica, 220
término por término, 748
derivación, operador de, 157
dominio de, 154,203, A54, A55
inversa, 213, 214
notación, 157
por la izquierda, 165
por la derecha, 165
segunda, 160
superior, 160
tercera, 161
derivada(s), 143, 146, 154, 256
como la pendiente de una tangente, 143, 148
como una función, 154
como una razón de cambio, 143
de funciones exponenciales, 180,
de funciones hiperbólicas, 259
de funciones logarítmicas, 218, A51, A54
de una función inversa, 218
de una función compuesta, 199
de una función constante, 174
de una función potencia, 175
de una función trigonométrica, 191, 194
de una integral, 387
de una polinomial, 174
de un cociente, 187
de un producto, 184, 185
por la izquierda, 165
por la derecha, 165
superiores, 160
Descartes, René, All
descenso de un avión, determinación de despegue, 208
desigualdades, reglas, A4
desplazadas, cónicas, 675, A21
desplazamiento, 145, 401
entre puntos en un plano, All
entre reales, A7
desplazamiento de una función, 36
desviación estándar, 572
diferencia, ley de los límites, 99
diferencia, regla, 178
diferencial, 253
autónoma, 589
Bernoulli, 621
ecuación, 183, 237, 346, 579, 580, 582
familia de soluciones, 580, 583
lineal, 616
logística, 607, 703
orden de, 582
primer orden, 582
segundo orden, 582
separable, 594
solución de, 582
solución general de, 583
diferencias, cociente de, 12
dilución del colorante, método de, 565
direccional, campo, 585, 586
directriz, 670, 678
discontinua, 523
discontinua, función, 119
discontinuidad, 119, 120
discontinuidad de salto, 120
discontinuo, integrando, 523
dispersión, 283
distancia, números fórmula, Al2
distancia, problema, 367
divergencia,
de una integral impropia, 520, 523
de una serie infinita, 705
de una sucesión, 692
divergencia, prueba para, 709
divergente, impropia integral, 520, 523
divergente, sucesión, 692
división de series de potencias, 763
dominio, de una función, 10

e (el número), 55, 180, A52
como un límite, 222
como una suma de una serie infinita, 757
ecuación(es)
cancelación, 61
circunferencia, A17
depredador-presa, 622, 623
de una gráfica, A16, A17
de una recta, pendiente-intersección, Al3
diferencial, *(Ver* ecuación diferencial)
elipse, 672, 680, Al9
forma de dos intersecciones, A16
hipérbola, 67, 675, 680, A20
lineal, Al4
logística diferencial, 581, 615
logística en diferencias, 703
Lotka-Volterra, 623
n-ésimo grado, 212
orden de la ecuación diferencial, 582
parábola, 670, 680, A18
paramétrica, 636,
polar, 656, 680
punto-pendiente, Al2
recta, Al2, A13, A14, A16
segundo grado, A16
ecuación diferencial separable, 594
ejes de una elipse, Al9
ejes de una parábola, 670
elemento de un conjunto, A3
elipse, 215, 672, 678, A19
área, 479
directriz, 678
ecuación polar, 680, 683
eje mayor, 672, 683
eje menor, 672
excentricidad, 678
foco, 672, 678
propiedad de reflexión, 673
rotado, 217
vértices, 672
empírico, modelo, 25
energía cinética, 455
epicicloide, 645
epitrocoide, 652
equilibrio, punto, 624
equilibrio, solución, 581, 623
error,
en aproximación de Taylor, 769
en integración aproximada, 508, 509
porcentaje, 254
redondeo, 510, 514
relativo, 254
error, estimado
para la regla del punto medio, 508, 509
para la regla de Simpson, 514
para la regla del trapecio, 508, 509
para series alternantes, 730
error, función, 395
escalón, función, 17
estereografía estelar, 528
estimado de la suma de una serie, 718, 725, 730, 735
estiramiento de una función, 36
estrategia,

para la integración, 494, 495
para integrales trigonométricas, 473, 474
para probar series, 739
para problemas de optimización, 325, 326
para razones relacionadas, 246
estrofoide, 669, 687
Euclides, 101
Eudoxo, 2, 101, 406
Euler, fórmula de, A63
Euler, Leonhard, 55, 589, 715, 721, 757
Euler, método de, 589, 590
exponencial, crecimiento, 237, 610
exponencial, decaimiento, 237
exponencial, función(es), 32, 51, 179, PR4
con base *a,* A55
derivada, de 180, 203, A55
gráficas de, 52, 180
integración de, 377, 408, 762, 763
límites de, 135, A53
potencias para series, 755
propiedades de, A53
exponencial, gráfica, 52
exponentes, leyes de, 53, A53, A55
extrapolación, 26
extremo valor, 274
extremo, teorema del valor, 275

familia,
de curvas paramétricas, 640
de epicicloides e hipocicloides, 644
de funciones, 49, 322, 323
de funciones exponenciales, 52
de soluciones, 580, 583
Fermat, Pierre, 3, 153, 276, 406, A11
Fermat, principio de, 335
Fermat, teorema de, 276
Fibonacci, 691, 702
Fibonacci, sucesión, 691, 702
flechas, diagrama de, 11
flujo, 564, 565
flujo sanguíneo, 230, 336, 564
FM síntesis, 322
foco, 670, 672, 678
de una elipse, 672, 678
de una hipérbola, 673
de una parábola, 670
de una sección cónica, 678
folium de Descartes, 209, 687
Fourier, Joseph, 233
Fourier, serie finita, 478
fracciones (parcial), 484, 485
Fresnel, Augustin, 389
fuerza, 446
constante, 446
ejercida por un fluido, 552, 553
función(es), 10
Airy, 746
algebraica, 30
arco longitud de, 541
arcseno, 67
área, 385
Bessel, 217, 742, 746
combinaciones de, 39
como una máquina, 11
comportamiento final de, 142
compuesta, 40, 199
constante, 174
continuidad de, 118
costo, 230, 231
costo marginal, 148, 232, 330, 401
creciente, 19
cuadrática, 27
cúbica, 27
decreciente, 19
del ingreso, 331
demanda, 330, 563
derivabilidad de, 157
derivada de, 146
desplazamiento, 36
discontinua, 119
dominio de, 10
elemental, 498
elemental de integrabilidad 498
entero mayor, 105
error, 395
exponencial, 32, 51, 179
exponencial natural, 56
extendida, 36
extremos valores, de, 274
familia de, 49, 322, 323
Fresnel, 389
ganancia marginal, 331
Gompertz, 612, 615
gráfica de, 11
Heaviside, 44, 91
hiperbólica, 257
impar, 18, 311
implícita, 209, 210
ingreso, 331
ingreso marginal, 331
inversa(o), 58, 60
máximo y mínimo, valores, 274
no derivable, 159
par, 17, 311
paso, 17
periódica, 311
polinomial, 27
por tramos, definida, 16
posición, 145
potencia, 28, 174
probabilidad densidad, 568,
punto fijo de, 171, 289
racional, 30, 484
raíz, 29
rampa, 44
rango de, 10
recíproca, 30
reflejada, 36
representación como una serie de potencias, 746
representaciones de, 10, 12
representación visual de una función, 10, 12
seno integral, 396
suave, 538
tabular, 13
transformación de, 36
translación de, 36
trigonométrica, 31, A26
uno a uno, 59
valor absoluto de, 16
valor de, 10, 11
valor promedio de, 452, 570

G, (constante gravitacional), 234, 451
Gabriel, trompeta de, 550
Galileo, 640, 647, 670
Galois, Evariste, 212
Gause, G. F., 610
Gauss, Karl Friedrich, 1129, A35
Gauss, óptica de, 774
Gibbs, Joseph Willard, 797
Gini, coeficiente de, 429
Gini, Corrado, 429
Gini, índice, 429
Global, máximo y mínimo, 274
Gompertz, función, 612, 615
grado de una polinomial, 27
gráfica(s)
de dispersión, 13
de funciones exponenciales, 52, 180, PR4
de funciones logarítmicas, 63, 66
de funciones, potencias de, 29, PR3
de funciones trigonométricas, 31, A30, PR2
de una curva paramétrica, 636
de una ecuación, A16, A17
de una función, 11
de una sucesión, 695
polar, 656, 661

graficación con calculadora, 44, 318, 638, 661
graficación, dispositivos. *Ver* sistema algebraico computarizado
gravitación, ley de, 234, 451
gravitacional, aceleración, 446
Gregory, James, 199, 475, 513, 750, 754
  regla de la cadena, 198, 199, 201

Heaviside, función, 44, 91
Heaviside, Oliver, 91
Hecht, Eugene, 253, 256, 773
hidrostática, presión y fuerza, 552, 553
hipérbola, 215, 673, 678, A20
  asíntotas, 674, A20
  directriz, 678
  ecuación, 674, 675, 680, A20
  equilátera, A21
  excentricidad, 678
  foco, 673, 678
  polar, ecuación, 680
  ramas, 674, A20
  reflexión, propiedad, 678
  vértices, 674
hiperbólica, función(es), 257
  derivadas de, 259
  inversa, 260
  identidades, 258
  sustitución, 481, 482
hipocicloide, 644
Hooke, ley de, 447
horizontal, asíntota, 131, 311
horizontal, ecuación de una recta, A13
horizontal, plano, 787
horizontal, prueba de la recta, 59
Hubble, telescopio espacial, 279
Huygens, Christian, 640

i (número imaginario), A57
ideales, ley de los gases, 236
implícita, derivación, 209, 210
impropia, integral, 519
  convergencia o divergencia de, 520, 523
impulso de una fuerza, 455
incremento, 147, 921
independiente, variable, 10
indeterminada, diferencia, 305
indeterminadas, límites de formas, 301
indeterminadas, potencias, 306
indeterminado, producto, 305
índice, de una suma, A34
inducción matemática, 76, 79, 699
  principio de, 76, 79, A36
infinita, discontinuidad, 120
infinita, serie. *Ver* series
infinito, intervalo, 519, 520
infinito, límite, 93, 115, 136
inflexión, punto de, 294
inicial, condición, 583
inicial, punto
  de una curva paramétrica, 637
instantánea, razón de cambio, 85, 148, 224
instantáneo, razón de crecimiento, 229
instantánea, razón de reacción, 228
instantánea, velocidad, 85, 145, 224
integral(es)
  aproximaciones a, 378
  cambio de variables en, 407
  comparación, propiedades de, 381
  definida, 371
  derivada de, 388
  doble, (*Ver* integral doble)
  evaluación de, 374
  funciones simétricas, 412
  impropia, 519
  indefinida, 397
  intervalo cerrado, A3
  línea, (*Ver* integral de línea)
  método del, 278
  patrones en, 505
  por partes, 464, 466, 467
  por sustitución, 411
  propiedades de, 379
  prueba de la, 716
  sustitución, regla para, 411
  tabla de, 463, 495, 500, PR 6-10
  unidades para, 403
integral, cálculo, 2, 3
integración, 372
  aproximada, 506
  de funciones exponenciales, 377, 408
  de funciones racionales, 484
  de una serie de potencias, 748
  dónde sentarse en el cine, 456
  fórmulas, 463, 495, PR6-10
  indefinida, 397
  límites de, 372
  numérica, 506
  por fracciones parciales, 484
  por partes, 464, 465, 466
  por sustitución de una racionalización, 492
  por un sistema algebraico computarizado, 502
  sustitución en, 407
  tablas, uso de, 500
  término por término, 748
integrando, 372
intersecciones, 311, A19
interés compuesto continuamente, 241
intermedio, teorema del valor, 126
interpolación, 26
intersección,
  de conjuntos, A3
  de gráficas polares, área de, 666
intervalo, A3
intervalo abierto, A3
intervalo de convergencia, 743
inversa,
  coseno, 68
  hiperbólica, 260
  límite de función, 87, 109,
  lineal, 23
  logarítmica, 32, 62, A50, A55
  logarítmica natural, 64
  seno, 67
  tangente, 68
  trigonométrica, 67, 68
inversa, función seno, 67
inversa, función tangente, 68
inversa, función trigonométrica, 67, 68
inversos, ley de los cuadrados, 35
irracional, número, A2
isotérmica, compresibilidad, 228
joule, 446

Kepler, Johannes, 682
Kepler, leyes de, 682
Kirchhoff, leyes de, 587
Kondo, Shigeru, 757

L'Hospital, marqués de, 303, 310
L'Hospital, regla de, 302, 310, A45
  orígenes de, 310
Lagrange, Joseph Louis, 285, 286
lámina, 556,
lata, costo mínimo de fabricación, 337
Leibniz, Gottfried Wilhelm, 3, 157, 386, 406, 594, 767
Leibniz, notación, 157
lemniscata, 215
ley de la gravitación, 451
ley de los cosenos, A33
ley de suma de los límites, 99
ley del flujo laminar, 230, 564
ley del crecimiento o decaimiento, 237
leyes de los exponentes, 53
leyes de los logaritmos, 63
libra (unidad de fuerza), 446
libración, punto de, 343
limaçon, 662
límite(s), 2, 87
  al infinito, 130, 131, 136

cálculo de, 99
de un lado, 92, 113
de una función trigonométrica, 193
de una sucesión, 5, 362, 692
e (como número), 222
ecuación de, Al2, A13, A14
función, 87, 110
funciones exponenciales, 135
funciones logarítmicas, 95, A50
horizontal, A13
infinito, 93, 115, 136
integración, 372
involucran funciones seno y coseno, 191, 192, 193
límites, leyes de los, 99, A39
normal, 176
para sucesiones, 693
paralela, Al4
perpendicular, Al4
pendiente de, Al2
por la derecha, 92, 113
por la izquierda, 92, 113
precisas, definiciones, 108, 113, 116, 137, 140
propiedades, de, 99
recta(s) en el plano, 82, Al2
secante, 82, 83
tangente, 82, 83, 144
lineal, aproximación, 251
lineal, densidad, 226, 401
lineal, ecuación, Al4
lineal, ecuación diferencial, 616
lineal, función, 23
lineal, modelo, 23
lineal, regresión, 26
linealización, 251
líquido, fuerza en un, 552, 553
Lissajous, curva de, 638, 644
litotripsia, 673
locales, valores máximo y mínimo, 274
logarítmica, función(es), 32, 62
con base *a*, 62, A55
derivación, 220
derivadas de, 218, A55
gráficas de, 63, 66
límites de, 95, A52
notación para, 64
propiedades de, 63, 64, A51
logística, ecuación diferencial, 581, 607
logística, ecuación en diferencias, 703
logística, sucesión, 703
logístico, modelo, 581, 606
longitud de arco, 538
concurso, 545
de una curva paramétrica, 648
de una curva polar, 667
fórmula, 539
función, 541
longitud
de una curva, 538
de un segmento de recta, A7, Al2
de una curva paramétrica, 648
de una curva polar, 667
LORAN, sistema, 677
Lorenz, curva de, 429
Lotka-Volterra, ecuaciones, 623

Maclaurin, Colin, 754
Maclaurin, series de, 753, 754
potencias para, 754
tabla de, 762
máquina, diagrama de una función, 11
marginal, función de costo, 148, 232, 330, 401
marginal, función de ingreso, 331
marginal, propensión al consumo o al ahorro, 712
masa, centro de. *Ver* centro de masa
matemático, modelo. *Ver* modelo(s) matemático(s)
máximo y mínimo, valores, 274
media aritmética-geométrica, 702
media, de una función de densidad de probabilidad, 570
media, vida de un átomo, 528
mediana de una densidad de probabilidad, función de, 572
medio, esperado en el tiempo, 570
medio, teorema del valor, 284, 285
para integrales, 452
método de
agotamiento, 2, 101
cascarones cilíndricos para aproximar volúmenes, 441
discos para aproximar volúmenes, 432
mínimos cuadrados, 26
Washer, 434

mezclas, problemas de, 598
mínima, cota superior, 698
modelado, con ecuaciones diferenciales, 580
modelo(s), matemáticos, 13, 23
crecimiento estacional, 615
de corriente eléctrica, 587
depredador-presa, 622
empírico, 25
exponencial, 32, 54
función racional, 30
lineal, 23
logarítmico, 32
logístico, 610
para el crecimiento de una población, 237, 580, 612
para la vibración de una membrana, 742
polinomial, 28
potencia, función, 28
trigonométrico, 31, 32
Von Bertalanffy, 631
módulo, A58
momento,
alrededor de un eje, 555
de una lámina, 556
de una masa, 555
de un sistema de partículas, 556
momentum de un objeto, 455
monótona, sucesión, 696
monótona, teorema de una sucesión, 698
movimiento armónico simple, 206
movimiento de resorte, 582, 612, 630
múltiples, integrales. *Ver* doble integral; triple integral(es)
multiplicación de series de potencias, 763
multiplicador, efecto, 712

natural, función exponencial, 56, 180, A52
crecimiento natural, leyes de, 237, 606
derivada de, 180, A54
gráfica de, 180
propiedades de, A53
neto, flujo de inversión, 567
neto, teorema del cambio, 401
Newton, Sir Isaac, 3, 8, 101, 153, 157, 386, 406, 767
Newton (unidad de fuerza), 446
Newton, ley de la gravitación, 234, 451
Newton, ley del enfriamiento, 240, 585
Newton, método de, 338, 339
Newton, segunda ley del movimiento, 446, 455, 864, 868
Nicomedes, 641
normal, distribución, 572
normal, recta, 176
n-ésimo grado, ecuación de, encontrar raíces de, 212
n-ésimo grado de una polinomial de Taylor, 257, 755
número
complejo, A57
entero, A2

irracional, A2
racional, A2
real, A2
numérica, integración, 506
óptica,
de primer orden, 774
de tercer orden, 774
Gaussiana, 774

optimización, problemas, 274, 325
orden de una ecuación diferencial, 582
ordenado, par, A10
Oresme, Nicole, 708
origen, A2, A10
ortogonal, trayectoria, 216, 597
ortogonales, curvas, 216
óvalos, de Cassini, 665

Pappus, teorema de, 559
Pappus de Alejandría, 559
parábola, 670, 678, A18
directriz, 670
ecuación, 670, 671
ecuación polar, 680
ejes, 670
foco, 670, 678
propiedad de reflexión, 272
vértice, 670
paradojas de Zenón, 5
paralelas, rectas, A14
paralelepípedo, 430
parámetro, 636
paramétricas, ecuaciones, 636
paraxiales, rayos, 252
parcial, integración, 464, 465, 466
parcial, suma de una serie, 704
parciales, fracciones, 484, 485
partes, integración por, 464, 465, 466
pascal (unidad de presión), 553
patrones en integrales, 505
pendiente de la recta tangente, 645
péndulo, aproximación del periodo de, 252, 254, 256
perihelio, 683
perilunio, 677
periódica, función, 311
periodo, 311
perpendiculares, rectas, A14
fase, plano de, 624
fase, retrato de, 624
fase, trayectoria de, 624
peso (fuerza), 446
Planck, ley de, 777
plano(s),
leyes del, 682
población, crecimiento de, 54, 237, 605
de bacterias, 605, 610
de insectos, 494
modelos, 580
mundial, 54
Poiseuille, Jean-Louis-Marie, 230
Poiseuille, leyes de, 256, 336, 565
polar, curva, 656
arco, longitud de, 667
gráfica de, 656
simetría en, 659
tangente, recta, 659
polar, ecuación, gráfica de, 656
polar, ecuación de una cónica, 680
polar, forma de un número complejo, A59
polar, gráfica, 656
polar, área de región, 665
polares, ejes, 654
polares, sistema de coordenadas, 654
área en, 665
cónicas, secciones, 678
conversión para ecuaciones cartesianas
coordenadas, 655, 656
polinomial, 27
polinomial, función, 27
polo, 654
porcentaje, error, 254
posición estándar de un ángulo, A25
posición, función, 145
positivo, ángulo, A25
potencia, 150
aproximación de consumo, 403
coeficientes de, 741
derivada de, 174
división de, 763
función(es), 28
integración de, 748
intervalo de convergencia, 743
límites de una, 100
multiplicación de, 763
para el coseno y seno, 748, 758
para una función exponencial, 758
radio de convergencia, 743
regla de la, 175, 176, 201, 221
representaciones de funciones como, 747
potencial, 532
presión ejercida por un fluido, 552, 553
primer orden, diferencial ecuación lineal, 582, 616
primer orden, óptica, 774
primera derivada, prueba de la, 291
para valores extremos absolutos, 328
principal, raíz cuadrada de un número complejo, A58
principio de inducción matemática, 76,79, A36
principios para la resolución de problemas, 75
probabilidad, 568
probabilidad, función de densidad, 568
resolución de problemas, principios para la, 75
usos de, 170, 355, 407, 419
producto, fórmulas, A29
producto, leyes de los límites, 99
producto, regla del, 184, 185
productor, superávit, 566
promedio, función de costo, 334
promedio, rapidez de moléculas, 528
para valores extremos absolutos, 328
promedio, razón de cambio, 148, 224
promedio, valor de una función, 451, 452, 570
promedio, velocidad, 4, 84, 145, 224
proyectil, trayectoria de, 644
prueba C/D, 290
prueba, comparación, 722
prueba comparación, límite, 724
prueba de la, 291
prueba de la integral, 716
prueba para la divergencia, 709
prueba para las series convergentes y divergentes alternantes, 727
punto de inflexión, 294
punto fijo de una función, 171, 289
punto final, valor extremo, 275
punto medio, fórmula del, A16
punto medio, regla del, 378, 508
punto muestra, 365, 372
punto pendiente, ecuación de una recta, A12
punto reticulado, 272

racional, función, 30
racional, número, A2
racionalización, sustitución para la integración, 492
radián, medida, 191, A24
radiación, cuerpo negro, 777
radiación de las estrellas, 777
radiactivo, decaimiento, 239
vida media, 239
radio de convergencia, 743
radiocarbono, datación con, 243
raíces de un número complejo, A62

raíces de una ecuación de grado *n*, 212
raíz, función, 29
raíz, ley de los límites para, 101
raíz, prueba de la, 736
rampa, función, 44
rango de una función, 10
rapidez de una partícula, 148
Rayleigh-Jeans, ley de, 777
razón, prueba de la, 734
razón común, 705
razón de cambio
  continuidad de, 122
  derivada como, 148
  instantánea, 85, 148, 224
  integración de, 484
  promedio, 148, 224
  racional, función, 30, 485
  rapidez de reacción, 150, 228, 401
  razones relacionadas, 244
  tasa de crecimiento, 229, 401
reacción química, 227
reacomodo de una serie, 737
real, número, A2
real, recta, A3
recíproca, función, 30
recíproca, regla, 191
rectangular, sistema de coordenadas, A11
rectilíneo, movimiento, 347
reducción, fórmula de, 467
reflexión, propiedad
  de cónicas, 271
  de una elipse, 673
  de una hipérbola, 678
  de una parábola, 271, 272
reflexión de una función, 36
región
  bajo una gráfica, 360, 365
  entre dos gráficas, 422
regla de sustitución, 407, 408
  para integrales definidas, 411
regresión lineal, 26
relacionadas, razones, 244
relativa, tasa de crecimiento, 237, 606
relativo, error, 254
relativo, máximo o mínimo, 274
removible, discontinuidad, 120
representación(es) de una función, 10, 12, 13
  como una serie de potencias, 746
  ingreso, función de, 331
residuo, estimación del
  para la prueba de la integral, 718
  para una serie alternante, 730
residuo de la serie de Taylor, 755
resorte, constante de un, 447, 582
resumen de pruebas, 739
revolución, sólido de, 435
revolución, superficie de, 545
Riemann, Georg Bernhard, 372
Riemann, suma(s), 372
Roberval, Gilles de, 393, 647
Rolle, Michel, 284
  montaña rusa, diseño de, 184
Rolle, teorema de, 284
rumores, rapidez de divulgación, 233

secante, función, A26
  derivada de, 194
  gráfica de, A31
secante, recta, 3, 82, 83, 85
  segunda, derivada, 160
  segunda, derivada, prueba de, 295
sector de un círculo, área de, 665
segmento de recta dirigido, 791
semiángulo, fórmulas de, A29
seno, función, A26
  de una curva, 144
  derivada de, 193, 194
  gráfica de, 31, A31
  integral de, 396
  pendiente, Al2
  pendiente, campo de, 586
  potencias, series de, 758
serie *p*, 717
series, 6, 704
  absolutamente convergente, 732
  alternante, 727
  alternante armónica, 729, 732, 733
  armónica, 708, 717
  binomial, 760
  coeficientes de, 741
  condicionalmente convergente, 733
  convergente, 705
  divergente, 705
  estrategia para la prueba, 739
  geométrica, 705
  Gregory, de, 750
  infinita, 704
  Maclaurin, 753, 754
  p, 717
  potencias, 741
  reacomodo de, 737
  suma de, 6, 705
  sumas parciales de, 704
  Taylor, 753, 754
  término de, 704
  trigonométrica, 741
serpentina, 189
Sierpinski, carpeta de, 713
sigma, notación, 366, A34
simetría, 17, 311, 412
  en gráficas polares, 659
simétricas, funciones, integrales de, 412
simetría, principio de, 556
Simpson, Thomas, 512, 513
Simpson, regla de, 511, 513
  error, cota de, 514
sistema algebraico computarizado, 90, 502, 638
  para integración, 502, 751
  trampas, uso de, 90
sistema algebraico computarizado, graficando con, 44
  ecuaciones paramétricas, 638
  polar, curva, 661
  sucesión, 695
  una curva, 318
sistema liebre-lince, 626
Snell, ley de, 335
sólido, 430
  de revolución, 435
  volumen de, 430, 431
  rotación sobre una pendiente, 551
  volumen de, 437, 442, 551
solución, curva, 586
solución de ecuaciones depredador-presa, 623
solución de una ecuación diferencial, 582
suave, curva, 538
suave, función, 538
sucesión, 5, 690
  acotada, 697
  convergente, 692
  creciente, 696
  de sumas parciales, 704
  decreciente, 696
  divergente, 692
  Fibonacci, 691
  gráfica de, 695
  límite de, 5, 362, 692
  logística, 703
  monótona, 696
  término de, 690
sustitución directa, propiedad de, 101
sustracción, fórmulas para el seno y el coseno, A29
suma, 365
  de fracciones parciales, 485
  de Riemann, 372
  de una serie geométrica, 706
  de una serie infinita, 705
  telescópicas, 708
suma, regla para la, 177
  notación para la, A34

suministro, función, 566
superficie(s)
área de, 547
de revolución, 545
de una curva paramétrica, 650
tabla de fórmulas de derivación, 188, PR5
tablas de integrales, 495, RP6-10
uso de, 500
tabular, función, 13
tangente, función, A26
derivada de, 194
gráfica de, 32, A31
tangente, recta(s), 143
a una curva, 3, 82, 143
a una curva paramétrica, 645, 646
a una curva polar, 659
primeros métodos para encontrar, 153
vertical, 159
tangente, recta de aproximación, 251
tangente, problema de la, 2, 3, 82, 143
tautócrona, problema de la, 640
Taylor, Brook, 754
Taylor
aplicaciones de, 768
desigualdad de, 756
polinomio de, 257, 755
series de, 753, 754
técnicas de integración, resumen, 495
telescópica, suma, 708
teorema fundamental del cálculo, 386, 388, 393
tercer orden, óptica, 774
tercera derivada, 161
terminal, punto, de una curva paramétrica, 637
terminal, velocidad, 602
término de una serie, 704
término de una sucesión, 690
término por término, derivación e integración, 748
tirón, 161
Torricelli, Evangelista, 647
Torricelli, ley de, 234
toro, 440
total, tasa de fertilidad, 169
trabajo (fuerza), 446, 447
tramos, función definida por, 16
trapezoidal, regla, 508
error en, 508
traslación de una función, 36
triángulo, desigualdad de, 115, A8
trigonométricas, funciones, 31, A26
derivadas de, 191, 194
estrategia para la evaluación de, 473, 474
gráficas de, 31, 32, A30, A31
identidades, A28
integrales, 471
integrales de, 398, 471
inversas, 67
límites, que involucran, 192, 193
series, 741
sustituciones, 478
tabla de, 478
trocoide, 643

ultravioleta, catástrofe, 777
unión de conjuntos, A3

valor absoluto, 16, A6, A58
valor absoluto, función, 16
valor de una función, 10
valores iniciales, problema con, 583
valores máximo y mínimo
van der Waals, ecuación, 216
variable(s),
cambio de, 407
continua, aleatoria, 568
dependiente, 10
independiente, 10
variables, cambio de. *Ver* cambio de variable(s)
vascular, ramificación, 336, 337
velocidad, 3, 84, 145, 224, 401
de escape, 528
gradiente de, 231
instantánea, 85, 145, 224
problema de la, 84, 145
promedio, 4, 84, 145, 224
Verhulst, Pierre-Francois, 581
vertical
asíntota, 94, 311
prueba de la recta, 15
recta, Al3
recta tangente, 159
traslación de una gráfica, 36
vértices
de una elipse, 672
de una hipérbola, 674
de una parábola, 670
vista del rectángulo, 44
Volterra, Vito, 623
volumen, 431
de un sólido, 430
de un sólido de revolución, 435, 551
de un sólido sobre una inclinación, 551
por cascarones cilíndricos, 441
por discos, 432, 435
por secciones transversales, 430, 431, 565

Wallis, John, 3
Wallis, producto de, 470
Weierstrass, Karl, 493
Wren, Sir Christopher, 650

x, coordenada, A10
x, eje, A10
x, intersección con, A13, A19

y, coordenada, A10
y, eje, A10
y, intersección con, A13, A19

Zenón, 5
Zenón, paradojas de, 5
zonas esféricas, 577

ÁLGEBRA

Operaciones aritméticas

$$a(b + c) = ab + ac \qquad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$\frac{a + c}{b} = \frac{a}{b} + \frac{c}{b} \qquad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Exponentes y radicales

$$x^m x^n = x^{m+n} \qquad \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$$

$$(x^m)^n = x^{mn} \qquad x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

$$(xy)^n = x^n y^n \qquad \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$$

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x} \qquad x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$$

$$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y} \qquad \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$$

Factorización de polinomios notables

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

Teorema del binomio

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \qquad (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

$$(x + y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}y^2$$

$$+ \cdots + \binom{n}{k}x^{n-k}y^k + \cdots + nxy^{n-1} + y^n$$

donde $\binom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot k}$

Fórmula cuadrática

Si $ax^2 + bx + c = 0$, entonces $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Desigualdades y valor absoluto

Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.

Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ca < cb$.

Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ca > cb$.

Si $a > 0$, entonces

$|x| = a$ significa $x = a$ o $x = -a$

$|x| < a$ significa $-a < x < a$

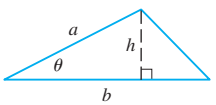
$|x| > a$ significa $x > a$ o $x < -a$

GEOMETRÍA

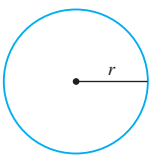
Fórmulas geométricas

Fórmulas para área A, circunferencia C y volumen V:

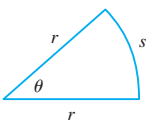
Triángulo
$A = \frac{1}{2}bh$
$= \frac{1}{2}ab \operatorname{sen}\theta$



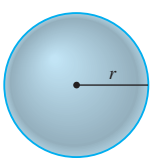
Círculo
$A = \pi r^2$
$C = 2\pi r$



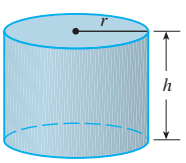
Sector de círculo
$A = \frac{1}{2}r^2\theta$
$s = r\theta$ (θ en radianes)



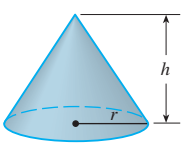
Esfera
$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
$A = 4\pi r^2$



Cilindro
$V = \pi r^2 h$



Cono
$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
$A = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$



Fórmulas de distancia y de punto medio

Distancia entre $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Punto medio de $\overline{P_1P_2}$: $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$

Rectas

Pendiente de la recta que pasa por $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ecuación de punto-pendiente de la recta que pasa por $P_1(x_1, y_1)$ con pendiente m:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Ecuación de intersección-pendiente de la recta con pendiente m e intersección b con el eje y:

$$y = mx + b$$

Círculos

Ecuación del círculo con centro (h, k) y radio r:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

TRIGONOMETRÍA

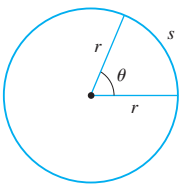
Medida de un ángulo

π radianes $= 180°$

$1° = \dfrac{\pi}{180}$ rad $\qquad 1 \text{ rad} = \dfrac{180°}{\pi}$

$s = r\theta$

(θ en radianes)

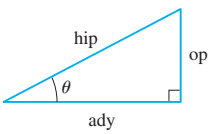


Trigonometría de ángulo recto

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} \qquad \csc\theta = \frac{\text{hip}}{\text{op}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hip}}{\text{ady}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{op}}{\text{ady}} \qquad \cot\theta = \frac{\text{ady}}{\text{op}}$$

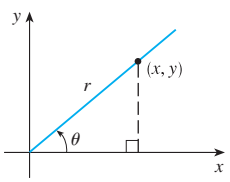


Funciones trigonométricas

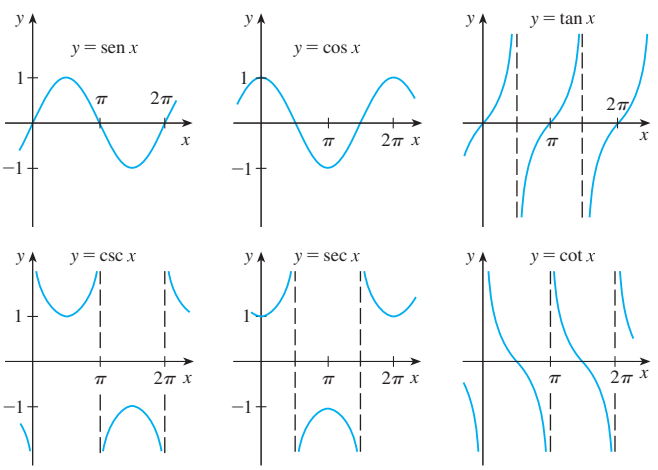
$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} \qquad \csc\theta = \frac{r}{y}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \sec\theta = \frac{r}{x}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \qquad \cot\theta = \frac{x}{y}$$



Gráficas de funciones trigonométricas



Funciones trigonométricas de ángulos importantes

θ	radianes	sen θ	cos θ	tan θ
0°	0	0	1	0
30°	$\pi/6$	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45°	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60°	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$
90°	$\pi/2$	1	0	—

Identidades fundamentales

$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} \qquad \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \qquad 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

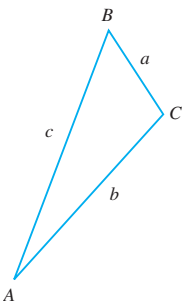
$$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta \qquad \cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \operatorname{sen}\theta \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$$

La ley de senos

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$$



La ley de cosenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

Fórmulas de adición y sustracción

$$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x\cos y + \cos x\operatorname{sen} y$$

$$\operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen} x\cos y - \cos x\operatorname{sen} y$$

$$\cos(x + y) = \cos x\cos y - \operatorname{sen} x\operatorname{sen} y$$

$$\cos(x - y) = \cos x\cos y + \operatorname{sen} x\operatorname{sen} y$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\tan y}$$

$$\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x\tan y}$$

Fórmulas de ángulo doble

$$\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x\cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$$

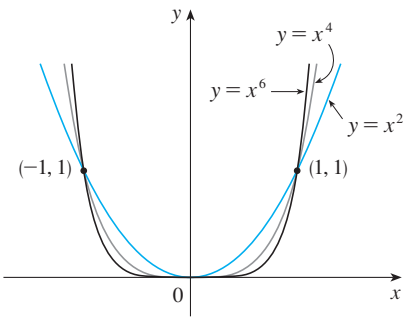
Fórmulas de semiángulo

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

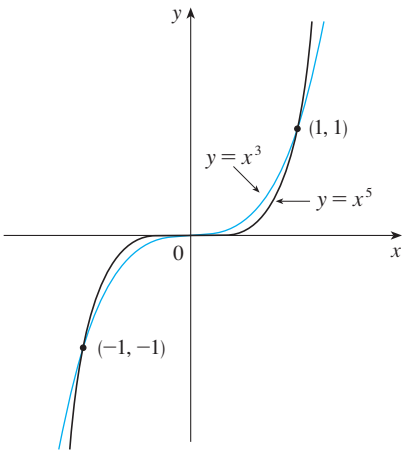
FUNCIONES ESPECIALES

Funciones de potencias $f(x) = x^a$

i) $f(x) = x^n$, n es entero positivo

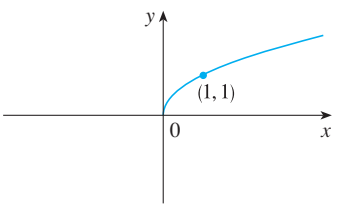


n par

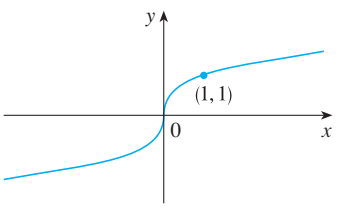


n impar

ii) $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$, n es entero positivo

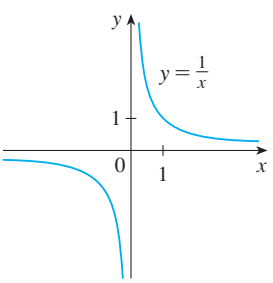


$f(x) = \sqrt{x}$



$f(x) = \sqrt[3]{x}$

iii) $f(x) = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$

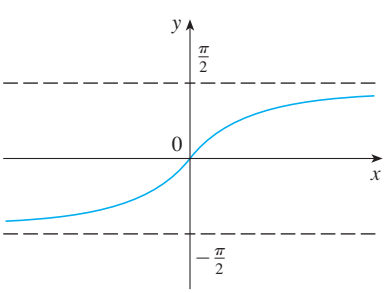


Funciones trigonométricas inversas

$\arcsen x = \operatorname{sen}^{-1} x = y \iff \operatorname{sen} y = x \quad \text{y} \quad -\dfrac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \dfrac{\pi}{2}$

$\arccos x = \cos^{-1} x = y \iff \cos y = x \quad \text{y} \quad 0 \leqslant y \leqslant \pi$

$\arctan x = \tan^{-1} x = y \iff \tan y = x \quad \text{y} \quad -\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$



$y = \tan^{-1} x = \arctan x$

$$\lim_{x \to -\infty} \tan^{-1} x = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to \infty} \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

FUNCIONES ESPECIALES

Funciones exponenciales y logarítmicas

$\log_a x = y \iff a^y = x$

$\ln x = \log_e x, \quad \text{donde} \quad \ln e = 1$

$\ln x = y \iff e^y = x$

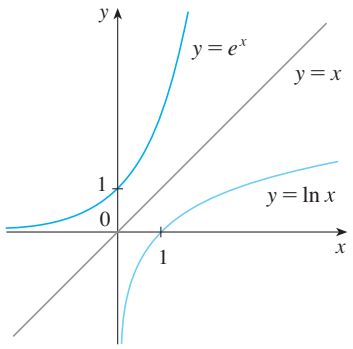
Ecuaciones de cancelación

$\log_a(a^x) = x \qquad a^{\log_a x} = x$

$\ln(e^x) = x \qquad e^{\ln x} = x$

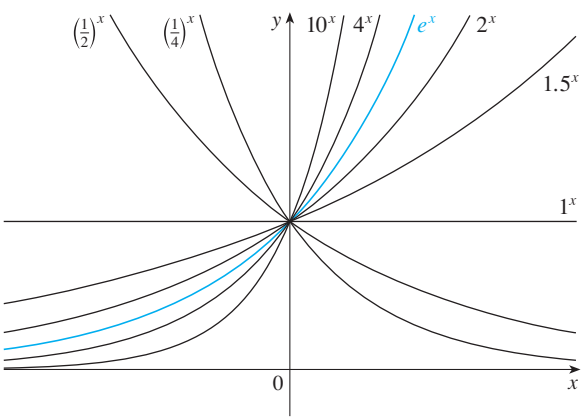
Leyes de los logaritmos

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
3. $\log_a(x^r) = r \log_a x$

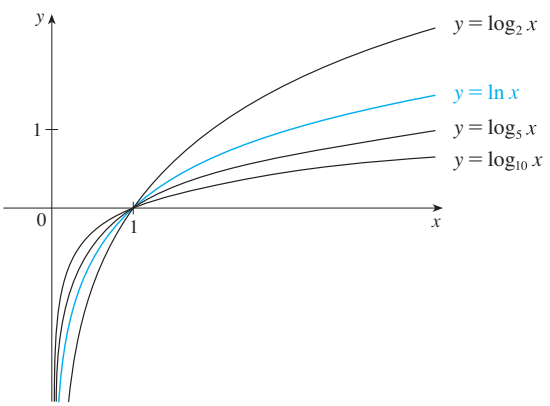


$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x \to \infty} e^x = \infty$

$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \qquad \lim_{x \to \infty} \ln x = \infty$



Funciones exponenciales



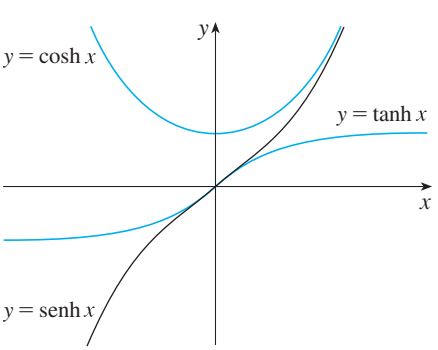
Funciones logarítmicas

Funciones hiperbólicas

$\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{csch} x = \dfrac{1}{\operatorname{senh} x}$

$\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x}$

$\tanh x = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} \qquad \coth x = \dfrac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}$



Funciones hiperbólicas inversas

$y = \operatorname{senh}^{-1} x \iff \operatorname{senh} y = x \qquad \operatorname{senh}^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$

$y = \cosh^{-1} x \iff \cosh y = x \quad \text{y} \quad y \geqslant 0 \qquad \cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$

$y = \tanh^{-1} x \iff \tanh y = x \qquad \tanh^{-1} x = \tfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right)$

REGLAS DE DIFERENCIACIÓN

Fórmulas generales

1. $\dfrac{d}{dx}(c) = 0$

2. $\dfrac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x)$

3. $\dfrac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$

4. $\dfrac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = f'(x) - g'(x)$

5. $\dfrac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$ (regla del producto)

6. $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$ (regla del cociente)

7. $\dfrac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$ (regla de la cadena)

8. $\dfrac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ (regla de potencias)

Funciones exponenciales y logarítmicas

9. $\dfrac{d}{dx}(e^x) = e^x$

10. $\dfrac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$

11. $\dfrac{d}{dx}\ln|x| = \dfrac{1}{x}$

12. $\dfrac{d}{dx}(\log_a x) = \dfrac{1}{x \ln a}$

Funciones trigonométricas

13. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$

14. $\dfrac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x$

15. $\dfrac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$

16. $\dfrac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$

17. $\dfrac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$

18. $\dfrac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$

Funciones trigonométricas inversas

19. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1}x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

20. $\dfrac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

21. $\dfrac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$

22. $\dfrac{d}{dx}(\csc^{-1}x) = -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

23. $\dfrac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

24. $\dfrac{d}{dx}(\cot^{-1}x) = -\dfrac{1}{1 + x^2}$

Funciones hiperbólicas

25. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \cosh x$

26. $\dfrac{d}{dx}(\cosh x) = \operatorname{senh} x$

27. $\dfrac{d}{dx}(\tanh x) = \operatorname{sech}^2 x$

28. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{csch} x) = -\operatorname{csch} x \coth x$

29. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \tanh x$

30. $\dfrac{d}{dx}(\coth x) = -\operatorname{csch}^2 x$

Funciones hiperbólicas inversas

31. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{senh}^{-1}x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$

32. $\dfrac{d}{dx}(\cosh^{-1}x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

33. $\dfrac{d}{dx}(\tanh^{-1}x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$

34. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{csch}^{-1}x) = -\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2 + 1}}$

35. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sech}^{-1}x) = -\dfrac{1}{x\sqrt{1 - x^2}}$

36. $\dfrac{d}{dx}(\coth^{-1}x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$

TABLA DE INTEGRALES

Formas básicas

1. $\int u\,dv = uv - \int v\,du$
2. $\int u^n\,du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$
3. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C$
4. $\int e^u\,du = e^u + C$
5. $\int a^u\,du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C$
6. $\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$
7. $\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$
8. $\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$
9. $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$
10. $\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$
11. $\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$
12. $\int \tan u\,du = \ln|\sec u| + C$
13. $\int \cot u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$
14. $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C$
15. $\int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u| + C$
16. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\dfrac{u}{a} + C, \quad a > 0$
17. $\int \dfrac{du}{a^2 + u^2} = \dfrac{1}{a}\tan^{-1}\dfrac{u}{a} + C$
18. $\int \dfrac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \dfrac{1}{a}\sec^{-1}\dfrac{u}{a} + C$
19. $\int \dfrac{du}{a^2 - u^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{u+a}{u-a}\right| + C$
20. $\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right| + C$

Formas que involucran $\sqrt{a^2 + u^2}$, $a > 0$

21. $\int \sqrt{a^2+u^2}\,du = \dfrac{u}{2}\sqrt{a^2+u^2} + \dfrac{a^2}{2}\ln\left(u + \sqrt{a^2+u^2}\right) + C$
22. $\int u^2\sqrt{a^2+u^2}\,du = \dfrac{u}{8}(a^2+2u^2)\sqrt{a^2+u^2} - \dfrac{a^4}{8}\ln\left(u + \sqrt{a^2+u^2}\right) + C$
23. $\int \dfrac{\sqrt{a^2+u^2}}{u}\,du = \sqrt{a^2+u^2} - a\ln\left|\dfrac{a + \sqrt{a^2+u^2}}{u}\right| + C$
24. $\int \dfrac{\sqrt{a^2+u^2}}{u^2}\,du = -\dfrac{\sqrt{a^2+u^2}}{u} + \ln\left(u + \sqrt{a^2+u^2}\right) + C$
25. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \ln\left(u + \sqrt{a^2+u^2}\right) + C$
26. $\int \dfrac{u^2\,du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \dfrac{u}{2}\sqrt{a^2+u^2} - \dfrac{a^2}{2}\ln\left(u + \sqrt{a^2+u^2}\right) + C$
27. $\int \dfrac{du}{u\sqrt{a^2+u^2}} = -\dfrac{1}{a}\ln\left|\dfrac{\sqrt{a^2+u^2}+a}{u}\right| + C$
28. $\int \dfrac{du}{u^2\sqrt{a^2+u^2}} = -\dfrac{\sqrt{a^2+u^2}}{a^2 u} + C$
29. $\int \dfrac{du}{(a^2+u^2)^{3/2}} = \dfrac{u}{a^2\sqrt{a^2+u^2}} + C$

TABLA DE INTEGRALES

Formas que involucran $\sqrt{a^2 - u^2}$, $a > 0$

30. $\displaystyle\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

31. $\displaystyle\int u^2\sqrt{a^2 - u^2}\, du = \frac{u}{8}(2u^2 - a^2)\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^4}{8}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

32. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u}\, du = \sqrt{a^2 - u^2} - a\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u}\right| + C$

33. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u^2}\, du = -\frac{1}{u}\sqrt{a^2 - u^2} - \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

34. $\displaystyle\int \frac{u^2\, du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

35. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u}\right| + C$

36. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a^2 u}\sqrt{a^2 - u^2} + C$

37. $\displaystyle\int (a^2 - u^2)^{3/2}\, du = -\frac{u}{8}(2u^2 - 5a^2)\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{3a^4}{8}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

38. $\displaystyle\int \frac{du}{(a^2 - u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2 - u^2}} + C$

Formas que involucran $\sqrt{u^2 - a^2}$, $a > 0$

39. $\displaystyle\int \sqrt{u^2 - a^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$

40. $\displaystyle\int u^2\sqrt{u^2 - a^2}\, du = \frac{u}{8}(2u^2 - a^2)\sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$

41. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u}\, du = \sqrt{u^2 - a^2} - a\cos^{-1}\frac{a}{|u|} + C$

42. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u^2}\, du = -\frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u} + \ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$

43. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$

44. $\displaystyle\int \frac{u^2\, du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 - a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$

45. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{a^2 u} + C$

46. $\displaystyle\int \frac{du}{(u^2 - a^2)^{3/2}} = -\frac{u}{a^2\sqrt{u^2 - a^2}} + C$

TABLA DE INTEGRALES

Formas que involucran $a + bu$

47. $\displaystyle\int \frac{u\,du}{a+bu} = \frac{1}{b^2}\left(a + bu - a\ln|a+bu|\right) + C$

48. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{a+bu} = \frac{1}{2b^3}\left[(a+bu)^2 - 4a(a+bu) + 2a^2\ln|a+bu|\right] + C$

49. $\displaystyle\int \frac{du}{u(a+bu)} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{u}{a+bu}\right| + C$

50. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2(a+bu)} = -\frac{1}{au} + \frac{b}{a^2}\ln\left|\frac{a+bu}{u}\right| + C$

51. $\displaystyle\int \frac{u\,du}{(a+bu)^2} = \frac{a}{b^2(a+bu)} + \frac{1}{b^2}\ln|a+bu| + C$

52. $\displaystyle\int \frac{du}{u(a+bu)^2} = \frac{1}{a(a+bu)} - \frac{1}{a^2}\ln\left|\frac{a+bu}{u}\right| + C$

53. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{(a+bu)^2} = \frac{1}{b^3}\left(a + bu - \frac{a^2}{a+bu} - 2a\ln|a+bu|\right) + C$

54. $\displaystyle\int u\sqrt{a+bu}\,du = \frac{2}{15b^2}(3bu - 2a)(a+bu)^{3/2} + C$

55. $\displaystyle\int \frac{u\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{3b^2}(bu - 2a)\sqrt{a+bu} + C$

56. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{15b^3}(8a^2 + 3b^2u^2 - 4abu)\sqrt{a+bu} + C$

57. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{\sqrt{a+bu}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bu}+\sqrt{a}}\right| + C, \quad \text{si } a > 0$

$$= \frac{2}{\sqrt{-a}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{a+bu}{-a}} + C, \qquad \text{si } a < 0$$

58. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u}\,du = 2\sqrt{a+bu} + a\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$

59. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u^2}\,du = -\frac{\sqrt{a+bu}}{u} + \frac{b}{2}\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$

60. $\displaystyle\int u^n\sqrt{a+bu}\,du = \frac{2}{b(2n+3)}\left[u^n(a+bu)^{3/2} - na\int u^{n-1}\sqrt{a+bu}\,du\right]$

61. $\displaystyle\int \frac{u^n\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2u^n\sqrt{a+bu}}{b(2n+1)} - \frac{2na}{b(2n+1)}\int \frac{u^{n-1}\,du}{\sqrt{a+bu}}$

62. $\displaystyle\int \frac{du}{u^n\sqrt{a+bu}} = -\frac{\sqrt{a+bu}}{a(n-1)u^{n-1}} - \frac{b(2n-3)}{2a(n-1)}\int \frac{du}{u^{n-1}\sqrt{a+bu}}$

TABLA DE INTEGRALES

Formas trigonométricas

63. $\int \operatorname{sen}^2 u\,du = \frac{1}{2}u - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + C$

64. $\int \cos^2 u\,du = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + C$

65. $\int \tan^2 u\,du = \tan u - u + C$

66. $\int \cot^2 u\,du = -\cot u - u + C$

67. $\int \operatorname{sen}^3 u\,du = -\frac{1}{3}(2 + \operatorname{sen}^2 u)\cos u + C$

68. $\int \cos^3 u\,du = \frac{1}{3}(2 + \cos^2 u)\operatorname{sen} u + C$

69. $\int \tan^3 u\,du = \frac{1}{2}\tan^2 u + \ln|\cos u| + C$

70. $\int \cot^3 u\,du = -\frac{1}{2}\cot^2 u - \ln|\operatorname{sen} u| + C$

71. $\int \sec^3 u\,du = \frac{1}{2}\sec u \tan u + \frac{1}{2}\ln|\sec u + \tan u| + C$

72. $\int \csc^3 u\,du = -\frac{1}{2}\csc u \cot u + \frac{1}{2}\ln|\csc u - \cot u| + C$

73. $\int \operatorname{sen}^n u\,du = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1} u \cos u + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} u\,du$

74. $\int \cos^n u\,du = \frac{1}{n}\cos^{n-1} u \operatorname{sen} u + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} u\,du$

75. $\int \tan^n u\,du = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} u - \int \tan^{n-2} u\,du$

76. $\int \cot^n u\,du = \frac{-1}{n-1}\cot^{n-1} u - \int \cot^{n-2} u\,du$

77. $\int \sec^n u\,du = \frac{1}{n-1}\tan u \sec^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} u\,du$

78. $\int \csc^n u\,du = \frac{-1}{n-1}\cot u \csc^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2} u\,du$

79. $\int \operatorname{sen} au \operatorname{sen} bu\,du = \frac{\operatorname{sen}(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\operatorname{sen}(a+b)u}{2(a+b)} + C$

80. $\int \cos au \cos bu\,du = \frac{\operatorname{sen}(a-b)u}{2(a-b)} + \frac{\operatorname{sen}(a+b)u}{2(a+b)} + C$

81. $\int \operatorname{sen} au \cos bu\,du = -\frac{\cos(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)u}{2(a+b)} + C$

82. $\int u \operatorname{sen} u\,du = \operatorname{sen} u - u\cos u + C$

83. $\int u \cos u\,du = \cos u + u \operatorname{sen} u + C$

84. $\int u^n \operatorname{sen} u\,du = -u^n \cos u + n\int u^{n-1}\cos u\,du$

85. $\int u^n \cos u\,du = u^n \operatorname{sen} u - n\int u^{n-1}\operatorname{sen} u\,du$

86. $\int \operatorname{sen}^n u \cos^m u\,du = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} u \cos^{m+1} u}{n+m} + \frac{n-1}{n+m}\int \operatorname{sen}^{n-2} u \cos^m u\,du$

$= \frac{\operatorname{sen}^{n+1} u \cos^{m-1} u}{n+m} + \frac{m-1}{n+m}\int \operatorname{sen}^n u \cos^{m-2} u\,du$

Formas trigonométricas inversas

87. $\int \operatorname{sen}^{-1} u\,du = u \operatorname{sen}^{-1} u + \sqrt{1-u^2} + C$

88. $\int \cos^{-1} u\,du = u\cos^{-1} u - \sqrt{1-u^2} + C$

89. $\int \tan^{-1} u\,du = u\tan^{-1} u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) + C$

90. $\int u \operatorname{sen}^{-1} u\,du = \frac{2u^2-1}{4}\operatorname{sen}^{-1} u + \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$

91. $\int u\cos^{-1} u\,du = \frac{2u^2-1}{4}\cos^{-1} u - \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$

92. $\int u\tan^{-1} u\,du = \frac{u^2+1}{2}\tan^{-1} u - \frac{u}{2} + C$

93. $\int u^n \operatorname{sen}^{-1} u\,du = \frac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\operatorname{sen}^{-1} u - \int \frac{u^{n+1}\,du}{\sqrt{1-u^2}}\right], \quad n \neq -1$

94. $\int u^n \cos^{-1} u\,du = \frac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\cos^{-1} u + \int \frac{u^{n+1}\,du}{\sqrt{1-u^2}}\right], \quad n \neq -1$

95. $\int u^n \tan^{-1} u\,du = \frac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\tan^{-1} u - \int \frac{u^{n+1}\,du}{1+u^2}\right], \quad n \neq -1$

TABLA DE INTEGRALES

Formas exponenciales y logarítmicas

96. $\int ue^{au}\,du = \frac{1}{a^2}(au-1)e^{au} + C$

97. $\int u^n e^{au}\,du = \frac{1}{a}u^n e^{au} - \frac{n}{a}\int u^{n-1}e^{au}\,du$

98. $\int e^{au}\,\text{sen}\,bu\,du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2}(a\,\text{sen}\,bu - b\cos bu) + C$

99. $\int e^{au}\cos bu\,du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2}(a\cos bu + b\,\text{sen}\,bu) + C$

100. $\int \ln u\,du = u\ln u - u + C$

101. $\int u^n \ln u\,du = \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2}[(n+1)\ln u - 1] + C$

102. $\int \frac{1}{u\ln u}\,du = \ln|\ln u| + C$

Formas hiperbólicas

103. $\int \text{senh}\,u\,du = \cosh u + C$

104. $\int \cosh u\,du = \text{senh}\,u + C$

105. $\int \tanh u\,du = \ln\cosh u + C$

106. $\int \coth u\,du = \ln|\text{senh}\,u| + C$

107. $\int \text{sech}\,u\,du = \tan^{-1}|\text{senh}\,u| + C$

108. $\int \text{csch}\,u\,du = \ln|\tanh\tfrac{1}{2}u| + C$

109. $\int \text{sech}^2 u\,du = \tanh u + C$

110. $\int \text{csch}^2 u\,du = -\coth u + C$

111. $\int \text{sech}\,u\tanh u\,du = -\text{sech}\,u + C$

112. $\int \text{csch}\,u\coth u\,du = -\text{csch}\,u + C$

Formas que involucran $\sqrt{2au-u^2}$, $a>0$

113. $\int \sqrt{2au-u^2}\,du = \frac{u-a}{2}\sqrt{2au-u^2} + \frac{a^2}{2}\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

114. $\int u\sqrt{2au-u^2}\,du = \frac{2u^2-au-3a^2}{6}\sqrt{2au-u^2} + \frac{a^3}{2}\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

115. $\int \frac{\sqrt{2au-u^2}}{u}\,du = \sqrt{2au-u^2} + a\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

116. $\int \frac{\sqrt{2au-u^2}}{u^2}\,du = -\frac{2\sqrt{2au-u^2}}{u} - \cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

117. $\int \frac{du}{\sqrt{2au-u^2}} = \cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

118. $\int \frac{u\,du}{\sqrt{2au-u^2}} = -\sqrt{2au-u^2} + a\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

119. $\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{2au-u^2}} = -\frac{(u+3a)}{2}\sqrt{2au-u^2} + \frac{3a^2}{2}\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

120. $\int \frac{du}{u\sqrt{2au-u^2}} = -\frac{\sqrt{2au-u^2}}{au} + C$

CÁLCULO de una variable, Trascendentes tempranas es ampliamente reconocido por su precisión matemática, claridad de la exposición y notables ejemplos y conjuntos de problemas. Millones de estudiantes en todo el mundo han estudiado el cálculo a través del estilo registrado de Stewart, mientras que los instructores han adoptado su planteamiento una y otra vez. En la séptima edición, Stewart continúa estableciendo el estándar para el curso al tiempo que añade contenido cuidadosamente revisado. Las pacientes explicaciones, los excelentes ejercicios centrados en la resolución de problemas y las series de ejercicios cuidadosamente graduadas que han hecho de los textos de Stewart *best sellers*, continúan proporcionando una base sólida para esta edición. Desde los estudiantes con menos preparación hasta los más talentosos matemáticos, la redacción y la presentación de Stewart les sirven para mejorar el entendimiento y fomentar la confianza.

Características

- Cuatro pruebas de diagnóstico cuidadosamente diseñadas en el álgebra, geometría analítica, funciones y trigonometría aparecen al principio del texto. Éstas proporcionan a los estudiantes una manera conveniente de poner a prueba su conocimiento previo y poner al día las técnicas y habilidades que necesitan para comenzar con éxito el curso. Las respuestas están incluidas y los estudiantes que necesiten mejorar se remiten a los puntos en el texto o en la página web del libro donde pueden buscar ayuda.
- Cada concepto se apoya en ejemplos resueltos con precisión, muchos de ellos con explicaciones paso a paso y ejercicios cuidadosamente seleccionados. La calidad de este sistema pedagógico es lo que distingue a los textos de Stewart de otros.
- Los ejemplos no son sólo modelos para resolver problemas o un medio para demostrar las técnicas, sino que los estudiantes también desarrollan una visión analítica del tema. Para proporcionar una mayor comprensión de los conceptos matemáticos, muchos de estos ejemplos detallados muestran soluciones que se presentan gráfica, analítica y/o de forma numérica. Las notas al margen amplían y aclaran los pasos de la solución.
- El tema de las ecuaciones diferenciales es unificado con el tema del modelaje. A los enfoques cualitativos, numéricos y analíticos se les da la misma consideración.
- Se han incrementado el número de problemas a la serie de ejercicios más difíciles de la sección "Problemas adicionales" al final de cada capítulo. Estas secciones refuerzan los conceptos que requieren los estudiantes para aplicar las técnicas de más de un capítulo del texto y la paciencia mostrada en la forma de abordar un problema difícil.

CENGAGE Learning™

http://latinoamerica.cengage.com

ISBN-13: 978-607481881-9
ISBN-10: 607481881-9

9 786074 818819